A Valószínűségszámítás I. előadássorozat tizedik témája.

Eloszlások konvergenciájáról. A centrális határeloszlástétel bizonyítása.

A centrális határeloszlástétel azt állítja, hogy bizonyos valószínűségi változók eloszlásainak a sorozata konvergál a normális eloszlásfüggvényhez. E tételnek nem adom meg a teljes, részletes bizonyítását ebben a jegyzetben, de beszélek a bizonyítás során felmerülő legfontosabb kérdésekről.

Először a következő kérdéssel fogok kissé részletesebben foglalkozni. A centrális határeloszlástétel azt mondja ki, hogy bizonyos eloszlásfüggvények (független változók normalizált részletösszegeinek az eloszlásfüggvényei) eloszlásban konvergálnak a normális eloszlásfüggvényhez. De mit jelent az eloszlásban való konvergencia? Ez a kérdés korántsem olyan egyszerű, mint ahogy az első pillanatban gondolnánk. Viszont e kérdés tisztázása szükséges ahhoz, hogy jól megértsük a határeloszlástételek tartalmát és bizonyítási módszerereit. Először megadom a helyes definiciót, és utána elmagyarázom, miért ez a definició fejezi ki a minket érdeklő konvergenciát.

Eloszlásban való konvergencia definiciója. *Legyen $F_n(\cdot)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvények sorozata a számegyenesen. Azt mondjuk, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez, ha $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ az $F(\cdot)$ (határ)eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában.*

Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy $F(\cdot)$ eloszlásfüggvényhez, ha az $F_n(x) = P(\xi_n < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F(x)$ eloszlásfüggvényhez.

Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy ξ valószínűségi változóhoz, ha az $F_n(x) = P(\xi_n < x)$, $-\infty < x < \infty$, eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F(x) = P(\xi < x)$, $-\infty < x < \infty$ eloszlásfüggvényhez.

1. megjegyzés: A fenti definicióban van bizonyos önismétlés. Sokszor előfordul, hogy ugyanazt a fogalmat némileg eltérő szóhasználatban használják. Ezért egymás mellett felsoroltam a különböző lehetséges megfogalmazásokat. Tulajdonképpen csak arról van szó, hogy valószínűségi változók eloszlásban való konvergenciáján e valószínűségi változók eloszlásának az eloszlásban való konvergenciáját értjük. Továbbá azt mondhatjuk, hogy az eloszlásban való konvergencia limesze egy ξ valószínűségi változó, ha a limesz ennek a valószínűségi változónak az eloszlása.

2. megjegyzés: A normális eloszlásfüggvény minden pontban folytonos. Ezért a centrális határeloszlásfüggvény azt mondja ki, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizáltjainak az eloszlásfüggvényei minden pontban konvergálnak a standard normális eloszlásfüggvényhez. Ebben az esetben nincs jelentősége annak, hogy a határeloszlásl ásfüggvény (jelen esetben nem létező) szakadási pontjaiban nem követeljük meg a konvergenciát.

Felmerül a kérdés, hogy miért van kitüntetett szerepe a határeloszlásfüggvény szakadási pontjainak az eloszlásfüggvény konvergenciájának definiciójában. Természetes-e, hogy ezekben a pontokban nem követeltük meg a konvergenciát? E kérdés megértésének érdekében a következő észrevételt teszem.

Egy a számegegyenesen megadott F eloszlásfüggvény indukál egy valószínűségi mértéket a számegyenesen. Ennek a Stieltjes mértéknek nevezett mérték létezéséről szóló eredményt megfogalmaztam a 7. előadás ismertetésében, (lásd a *Tétel eloszlásfüggvények által meghatározott mérték* nevű eredményt az ottani ismertetésben), de az állítás bizonyítását elhagytam, mert az a mértékelmélet feladata. Az is igaz, hogy minden a számegyenesen definiált valószínűségi mérték előállítható, mint egy (egyértelműen meghatározott) eloszlás által indukált Stieltjes mérték. Jelölje, — a 7. előadás jelöléséhez hasonlóan, — μ_F az F eloszlásfüggvény által indukált Stieltjes mértéket. Az eloszlásban való konvergencia definiciójában valójában nem az F_n eloszlásfüggvények konvergenciáját követeljük meg az F eloszlásfüggvényhez, hanem az F_n eloszlásfüggvények által indukált μ_{F_n} Stieltjes mértékek konvergenciáját az F eloszlásfüggvény által indukált μ_F Stieltjes mértékhez. Szemléletesen a μ_{F_n} mértékek úgy képzelhetők el, mint olyan tömegeloszlások a számegyenesen, amelyekben egy $A \subset R$ halmaz „súlya" a $\mu_{F_n}(A)$ mérték. Az eloszlásban való konvergencia azt jelenti, hogy a μ_{F_n} tömegeloszlások nagy n indexre közel vannak a μ_F tömegeloszláshoz. A μ_{F_n} valószínűségi mérték közelsége a μ_F valószínűségi mértékhez szemléletesen azt jelenti, hogy a μ_{F_n} tömegeloszlás kis megmozgatásával elő lehet állítani a μ_F tömegeloszlást.

Az eloszlásban való konvergencia definiciójának jobb megértése érdekében tekintsük a következő egyszerű példát. Legyen $x_0 = 0$, és x_n, $n = 1, 2, \dots$, olyan számsorozat, amelyre $x_n < 0$, $n = 1, 2, \dots$, és $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$. Legyen μ_{F_n}, $n = 0, 1, 2, \dots$, az a mérték, amely az x_n pontba van koncentrálva, azaz $\mu_{F_n}(\{x_n\}) = 1$, részletesebben $\mu_{F_n}(A) = 1$, ha $x_n \in A$, és $\mu_{F_n}(A) = 0$, ha $x_n \notin A$. A μ_{F_n} eloszlás azon F_n eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mérték, amelyre $F_n(x) = 0$, ha $x \le x_n$, és $F_n(x) = 1$, ha $x > x_n$. Természetes azt várni, hogy az eloszlásfüggvény alkalmas definiciója esetén a most definiált példában az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszláshoz. Másrészt vegyük észre, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F_0(x)$ minden $x \ne 0$ számra. De az $x = 0$ pontban, azaz az F_0 függvény szakadási pontjában ez a konvergencia nem teljesül, mert $F_n(0) = 1$, ha $n \ge 1$, és $F_0(0) = 0$. Tehát az általunk megadott definició szerint az F_n eloszlások eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszláshoz. De ahhoz, hogy ez teljesüljön, szükség volt arra, hogy az eloszlásban való konvergencia definiciójában ne követeljük meg az eloszlásfüggvények konvergenciáját a határfüggvény szakadási pontjaiban.

Be lehet látni, hogy az eloszlásban való konvergencia kifejezi azt a szemléletes tartalmat, amelyet a Stieltjes mértékek tömegeloszlásokkal való reprezentációja sugall. Ezen állítás pontos megfogalmazásával és bizonyításával azonban nem foglalkozom. Ehelyett megfogalmazok egy olyan eredményt, amely az eloszlásban való konvergencia egy más, vizsgálatainkban hasznos jellemzését adja meg. Ezt az eredményt az előadás fő részében csak megfogalmazom, bizonyítását a kiegészítésben írom le. Az eredmény ismertetése után arról írok, hogy az miért hasznos határeloszlástételek vizsgálatában.

Tétel eloszlásban való konvergencia különböző lehetséges jellemzéséről. *Eloszlásfüggvények egy $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots,$ sorozata akkor és csak akkor konvergál eloszlásban egy $F(u)$ eloszlásfüggvényhez, ha minden a számegyenesen definiált folytonos és* *korlátos $g(u)$ függvényre teljesül a*

$$\lim_{n\to\infty}\int g(u)\,dF_n(u)=\int g(u)\,dF(u) \tag{a}$$

azonosság.

