Pénzügyi matematika

Ebben az írásban ismertetem a pénzügyi matematika előadásban használt legfontosabb fogalmakat és eredményeket. A diszkrét idejű pénzügyi folyamatokban szereplő fogalmak és eredmények ismertetésére fogok koncentrálni, mert ezzel nem találkoztak a hallgatók korábbi tanulmányaik során. Másrészt ezek ismerete hasznos akkor is, ha a folytonos idejű pénzügyi matematika eredményeivel ismerkednek. Az ismertetés alapjául Gáll József és Pap Gyula "Bevezetés a pénzügyi matematikába" című könyvének III. Opcióelmélet című fejezete szolgál. A diszkrét idejű pénzügyi fogalmak ismertetése után tárgyalom ezen fogalmak folytonos idejű megfelelőjét is. Az utóbbi fogalmak tárgyalása Kevei Péter "Pénzügyi folyamatok folytonos időben" című jegyzetéhez kapcsolódik.

Az első ismertetendő fogalmak a kötvény, a részvény, a stratégia, ezen belül az önfinanszírozó stratégia fogalma. A diszkrét idejű piacon bizonyos $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$ időpontokban történik üzletkötés, ahol N egy rögzített véges szám. Modellünkben szerepelnek kötvények, amelyeknek az értéke a t_n időpontban B_n, és részvények, amelyek értéke a t_n időpontban S_n, $0 \le n \le N$. A kötvények és részvények között az a különbség, hogy a kötvények ára determinisztikusan, míg a részvények ára véletlenszerűen változik. Igy a kötvény ára a $t_0 = 0$ időpontban B_0, míg a t_n, $1 \le n \le N$, időpontban a $B_n = (1 + r_n)B_{n-1}$ képlet adja meg a kötvény értékét. Az előző képletekben szereplő a B_0 és r_n, $1 \le n \le N$, számok ismertek, és nem függnek a véletlentől. A részvények S_n értéke a t_n, $0 \le n \le N$, időpontban a véletlentől függ. Pontosabban fogalmazva, van egy $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, azon σ-algebrák növekvő $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_N$ sorozata, (amit a jegyzet filtrációnak nevez) úgy, hogy S_n $\mathcal{F}_n$ mérhető minden $0 \le n \le N$ indexre. A t_n időpontban β_n darab kötvényünk és γ_n darab részvényünk van. Ezek összértéke $X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$. A β_n és γ_n számok lehetnek negatívak és nem egész értékűek is. Viszont mind a kötvények B_n mind a részvények S_n ára nem negatív, sőt $B_n > 0$, és S_n nem lehet azonosan nulla. Ez speciálisan azt jelenti, hogy a részvény véletlentől nem függő nulla időpontbeli S_0 értékére $S_0 > 0$.

A stratégia azt jelenti, hogy minden t_n, $0 \le n < N$, időpontban bizonyos számú kötvényt és részvényt veszünk vagy eladunk. Ha a t_{n-1} időpontban $\pi_{n-1} = (\beta_{n-1}, \gamma_{n-1})$ kötvény-részvény csomagunk volt, akkor a t_{n-1} időpontban történt vételek és vásárlások hatására a t_n időpontban $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ lesz a kötvény-részvény csomagunk. Az, hogy mennyi kötvényt és részvényt veszünk, az függhet a véletlentől, de amikor a t_{n-1} időpontban a vételek és vásárlások által eldöntjük hogy mi legyen a $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ kötvény-részvény csomagunk a t_n időpontban, akkor csak a t_{n-1} időpontban rendelkezésünkre álló információra támaszkodhatunk. Ez formálisan azt jelenti, hogy β_n és γ_n $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető valószínűségi változók minden $1 \le n \le N$ indexre. Ezen kívűl feltesszük azt is, hogy $\mathcal{F}_0$ a triviális σ-algebra, azaz $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, és β_0 és γ_0 $\mathcal{F}_0$ mérhető valószínűségi változók, ezért a véletlentől nem függő számok. Egy a fenti tulajdonságokat teljesitő β_n és γ_n véletlen számokat tartalmazó $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, $0 \le n \le N$, sorozatot nevezünk stratégiának. Akkor mondjuk, hogy egy stratégia önfinanszírozó, ha annak alkalmazása során kölcsönt sem nem veszünk, sem nem adunk, pontosan akkora összeget fordítunk részvények vételére, amekkora összeget a kötvények eladásával nyertünk. Képletben kifejezve

$$\beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}, \quad 1 \le n \le N.$$

A Gáll József, Pap Gyula könyv olyan pénzügyi modelleket vizsgál, amelyek teljesítenek néhány olyan további feltételt, amelyek egyszerűsítik a tekintett pénzügyi problémák vizsgálatát. A leglényegesebb feltétel az, hogy a részvények S_n ára a t_n időpontban csak véges sok értéket vehet fel. Ezt felhasználva a szerzők csinálnak egy olyan egyszerű valószínűségi modellt az általuk vizsgált pénzügyi folyamatokra, amelyek könnyebbé teszik a problémák vizsgálatát. Az az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező, amellyel dolgoznak, egy véges Ω halmazon van definiálva, amelynek elemei azok az $(s_0, s_1, \dots, s_N)$ sorozatok, amelyekre igaz, hogy $P(S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_N = s_n) > 0$. Az $\mathcal{F}$ σ-algebra az Ω halmaz összes részhalmazaiból áll, a részvények S_n ára a t_n időpontban és az $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_N)$ pontban $S_n(\omega) = s_n$, és a P valószinűségi mértéket a

$$P(\{(s_0, s_1, \dots, s_N)\}) = P(S_0 = s_0, S_1 = s_1, \dots, S_N = s_N)$$

képlet definiálja. Az $\mathcal{F}_n$ σ-algebra a legszűkebb olyan σ-algebra, amelyre az $S_0, \dots, S_n$ valószínűségi változók mérhetőek, azaz ez a σ-algebra megadja minden $\omega = (s_0, s_1, \dots, s_N)$ elemi esemény $s_0, \dots, s_n$ koordinátáinak az értékét. Megjegyzem, hogy feltételeink szerint s_0 csak egyetlen értéket vehet fel.

Egy piacot úgy definiálnak, hogy tekintik a fent konstruált $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőt a rajta definiált S_n valószínűségi változókkal és $\mathcal{F}_n$ σ-algebrákkal, $0 \le n \le N$, ahol S_n a részvények árát jelöli a t_n időpontban.

Ahhoz, hogy a piac definiciója teljes legyen definiálnunk kell még a kötvények B_n árát, ami egy B_n, $0 \le n \le N$, sorozat megadását jelenti. (Legyen $B_n = (1 + r_n)B_{n-1}$ valamilyen ismert r_n, $1 \le n \le N$ számsorozattal.)

Egy a fenti feltételeknek eleget tevő modellt a könyv N lépéses diszkrét idejű piacnak nevez, és úgy jelöli, hogy d.i.-$(B, S)_N$. Mi is átvesszük ezt a jelölésrendszert. Itt d.i. a diszkrét idejű kifejezés rövidítése, N a lépésszámot $B = (B_1, \dots, B_N)$ és $S = (S_1, \dots, S_N)$ a kötvény illetve részvény árfolyamot jelöli.

