Feladatok:

Először a Wiener folyamat és a Brown bridge kapcsolatával foglalkozunk. Egy $W(t)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon olyan folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, amelyre $EW(t) = 0$, $EW(s)W(t) = \min(s,t)$, ha $0 \le s,t \le 1$, Egy $B(t)$, $0 \le t \le 1$, olyan folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, amelyre $EB(t) = 0$, $EB(s)B(t) = s(1-t)$, ha $0 \le s \le t \le 1$.

1.) Legyen $W(t)$ Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon, Egy $B(t)$ folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat, akkor és csak akkor Brown bridge, ha a véges dimenziós eloszlásai megegyeznek az alábbi $B_0(t)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásaival. $B_0(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \le t \le 1$. A $B_0(t)$ Brown bridge és a $W(1)$ valószínűségi változó független egymástól.

2.) Legyen $B(t)$, $0 \le t \le 1$, Brown bridge, és legyenek adva valamely $0 \le s \le u \le v \le 1$ számok. Mutassa meg, hogy $E[B(u) - B(s)][B(v) - B(s)] = (u-s)(1-v+s)$.

3.) Legyen adva egy $W(t)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat. Rögzítsünk valamely $0 \le s \le t \le 1$ számokat, és konstruáljuk meg a Wiener folyamat segítségével a következő $B_0(u)$, $s \le u \le t$, sztochasztikus folyamatot az $[s,t]$ intervallumon. $B_0(u) = [W(u) - W(s)] - \frac{u-s}{t-s}[W(t) - W(s)]$, $s \le u \le t$. Ez tekinthető egy átskálázott Brown bridge-nek a következő értelemben. A $B(u) = (t-s)^{-1/2}B_0(s + u(t-s))$, $0 \le u \le 1$, sztochasztikus folyamat Brown bridge. Továbbá, a $B_0(u)$, $s \le u \le t$, sztochasztikus folyamat és a $W(t) - W(s)$ valószínűségi változó függetlenek.

Megjegyzés. A konstruált $B(t)$ sztochasztikus folyamat folytonos trajektóriájú Gauss folyamat nulla várható értékkel. Ahhoz, hogy belássuk, hogy Brown bridge elég megmutatni, hogy $EB(u)B(v) = u(1-v)$, ha $0 \le u \le v \le 1$.

4.) Bizonyítsuk be a "Néhány alapvető eredmény a ξ^2 statisztikáról" című ismertetés 3. feladatának eredményét a Cochran–Fisher tétel segítségével. A bizonyításban azt mutassuk meg először, hogy a $X_1, \dots, X_k$ valószínűségi változók által meghatározott $X_1^2 + \cdots + X_k^2 - (\sqrt{p_1}X_1 + \cdots + \sqrt{p_k}X_k)^2$ kvadratikus alakhoz, ahol a p_j együtthatókra $\sum_{j=1}^k p_j = 1$, olyan $(p_{i,j})$, $1 \le i,j \le k$, szimmetrikus mátrix tartozik, amelynek elemeit a $p_{i,i} = 1 - p_i$, $p_{i,j} = -\sqrt{p_i p_j}$, ha $i \ne j$, $1 \le i,j \le k$, képlet adja meg $1 \le j \le k$, konstansokkal, és egy ilyen mátrix rangja legfeljebb $k-1$. (Azt kell észrevenni, hogy ha az i-edik sort beszorzom $\sqrt{p_i}$-vel, akkor az így kapott sorok összege nulla.)

Ismeretes az eloszlásban való konvergencia következő jellemzése. Tekintsünk az egyszerűség kedvéért csak értékeit az R^k Euklideszi téren felvevő valószínűségi változókat. Vegyük ξ_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, valószínűségi változók egy sorozatát. A ξ_n, $n = 1, 2, , \dots$, sorozat akkor és csak akkor konvergál eloszlásban a ξ_0 valószínűségi változóhoz, ha $Eg(\xi_n) \to Eg(\xi_0)$ minden (az R^k Euklideszi téren definiált) folytonos és korlátos $g(x)$ függvényre.

5.) Bizonyítsa be az eloszlásban való konvergencia fenti jellemzésének a segítségével azt, hogy ha ξ_n, $n = 1, 2, , \dots$, valószínűségi változók egy sorozata eloszlásban konvergál egy ξ_0 valószínűségi változóhoz, és $h(x)$ egy folytonos függvény (azon az R^k téren, ahol a ξ_n valószínűségi változók felveszik az értéküket), akkor a $h(\xi_n)$, $n = 1, 2, , \dots,$ valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál a $h(\xi_0)$ valószínűségi változóhoz.

6.. Legyen adva egy $(f_1(x), \dots, f_n(x))$ vektor értékű függveny (valós szám értékű koordinátákkal), ahol $x \in \mathcal{X}$ valamilyen $\mathcal{X}$ téren, és egy μ mérték az $\mathcal{X}$ téren. Definiáljuk az $A_{i,j} = \int f_i(x) f_j(x) \mu(\, dx$ koordinátákból a álló, $(A_{i,j})$, $1 \le i, j \le n$, $n \times n$ méretű mátrixot. Bizonyítsa be, hogy ez az $(A_{i,j})$, $1 \le i, j \le n$, mátrix pozitív szemidefinit. Bizonyítsa be ezen eredmény segítségével, hogy a többdmenziós Cramer–Rao egyenlőtlenségben szereplő Fisher-féle információ mátrix pozitív szemidefinit.

7.) Legyen egy normális eloszlású $(Z_1, \dots Z_k)$ vektor vérható érték vektora 0, kovariancia mátrixa $D = (D_{i,j})$, $1 \le i, j \le k$. Tekintsük a $Z = \sum_{i=1}^k a_i Z_i$ valószínűségi változót valamilyen $a_1, \dots a_k$ együtthatókkal. Mutassa meg, hogy Z normális eloszlású valószínűségi változó nulla várható értékkel, és $(a_1, \dots, a_k) D (a_1, \dots, a_k)^T$ szórásnégyzettel. Ha a $Z^{(n)} = (Z_1^{(n)}, \dots, Z_k^{(n)})$, $n = 1, 2, \dots$, véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak a Z véletlen vektorhoz, $n \to \infty$ esetén, akkor a $\sum_{i=1}^k Z_i^{(n)}$ valószínűségi változók eloszlásban kovergálnak a $\sum_{i=1}^k Z_i$ valószínűségi változóhoz $n \to \infty$ esetén.