## A MÁRCIUS 17.-i DOLGOZAT FELADATAI

1.) Minden héten feladunk három gépi lottószelvényt. (90 számból kell eltalálni 5-öt.) A három szelvényt a gép egymástól függetlenül tölti ki. Mi annak a valószínűsége, hogy a hatodik héten lesz először legalább két darab pontosan kéttalálatos szelvényünk? [9]

*Megjegyzés az 1. feladathoz:* A feladat a kérdezett valószínűséget kifejező képlet megadása. Nem szükséges annak értékét numerikusan is kiszámolni.

2.) Ledobunk egyenletes eloszlással egy pontot a $[0,1]$ intervallumra, majd egy másik pontot az $[1,3]$ intervallumra. Mi annak a valószínűsége, hogy a két ledobott pont távolsága kisebb, mint $\frac{1}{2}$? [9]

3.) Van két sziget, az igazmondók és a hazugok szigete. Az igazmondók szigetén mindenki 0.9 valószínűséggel igaz választ ad bármely feltett kérdésre, a hazugok szigetén 0.8 valószínűséggel hamis választ ad. Valaki éjjel a viharos tengeren hajózva eljut a két sziget valamelyikére, 1/2 valószínűséggel az igazmondók, 1/2 valószínűséggel a hazugok szigetére. Megkérdezi az első szembejövő embert, hogy az igazmondók szigetére került-e. Azt a választ kapja, hogy nem. A második embertől, akivel találkozik azt kérdezi, hogy igaz-e, hogy kétszer kettő néggyel egyenlő. Erre a kérdésre igenlő választ kap. Mi annak a valószínűsége, hogy emberünk az igazmondók szigetére került? [9]

4.) Van két urna, és mindkettőben 10 piros és 30 fehér golyó. Kihúzunk mind a két urnából 10 golyót, az elsőből visszatevéssel, a másodikból visszatevés nélkül. Mi a két urnából együtt kihúzott piros golyók számának a várható értéke és szórásnégyzete? [9]

5.) Feldobunk egy szabályos dobókockát 10-szer egymás után. Jelölje $\xi$ a páros értékű dobáseredményeknek az összegét. Számolja ki az $E\xi^3$ várható értéket. [9]

6.) Legyen $A$, $B$ és $C$ három esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ezek az események függetlenek? [5]

## MEGOLDÁSOK.

1.) Annak valószínűsége, hogy egy szelvényen két találatunk lesz $P(A) = \frac{\binom{5}{2}\binom{85}{3}}{\binom{90}{5}}$, annak valószínűsége, hogy egy héten lesz legalább két (azaz kettő vagy három) kéttalálatos szelvényünk $P(B) = 3P(A)^2(1-P(A)) + P(A)^3$. Annak valószínűsége, hogy a hatodik héten lesz először legalább két kéttalálatos szelvényünk $(1-P(B))^5P(B) = \left(1 - 3P(A)^2(1-P(A)) - P(A)^3\right)^5 (3P(A)^2(1-P(A)) + P(A)^3)$.

2.) Jelöljük $x$-szel az első ledobott pont és $y$-nal a második ledobott pont értékét. Ekkor az $(x,y)$ pont a $B = [0,1] \times [1,3]$ téglalapba esik, és annak valószínűsége, hogy ez a pont valamely $A \subset B$ halmazban helyezkedik el $\frac{1}{2}\lambda(A)$, ahol $\lambda(A)$ jelöli az $A$ halmaz területét. Az, hogy az $x$ és $y$ pont távolsága kisebb, mint $\frac{1}{2}$ azt jelenti (felhasználva, hogy az $y - x \geq 0$ egyenlőtlenség minden $(x,y)$ párra teljesül), hogy az $(x, y)$ pont a $B$ téglalap és az $\{(u, v)\colon\ v - u < \frac{1}{2}\}$ félsík metszetébe esik. E két halmaz metszete az $(\frac{1}{2}, 1)$, $(1, 1)$ és $(1, \frac{3}{2})$ csúcsok által meghatározott háromszög, amelynek területe $\frac{1}{8}$. Így a keresett valószínűség $\frac{1}{16}$.

3.) Jelölje $A$ azt az eseményt, hogy emberünk az igazmondók szigetére került, és $B$ azt az eseményt, hogy kérdéseire az adott válaszokat kapta. Ekkor minket a $P(A|B)$ feltételes valószínűség értéke érdekel. Feltevéseink szerint $P(A) = P(\bar{A}) = \frac{1}{2}$, ahol $\bar{A}$ az $A$ esemény komplementerét jelöli. Továbbá, $P(B|A) = 0.1 \cdot 0.9$, (emberünk az első kérdésére hamis, a másodikra igaz választ kapott az igazmondók szigetén) $P(B|\bar{A}) = 0.2^2$, (mind a két kérdésére igaz választ kapott a hazugok szigetén). Ezért $P(A \cap B) = \frac{1}{2} \cdot 0.09$, $P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{2} \cdot 0.04$, $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B) = \frac{1}{2} \cdot (0.09 + 0.04)$, $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{9}{13}$.

4.) Vezessük be a következő $\xi_j$ és $\eta_j$ valószínűségi változókat, $1 \le j \le 10$. Legyen $\xi_j = 1$, ha az első urnából $j$-ik alkalommal kihúzott golyó piros, és $\xi_j = 0$, ha az első urnából $j$-ik alkalommal kihúzott golyó fehér. Hasonlóan, $\eta_j = 1$, ha a második urnából $j$-ik alkalommal kihúzott golyó piros, és $\eta_j = 0$, ha a második urnából $j$-ik alkalommal kihúzott golyó fehér. Vezessük be az $S = \sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j$ és $T = \sum\limits_{j=1}^{10} \eta_j$ valószínűségi változókat. Ekkor az $E(S+T)$ és $\operatorname{Var}(S+T)$ mennyiségeket kell kiszámolnunk. Továbbá $E(S+T) = ES + ET$, és mivel $S$ és $T$ függetlenek $\operatorname{Var}(S+T) = \operatorname{Var} S + \operatorname{Var} T$.