Ezután a $\pi = (\pi_1, \dots, \pi_N)$, $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, $0 \le n \le N$, stratégiát, illetve önfinanszírozó stratégiát egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon a korábban megadott módon definiáljuk, és vagyonunk értéke a t_n időpontban $X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$. A könyv az X_n^π jelölést használja vagyonunk t_n időpontbeli X_n értékére, ha a $\pi = (\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_N)$, $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$, $0 \le n \le N$, stratégiát alkalmazzuk.

Felidézek még egy eredményt a Gáll–Pap könyvből az önfinanszírozó piac jellemzéséről. Ez egy nem túl nehezen bizonyítható, de hasznos állítás, és a könyv több olyan bizonyításában, ahol önfinanszírozó piacokkal dolgoznak használják ezt az eredményt.

Ezen eredmény megfogalmazása érdekében először be kell vezetni a könyv 8.2.3. Jelölésében definiált differenciasorozatok fogalmát. Eszerint, ha adott valós számok egy a_n, $n = 0, 1, 2 \dots, N$, sorozata, akkor ennek differencia sorozata a $\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$, $n = 1, 2, \dots, N$, sorozat. Igaz a következő eredmény.

8.2.7. Lemma. *Egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon az alábbi megállapítások equivalensek egy π stratégia esetén.*

(1) π önfinanszírozó, azaz $X_{n-1}^\pi = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$, $(n = 1, \dots, N)$,

(2) $\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n$, $(n = 1, \dots, N)$,

(3) $B_{n-1} \Delta \beta_n + S_{n-1} \Delta \gamma_n = 0$, $(n = 1, \dots, N)$.

A pénzügyi matematika következő rendkívül fontos fogalma az arbitrázs mentes piac. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy olyan a piac, hogy abban nem lehetséges önfinanszírozó stratégiával nyerni, azaz azt elérni, hogy zéró tőkével indulva egyrészt 1 valószínűséggel ne csökkenjen, másrészt pozitív valószínűséggel szigorúan nőjön a vagyonunk a $t_N = N$ időpontban a kiinduló $t_0 = 0$ időpontbeli helyzethez képest. Tehát, ha $X_0 = 0$ kiinduló vagyonnal indulunk, akkor nem lehet olyan π önfinanszírozó stratégiát találni, amelyre $P(X_N^\pi \ge 0) = 1$, és $P(X_N^\pi > 0) > 0$. A Gáll–Pap könyvből idemásolt 9.1.1. Definició látszólag kissé többet követel meg az olyan önfinanszírozó stratégiától, amelyik arbitrázst, azaz előnyt biztosít, és amelynek a létezését ki kívánjuk zárni. De a 9.1.1. Definiciót követő, szintén idemásolt 9.1.2. Lemmából következik, hogy a piac arbitrázs mentessége a fent leírt tulajdonságot jelenti.

9.1.1. Definició *Egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon a π önfinanszírozó stratégiát arbitrázsnak nevezzük, ha*

(a) $X_0^\pi \equiv 0$,
(b) $X_n^\pi \geq 0$, $1 \leq n \leq N$, *(azaz* $P(X_n^\pi \geq 0) = 1$*),*
(c) $\exists\, \omega \in \Omega$: $X_N^\pi > 0$, *(azaz* $P(X_N^\pi > 0) > 0$*).*

Azt mondjuk, hogy a piac arbitrázs mentes, amit úgy is mondhatunk, hogy a piac kizárja az arbitrázst, (más szóval az arbitrázs lehetőségét), ha nincs önfinanszírozó arbitrázs a piacon.

A fenti definicióban egy arbitrázstól többet követeltünk meg, mint az előzőleg megfogalmazott nyereséget biztosító önfinanszírozó stratégiától. Az itt szereplő (b) tulajdonságban azt követeltük meg, hogy $P(X_n^\pi \geq 0) = 1$ minden $1 \leq n \leq N$ indexre, míg előtte csak azt írtuk elő, hogy a minket érdeklő végső N időpontban legyen $P(X_N^\pi \geq 0) = 1$. Viszont a következő 9.1.2. Lemma azt mondja ki, hogy ha létezik az általunk megkövetelt nyereséget biztosító önfinanszírozó stratégia, akkor létezik a 9.1.1. Definicióban megfogalmazott erősebb követelményt teljesitő arbitrázs is.

9.1.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon a π önfinanszírozó stratégiára teljesül, hogy* $X_0^\pi \equiv 0$, $P(X_N^\pi \geq 0) = 1$, *és* $P(X_N^\pi > 0) > 0$.

Ekkor létezik arbitrázs stratégia a piacon.

A pénzügyi matematika fontos kérdése, hogy egy piac mikor arbitrázs mentes. Ismertetem azt az eredményt, amely megadja, hogy egy d.i.-$(B,S)_N$ piac mikor arbitrázs mentes, majd tárgyalom azt, hogy milyen kép van ezen eredmény mögött. Ahhoz, hogy ezt az eredményt megfogalmazhassuk előbb be kell vezetni a következő definiciót.

8.2.16. Definició. *Legyen π egy stratégia egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon, és jelölje X_n^π a vagyonunkat az n időpontban ezen stratégia szerint. Ekkor*

$$V_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}, \quad (0 \leq n \leq N)$$

folyamatot a π stratégia diszkontált (leszámítolt) értékfolyamatának nevezzük.

Szükségünk van még az alábbi definicióra, amit a Gáll–Pap könyvtől kissé eltérő megfogalmazásban írok le.

9.1.4. Definició. *Legyen adva egy d.i.-$(B,S)_N$ piac egy $(\Omega,\mathcal{F},P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy P^* ekvivalens martingál-mérték ezen a piacon, ha*

(a) P^* valószínűségi mérték az $(\Omega,\mathcal{F})$ mezőn.
(b) P és P^* ekvivalens mértékek, azaz $P(A)>0$ akkor és csak akkor, ha $P^*(A)>0$.
(c) Az $\left(\frac{S_n}{B_n},\mathcal{F}_n,P^*\right)_{0\le n\le N}$ sorozat martingált alkot.

Igaz a következő tétel. Ennek bizonyítása mély gondolatokat igényel.

9.2.1. Tétel. *Egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon a következő két állítás ekvivalens.*

(1) Létezik ekvivalens martingál mérték.

(2) A piac kizárja az arbitrázs lehetőségét.

Annak érdekében, hogy jobban megértsük a 9.2.1. Tétel tartalmát valamint annak okát, hogy miért vezettük be a diszkontált értékfolyamat fogalmát a 8.2.16. Definicióban idézzük fel a következő 9.1.7. Lemmát, amelynek egyébként nem nehéz a bizonyítása.