1. megjegyzés: Az eloszlásban való konvergenciájának két jellemzését adtuk meg. Az egyik az eredeti definició, a másik az előző tételben megadott ekvivalens jellemzés. Azért hasznos számunkra ez a tétel, mert konkrét esetekben egyszerűbb eloszlások konvergenciáját az itt megfogalmazott feltétel, mint az eredeti definició ellenőrzésének a segítségével bizonyítani. Ekkor ugyanis korlátos és folytonos függvényeknek valamilyen eloszlássorozat szerinti integráljának a konvergenciáját kell bebizonyítanuk, és erre az analízisnek jó módszerei vannak. Viszont, mint a centrális határeloszlástételéhez kapcsolódó, az előző előadásban tárgyalt példák is mutatják, a határeloszlástételek gyakorlati alkalmazásaiban általában eloszlásfüggvények konvergenciájának az eredeti definicióját használjuk.

2. megjegyzés: Az eloszlásban való konvergenciát szokás gyenge konvergenciának is nevezni. Érdemes megjegyezni, hogy a funkcionálanalízisben is szokás Banach terek funkcionáljainak gyenge konvergenciájáról beszélni, és az előbb kimondott tétel azt is jelenti, hogy a gyenge konvergenciának a valószínűségszámításban és funkcionálanalízisben használt értelmezése összhangban van egymással. Ugyanis egy a számegyenesen definiált μ (valószínűségi) mértéket fel lehet fogni, mint a korlátos és folytonos függvények Banach terén értelmezett (korlátos és lineáris) funkcionált. Nevezetesen a μ mérték az $f(\cdot)$ korlátos és folytonos függvényhez hozzárendeli a $\mu(f)=\int f(u)\mu(\,du)$ számot. A funkcionálanalízisben definiált fogalomrendszer szerint a μ_n mértékek gyenge konvergenciája a μ mértékhez azt jelenti, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\int f(u)\mu_n(\,du)=\int f(u)\mu(\,du)$ minden folytonos és korlátos függvény esetében, ez pedig a fent kimondott tétel szerint a μ_n mértékeknek, pontosabban az általuk meghatározott $F_n(x)=\mu_n(\{u\colon\ u<x\})$ eloszlásfüggvények gyenge (azaz eloszlásbeli) konvergenciáját jelenti a μ mértékhez, pontosabban az általa meghatározott $F(x)=\mu(\{u\colon\ u<x\})$ eloszlásfüggvényhez.

Sok vizsgálatban az eloszlásban való konvergenciának a tételben megadott jellemzése jobban használható mint az eredeti definició. Megjegyzem, hogy ennek a tételnek van egy másik haszna is. Az itt megfogalmazott eredmény lehetőséget ad arra, hogy eloszlások konvergenciáját általánosabb terekben is definiáljuk. Ilyen igény természetes módon felmerül, ha nemcsak valószínűségi változók, hanem véletlen folyamatok viselkedését is vizsgálni akarjuk. Ebben az esetben az a probléma merül fel, hogy olyan valószínűségi változókkal kell dolgoznunk, amelyek értéküket nem a számegyenesen, hanem egy sokkal gazdagabb térben, például a számegyenesen értelmezett függvények terében veszik fel. Viszont az eloszlásfüggvények konvergenciájának eredeti definiciója nem általánosítható általános terekre, mert az erősen kötődik a számegyenes, (illetve a többdimenziós eloszlások definiciója esetében az euklidészi tér) geometriájához. Ha eloszlásfüggvények helyett valószínűségi mértékeket tekintünk, akkor ezek konvergenciáját természetes módon tudjuk definiálni nagyon általános (topológikus) terekben is az (a) reláció általánosításának a segítségével.

Ha eloszlásfüggvények konvergenciáját az (a) tulajdonság vizsgálatának segítségével akarjuk bebizonyítani, akkor természetes módon felmerül az a kérdés, hogy nem lehetséges-e ezt a feltételt gyengíteni, nem elegendő-e az (a) reláció teljesülését a folytonos és korlátos függvényeknek csak egy elég gazdag részosztályára ellenőrizni, és ennek segítségével eldönteni, hogy teljesül-e az eloszlásban való konvergencia. Természetesen a folytonos és korlátos függvények olyan részosztályát kívánjuk tekinteni, amelyikre ez a feltétel könnyebben ellenőrizhető. Kiderült, hogy erre a kérdésre igenlő választ lehet adni, elegendő csak a trigonometrikus, azaz a $g_t(u) = e^{itu}$ alakú függvényeket tekinteni. E függvényosztály definiciója úgy értendő, hogy minden $-\infty < t < \infty$ paraméterre definiáljuk a $g_t(u) = e^{itu}$, $-\infty < u < \infty$, függvényt a számegyenesen. Megjegyzem, hogy ezek a függvények komplex és nem valós értékűek, de mindazok az eredmények, amelyek valós értékű valószínűségi változókra érvényesek, természetes módon általánosíthatók komplex szám értékű valószínűségi változókra is. A $g_t(u) = e^{itu}$ trigonometrikus függvényekkel azért tudunk jól dolgozni, mert minden $-\infty < s, t < \infty$ paraméterre teljesül a $g_s(u)g_t(u) = e^{isu}e^{itu} = e^{i(s+t)u} = g_{s+t}(u)$ azonosság. Látni fogjuk, hogy ez az azonosság nagy segítséget jelent, ha független valószínűségi változók összegeinek eloszlását vizsgáljuk. Megjegyzem, hogy az ilyen jellegű összefüggések alkalmazása nemcsak a valószínűségszámításban fontos. Ennek általánosításán alapul az algebra egy mély és fontos területe, a csoportreprezentációk elmélete.

A további vizsgálatokban hasznos a karakterisztikus függvények alább megadott definiciója.

Valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a definiciója. *Legyen ξ valószínűségi változó valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és jelölje $F(u) = P(\xi < u)$, $-\infty < u < \infty$, a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. A ξ valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye a*

$$\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} F(\,du), \quad -\infty < t < \infty,$$

függvény. Adva egy F eloszlásfüggvény annak karakterisztikus függvényét úgy definiáljuk, mint egy F eloszlású ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. (Mivel a karakterisztikus függvényt ki lehet számolni a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a segítségével, ezért jogunk van egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről beszélni.)

A következő egyszerű állításokat azok fontossága miatt külön lemma formájában mondom ki.

Lemma valószínűségi változók karakterisztikus függvényének viselkedéséről. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, jelölje $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ e valószínűségi változók összegét és $\varphi_j(t)$, $1 \le j \le n$, a ξ_j valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor az S_n összeg karakterisztikus függvénye a $\psi_n(t) = Ee^{itS_n} = \prod\limits_{j=1}^{n} \varphi_j(t)$,*

$-\infty < t < \infty$, függvény. Ha A és $B \neq 0$ valós számok, akkor az $\frac{S_n - A}{B}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye az

$$Ee^{it(S_n-A)/B} = e^{-itA/B}\psi_n\left(\frac{t}{B}\right) = e^{-itA/B}\prod_{j=1}^n \varphi_j\left(\frac{t}{B}\right)$$

függvény.

Legyen ξ olyan valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénnyel, amelyre teljesül az $E|\xi|^k = \int_{-\infty}^{\infty} |u|^k F(\,du) < \infty$ egyenlőtlenség valamilyen k pozitív egész számra. Ekkor a ξ valószínűségi változó $\varphi(t)$ karakterisztikus függvényének a deriváltjai megadhatók a $\frac{d^j}{dt^j}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(\,du)$ képlettel minden $0 \le j \le k$ és $-\infty < t < \infty$ számra. Speciálisan, $t = 0$ választással $\left.\frac{d^j\varphi(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j F(\,du) = i^j E\xi^j$ minden $0 \le j \le k$ számra.

Bizonyítás:

$$Ee^{itS_n} = E^{it(\xi_1+\cdots+\xi_n)} = Ee^{it\xi_1}e^{it\xi_2}\cdots e^{it\xi_n} = Ee^{it\xi_1}Ee^{it\xi_2}\cdots Ee^{it\xi_n} = \prod_{j=1}^n \varphi_j(t)$$

a ξ_j, $1 \le j \le n$, illetve az $e^{it\xi_j}$, $1 \le j \le n$, valószínűségi változók ebből következő függetlensége miatt. Ezenkívül

$$Ee^{it(S_n-A)/B} = Ee^{i(t/B)S_n}e^{-itA/B} = e^{-itA/B}\psi_n\left(\frac{t}{B}\right), = e^{-itA/B}\prod_{j=1}^n \varphi_j\left(\frac{t}{B}\right),$$

ha az S_n valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\psi_n(t)$. Innen következnek a Lemma első paragrafusában kimondott állítások.