$E\xi_j = \frac{1}{4}$, és $E\eta_j = \frac{1}{4}$. (Itt kihasználtuk, hogy mind a visszatevéses, mind a visszatevés nélküli húzásnál ugyanolyan valószínűséggel húzunk piros golyót a $j$-ik húzásban, mint az elsőben. Innen $ES = \sum\limits_{j=1}^{10} E\xi_j = \frac{10}{4}$ $ET = \sum\limits_{j=1}^{10} E\eta_j = \frac{10}{4}$, $E(S+T) = 5$. A szórásnégyzet kiszámolása érdekében számoljuk ki először a $\operatorname{Var}\xi_j = \operatorname{Var}\eta_j = \frac{1}{4} - (\frac{1}{4})^2 = \frac{3}{16}$ mennyiséget. Innen $\operatorname{Var} S = \frac{30}{16}$. A $\operatorname{Var} T$ kiszámolásához először számoljuk ki a $\operatorname{Cov}(\eta_j, \eta_k) = E\eta_j\eta_k - E\eta_j E\eta_k$, $j \ne k$, $1 \le j, k \le 10$, mennyiségeket. Felírhatjuk, hogy $E\eta_j\eta_k = P(\eta_j = 1, \eta_k = 1) = P(\eta_1 = 1, \eta_2 = 1) = \frac{1}{4} \cdot \frac{9}{39}$, mivel annak valószínűsége, hogy mind a $j$-ik, mind a $k$-ik húzásnál piros golyót húzunk ugyanannyi, mint annak a valószínűsége, hogy az első két húzásban piros golyót húzunk. Ezért $\operatorname{Cov}(\eta_j, \eta_k) = \frac{1}{4}(\frac{9}{39} - \frac{1}{4})$, $\operatorname{Var} T = \sum\limits_{j=1}^{10} \operatorname{Var}\eta_j + \sum\limits_{1 \le j,k \le 10,\ j \ne k} \operatorname{Cov}(\eta_j, \eta_k) = \frac{30}{16} - 90 \cdot \frac{1}{4}\left(\frac{1}{4} - \frac{9}{39}\right)$, $\operatorname{Var}(S+T) = \frac{15}{4} - \frac{45}{104} = \frac{345}{104}$.

5.) Vezessük be a következő valószínűségi változókat: $\xi_j(\omega) = k$, ha a $j$-ik dobás eredménye $k = 2, 4$ vagy $k = 6$, és $\xi_j = 0$, ha a $j$-ik dobás eredménye 1, 3 vagy 5, $1 \le j \le 10$, $1 \le k \le 6$. Ekkor az $E\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ várható értéket kell kiszámítanunk.

Ennek érdekében tekintsük a $\left(\sum\limits_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3$ kifejezést és értsük meg milyen tagokat kapunk, ha elvégezzük a beszorzásokat. Egyrészt megjelenik 10 darab $\xi_j^3$ alakú kifejezés, és $E\xi_j^3 = E\xi_1^3$ minden ilyen tagra. Ezenkívül megjelenik $3{\cdot}10{\cdot}9$ darab $\xi_j^2\xi_k$, $j \neq k$, alakú kifejezés, mert a lehetséges $(j,k)$ párokat $10 \cdot 9$ módon választhatjuk ki, és a $k$ (a négyzetre nem emelt tényező) három helyen szerepelhet a szorzatban. (Tehát például a $\xi_1\xi_2^2$ alakú tagnak 3 lesz az együtthatója a szorzatban.) Továbbá minden ilyen tagra $E\xi_j^2\xi_k = E\xi_j^2 E\xi_k = E\xi_1^2 E\xi_1$. Továbbá, hasonló meggondolások alapján láthatjuk, hogy $10 \cdot 9 \cdot 8$ módon jelenhet meg $\xi_j\xi_k\xi_l$ alakú tag, ahol a $j$, $k$ és $l$ indexek mind különbözőek, és ezekre $E\xi_j\xi_k\xi_l = (E\xi_1)^3$. Valóban, a $\xi_j\xi_k\xi_l$ alakú alakú tagok összeszámlálásánál vegyük észre, hogy $1 \le j < k < l \le 10$ alakú számhármasokat $\binom{10}{3}$ féleképp választhatunk, a $\xi_j$ tényező a szorzatban 3-féleképp jelenhet meg, a szorzat első, második vagy harmadik tagjában, a $\xi_k$ tényező ezután 2-féleképp, a $\xi_l$ tényező pedig egyféleképp választható. Másfajta tag nem jelenik meg a szorzatban. Innen a várható érték additívitását kihasználva azt kapjuk, hogy

$$E\left(\sum_{j=1}^{10} \xi_j(\omega)\right)^3 = 10E\xi_1^3 + 270E\xi_1 E(\xi_1^2) + 720\,(E\xi_1)^3 = 480 + 5040 + 5760 = 11280,$$

mert $E\xi_1 = \frac{1}{6}(2+4+6) = 2$, $E\xi_1^2 = \frac{1}{6}(4+16+36) = \frac{56}{6}$ és $E\xi_1^3 = \frac{1}{6}(8+64+216) = 48$.

6.) Az $A$, $B$ és $C$ események akkor függetlenek, ha teljesítik a következő azonosságokat: $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, $P(A \cap C) = P(A)P(C)$, $P(B \cap C) = P(B)P(C)$, és $P(A \cap B \cap C) = P(A)P(B)P(C)$.