9.1.7. Lemma. *A d.i.-$(B,S)_N$ piacon az $\left(\frac{S_n}{B_n},\mathcal{F}_n,P^*\right)_{0\le n\le N}$ sorozat akkor és csak akkor alkot martingált, ha tetszőleges π önfinanszírozó stratégia esetén az $\left(\frac{X_n^\pi}{B_n},\mathcal{F}_n,P^*\right)_{0\le n\le N}$ sorozat martingált alkot.*

Megadom a 9.1.7. Lemma bizonyítását.

A 9.1.7. lemma bizonyítása. Először megmtutatom, hogy ha $\frac{S_n}{B_n}$ martingál, és π önfinanszírozó stratégia, akkor $\frac{X_n^\pi}{B_n}$ martingál.

Valóban, ekkor $X_n^\pi=\beta_nB_n+\gamma_nS_n$, β_n és γ_n $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető, és $\frac{S_n}{B_n}$ martingál. Ezért

$$\begin{aligned} E\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right) &= E\left(\frac{\beta_nB_n+\gamma_nS_n}{B_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)=\beta_n+\gamma_nE\left(\frac{S_n}{B_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)\\ &= \beta_n+\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}. \end{aligned}$$

Innen, mivel π önfinanszírozó stratégia

$$E\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}\middle|\mathcal{F}_{n-1}\right)=\frac{\beta_nB_{n-1}+\gamma_nS_{n-1}}{B_{n-1}}=\frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}}.$$

Mivel ez az azonosság igaz minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, ezért $\frac{X_n}{B_n}$ nartingál.

Az állítás másik fele nyilvánvaló. Mivel a $\beta_n = 0$, $\gamma_n = 1$ minden $n = 0, 1, \dots, N-1$ indexre önfinanszírozó stratégia, és értéke $X_n^\pi = S_n$, ezért $\frac{S_n}{B_n}$ martingál, ha $\frac{X_n^\pi}{B_n}$ martingál minden π önfinanszírozó stratégiára.

Az, hogy a d.i.-(B, S) piacon az $\frac{S_n}{B_n}$, $0 \le n \le N$, sorozat martingált alkot szemléletesen azt jelenti, hogy egy a nulla időpontban rendelkezésünkre álló részvény véletlen S_n értéke a majdani n időpontban várhatóan ugyanannyi, mint az érte vásárolható kötvények értéke ugyancsak az n időpontban. Valóban ez utóbbi értéke $\frac{S_0}{B_0} B_n$. Mind a két kifejezést elosztva a B_n számmal azt kapjuk, hogy a véletlen $\frac{S_n}{B_n}$ mennyiség a majdani n időpontban várhatólag annyit ér, mint $\frac{S_0}{B_0}$ (a nulla időpontban). Annak, hogy az $\frac{S_n}{B_n}$ sorozat martingált alkot az a szemléletes jelentése, hogy ez igaz minden n időpontban. A (9.1.7). Lemma szerint, ha $\frac{S_n}{B_n}$ martingál, akkor a $V_n^\pi = \frac{X_n^\pi}{B_n}$ diszkontált értékfolyam szintén martingál tetszőleges π önfinanszírozó stratégiára. Ez úgy is interpretálható, hogy ha a várható vagyonunk nem változik azáltal, hogy a rendelkezésünkre álló kötvényeket részvényekre váltjuk, akkor ugyanez elmondható minden önfinanszírozó stratégiára is.

A 9.2.1. Tétel azon része, hogy az (1) állításból következik a (2) állítás egyszerűen látható. Valóban, mivel a P és P^* mértékek ekvivalensek az, hogy egy π önfinanszírozó stratégia arbitrázs egyszerre igaz akár a P, akár a P^* mértéket tekintjük az $(\Omega, \mathcal{F})$ téren. Viszont, ha X_n^π martingál a P^* mérték szerint, (itt felhasználjuk azt, hogy a 9.1.7. Lemma szerint ez a helyzet az (1) esetben bármely π önfinanszírozó stratégia esetén), akkor X_n^π nem lehet arbitrázs a P^* mérték szerint. Ugyanis ekkor $0 = E^* X_0^\pi = E^* X_N^\pi$, ami ellentmond annak, hogy $P^*(X_N^\pi \ge 0) = 1$, és $P^*(X_N^\pi > 0) > 0$. (Itt azt a konvenciót alkalmaztuk, hogy E^* jelöli a várható értéket a P^* valószínűségi mérték szerint, és ezt a konvenciót fogjuk alkalmazni a későbbiekben is.)

A 9.2.1. Tétel második fele nehezebben bizonyítható. Itt ugyanis meg kell konstruálni egy olyan P^* valószínűségi mértéket, amelyre az $\frac{S_n}{B_n}$ sorozat martingál, és ezen kívül még a P^* és P mértékeknek ekvivalenseknek is kell lenniük. Ez a konstrukció érdekes új gondolatokat igényel, amelyeket ebben a bevezető írásban nem tárgyalok.

A pénzügyi matematika következő fontos fogalma az opció, amelynek vizsgálata további érdekes matematikai problémákat vet fel. Az opció jogot jelent arra, hogy bizonyos szabályok szerint részvényeket vegyünk (ezt nevezik az irodalomban vételi opciónak), vagy eladjunk (eladási opció). A legismertebb, legnépszerűbb opciók az úgynevezett európai és amerikai opció. Az európai opció azt jelenti, hogy a kereskedési periódus $T_N = N$ lezártakor egy bizonyos előre megadott K áron jogom van részvényeket venni vagy eladni. Az amerikai opció hasonló jogot jelent, de ekkor bármely t_n, $0 \le n \le N$, időpontban jogom van részvényt venni vagy eladni egy előre rögzített K áron. A Gáll–Pap könyv elsősorban az európai opcióval és az annak alkalmazásával kapcsolatos matematikai problémákkal foglalkozik.

Az opció általános esete hasonló jogot jelent bizonyos szabályok szerinti vételre vagy eladásra, de az általános esetben az eladási ár nem feltétlenül konstans, hanem, például, ha a vétel vagy eladás csak a $t_N = N$ időpontban lehetséges, akkor a részvény vételi vagy eladási ára függhet a részvénypiac viselkedésétől a $t_N = N$ időpontig, azaz ez egy $\mathcal{F}_N$ σ-algebra szerint mérhető függvény.

Világos, hogy egy opció előnyt jelent, hiszen csak akkor fogok részvényeket venni vagy eladni, ha az számomra előnyös. Ezért természetes bevezetni egy opciós árat, ami ellensúlyozza az opció alkalmazásának a nyereségét. A fő probléma az, hogy mi az igazságos opciós ár. Olyan opciós árat szeretnénk bevezetni, amivel a piac az opciók bevezetése után is igazságos marad. E probléma megjelenése természetessé tette bizonyos fogalmak bevezetését. Először bevezetjük a véletlen követelés fogalmát.

Egy $f_N\colon\ R^{N+1} \to R$ függvény által meghatározott f_N véletlen követelés az $f_N(S_0, \dots, S_N)$ valószínűségi változó. Jelentése az, hogy $S_0, \dots, S_N$ részvényárak esetén $f_N(S_0, \dots, S_N)$ követelésünk van az N időpontban. A minket érdeklő kérdés az, hogy mekkora fedezetet kell biztosítani e követelés teljesítése érdekében. E kérdés vizsgálata érdekében bevezették a fedezeti stratégia és a tökéletes fedezeti stratégia fogalmát.