A Lemma második paragrafusában kimondott állítás bizonyítása érdekében írjuk fel a $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu}F(\,du)$ azonosságot, és differenciáljuk j, $j \le k$, alkalommal. Be lehet látni, hogy az $E|\xi|^k < \infty$ feltétel teljesülése esetén az azonosság jobboldalán az integrálás és differenciálás sorrendje felcserélhető. Innen kapjuk, hogy $\frac{d^j}{dt^j}\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} i^j u^j e^{itu} F(\,du)$. Alkalmazva a $t = 0$ helyettesítést megkapjuk a Lemma utolsó állításának a bizonyítását is.

Megjegyzés: Legyenek $\xi_1, \xi_2 \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_1 = 0$, és vezessük be a $\sigma_2 = \operatorname{Var}\xi_1$, valamint az $Ee^{it\xi_1} = \varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$ jelöléseket. (Azaz $\varphi(t)$ a ξ_1 valószínűségi változó karakterisztikus függvénye.) Legyen továbbá $S_n = \sum\limits_{k=1} \xi_k$ és $\bar S_n = \frac{S_n}{\sqrt{n}\sigma}$ az S_n valószínűségi változó normalizáltja. Ekkor $Ee^{itS_n} = \varphi(t)^n$, $Ee^{it\bar S_n} = \varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right)^n$, és a $\varphi(t)$ függvény 0 körüli Taylor sorfejtésével azt kapjuk, hogy $\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\right) \sim 1 + \frac{t}{\sqrt{n}\sigma}\varphi'(0) + \frac{t^2}{2n\sigma^2}\varphi''(0) = 1 - \frac{t^2}{2n}$, mert $\varphi'(0) = 0$, és $\varphi''(0) = -\sigma^2$. Ez a formula lehetővé teszi, hogy viszonylag jó becslést adjunk a $\bar S_n$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényére. Azt kívánjuk vizsgálni, tudunk-e ilyen módon olyan jó becslést adni a $\bar{S}_n$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényére, amelyből következik a centrális határeloszlástétel független, egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizált összegeire.

Tekintsük először azt a speciális esetet, amikor olyan ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét tekintjük, amely csak egész értékeket vesz fel. Legyen $P(\xi = k) = p_k$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$. Ekkor a ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a $\varphi(t) = Ee^{it\xi} = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} e^{ikt} P(\xi = k) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{ikt}$, $-\infty < t < \infty$ függvény. Ez a $\varphi(t)$ függvény 2π szerint periódikus, és tulajdonképpen egy Fourier sor, amelynek k-ik (azaz az e^{ikt} trigonometrikus függvényhez tartozó) Fourier együtthatója p_k. A Fourier sorok elméletének egy egyszerű, de nagyon fontos eredménye alapján egy $\varphi(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikt}$, $-\pi < t \le \pi$, függvény Fourier együtthatóit a $\varphi(t)$ Fourier sor ismeretében az

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi(t)\, dt \tag{$*$}$$

képlet segítségével ki lehet számolni. Az előbb kimondott Lemma alapján független valószínűségi változók normalizált összegének a karakterisztikus függvényére viszonylag egyszerű és jó közelítést lehet adni. Ez és a $(*)$ formula azt is lehetővé teszi, hogy egész értékű valószínűségi változók esetében jó becslést adjunk annak valószínűségére, hogy független valószínűségi változók összege egy adott értéket vesz fel. Ez lehetővé teszi a centrális határeloszlástétel bizonyítását abban a speciális esetben, ha egész értékű valószínűségi változók összegét vizsgáljuk. Az általános eset vizsgálatának a vezérmotívuma tulajdonképpen az, hogy megpróbáljuk ezt a módszert adaptálni az általános esetre, amikor nem áll rendelkezésünkre a $(*)$ képlethez hasonló viszonylag egyszerű „inverziós formula”. Az egész értékű valószínűségi változók vizsgálatának részleteit nem dolgozom ki. Viszont a kiegészítésben megmutatom, hogyan lehet ennek a módszernek a segítségével az analízis egyik fontos képletét, az előző előadásban megfogalmazott Stirling formulát bebizonyítani.

Ahhoz, hogy karakterisztikus függvényekkel jól tudjunk számolni, szükségünk van egy olyan eredményre, amely azt mondja ki, hogy a trigonometrikus polinomok, azaz az $f(x) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ alakban felírható függvények a folytonos függvények egy elég gazdag részosztályát alkotják. Ilyen jellegű eredmény Weierstrass második approximációs tétele, amely azt mondja ki, hogy folytonos és periodikus függvényeket tetszőleges pontossággal lehet közelíteni a szuprémum normában trigonometrikus polinomokkal. (Weierstrass első approximációs tétele hasonló állítást fogalmaz meg véges intervallumban folytonos függvények polinomokkal való approximálhatóságáról.) Megfogalmazom ezt az eredményt, és (vázlatosan) bebizonyítom annak néhány számunkra fontos következményét.

Weierstrass második approximációs tétele. *Tetszőleges folytonos és 2π szerint periodikus $f(t)$ függvényre és $\varepsilon > 0$ valós számra létezik olyan $P_n(t) = \sum\limits_{k=-n}^{n} a_k e^{ikt}$*

trigonometrikus polinom, amelyre

$$\sup_{-\infty<t<\infty} |f(t) - P_n(t)| < \varepsilon.$$

Ahhoz, hogy eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek konvergenciájából következtetni tudjunk magunknak az eloszlásfüggvényeknek a konvergenciájára tudnunk kell azt, hogy az a karakterisztikus függvények meghatározzák az eloszlásfüggvényeket. Megfogalmazom ezt az eredményt, és megadom ennek bizonyítását Weierstrass második apprximációs tétele segítségével. Ezt a bizonyítást is csak a kiegészítésben ismertetem.

Tétel arról, hogy egy eloszlásfüggvényt meghatároz annak karakterisztikus függvénye. *Legyen $F(\cdot)$ és $G(\cdot)$ két eloszlásfüggvéy, amelyek karakterisztikus függvénye megegyezik. Ekkor $F(x) = G(x)$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

Az előző tétel bizonyítási módszerének finomítása segítségével lehet bebizonyítani a következő eredményt, amelyet fontossága miatt Alaptételnek fogok nevezni. Ennek bizonyítása a Fourier analízis más módszereit is felhasználja. Ezért, illetve időhiány miatt a bizonyításnak csak a legfontosabb részét ismertetem a kiegészítésben.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel. *Legyen $F_n(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(\,du)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$. Ha a $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ határérték létezik minden $-\infty < t < \infty$ számra, és a $\varphi_0(t)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(u)$ eloszlásfüggvény, amelynek a $\varphi_0(t)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az $F_n(u)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, eloszlásfüggvényeknek egy olyan sorozata, amely egy $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, és $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, jelöli az $F_n(u)$, $\varphi_0(t)$ pedig az $F_0(u)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, akkor $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban.

