A MÁJUS 5.-i DOLGOZAT FELADATAI

1.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek közül ξ λ paraméterű és η μ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó, azaz a ξ valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$, az η valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x > 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$. Továbbá $\lambda > 0$, $\mu > 0$, és legyen $\lambda \neq \mu$. Számítsa ki a $\xi + \eta$ összeg sűrűségfüggvényét. 9 pont

2.) Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $E\xi = 1$ várható értékkel és $\operatorname{Var}\xi = 2$ szórásnégyzettel. Számolja ki az $Ee^{t\xi}$ várható értéket minden t valós számra. 9 pont

3.) Ledobunk 6000 pontot egymástól függetlenül a $[0, 3]$ intervallumra egyenletes eloszlással, azaz a ledobott pontok helyének sűrűségfüggvénye legyen $f(x) = \frac{1}{3}$, ha $0 \leq x \leq 3$, és $f(x) = 0$ egyébként. Egy jegyzőkönyvbe felírjuk a ledobott pontok némileg módosított értékét a következő módon. Ha a ledobott pont értéke a $[0, 1]$ intervallumba esik, akkor a pont értéket írjuk a jegyzőkönyvbe, ha a pont az $[1, 2]$ intervallumba esik akkor az 1 számot, ha pont a $[2, 3]$ intervallumba esik, akkor a 2 számot írjuk a jegyzőkönyvbe. Adjon egy normális eloszlásfüggvény táblázat segítségével jó közelítő értéket annak valószínűségére, hogy a jegyzőkönyvbe írt 6000 szám összege 6940 és 7080 közé esik. 9 pont

4.) Legyen egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz legyen a sűrűségfüggvénye $f(x) = e^{-x}$, ha $x \geq 0$ és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Számolja ki ξ^4 sűrűségfüggvényét. 9 pont

5.) Legyen az $F(x)$ (nem feltétlenül folytonos) függvény egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Fejezze ki az $F(x)$ eloszlásfüggvény segítségével annak a valószínűségét, hogy ξ egész értéket vesz fel. 9 pont

6.) Legyen ξ_1, ξ_2 és ξ_3 három valós értékű valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy ez a három valószínűségi változó független?

5 pont

Megjegyzés: Ha egy kérdésre több (egymással ekvivalens) helyes választ lehet adni, akkor e definiciók bármelyikének a megadása teljes értékű válasznak minősül.)

MEGOLDÁSOK

1. Tudjuk, hogy a tekintett két független valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvényét az $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du$ konvolució segítségével számíthatjuk ki. Mivel $f(x) = 0$, $g(x) = 0$, ha $x < 0$, ezért a konvolucióban szereplő integrandus $f(u)g(x-u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $x - u < 0$, azaz $u \geq x$. Ezért az $f(u)g(x-u)$ integrandus csak úgy lehet nem nulla, ha $0 \leq u \leq x$. Ez az egyenlőtlenség nem teljesül semmilyen u számra, ha $x < 0$. Innen

$$f * g(x) = \int_0^x \lambda e^{-\lambda u} \mu e^{-\mu(x-u)}\,du = \lambda\mu e^{-\mu x} \int_0^x e^{-(\lambda-\mu)u}\,du, \quad \text{ha } x \geq 0,$$

és $f * g(x) = 0$, ha $x < 0$. Ezért

$$f * g(x) = \frac{\lambda\mu e^{-\mu x}}{\mu - \lambda}\left[e^{-(\lambda-\mu)u}\right]_0^x = \lambda\mu\frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} \qquad \text{ha } x \ge 0 \text{ és } \lambda \ne \mu,$$

és $f * g(x) = 0$, ha $x < 0$.

Megjegyzés: Vizsgáljuk meg, mit kapunk az $f_\lambda * g_\mu(x)$ sűrűségfüggvény értékeként, ha a λ számot fixáljuk, és $\mu \to \lambda$. Most az f és g sűrűségfüggvények helyett f_λ és g_μ függvényeket írunk, hogy jelezzük ezek függését a λ és μ paraméterektől.

Mivel rögzített $x > 0$ számra

$$\lim_{\mu\to\lambda}\frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\mu - \lambda} = -x\lim_{\mu\to\lambda}\frac{e^{-\lambda x} - e^{-\mu x}}{\lambda x - \mu x} = -x\left.\frac{d}{du}e^{-u}\right|_{u=\lambda x} = xe^{-\lambda x},$$

ezért $\lim\limits_{\mu\to\lambda} f_\lambda * g_\mu(x) = \lambda^2 x e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$. Másrészt $\lim\limits_{\mu\to\lambda} f_\lambda * g_\mu(x) = 0$, ha $x < 0$. Ez, összehasonlítva az $f_\lambda * g_\lambda(x)$ konvolucióra kapott eredménnyel azt jelenti, hogy $\lim\limits_{\mu\to\lambda} f_\lambda * g_\mu(x) = f_\lambda * g_\lambda(x)$ minden x számra.