8.2.10. Definició. *Legyen adott egy d.i.-$(B, S)_N$ piac, egy $x \in R$ szám és egy $f_N = f_N(x_0, \dots, x_N)$: $R^{N+1} \to R^1$ függvény. Egy önfinanszírozó $\pi = \{\pi_n\}_{n=0}^N$ stratégiát (x, f_N) fedezetnek (vagy fedezeti stratégiának) nevezünk, ha*

$$X_0^\pi = x,$$

és

$$X_N^\pi(\omega) \ge f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega)), \quad \forall\, \omega \in \Omega.$$

Ha $X_N^\pi(\omega) = f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega))$, $\forall\, \omega \in \Omega$, akkor azt mondjuk, hogy π minimális (x, f_N) fedezet vagy másképpen úgynevezett tökéletes fedezeti stratégia.

Az összes önfinanszírozó (x, f_N) fedezeti stratégiák halmazát $\Pi(x, f_N)$-nel fogjuk jelölni.

Érdemes még felidézni az alábbi definiciókat a Gáll–Pap könyvből.

8.2.12. Definició. *Legyen $f_N\colon\ R^{N+1} \to R$ egy függvény. Ekkor egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon a*

$$C_{N,f_N} = \inf\{x \in R\colon\ \Pi(x, f_N) \neq \emptyset\}$$

értéket a t_N időre legalább $f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))$ $(\forall\omega \in \Omega)$ tőkét biztosító tőkének (befektetési költségnek) nevezzük.

10.1.4. Definició. *A d.i.-$(B, S)_N$ piacot teljesnek nevezzük, ha tetszőleges ξ (azaz tetszőleges $\mathcal{F}_N$ mérhető ξ) valószínűségi változóhoz létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, amelyre*

$$X_N^\pi(\omega) = \xi(\omega) \quad \forall\omega \in \Omega \text{ esetén.}$$

Megjegyzem, hogy az $\mathcal{F}_N$ mérhető valószínűségi változók halmaza megegyezik az $f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))$, $f_N\colon\ R^{N+1} \to R$ alakban felírható valószínűségi változók halmazával valamely f_N függvénnyel.

Szeretnénk definiálni egy opció igazságos árát egy arbitrázs mentes piacon. Ebben a jegyzetben csak olyan opciók vizsgálatával foglalkozunk, amelyekben a $t_N = N$ időpontban valamely $\xi = f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))$ áron vehetünk vagy adhatunk el részvényeket. E kérdés vizsgálatában érdemes definiálni először egy $f_N\colon\ R^{N+1} \to R$ függvény által meghatározott $f_N(S_0, \ldots, S_N)$ véletlen követelés igazságos árát.

E kérdés vizsgálatában érdemes alkalmazni a 9.2.1. Tétel eredményét, amely szerint egy arbitrázs mentes piacon létezik (a 9.1.4. Definicióban definiált) ekvivalens martingál mérték. A következő eredmény nagyon hasznos az előbb felvetett kérdés vizsgálatában.

11.1.9. Lemma. *Legyen π egy önfinanszírozó (x, f_N) fedezeti stratégia egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon. ahol $x \in R$ és $f_N\colon\ R^{N+1} \to R$, és tegyük fel, hogy P^* egy ekvivalens martingál mérték a piacon.*

Ekkor

$$x \geq \frac{B_0}{B_N} E^* f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N),$$

és ha π ráadásul minimális (x, f_N) fedezeti stratégia, akkor

$$x = \frac{B_0}{B_N} E^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N).$$

A 11.1.9. Lemma bizonyítása viszonylag egyszerű. Felhsználhatjuk, hogy a 9.1.7. Lemma szerint $\left(\frac{X_n^\pi}{B_n}, \mathcal{F}_n, P^*\right)$ martingál tetszőleges π önfinanszírozó stratégiára egy P^* equivalens martingál mérték szerint, és olyan π önfinanszírozó stratégiát tekinthetünk, amelyre $X_0^\pi = x$, és

$$X_N^\pi(\omega) \ge f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega))$$

az első, illetve $X_N^\pi(\omega) = f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega))$ a második esetben minden $\omega \in \Omega$ pontban.

Egy $f_N\colon\ R^{N+1} \to R$ függvény által meghatározott $f_N(S_0, \dots, S_N)$ véletlen követelés igazságos árát úgy definiáljuk, mint a 8.2.12. Definicióban bevezetett C_{N,f_N} befektetési költséget. A 11.1.9. Lemmából és a C_{N,f_N} mennyiség definiciójából következik, hogy az f_N véletlen követelés C_{N,f_n} igazságos ára teljesíti a $C_{N,f_N} \ge \frac{B_0}{B_N} E^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N)$ egyenlőtlenséget. Másrészt, ha létezik minimális (x, f_N) fedezeti stratégia akkor

$$C_{N,f_N} = \frac{B_0}{B_N} E^* f_N(S_0, S_1, \dots, S_N).$$

A véletlen követelések igazságos árának a bevezetése lehetővé teszi bizonyos esetekben az igazságos opciós ár természetes meghatározását is. Tekintsük például az európai vételi opciót az N időpontban valamilyen K vételi árral. Ebben az esetben akkor élünk a vételi jogunkkal, ha $S_N > K$, és ekkor $S_N - K$ nyereményünk lesz. Ha $S_N \le K$, akkor nem élünk vételi jogunkkal, így nyereményünk ebben az esetben zéró. Azt mondhatjuk tehát, hogy az európai vételi opció K árral $\max(S_N - K, 0) = |S_N - K|_+$ nyereséget biztosít számunkra. Ezért természetes a K árral definiált európai vételi opció opciós árát úgy definiálni, mint az $|S_N - K|_+$ véletlen követelés igazságos árát, és ezt a definiciót fogjuk választani. Megjegyzem, hogy ugyanezt az érvelést folytonos idejű pénzügyi folyamatok esetében is alkalmazhatjuk. Ezért abban az esetben a K árral definiált európai vételi opció opciós árát úgy definiáljuk, mint az $|S_T - K|_+$ véletlen követelés igazságos árát.

Láttuk, hogy, akkor tudjuk meghatározni egy $f_N(S_0, \dots, S_N)$ véletlen követelés igazságos árát, ha létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, amelyre $X_N^\pi = f_N(S_0, \dots, S_N)$. Ekkor ugyanis létezik tökéletes fedezeti stratégia bármely véletlen követelésre. Ezért szeretnénk tudni, hogy mikor oldható meg az $X_N^\pi = \xi$ egyenlet tetszőleges ξ valószínűségi változóra. Ez tette természetessé a 10.1.4. Definició bevezetését a piac teljességéről.