A fent kimondott tétel a valószínűségszámítás rendkívül fontos eredménye, és az eloszlásbeli konvergencia vizsgálatában rendkívül fontos szerepet játszik. Ezért illik tudni ennek az eredménynek a pontos megfogalmazását. Viszont a minket érdeklő határeloszlástétel bizonyításához elegendő tudni e tétel alábbi gyengített változatát, amelynek bizonyítása egyszerűbb.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel gyengített változata. *Legyen $F_n(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvények egy sorozata $\varphi_n(t) = \int e^{itu} F_n(\,du)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$, és $F_0(u)$, $-\infty < u < \infty$, eloszlásfüggvény $\varphi_0(t) = \int e^{itu} F_0(\,du)$ karakterisztikus függvénnyel. Az F_n eloszlásfüggvények akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban az F_0 eloszlásfüggvényhez, ha a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvények konvergálnak a $\varphi_0(t)$ karakterisztikus függvényhez minden $-\infty < t < \infty$ számra.*

Megjegyzés: Az Alaptétel illetve annak gyengített változatának fő jelentősége abban áll, hogy lehetővé teszik eloszlásfüggvények konvergenciájának bizonyítását azok karakterisztikus függvényeinek segítségével. A lényeges különbség az Alaptétel, illetve annak gyengített változata között az, hogy az Alaptétel segít a határeloszlás megtalálásában akkor is, ha azt nem ismerjük a kezdet kezdetén, illetve annak vizsgálatában, hogy létezik-e egyáltalán valamilyen határeloszlás. Ha eleve megvan a jelölt a határeloszlásra, és annak ki tudjuk számítani a karakterisztikus függvényét, (a centrális határeloszlástételben ez a helyzet), akkor a konvergencia bizonyításához elegendő az Alaptétel gyengített változatának a használata.

Mutatok egy példát, amely segít megérteni az Alaptételben a karakterisztikus függvények határértékeként megjelenő függvényre megfogalmazott folytonossági feltétel jelentőségét.

Példa.

Tekintsük olyan ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozatát, amelyekre ξ_n sűrűségfüggvénye $f_n(x) = \frac{1}{n}$, ha $0 < x \le n$, és $f_n(x) = 0$, ha $x < 0$ vagy $x > n$. Értsük meg, hogyan viselkednek a ξ_n valószínűségi változók eloszlásfüggvényei és karakterisztikus függvényei, ha $n \to \infty$.

Nem nehéz belátni, hogy a ξ_n valószínűségi változók F_n eloszlásfüggvényeire teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = 0$ reláció minden x számra. Ez informálisan úgy is interpretálható, hogy ξ_n eloszlása 'kifolyik a végtelenbe', ha $n \to \infty$. Másrészt ξ_n karakterisztikus függvénye $\varphi_n(t) = \frac{1}{n}\int_0^n e^{itx}\,dx = \frac{e^{itn}-1}{itn}$, ha $t \ne 0$, és $\varphi_n(0) = \frac{1}{n}\int_0^n dx = 1$, ha $t = 0$. Mivel $\left|\frac{e^{itn}-1}{itn}\right| \le \frac{2}{tn}$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 0$, ha $t \ne 0$, és $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t) = 1$, ha $t = 0$. Ez azt jelenti, hogy a $\varphi_n(t)$ függvényeknek létezik $\varphi_0(t)$ határértéke, amelyre $\varphi_0(t) = 0$, ha $t \ne 0$, és $\varphi_0(0) = 1$. Tehát a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényeknek létezik $\varphi_0(t)$ határértéke, amely minden pontban folytonos kivéve a $t = 0$ pontot. De a határfüggvény folytonosságát az Alaptételben éppen a $t = 0$ pontban követeltük meg. Ezért ez az eredmény az ebben az esetben nem alkalmazható. Másrészt láttuk, hogy a ξ_n valószínűségi változók nem konvergálnak eloszlásban, mert eloszlásaik 'kifolynak a végtelenbe'. Be lehet látni nem csak ebben a példában, hanem az általános esetben is, hogy az Alaptételben a karakterisztikus függvények határértékének a folyonossága az origóban biztosítja azt, hogy az $F_n(\cdot)$ eloszlások 'nem folyhatnak ki a végtelenbe'.

Megjegyzés. Láttuk a fenti példában, hogy a eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek a konvergenciája önmagában nem elegendő az eloszlásfüggvények eloszlásbeli konvergenciájához. A példa rámutat a probléma lényegére is, arra, hogy biztosítani kell azt, hogy az eloszlásfüggvények által meghatározott mértékek, iletve azok egy része 'ne folyjon ki a végtelenbe'. A harmadik kiegészítésben ezt az állítást pontosabban megfogalmazom. Bevezetem valószínűségi mértékek feszességének a fogalmát, és megmutatom, hogy egy valószínűségi mértéksorozat feszes, ha az őket definiáló eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei az origó egy kis környezetében egy folytonos függvényhez konvergálnak.

Az Alaptétel, illetve annak gyengített változata alapján a centrális határeloszlástétel bizonyításához elég kiszámolni a standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényét, és megmutatni, hogy ha vesszük független, egyforma eloszlású valószínűségi változók összegeinek a normalizáltjait, akkor ezek karakterisztikus függvényei a standard normális eloszlás karakterisztikus függvényéhez tartanak. Először a standard normális eloszlásfüggvény karakerisztikus függvényét számolom ki. Ez a számolás egyszerű, de fontos szerepet játszik benne a komplex függvénytan egyik alapvető eredménye arról, hogy úgynevezett analitikus függvények integrálásánál hogyan lehet áthelyezni az integrálási utat.

Tétel a standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényéről. *A $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}$, $-\infty < u < \infty$, sűrűségfüggvénnyel rendelkező standard normális eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye a $g(t) = e^{-t^2/2}$ függvény, azaz*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = e^{-t^2/2}.$$

Magyarázat:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-(u-it)^2/2} e^{-t^2/2}\, du \\ &= e^{-t^2/2} \int_{-\infty-it}^{\infty-it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du.\end{aligned}$$

A fenti számolásban a szokásos technikát alkalmaztuk, az exponensben szereplő kvadratikus alakot teljes négyzetté alakítotuk át. Azt állítom, hogy

$$\int_{-\infty-it}^{\infty-it} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du = 1.$$

Ez az integrál abban különbözik a standard normális sűrűségfüggvény integráljától, hogy a normális sűrűségfüggvény integrálját nem a valós tengelyen, hanem egy vele párhuzamos egyenesen tekintjük. Azt állítom, hogy ez az integrál ugyanannyi, mintha a valós tengelyen integráltunk volna. Ezt nem nehéz belátni, ha szabad hivatkozni a komplex függvénytan talán legfontosabb eredményére, amely szerint egy analitikus függvény körintegrálja egy zárt görbén nulla. A $g(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-z^2/2}$ függvény körintegrálját vesszük a következő téglalapokon. Rögzítünk egy nagy $R > 0$ számot, és az integrált vesszük a $[-R, R]$, azután az $[R, R - it]$, majd az $[R - it, -R - it]$ végül a $[-R - it, -R]$ szakaszokon. Mivel a $g(z) = e^{-z^2/2}$ függvény analitikus az egész számsíkon, ezért ez a körintegrál nullával egyenlő. Vegyük ennek a határértékét, ha $R \to \infty$. Nem nehéz belátni, hogy $\lim\limits_{R\to\infty} \int_R^{R-it} g(z)\, dz = \lim\limits_{R\to\infty} \int_{-R-it}^{-R} g(z)\, dz = 0$, ahonnan $\int_{-\infty-it}^{\infty-it} g(z)\, dz = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)\, dz = 1$, és ezt kellett belátni.

Vázlatosan ismertetem, hogyan lehet a fenti eredmények segítségével belátni a centrális határeloszlástételt. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású, nulla várható értékű és 1 szórásnégyzetű valószínűségi változók $\varphi(t)$ karakterisztikus függvénnyel. Azt kell belátni, hogy az $\frac{S_n}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ normalizált összegek karakterisztikus függvényei konvergálnak a standard normális eloszlásfüggvény $e^{-t^2/2}$ karakterisztikus függvényéhez, ha $n \to \infty$. Viszont a valószínűségi változók karakterisztikus függvényének viselkedéséről szóló lemma alapján tudjuk, hogy az $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ normalizált összeg karakterisztikus függvénye $\varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n$, továbbá Taylor sorfejtés alapján $\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \sim 1 + i\frac{tE\xi_1}{\sqrt{n}} - \frac{t^2 E\xi_1^2}{2n} = 1 - \frac{t^2}{2n}$. Innen a vizsgált karakterisztikus függvények értékei $\varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)^n \sim \left(1 - \frac{t^2}{2n}\right)^n \sim e^{-t^2/2}$. A teljes bizonyítás kidolgozásához azt kell megmutatni, hogy a felhasznált aszimptotikus azonosságok elég jó közelítést adnak.