2.) Ha ξ normális eloszlású valószínűségi változó $E\xi = 1$ várható értékkel és $\operatorname{Var}\xi = 2$ szórásnégyzettel, akkor felírható $\xi = \sqrt{2}\eta + 1$ alakban, ahol η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ezért $Ee^{t\xi} = Ee^{t(\sqrt{2}\eta+1)} = e^t Ee^{(\sqrt{2}t)\eta}$. Másrészt

$$\begin{aligned} Ee^{t\eta} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(x-t)^2/2}\,dx \\ &= e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx = e^{t^2/2} \end{aligned}$$

Innen $Ee^{t\xi} = e^t Ee^{(\sqrt{2}t)\eta} = e^{t+t^2}$.

3.) Jelölje ξ_j a j-ik ledobott pont értékét, $1 \le j \le 6000$, és legyen $\eta_j = f(\xi_j)$, ahol az $f(x)$, $0 \le x \le 3$, függvényt az $f(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 1$, ha $1 \le x \le 2$, és $f(x) = 2$, ha $2 \le x \le 3$ képletekkel definiáljuk. Ekkor η_j a j-ik jegyzőkönyvbe írt szám értéke, és minket a $P\left(6940 \le \sum\limits_{j=1}^{6000}\eta_j \le 7080\right)$ valószínűség értéke érdekel. Ennek kiszámítása érdekében számítjuk ki először az $E\eta_j$ és $\operatorname{Var}\eta_j$ mennyiségeket. $E\eta_j = \int_0^3 \frac13 f(x)\,dx = \int_0^1 \frac13 x\,dx + \frac13(1+2) = \frac16 + 1 = \frac76$, $E\eta_j^2 = \int_0^3 \frac13 f^2(x)\,dx = \int_0^1 \frac13 x^2\,dx + \frac13(1^2+2^2) = \frac19 + \frac53 = \frac{16}{9}$, és $\operatorname{Var}\eta_j = E\eta_j^2 - (E\eta_j)^2 = \frac{16}{9} - \frac{49}{36} = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$. Innen az $S = \sum\limits_{j=1}^{6000}\eta_j$ valószínűségi változóra $ES = 7000$, és $\operatorname{Var} S = 2500 = 50^2$. Ezért a centrális határeloszlástétel szerint

$$\begin{aligned} P\left(6940 \le \sum_{j=1}^{6000}\eta_j \le 7080\right) &= P\left(\frac{6940-7000}{50} \le \frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le \frac{7080-7000}{50}\right) \\ &= P\left(-1.2 \le \frac{S - ES}{\sqrt{\operatorname{Var} S}} \le 1.6\right) \sim \Phi(1.6) - \Phi(-1.2) \\ &= \Phi(1.6) + \Phi(1.2) - 1 \sim (0.9452 + 0.8849 - 1) \sim 0.83. \end{aligned}$$

4.) ξ eloszlásfüggvénye $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \geq 0$, és $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x < 0$. Innen ξ^4 eloszlásfüggvénye $G(x) = P(\xi^4 < x) = P(-x^{-1/4} < \xi < x^{1/4}) = 1 - e^{-x^{1/4}}$, ha $x \geq 0$, és $G(x) = 0$, ha $x < 0$. Innen ξ sűrűségfüggvénye a $g(x) = \frac{dG(x)}{dx}$ függvény, ahonnan $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $g(x) = \frac{1}{4}x^{-3/4}e^{-x^{1/4}}$, ha $x > 0$.

5.) Vezessük be az $A_n = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left\{\omega\colon \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} k \leq \xi(\omega) < k + \frac{1}{n}\right\}$ eseményeket minden $n = 1, 2, \dots$ számra, és az $A = \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \left\{\omega\colon \bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty} \xi(\omega) = k\right\}$ eseményt. Ezzel a jelöléssel a $P(A)$ valószínűséget kívánjuk kifejezni a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényének a segítségével. Mivel $A = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, és A_n, $n = 1, 2, \dots$, monoton csökkenő halmazsorozat, ezért $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} P(A_n)$ a valószínűség folytonossági tulajdonsága miatt. Ezenkívül $P(A_n) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} P\left(k \leq \xi(\omega) < k + \frac{1}{n}\right) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} [F(k + \frac{1}{n}) - F(k)]$ (a valószínűség σ-additítása miatt). Innen $P(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} [F(k + \frac{1}{n}) - F(k)] = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} \lim\limits_{n\to\infty} [F(k + \frac{1}{n}) - F(k)]$. Ezt úgy is írhatjuk, hogy $P(A) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} [F(k+0) - F(k)]$.

6.) A ξ_1, ξ_2 és ξ_3 valós értékű valószínűségi változók akkor függetlenek, ha

$$P(\xi_1 < x_1, \xi_2 < x_2, \xi_3 < x_3) = P(\xi_1 < x_1)P(\xi_2 < x_2)P(\xi_3 < x_3)$$

minden valós x_1, x_2, x_3 számhármasra.

Megjegyzés. Tanultuk, hogy az előbb megadott reláció ekvivalens azzal, hogy

$$P(\xi_1 \in A_1, \xi_2 \in A_2, \xi_3 \in A_3) = P(\xi_1 \in A_1)P(\xi_2 \in A_2)P(\xi_3 \in A_3)$$

minden három Borel mérhető A_1, A_2, A_3 halmazból álló rendszerre. Egy ilyen definició is teljes értékű válasznak minősült.