Ismertetem a 10.1.5. Tétel eredményét, amely megadja annak szükséges és elégséges feltételét, hogy egy piac teljes legyen. A Gáll–Pap könyvtől eltérően ezt a tételt két részben, egy 10.1.5.A és egy 1.0.1.5.B Tételben mondom ki.

10.1.5.A Tétel. *Tegyük fel, hogy a d.i.-$(B, S)_N$ piacon létezik P^* ekvivalens martingál mérték. Ekkor a következő két állítás ekvivalens.*

(1) A piac teljes.

(2) P^* az egyetlen ekvivalens martingál mérték a piacon.

Számunkra a 10.1.5. Tételnek az A része az igazán érdekes. Annak bizonyítása, hogy az (1) állításból következik a (2) állítás viszonylag egyszerű.

Ugyanis legyen P^* és P^{**} két ekvivalens martingál, és ξ tetszőleges $\mathcal{F}_N$ mérhető valószínűségi változó. Ha a piac teljes, akkor létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, amelyre $\frac{B_N}{B_0}\xi = X_N^\pi$. Ekkor $E^*\xi = E^*\frac{B_0}{B_N}X_N^\pi = E^*X_0^\pi = X_0^\pi$, és $E^{**}\xi = E^{**}\frac{B_0}{B_N}X_N^\pi = E^{**}X_0^\pi = X_0^\pi$. Ezért $E^*\xi = E^{**}\xi$. Mivel ez minden $\mathcal{F}_N$ mérhető ξ valószínűségi változóra igaz, innen következik, hogy $P^* = P^{**}$.

Ebben az érvelésben kissé rejtve használtuk ki azt, hogy a tekintett martingálok ekvivalensek, azaz olyan P^* és P^{**} mértékekkel dolgozunk, amelyek egyrészt abszolút folytonosak a P mértékre nézve, másrészt a P mérték is abszolút folytonos rájuk nézve. Azt használtuk ki, hogy $E^*X_0^\pi = E^{**}X_0^\pi = X_0^\pi$. Ugyanis X_0^π egy konstanssal egyenlő 1 valószínűséggel a P ezért a P^* és P^{**} mérték szerint is. Az $E^*X_0^\pi = E^{**}X_0^\pi$ azonosság azért igaz, mert egy a P^* illetve P^{**} mérték szerint 1 valószínűséggel konstans valószínűségi változó 1 valószínűséggel konstans a P mérték szerint is.

A másik irányú állítás bizonyítása lényegesen nehezebb. Azt kell megmutatni, hogy ha az X_N^π alakban előállítható valószínűségi változók halmaza kisebb, mint az összes $\mathcal{F}_N$ mérhető valószínűségi változók halmaza, akkor a 9.2.1. Tételben konstruált P^* ekvivalens martingál mértéken kívül lehet konstruálni attól különböző ekvivalens martingál mértéket is. Ennek bizonyítása hasonló gondolatokon alapul, mint a 9.2.1. Tételé.

A 10.1.5.A Tétel azt állítja, hogy egy teljes piacon egyetlen ekvivalens martingál mérték létezik. Ugyanakkor létezhetnek további martingál mértékek is, amelyek nem ekvivalensek. Ez jelen esetben azt jelenti, hogy lehetnek még olyan P' martingál mértékek, amelyekre van olyan A halmaz, amelyre $P(A) > 0$, de $P'(A) = 0$. Az ilyen martingál mértékek pontos leírásáról szól a 10.1.5.B Tétel.

10.1.5.B Tétel. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 10.1.5.A. Tétel feltételei. Ekkor az ott megfogalmazott (1) és (2) állítások ekvivalensek az alábbi (3) állítással.*

(3) Tetszőleges $(M_n, \mathcal{F}_n, P^*)_{0\le n\le N}$ martingál előállítható

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta m_k, \quad n = 1, \dots, N,$$

alakban, ahol a γ_n-ek $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető valószínűségi változók, $(n = 1, \dots, N)$, és

$$m_n = \frac{S_n}{B_n}, \quad \text{ha } n = 1, \dots, N.$$

Van egy speciális, úgynevezett bináris piac, amely külön figyelmet érdemel, és amelyet a Gáll–Pap könyv is külön tárgyal. Ismertetem ennek definicióját, és megadom a róla szóló legfontosabb eredményt. A bináris piacot a Gáll–Pap könyv a 8.1.6. Definicióban vezeti be.

8.1.6. Definició. (Diszkrét idejű $(B, S)_N$ bináris piac.) *Egy az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn $B = (B_n)$ kötvényekkel, $S = (S_n)$ részvényekkel és N kereskedési időponttal megadott piacot bináris piacnak nevezünk $\{r_n\}$ kamatlábakkal, $\{a_n\}$, és $\{b_n\}$ együtthatókkal, és $\{p_n\}$ valószínűségekkel, ha*

(a) $r_n > -1$, $-1 < a_n < b_n$ minden $n = 1, \dots, N$ esetén.

(b) A kötvény árfolyamára teljesül a

$$B_n = (1 + r_n)B_{n-1}, \quad n = 1, \dots, N,$$

egyenlőség.

(c) A részvény $S = \{S_n\}_{n=0}^{N}$ árfolyama kielégíti az

$$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}, \quad n = 1, \dots, N,$$

egyenlőséget, ahol ρ_n olyan valószínűségi változó, amelyre $\rho_n = a_n$ vagy $\rho_n = b_n$, és $p_n = P(\rho_n = b_n) = 1 - P(\rho_n = a_n)$, $0 < p_n < 1$, $n = 1, \dots, N$. Az Ω halmaz az összes $\omega = (\rho_1, \dots, \rho_N)$ alakú sorozatból áll, és végül

(d) $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ a $\rho_1, \dots, \rho_N$ valószínűségi változók által generált filtráció, azaz $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, és $\mathcal{F}_n = \sigma(\rho_1, \dots, \rho_n\}$, ahol $n = 1, \dots, N$.

Megjegyzem, hogy az a kitétel, amely szerint az Ω halmaz az *összes* $\omega = (\rho_1, \dots, \rho_N)$ alakú sorozatból áll, azt jelenti, hogy $P(\rho_1 = x_1, \dots, \rho_N = x_N) > 0$ minden olyan $(x_1, \dots, x_N)$ sorozatra, amelyre $x_n = a_n$ vagy $x_n = b_n$ minden $1 \le n \le N$ indexre.

A fentebb definiált diszkrét idejű $(B, S)_N$ bináris piac megnevezésére a Gáll–Pap könyv d.i.b.-$(B, S)_N$ jelölést használja. (A d.i.b. a diszkrét idejű bináris rövidítése.) Ugyancsak megadja a könyv e fogalom speciális esetét, a diszkrét idejű homogén bináris piacok fogalmát is. Ezek olyan d.i.b.-(B, S) piacok, amelyekre a 8.1.6. Definicióban szereplő ρ_n valószínűségi változók függetlenek, $1 \le n \le N$, és az a_n, b_n, r_n, p_n számok nem függnek az n paramétertől.

Felidézem az alábbi, a diszkrét idejű $(B, S)_N$ bináris piacok legfontosabb tulajdonságait kimondó tételt.