Feladat:

Mutassuk meg, a karakterisztikus függvények segítségével, hogy amennyiben ξ és η két független, normális eloszlású valószínűségi változó m_1 és m_2 várható értékkel, σ_1^2 és σ_2^2 szórásnégyzettel, akkor $\xi + \eta$ normális eloszlású valószínűségi változó $m_1 + m_2$ várható értékkel, és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ szórásnégyzettel.

Megoldás: Írjuk fel a ξ valószínűségi változó $\varphi_1(t) = Ee^{it\xi}$ az η valószínűségi változó $\varphi_2(t) = Ee^{it\eta}$ és a $\zeta = \xi + \eta$ valószínűségi változó $\varphi_3(t) = Ee^{it(\xi+\eta)}$ karakterisztikus függvényét. Azt kapjuk, hogy $\varphi_1(t) = e^{itm_1 - \sigma_1^2 t^2/2}$, mert $\xi = \sigma_1 \bar{\xi} + m_1$, ahol ξ_1 standard normális eloszlású valószínűségi változó, ahonnan $\varphi_1(t) = Ee^{it(\sigma_1\bar{\xi} + m_1)} = e^{itm_1} Ee^{i(t\sigma_1)\bar{\xi}} = e^{itm_1} e^{-(t\sigma_1)^2/2}$. Hasonlóan, $\varphi_2(t) = e^{itm_2 - \sigma_2^2 t^2/2}$. Ezért $\varphi_3(t) = \varphi_1(t)\varphi_2(t) = e^{it(m_1+m_2) - (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2/2}$, ahonnan következik, hogy ζ normális eloszlású valószínűségi változó $m_1 + m_2$ várható értékkel és $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$ szórásnégyzettel.

Néhány további feladat:

1.) Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezek távolsága α-nál kisebb ($1 \le \alpha < \sqrt{2}$)?

Megoldás: Jelölje ξ a négyzet egyik, η a négyzet átellenes oldalára ledobott pont értékét. A két ledobott pont távolsága (a Pitagorasz-tétel szerint) $\sqrt{(\xi - \eta)^2 + 1}$, ezért minket a $P(\sqrt{(\xi - \eta)^2 + 1} < \alpha) = P(|\xi - \eta| < \sqrt{\alpha^2 - 1})$ valószínűség értéke érdekel. ξ és η két független a $[0, 1$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A feladatot egyrészt megoldhatjuk a geometriai valószínűségek módszerével. Ekkor azt használjuk, ki, hogy a (ξ, η) véletlen vektor az egységnégyzet egy véletlen pontja, és a keresett valószínűség az $\{(u, v)\colon\ 0 \le u, v \le 1,\ -\sqrt{\alpha^2 - 1} < u - v < \sqrt{\alpha^2 - 1}\}$ halmaz területe, ami $1 - (1 - \sqrt{\alpha^2 - 1})^2 = 2\sqrt{\alpha^2 - 1} - (\alpha^2 - 1)$. Másrészt a minket érdeklő valószínűséget kiszámolhatjuk a 8. téma 18. feladatának a segítségével is. E feladat eredménye szerint ugyanis ismerjük a $\xi - \eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét, ahonnan tetszőleges $0 \le u \le 1$ számra $P(|\xi - \eta| <$

$u) = \int_{-u}^{u} g(x)\,dx = 2\int_0^u (1-x)\,dx = 2u - u^2$ Innen $u = \sqrt{\alpha^2 - 1}$ választással a keresett valószínűség $2\alpha - \alpha^2 = 2\sqrt{\alpha^2-1} - (\alpha^2 - 1)$.

2.) A $[0,1]$ intervallumon találomra felveszünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két felvett pont távolsága kisebb, mint a 0 pontnak a hozzá közelebb eső ponttól való távolsága?

Megoldás: Ezt a feladatot legegyszerűbben a geometriai valószínűségek módszerével tudjuk megoldani. Egyszerűbb először a feladatban kérdezett esemény komplementerének a valószínűségét kiszámolni. Legyen ξ az első, η a második ledobott pont értéke, és vezessük be az $A = \{\omega\colon \xi(\omega) > 2\eta(\omega)\}$ és $B = \{\omega\colon \eta(\omega) > 2\xi(\omega)\}$ eseményeket. Ekkor a minket érdeklő esemény komplementere az $A \cup B$ esemény. Továbbá, az A és B események diszjunktak, $P(A) = P(B)$, ezért $P(A \cup B) = 2P(A)$. A (ξ, η) véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, és az A esemény azt jelenti, hogy ez a pont az $\{(u,v)\colon\ 0 < 2v < u \le 1\}$ halmazba esik. Ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$. Ezért $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, és a keresett valószínűség $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

Megjegyzem, hogy az előbb tekintett $P(A)$ eseményt a következőképp számolhatjuk ki általános elvek segítségével. A (ξ, η) véletlen vektor sűrűségfüggvényét ismerjük. Ez a ξ és η valószínűségi változók függetlensége miatt $g(u,v) = f(u)f(v)$, ahol $f(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, $f(u) = 0$, ha $u < 0$ vagy $u > 1$ a ξ és η valószínűségi változók sűrűségfüggvénye. Innen,

$$\begin{aligned}
P(A) &= \int_{\{(x,y)\colon\ x>2y\}} g(x,y)\,dx\,dy = \int_{\{(x,y)\colon\ x>2y\}} f(x)f(y)\,dx\,dy \\
&= \int_{\{(x,y)\colon\ 1\ge x>2y>0\}} dx\,dy = \int_0^1 \left(\int_0^{x/2} dy \right) dx = \int_0^1 \frac{x}{2}\,dx = \left[\frac{x^2}{4} \right]_0^1 = \frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

3.) Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\frac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Tegyünk először egy általános megjegyzést. Ha adva van két valószínűségi változó ξ és η, amelyek (együttes sűrűségfüggvénye egy ismert $f(u,v)$ sűrűségfüggvény, akkor az $\frac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlásfüggvényét a következő módon számolhatjuk ki: Vezessük be a $g(u,v) = g_x(u,v)$ függvényt, amely a síkon az $\left\{(u,v)\colon\ \frac{v}{u} < x\right\}$ halmaz indikátorfüggvénye, azaz $g(u,v) = 1$, ha $\frac{v}{u} < x$, és $g(u,v) = 0$, ha $\frac{v}{u} \ge x$. Ekkor

$$P\left(\frac{\eta}{\xi} < x \right) = Eg(\xi,\eta) = \int\int g(u,v)f(u,v)\,du\,dv = \int\int_{\{(u,v)\colon\ \frac{v}{u} < x\}} f(u,v)\,du\,dv.$$

Látni fogjuk, hogy az ebben a feladatban vizsgálandó integrál viszonylag egyszerű, könnyebben kezelhető.

A feladatban vizsgálandó hányados eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned}
F(x) = P\left(\frac{\eta}{\xi} < x \right) &= \iint_{v<xu} \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv \\
&= 2\frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\arctan x} \int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.
\end{aligned}$$

Ebben a számolásban a felírt integrált átírtuk $u = r\cos\varphi$, $v = r\sin\varphi$ transzformációval polárkoordinátarendszerben. E számolás során az integrandusban megjelenik az r Jacobian mint szorzó faktor. Ezután azt vegyük észre, hogy a belső r változó szerinti integrál $\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr = \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty = 1$.

Kiszámoltuk a keresett valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. E valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az eloszlásfüggvény deriváltja, azaz az $f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ függvény.

Második megoldás. A (ξ,η) vektor sűrűségfüggvénye $\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen következik, hogy annak valószínűsége, hogy a (ξ,η) vektor egy origóból kiinduló α szögű szögtartományba esik, $\frac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

$$
\begin{aligned}
P\left(\frac{\eta}{\xi} < x\right) &= P\left((\xi,\eta) \in \left[-\frac{\pi}{2}, \arctan x\right) \cup \left[\frac{\pi}{2}, \arctan x + \pi\right) \text{szögtartományban}\right) \\
&= \frac{1}{2\pi} 2\left(\arctan x + \frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x.
\end{aligned}
$$

1. kiegészítés. Néhány az eloszlások konvergenciájával kapcsolatos eredmény bizonyítása.

Az eloszlásban való konvergencia különböző lehetséges jellemzéséről szóló tétel bizonyítása. Tegyük fel először azt, hogy az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy F eloszlásfüggvényhez, és tekintsünk egy folytonos és korlátos $g(\cdot)$ függvényt a számegyenesen. Ekkor a g függvény folytonossága és az F illetve F_n eloszlásfüggvények viselkedése miatt $\pm\infty$ pontok környezetében minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan elég nagy $K = K(\varepsilon) > 0$, amelyre $\int_{u\colon |u|>K} |g(u)|\,dF_n(u) < \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és ez az állítás érvényes akkor is, ha az F_n eloszlásfüggvényt az F eloszlásfüggvénnyel helyettesítjük. Továbbá a folytonos $g(\cdot)$ függvény a $[-K, K]$ intervallumban egyenletesen folytonos. Ennek az észrevételnek és annak a ténynek a segítségével, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$ az $F(\cdot)$ minden folytonossági pontjában be lehet látni, véve a $[-K, K]$ intervallumnak egy olyan elég finom felosztását, amelynek az osztópontjai az F függvény folytonossági pontjai, hogy

$$
\left| \int_{u\colon |u|\le K} g(u)\,dF_n(u) - \int_{u\colon |u|\le K} g(u)\,dF(u) \right| < \varepsilon, \quad \text{ha } n \ge n_0(\varepsilon).
$$

(E lépésben kihasználjuk azt, hogy egy monoton függvénynek csak megszámlálható sok szakadási pontja van. Miért?) Innen $\varepsilon \to 0$ határátmenettel megkapjuk az (a) állítás bizonyítását.

Megfordítva tegyük fel, hogy teljesül az (a) reláció, és legyen x az F függvény folytonossági pontja. Rögzítve egy kis $\varepsilon > 0$ számot definiáljuk a következő $g^{\pm}(u) = g^{\pm}_{x,\varepsilon}(u)$, $-\infty < u < \infty$, folytonos és korlátos függvényeket: $g^+(u) = 0$, ha $u \ge x + \varepsilon$, $g^+(u) = 1$, ha $u \le x$, $g^+(u) = \frac{x+\varepsilon-u}{\varepsilon}$, ha $x \le u \le x + \varepsilon$. Hasonlóan $g^-(u) = 0$, ha

$u \geq x$, $g^- u) = 1$, ha $u \leq x - \varepsilon$, $g^-(u) = \frac{x-u}{\varepsilon}$, ha $x - \varepsilon \leq u \leq x$. Alkalmazva az (a) állítást kapjuk, hogy

$$F(x-\varepsilon) \leq \int g^-_{\varepsilon,x}(u)F(\,du) = \lim_{n\to\infty} \int g^-_{\varepsilon,x}(u)F_n(\,du) \leq \liminf_{n\to\infty} F_n(x)$$
$$\leq \limsup_{n\to\infty} F_n(x) \leq \lim_{n\to\infty} \int g^+_{\varepsilon,x}(u)F_n(\,du) = \int g^+_{\varepsilon,x}(u)F(\,du) \leq F(x+\varepsilon),$$

és véve az $\varepsilon \to 0$ határátmenetet kapjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, feltéve, hogy az x pont az F függvény folytonossági pontja.

Annak bizonyítása, hogy egy eloszlásfüggvényt meghatároz a karakterisztikus függvénye. Vegyük észre, hogy Weierstrass második approximációs tételéből következik, hogy tetszőleges $K > 0$ és $\varepsilon > 0$ számokra és a K szám szerint periodikus $h(\cdot)$ függvényre igaz, hogy létezik olyan $P_n(t) = \sum\limits_{j=-n}^{n} a_j e^{2\pi i j t/K}$ trigonometrikus polinom, amelyre teljesül a $\sup\limits_{-\infty<t<\infty} |P_n(t) - h(t)| \leq \varepsilon$ becslés. Integrálva a $h(\cdot)$ és a $P_n(\cdot)$ függvényt a F és G eloszlásfüggvény szerint, a fenti approximációból kapjuk, hogy $\int |h(u) - P_n(u)|F(\,du) \leq \varepsilon$ és $\int |h(u) - P_n(u)|G(\,du) \leq \varepsilon$. Ezért $\left|\int h(u)F(\,du) - \int h(u)G(\,du)\right| \leq 2\varepsilon$. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$ számra igaz, ezért $\int h(u)F(\,du) = \int h(u)G(\,du)$. Továbbá, innen következik az is, hogy ha $h(\cdot)$ kompakt tartójú, folytonos függvény, azaz ha létezik olyan A szám, amelyre $h(u) = 0$, ha $|u| \geq A$, akkor $\int h(u)F(\,du) = \int h(u)G(\,du)$. Valóban, definiáljuk minden $K > A$ számra azt a $h_K(\cdot)$ függvényt, amely a $h(\cdot)$ függvény $[-K, K]$ intervallumra vett megszorításának a $2K$ szerinti periodikus kiterjesztése, azaz $h_K(u) = h(u - 2lK)$, ahol l olyan egész szám, amelyre $-K \leq u < K$. Ekkor $\int h(u)F(\,du) = \lim\limits_{K\to\infty} \int h_K(u)F(\,du) = \lim\limits_{K\to\infty} \int h_K(u)G(\,du) = \int h(u)G(\,du)$.

Legyenek $-\infty < x < y < \infty$ olyan számok a számegyenesen, amelyek folytonossági pontjai mind az F mind a G eloszlásfüggvénynek. Belátjuk a fenti reláció segítségével, hogy $F(y) - F(x) = G(y) - G(x)$. Valóban, rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot, és definiáljuk a következő $h(\cdot) = h_\varepsilon(\cdot)$függvényt: $h(u) = 1$, ha $x \leq u \leq y$, $h(u) = 0$, ha $y + \varepsilon \leq u$ vagy $u \leq x - \varepsilon$, $h(u) = \frac{y+\varepsilon-u}{\varepsilon}$, ha $y \leq u \leq y + \varepsilon$, $h(u) = \frac{u-x+\varepsilon}{\varepsilon}$, ha $x - \varepsilon \leq u \leq x$. Felhasználva az $\int h^{\pm}_\varepsilon(u)F(\,du) = \int h^{\pm}_\varepsilon(u)G(\,du)$ azonosságot, és azt hogy $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int h_\varepsilon(u)F(\,du) = F(y) - F(x)$, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int h_\varepsilon(u)G(\,du) = G(y) - G(x)$, ha x és y az F és G függvény folytonossági pontjai, $\varepsilon \to 0$ határátmenettel kapjuk az $F(y) - F(x) = G(y) - G(x)$ azonosságot.

Ez utóbbi azonosságot felhasználva és alkalmazva az $x \to -\infty$ határátmenetet kapjuk, hogy $F(y) = G(y)$, ha y mind az $F(\cdot)$ mind a $G(\cdot)$ eloszlásfüggvénynek folytonossági pontja. Mivel az F és G eloszlásfüggvénynek csak megszámlálható sok szakadási pontja van, és mind a két függvény balról folytonos, innen következik, hogy az F és G eloszlásfüggvények megegyeznek.

2. kiegészítés. A Stirling formula és annak egy általánosítása.

A Stirling formula:

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n,$$

A Stirling formula bizonyítása: Először azt mutatom meg, hogy

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}. \tag{a}$$

Tekintsünk egy ξ Poisson eloszlású valószínűségi változót $\lambda = n$ paraméterrel, azaz legyen $P(\xi = k) = \frac{n^k}{k!}e^{-n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Számítsuk ki a ξ valószínűségi változó $P(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvényét. Ez a következő $P_n(t)$ Fourier sor:

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k)e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!}e^{-n+ikt} = e^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ne^{it})^k}{k!} = e^{-n+ne^{it}}.$$

Innen, illetve a $(*)$ formulából $k = n$ választással kapjuk, hogy

$$P(\xi = n) = \frac{n^n}{n!}e^{-n} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int}P_n(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-int-n+ne^{it}})\,dt.$$

Ez az azonosság ekvivalens az (a) formulával.