9.1.8.Tétel. *Tekintsünk egy olyan d.i.b.-$(B, S)_N$ piacot, ahol az $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakra és az $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókra teljesülnek az $a_n < r_n < b_n$, $(n = 1, \dots, N)$ egyenlőtlenségek. Idézzük fel, hogy Ω elemei tekinthetőek a $\rho_1, \dots, \rho_N$ valószínűségi változók realizációiból álló halmaznak. Véve egy*

$$\omega = \{(x_1, \dots, x_N) | x_i \in \{a_, b_i\}, \ i = 1, \dots, N\},$$

elemi eseményt legyen

$$P^*(\{(x_1, \dots, x_N)\}) = \prod_{\substack{1 \le n \le N \\ x_n = b_n}} p_n^* \prod_{\substack{1 \le n \le N \\ x_n = a_n}} (1 - p_n^*),$$

ahol $p_n^* = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}$, $n = 1, 2, \dots, N$.

Ekkor P^* az egyetlen ekvivalens martingál mérték a piacon, Speciálisan

$$P^*(\rho_n = b_n) = 1 - P^*(\rho_n = a_n) = p_n^*, \quad n = 1, \dots, N,$$

és a $\rho_1, \dots, \rho_N$ hozamok P^*-függetlenek.

A 9.1.8. Tétel szerint egy olyan d.i.b.-$(B,S)_N$ piacnak, amelyre $a_n < r_n < b_n$ minden $1 \le n \le N$ indexre van ekvivalens martingál mértéke, tehát arbitrázs mentes, sőt egyetlen ekvivalens martingál mértéke van, ami azt jelenti, hogy egy ilyen piac teljes. Ráadásul ezt az ekvivalens martingál mértéket explicit módon meg tudtuk adni, és ez a mérték egyszerű szerkezetű szorzat mérték. Ez lehetővé teszi, hogy tudjunk vele számolni. Erre példát mutat a Kevei Péter könyv egyik eredménye, amelyben a Black–Sholes formula előáll, mint az úgynevezett Cox–Ross–Rubinstein árazási formula határértéke. Az ebben az eredményben tekintett Cox–Ross–Rubinstein modell egy alkalmas paraméterekkel választott d.i.b.-$(B,S)_N$ piac.

Megjegyzem, hogy a 9.1.8. Tételben szereplő $a_n < r_n < b_n$ minden $1 \le n \le N$ indexre feltétel természetes. Ugyanis igaz a következő, a 9.2.3. Következményben megfogalmazott állítás.

9.2.3. Következmény. *Tekintsünk egy d.i.b.-(B,S) piacot. Jelölje $\{r_n\}_{n=1}^N$ a kamatlábakat, és $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ az együtthatókat. Ekkor a következő állítások ekvivalensek.*

(1) Létezik ekvivalens martingál mérték.

(2) A piac kizárja az arbitrázs lehetőségét.

(3) $a_n < r_n < b_n$ teljesül minden $n = 1, \dots, N$ esetén.

Ezután Kevei Péter "Pénzügyi folyamatok folytonos időben" című jegyzetét tekintem át. Azt magyarázom el, hogy az ott bevezetett fogalmak és eredmények a diszkrét idejű folyamatok tárgyalásában bevezetett fogalmak és eredmények természetes megfelelői.

Először a diszkrét idejű modellekben bevezetett kötvény, részvény, pénzügyi stratégia, önfinanszírozó stratégia folytonos idejű megfelelőit kell definiálnunk.

Egy folytonos idejű piacon egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt értünk egy $\mathcal{F}_t$, $0 \le t \le T$, filtrációval (feltesszük, hogy T valamely rögzített véges szám), ahol kötvényeket és részvényeket lehet venni és eladni. A kötvények B_t ára egy t időpontban rögzített determinisztikus szám, míg a részvények t időpontbeli S_t ára a véletlentől függ. Az S_t, $0 \le t \le T$, sztochasztikus folyamat egy az $\mathcal{F}_t$ σ-algebrákhoz adaptált Itô folyamat.

Egy stratégia (portfólió) olyan $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$, $0 \le t \le T$, az $\mathcal{F}_t$ σ-

algebrákhoz adaptált sztochasztikus folyamat, amelyre

$$\int_0^T |\beta_t|\,dt < \infty, \quad \text{és} \quad \int_0^T \gamma_t^2\,dt < \infty.$$

Itt β_t jelöli a t időpontbeli kötvényeink, és γ_t a t időpontbeli részvényeink számát a $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$, $0 \le t \le T$, stratégia alkalmazása esetén. (β_t és γ_t valós számok, amelyek negatív értéket is felvehetnek.) A π portfólió értéke a t időpontban

$$X_t^\pi = \beta_t B_t + \gamma_t S_t.$$

Definiálni akarjuk a diszkrét idejű esethez hasonlóan az önfinanszírozó stratégiákat a folytonos időben is. A Kevei könyv bebizonyítja, hogy a diszkrét idejű önfinanszírozó stratégiákra érvényes az

$$X_{n+1}^\pi - X_n^\pi = \beta_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + \gamma_{n+1}(S_{n+1} - S_n).$$

azonosság. (Megjegyzem, hogy ez a képlet megegyezik a diszkrét idejű önfinanszírozó stratégiáknak a Gáll–Pap könyv 8.2.7. Lemmájában megadott (2) jellemzésével.) Ezen formula természetes folytonos idejű megfelelője a

$$dX_t^\pi = \beta_t dB_t + \gamma_t dS_t$$

sztochasztikus differenciálegyenlet, és ezt választjuk az önfinanszírozó stratégia definiciójának a folytonos idejű piacok esetében.

Érdemes definiálni a 8.2.16. Definicióban bevezetett diszkrét idejű diszkontált értékfolyamat folytonos megfelelőjét is. Ez az $\bar{S}_t = S_t \frac{B_0}{B_t}$ képlettel definiált diszkontált részvényárfolyam és az $\bar{X}_t^\pi = X_t^\pi \frac{B_0}{B_t}$ képlettel definiált diszkontált értékfolyamat. (Ezek a mennyiségek jelennek meg a diszkrét folyamatoknál fellépő martingál problémák folytonos megfelelőjében.) Az egyszerűség kedvéért a Kevei jegyzet csak azzal a speciális esettel foglalkozik, amikor $B_t = e^{rt}$ valamely $r > 0$ számra. Ebben az esetben

$$\bar{S}_t = e^{-rt} S_t. \quad \text{és} \quad \bar{X}_t^\pi = e^{-rt} X_t^\pi.$$

Érdemes az önfinanszírozó stratégia definicióját átfogalmazni, és azt az S_t és B_t mennyiségek helyett az $\bar{S}_t$ (és a képletben végül nem megjelenő $\bar{B}_t$) mennyiségek segítségével adni meg. Erről szól a Kevei jegyzet 6. Állítása.