Az (a) formula alapján a Stirling formula bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt = 1,$$

amit úgyis írhatunk, hogy

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\,dt} = 1.$$

Viszont tekintve az e^{it} függvény Taylor sorát kapjuk, hogy

$$n(e^{it}-1-it) = -n\left(\frac{t^2}{2}+\alpha(t)t^3\right) = -\frac{nt^2}{2}+\beta(t)n^{-1/8},$$

alkalmas $|\alpha(t)| \le$ const. és $|\beta(t)| \le$ const. együtthatókkal, ha $|t| \le n^{3/8}$, ahonnan $e^{n(e^{it}-1-it)} = e^{-nt^2/2}e^{\beta(t)n^{-1/8}} = e^{-nt^2/2}\left(1+\gamma(t)n^{-1/8}\right)$, $|\gamma(t)| \le$ const, ha $t \le n^{3/8}$, és

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}{\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2}\,dt} = 1.$$

Továbbá nem nehéz belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{-n^{-3/8}}^{n^{-3/8}} e^{-nt^2/2}\,dt}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-nt^2/2}\,dt} = 1,$$

ezért elég megmutatni, hogy az $\int_{-\pi}^{-n^{-3/8}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt$ és $\int_{n^{-3/8}}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt$ integrálok elég kicsik. Ennek bizonyításához jegyezzük viszont meg, hogy $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$ tetszőleges z komplex számra, ahol $\operatorname{Re} z$ a z szám valós részét jelöli. Innen

$$|e^{n(e^{it}-1-it)}| = e^{n(\cos t-1)} \le e^{-\text{const.}\, n^{1/4}},$$

ha $n^{3/8} \le |t| \le \pi$, ahonnan következik a kívánt becslés.

A Stirling formula egy általánosítása.

Tekintsük a $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx$, $t>0$, úgynevezett Γ-függvényt. Nem nehéz parciális integrálással belátni, hogy $\Gamma(t) = (t-1)\Gamma(t-1)$, $t>1$, és $\Gamma(1)=1$, Innen azt kapjuk, hogy $\Gamma(n) = (n-1)!$ pozitív egész n számokra. Ezért a $\Gamma(t)$ függvény az $(n-1)!$ kifejezés kiterjesztésének tekinthető pozitív valós számokra. Megmutatom, hogyan lehet a Stirling formula előbb ismertetett bizonyításához hasonló módon a következő jó aszimptotikus formulát bizonyítani a $\Gamma(t)$ függvényre nagy t értékekre:

$$\Gamma(t) \sim \sqrt{2\pi(t-1)}\left(\frac{t-1}{e}\right)^{t-1}, \quad \text{ha } t\to\infty. \tag{b}$$

Ez a formula $t = n+1$ választással speciális esetként tartalmazza a Stirling formulát.

Ebben a számolásban Fourier sorok együtthatóinak a Fourier sor segítségével való a $(*)$ formulában ismertetett kifejezése helyett a Fourier analízis egy fontos eredményét, ezen formula folytonos megfelelőjét használjuk. Ez lehetővé teszi, hogy egy (szép tulajdonságú) függvényt kiszámoljunk a Fourier transzformáltja segítségével.

Legyen az integrálható és folytonos $f(x)$ függvény Fourier transzformáltja az $\tilde f(u) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{iux} f(x)\,dx$ függvény. Tegyük fel, hogy az $\tilde f(u)$ függvény szintén integrálható. Ekkor

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iux}\tilde f(u)\,du \tag{c}$$

Ezt a (c) formulát fogjuk alkalmazni a $\gamma_t(x) = \frac{1}{\Gamma(t)}x^{t-1}e^{-x}$, ha $x>0$ és $\gamma_t(x)=0$, ha $x<0$ függvényre $t>1$ esetben. (A $\gamma_t(x)$ függvényt a a t paraméterű Γ eloszlás sűrűségfüggvényének hívják az irodalomban.)

Számoljuk ki a $\gamma_t(x)$ függvény $\tilde\gamma_t(u)$ Fourier transzformáltját. Azt kapjuk $\bar x = (1-iu)x$ helyettesítéssel, hogy

$$\tilde\gamma_t(u) = \frac{1}{\Gamma(t)}\int_0^\infty e^{-x+iux}x^{t-1}\,dx = \frac{1}{\Gamma(t)}\frac{1}{(1-iu)^t}\int_0^\infty e^{-\bar x}\bar x^{t-1}\,d\bar x = \frac{1}{(1-iu)^t}.$$

Megjegyzés: A fenti képlet alapján $\tilde\gamma_s(u)\tilde\gamma_t(u)=\tilde\gamma_{s+t}u$ minden $s>0$, $t>0$ és valós u számra, ami azt jelenti, hogy $\gamma_s*\gamma_t(x)=\gamma_{s+t}(x)$, ahol $*$ konvoluciót jelöl. Ezt a relációt egyébként a 8. téma 16. feladatának megoldásában közvetlen számolással is bebizonyítottuk. Az előbb megfogalmazott eredmény azt sugallja, hogy nagy t paraméterre a γ_t sűrűségfüggvényű eloszlás, azaz a Γ eloszlás t paraméterrel közelítőleg normális eloszlású a megfelelő paraméterekkel, sőt a $\gamma_t(x)$ sűrűségfüggvény is jól közelíthető a megfelelő paraméterű normális sűrűségfüggvénnyel. Ez a gondolat van az alábbi számolás hátterében, ahol a $\gamma_t(x)$ függvény értékére adunk jó közelítést $x=t$ választással. Az $x=t$ választás azért természetes, mert egy t paraméterű Γ eloszlású valószínűségi változó várható értéke t.

Mivel a $\tilde\gamma_t(u)=\frac{1}{(1-iu)^t}$ függvény integrálható $t>1$ számra

$$\gamma_t(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iux}\frac{1}{(1-iu)^t}\,du$$

a (c) formula alapján. Speciálisan $x=t$ választással

$$\frac{e^{-t}t^{t-1}}{\Gamma(t)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iut}\frac{1}{(1-iu)^t}\,du,$$

azaz

$$\begin{aligned}\Gamma(t)&=\left(\frac{t-1}{e}\right)^{t-1}\frac1e\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\frac{2\pi}{\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iut}\frac{1}{(1-iu)^t}\,du}\\&=\sqrt{2\pi(t-1)}\left(\frac{t-1}{e}\right)^{t-1}\cdot\frac1e\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^{t-1}\cdot\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t-1}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-iut}\frac{1}{(1-iu)^t}\,du}.\end{aligned}$$

Ezen formula segítségével fogjuk bizonyítani a (b) relációt.

Tudjuk, hogy $\lim\limits_{t\to\infty}\frac1e\left(1+\frac{1}{t-1}\right)^t=1$. Ezért a (b) reláció bizonyításához elég megmutatni, hogy $\int_{-\infty}^\infty e^{-iut}\frac{1}{(1-iu)^t}\,du\sim\int_{-\infty}^\infty e^{-tu^2/2}\,du$, mert $\int_{-\infty}^\infty e^{-tu^2/2}\,du=\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt t}\sim\frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{t-1}}$, ha $t\to\infty$.