6. Állítás. *A $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ stratégia pontosan akkor önfinanszírozó, ha*

$$\bar{X}_t^\pi = \bar{X}_0^\pi + \int_0^t \gamma_s\,d\bar{S}_s, \quad t \in [0, T].$$

Ezek után definiáljuk az arbitrázs fogalmát, ami a diszkrét idejű arbitrázs természetes megfelelője. A π önfinanszírozó stratégia akkor arbitrázs stratégia, ha $X_0^\pi = 0$ majdnem biztosan, $X_T^\pi > 0$ majdnem biztosan, és $P(X_T^\pi > 0) > 0$. A piac arbitrázs mentes, ha nincs rajta arbitrázs stratégia.

Szeretnénk tudni, hogy mikor mondhatjuk azt, hogy egy folytonos idejű piac arbitrázs mentes. Erre csak egy (jó) elégséges feltételt tudunk adni. Az ezen feltételt kimondó tétel a diszkrét idejű esetről szóló 9.2.1. Tétel könnyebbik felének a természetes folytonos idejű megfelelője. Kevei Péter is felidézi azt a definiciót, hogy mikor mondunk egy P és Q mértéket ekvivalensnek (pontosabban fogalmazva ekvivalensnek egy $\mathcal{F}$ σ-algebra szerint). Akkor mondjuk, hogy ezek a mértékek ekvivalensek, ha mind P abszolút folytonos a Q mértékre nézve, mind Q abszolút folytonos a P mértékre nézve. A Kevei jegyzet az EMM (ekvivalens martingál mérték) fogalmat használja egy olyan Q mértékre, amely ekvivalens a P mértékkel az $\mathcal{F}_T$ σ-algebra szerint, és amelyre nézve az $\bar{S}_t$ diszkontált részvényárfolyam martingál. Ezután bebizonyítja a következő eredményt.

6. Tétel. *Ha az $(\Omega, \mathcal{A}, S_t)$ valószínűségi mezőn $\mathcal{F}_t$ filtrációval valamilyen S_t részvényekkel és $B_t = e^{rt}$ kötvényekkel definiált folytonos idejű piacon létezik Q EMM, akkor a piac arbitrázs mentes.*

A Kevei jegyzet tárgyalja 8.2.10. Definicióban bevezetett diszkrét idejű fedezeti stratégia folytonos idejű megfelelőjét is. Először definiálja egy f_T véletlen követelés fogalmát. Azt mondja, hogy az f_T véletlen követelések az $\mathcal{F}_T$ mérhető valószínűségi változók. Egy π önfinanszírozó stratégia fedezeti stratégia az f_T véletlen követelésre x kezdőtőkével, röviden fogalmazva π (x, f_T) fedezet, ha

$$X_T^\pi \geq f_T \text{ majdnem biztosan, és } X_0^\pi = x.$$

Az f_T követelés $C_T(f_T)$ *igazságos árát* a Kevei jegyzet úgy definiálja, mint a legkisebb olyan x értéket, amelyre létezik (x, f_T) fedezet, azaz

$$C_T(f_T) = \inf\{x \geq 0\colon \text{ létezik } (x, f_T) \text{ fedezet}\}.$$

Nem nehéz belátni a 6. Tétel segítségével azt, hogy ha létezik egy Q EMM, akkor tetszőleges f_T véletlen követelésre

$$C(T, f_T) \geq E_Q(e^{-rT} f_T)$$

az ezen Q mérték szerint vett várható értékkel.

A továbbiakban a Kevei jegyzet pénzügyi része elsősorban a Black–Sholes modellel foglalkozik. Ebben olyan B_t kötvény és S_t részvényárfolyamot vizsgálunk, amelyeket a

$$\begin{aligned} dB_t &= rB_t\,dt, \quad B_0 = 1, \\ dS_t(\omega) &= \mu S_t(\omega)\,dt + \sigma S_t(\omega)\,dW_t(\omega 0, \quad S_0(\omega) = S_0 \end{aligned}$$

egyenlet határoz meg. Ebben az esetben $B_t = e^{rt}$, és az S_t részvényár értéket szintén fel tudjuk írni a Kevei jegyzetben tárgyalt 7. Példa alapján. A Black–Sholes modell a homogén d.i.b.-(B,S) modellek természetes folytonos idejű megfelelője.

Érdemes felírni Black–Sholes modellt meghatározó egyenletet az $\bar{S}_t$ diszkontált részvényárfolyamra is. Az így kapott egyenlet is megoldható, és ezt felhasználva a Girsanov tétel valamint a 6. Tétel alapján meg lehet mutatni, hogy a Black–Sholes modell arbitrázs mentes. Sőt, fel tudjuk írni explicit módon a Black–Sholes modell esetében a 6. Tételben megjelenő $Q = P_\mu$ EMM-t is, és ez hasznos a további vizsgálatokban.

A jegyzet következő eredménye arról szól, hogy egy Black–Sholes modellben tetszőleges olyan $e^{-rT}f_T$ véletlen követelés, amelyre $E_\mu e^{-2rT} f_T^2 < \infty$, ahol E_μ várható értéket jelöl azon P_μ mérték szerint, amelyik a Black-Sholes modellben EMM, felírható $X_T^\pi = e^{-rT} f_T$ alakban, ahol π alkalmasan definiált önfinanszírozó stratégia. Hasonló problémák vizsgálatával a diszkrét idejű pénzügyi folyamatok tárgyalásában is találkoztunk. Ott az a kérdés érdekelt minket, hogy mely pénzügyi piacok teljesek. A teljesség fogalmát a 10.14. Definicióban vezettük be. A most megfogalmazott eredmény bizonyítása felhasznál néhány mély, a jegyzetben bizonyítás nélkül közölt tételt, de a bizonyítás módszere természetes. Mivel a keresett $\bar{X}_t^\pi$ folyamat martingál a P_μ mérték szerint, ezért természetes az $e^{-rT}f_T$ valószínűségi változót beágyazni egy N_t, $0 \le t \le T$, martingálba úgy, hogy $N_T = e^{-rT}f_T$. Ezt a következő formulában tesszük meg.

$$N_t = E_\mu\left(e^{-rT} f_T | \mathcal{F}_t\right), \quad 0 \le t \le T.$$

Ezután a Kevei jegyzet felhasznál egy ott korábban bizonyítás nélkül kimondott eredményt, amely szerint egy martingál felírható egy alkalmas Wiener folyamat szerinti Itô integrál formájában. Ezen eredmény segítségével Kevei

Péter az előbb definiált N_t martingált felírja

$$N_t = N_0 + \int_0^t Y_s \, d\tilde{W}_s^\mu,$$

alakban, ahol $N_0 = E_\mu e^{-rT} f_T$, $\tilde{W}_s^\mu$ a P_μ EMM kiszámítása során explicit módon megadott Wiener folyamat a P_μ, mérték szerint, és Y_t alkalmas adaptált folyamat. Ezután természetes módon meg lehet találni azt a önfinanszírozó $\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$ stratégiát, amelyre egyrészt $N_t = \bar{X}_t^\pi$, másrészt $\beta_t B_t + \gamma_t S_t = X_t^\pi = e^{rt} N_t$. Kevei Péter jegyzetében ezt megteszi, és a kapott eredményt a következő lemmában fogalmazza meg.

7. Lemma. *A jegyzetben a 7. Lemma előtt megkonstruált ($\pi_t = (\beta_t, \gamma_t)$) stratégia önfinanszírozó, $\bar{X}_t^\pi = N_t$, minden $0 \le t \le T$ indexre, és $N_T = e^{-rT} f_T$.*

Nem nehéz belátni a 7. Lemma segítségével a következő eredményt.

7. Tétel. *A Black–Sholes modellben egy f_T követelés igazságos ára*

$$C_T(f_T) = E_\mu(e^{-rT} f_T).$$

A 7. Tétel eredményét alkalmazhatjuk speciálisan az európai opció igazságos árának a meghatározására. Ebben az esetben a 7. Tételt az $f_T = |S_T - K|_+$ követelés választásával kell alkalmazni, ahol K az európai opció kifizetési függvénye. Kevei Péter megoldja ezt a feladatot, és eredményként megkapja a híres Black–Sholes formulát.

A Kevei jegyzet közvetlenül pénzügyi folyamatokról szóló részének utolsó témája a diszkrét idejű pénzügyi folyamatok vizsgálatában bevezetett Cox–Ross–Rubinstein modell és a Black–Sholes modell viselkedésének az összehasonlítása.

A Cox–Ross–Rubinstein modell egy olyan homogén d.i.b.-$(B, S)_N$ modell, amelyben minden N paraméterre (N a pénzügyi lépések száma) az $r = r_N$, $a = a_N$, és $b = b_N$, $a_N < r_N < b_N$, paramétereket alkalmasan választjuk. (Itt $B_{k,N} = (1 + r_N) B_{k-1,N}$, $P(S_{k,N} = S_{k-1,N}(1 + b_N)) = p_N$, $P(S_{k,N} = S_{k-1,N}(1 + a_N)) = (1 - p_N)$, ahol $B_k = B_{k,N}$ a kötvények, $S_k = S_{k,N}$ a részvények ára k-ik üzletkötés időpontjában, és N az összes üzletkötés száma. A p_N valószínűségek értékének nincs jelentősége abban a problémában, amelyet itt tárgyalunk.) Azt mutatjuk meg, hogy ezen paraméterek alkalmas választása esetén nagy N paraméterekre a Cox–Ross–Rubinstein modell hasonlóan viselkedik a Black–Sholes modellhez.

Pontosabban szólva, tekintsünk egy Black–Sholes modellt valamilyen r, μ és σ paraméterekkel az őt meghatározó sztochasztikus differenciálegyenletben. Kevei Péter jegyzetében megmutatja, hogy a $r = r_N$, $a = a_N$, és $b = b_N$ paraméterek alkalmas választásával a Cox–Ross–Rubinstein modellben a K kötési árú európai vételi opció igazságos ára ugyanennek az opciónak a fenti paraméterekkel definiált Black–Sholes modell szerinti igazságos árához konvergál, ha $N \to \infty$.

Legyenek az N lépéses Cox–Ross–Rubinstein modellben az üzletkötések időpontjai a $\tau_i = ih_N$, $0 \le i < N$, időpontok, ahol $h_N = \frac{T}{N}$. Legyen $r_N = r\frac{T}{N} = rh_N$, ahol r a tekintett Black–Sholes modell r paramétere. Ezzel a választással $B_{i,N} = (1 + \frac{rT}{N})^i \sim e^{r\tau_i} = B_{\tau_i}$ a tekintett Black-Sholes modell r és B_t paramétereivel.

Definiáljuk az a_N és b_N paramétereket a

$$\log \frac{1 + b_N}{1 + r_N} = \sigma\sqrt{h_N}, \quad \log \frac{1 + a_N}{1 + r_N} = -\sigma\sqrt{h_N}$$

képletek segítségével, ahol σ a tekintett Black–Sholes modell megfelelő paramétere. Azt állítjuk, hogy ezzel a választással igaz a Cox–Ross–Rubinstein modellben az európai opció igazságos áráról szóló állítás. Ahhoz, hogy ezt belássuk, fel kell idézni azt, hogy ezt az igazságos árat hogyan számítjuk ki.

Először meg kell határoznunk a Cox–Ross–Rubinstein modellben a P_N^* ekvivalens martingál mértéket. Ezt a 9.1.8. Tétel segítségével tehetjük meg. Eszerint ezen ekvivalens martingál mérték szerint továbbra is igaz az $S_{k,N} = (1 + \rho_{k,N})S_{k-1,N}$ azonosság, csak ebben az esetben az egymástól független $\rho_{k,N}$ valószínűségi változók eloszlását a $P(\rho_{k,N} = b_N) = p_N^*$ és $P(\rho_{k,N} = a_N) = (1 - p_N^*)$ képletek határozzák meg, ahol

$$p_N^* = \frac{r_N - a_N}{b_N - a_N}.$$

Az európai K kötési árú vételi opció igazságos ára az N üzletkötési időpontot tartalmazó Cox–Ross–Rubinstein modellben

$$C_N(K) = E_N^* \frac{|S_{N,N} - K|_+}{B_{N,N}}.$$

Erre a kifejezésre kell jó aszimptotikus formulát adni. Annak érdekében, hogy ezt megtehessük először az $S_{N,N}$ valószínűségi változót írjuk fel alkalmas módon. Ennek érdekében vezessük be az Y_N valószinűségi változókat, amelyek a b_N értékű $\rho_{k,N}$ valószínűségi változók számát jelölik a $\rho_{1,N},\dots,\rho_{N,N}$ sorozatban. Ekkor Y_N Binom(N,p_N^*), ezért a $Z_N=\frac{Y_N-Np_N^*}{\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz, ha $N\to\infty$.

A fentiek alapján felírhatjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
S_{N,N} = S_{0,N}(1+b_N)^{Y_N}(1+a_N)^{N-Y_N} &= S_{0,N}\left(\frac{1+b_N}{1+a_N}\right)^{Y_N}(1+a_N)^N \\
= S_{0,N}\exp\Bigg\{\left(\sqrt{Np_N^*(1-p_N^*)}Z_N+Np_N^*\right)&\log\frac{1+b_N}{1+a_N} \\
&+N\log(1+a_N)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Ezután alkalmas sorfejtéssel jó aszimptotikus formulát tudunk adni, először az a_N és b_N majd az $S_{N,N}$ és $C_N(K)$ mennyiségekre. Ennek segítségével megkapjuk a kívánt állítás bizonyítását. A Kevei jegyzet bizonyítása ezen számolások végrehajtásából áll.

Végül megjegyzem, hogy a bizonyítás során a P_N^* illetve P^* ekvivelens martingál mértékkel és nem a Cox–Ross–Rubinstein illetve Black–Sholes modell P_N illetve P eloszlásával dolgoztunk. Ennek következtében a kapott eredmény nem függgött az első modell definiciójában szereplő p_N valószínűségektől és a második modell definiciójában szereplő μ paramétertől.