Az $\int_{-\infty}^\infty e^{-iut}\frac{1}{(1-iu)^t}\,du\sim\int_{-\infty}^\infty e^{-tu^2/2}\,du$ reláció bizonyítása érdekében vegyük észre, hogy a becsülendő integrál integrandusa felírható $e^{-iut}\frac{1}{(1-iu)^t}=\exp\{t(-iu-\log(1-iu))\}=\exp\{-tu^2/2+O(tu^3)\}$ alakban kis u értékekre. Alkalmazva ezt a relációt például $|u|<t^{-3/8}$ értékekre, amikor $tu^3=O(t^{-1/8})$, azt kapjuk hogy, $t\to\infty$ esetén

$$\int_{-t^{-3/8}}^{t^{-3/8}}e^{-iut}\frac{1}{(1-iu)^t}\,du\sim\int_{-t^{-3/8}}^{t^{-3/8}}e^{-tu^2/2}\,du\sim\int_{-\infty}^{\infty}e^{-tu^2/2}\,du. \tag{d}$$

Másrészt $\left|e^{-iut}\frac{1}{(1-iu)^t}\right|=\frac{1}{(1+u^2)^{t/2}}$. Megmutatom ezen azonosság segítségével, hogy

$$\left|\int_{u\colon |u|>t^{-3/8}}e^{-iut}\frac{1}{(1-iu)^t}\,du\right|\le\int_{u\colon |u|>t^{-3/8}}\frac{1}{(1+u^2)^{t/2}}\,du=o(t^{-1/2}), \tag{e}$$

ha $t \to \infty$. A (d) és (e) becslésekből következik a kívánt állítás. Viszont

$$\int_{u\colon |u|>2} \frac{1}{(1+u^2)^{t/2}}\,du \le \int_{u\colon |u|>2} u^{-t}\,du \le 2^{-t} = o(t^{-1/2}),$$

és

$$\int_{u\colon t^{-3/8}<|u|<2} \frac{1}{(1+u^2)^{t/2}}\,du \le \int_{u\colon |u|>t^{-3/8}} e^{-tu^2/1000}\,du = o(t^{-1/2}),$$

és ezen becslésekből következik az (e) reláció.

3. kiegészítés. Az Alaptétel bizonyításának legfontosabb lépése.

Az Alaptétel nehéz és számunkra érdekes része az elégségesség bizonyítása, azaz annak megmutatása, hogy ha valamely $F_n(x)$, $n=1,2,\dots$, eloszlásfüggvények $\varphi_n(t) = \int e^{itx}F_n(\,dx)$, $-\infty<t<\infty$ karakterisztikus függvényei minden t pontban konvergálnak egy az origóban folytonos $\varphi_0(t)$ függvényhez, akkor $\varphi_0(\cdot)$ egy F_0 eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, és az F_n eloszlásfüggvények ehhez az F_0 eloszlásfüggvényhez konvergálnak.

Ezt az állítást viszonylag egyszerű redukálni a következő állításra: Az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(\cdot)$ karakterisztikus függvényeire tett feltételek teljesülése esetén ezek az eloszlásfüggvények relatíve kompaktak, azaz tetszőleges F_{n_k} részsorozatuknak létezik eloszlásban konvergens $F_{n_{k_j}}$ részsorozata. Ugyanis nem nehéz belátni, hogy az $F_{n_{k_j}}$ részsorozatok (függetlenül az n_{k_j} indexsorozat választától) ahhoz az F_0 eloszlásfüggvényhez konvergálnak, amelyiknek $\varphi_0(t)$ a karakterisztikus függvénye. Itt azt az egyszerűen igazolható tényt használjuk ki, hogy az eloszlások konvergenciájából következik azok karakterisztikus függvényeinek a konvergenciája a határeloszlás karakterisztikus függvényéhez. Ezenkívül láttuk az 1. kiegészítés eredményében, hogy egy eloszlásfüggvényt meghatároz annak karakterisztikus függvénye.

A fő probléma tehát annak vizsgálata, hogy hogyan lehet eldönteni azt, hogy mikor relative kompakt eloszlásfüggvények egy sorozata. E probléma vizsgálata kapcsán vezették be az alábbi fogalmat és bizonyították be az utána megfogalmazott eredményt.

Eloszlásfüggvények feszességének a definiciója. *Az $F_n(x)$ eloszlásfüggvények sorozata feszes, ha tetszőleges $\varepsilon>0$ számra létezik olyan $K=K(\varepsilon)$ szám, hogy $[1-F_n(K)]+F_n(-K)\le\varepsilon$ minden $n=1,2,\dots$ indexre.*

Tétel eloszlások relatív kompaktságának és feszességének kapcsolatáról. *Legyen $F_n(\cdot)$, $n=1,2,\dots$, eloszlásfüggvények feszes sorozata a számegyenesen. Ez az eloszlásfüggvény sorozat relatíve kompakt.*

1. megjegyzés. Igaz a tétel megfordítása is, amely szerint eloszlásfüggvények sorozatának relatív kompaktságából következik e sorozat feszessége is. Ennek az állításnak a bizonyítása lényegesen egyszerűbb. De mivel erre az eredményre nem lesz szükségünk, ezt nem bizonyítom.

2. megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy adva egy $F(x)$ eloszlásfüggvény minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $K=K(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre $[1-F(K)]+F(-K)\le\varepsilon$.

Eloszlásfüggvények sorozatának a feszessége azt jelenti, hogy $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvények egy sorozatára a $K = K(\varepsilon)$ küszöbindex megválasztható az n indextől függetlenül úgy, hogy az $[1 - F_n(K)] + F_n(-K) \le \varepsilon$ egyenlőtlenség egyszerre teljesüljön mindegyik $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvényre.

Bizonyításvázlat a tételre. Rögzítsünk egy megszámlálható mindenütt sűrű x_p, $p = 1, 2, \dots$, halmazt a számegyenesen. Egy átlós eljárással (hasonlóan az Arzela–Ascoli tétel bizonyításához) az eloszlásfüggvények tetszőleges F_{n_k} részsorozatának ki tudjuk választani egy olyan $F_{n_{k_j}}$, $j = 1, 2, \dots$ részsorozatát, amelyre létezik az $\hat{F}_0(x_p) = \lim\limits_{j\to\infty} F_{n_{k_j}}(x_p)$ határérték minden $p = 1, 2, \dots$ indexre. Definiáljuk az

$$F_0(x) = \lim_{x_p \to x,\, x_p > 0} \hat{F}_0(x_p)$$

függvényt minden x valós számra, ahol a limeszben tetszőleges x-nél nagyobb számokból álló az x számhoz konvergáló x_p számsorozatot tekintünk. Az $F_n(x)$ függvény, illetve az x_p számok halmazán definiált $\hat{F}_0(x)$ függvény monotonításából következik, hogy ez a definició értelmes, az $F_0(x)$ függvény értéke nem függ az x_p sorozat választásától. Némi munkával az is ellenőrizhető, hogy $F_0(x)$ eloszlásfüggvény. (Itt kell kihasználni az $F_n(x)$ eloszlásfüggvénysorozat feszességét.) Továbbá az is igazolható, hogy $F_0(x) = \lim\limits_{j\to\infty} F_{n_{k_j}}(x)$ az $F_0(\cdot)$ függvény minden folytonossági pontjában. Ezen állításokból következik a tétel eredménye.

A fenti tétel eredménye azért nem elegendő céljainkra, mert eloszlásfüggvények feszességét nehéz közvetlenül ellenőrizni. Ezért hasznos a következő tétel.

Tétel eloszlásfüggvények feszességének biztosításáról a karakterisztikus függvény tulajdonságai alapján. *Legyen adva eloszlásfüggvények $F_n(x)$, sorozata $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényekkel a számegyenesen, $n = 1, 2, \dots$. Ha teljesül a*

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,\left(1 - \varphi_n(t)\right)\, dt = 0 \tag{1}$$

reláció, ahol $\mathrm{Re}\, z$ *a z komplex szám valós részét jelöli, akkor az $F_n(x)$ eloszlásfüggvények sorozata feszes.*

Következmény. *Ha az $F_n(x)$ eloszlásfüggvények $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényei egy a nulla pontban folytonos $\varphi_0(t)$ függvényhez konvergálnak az origó egy kis környezetében, akkor feszesek.*

A következmény bizonyítása. Mivel $\varphi_0(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(0) = 1$, ezért a $\varphi_0(t)$ függvény folytonosságából az origóban következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon)$ szám, amelyre $0 \le \mathrm{Re}\,(1 - \varphi_0(t)) \le \varepsilon$, ha $|t| < \delta_0$. Továbbá $0 \le \mathrm{Re}\,(1 - \varphi_n(t)) \le 2$ minden n és t számra, és $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,(1 - \varphi_n(t)) = \mathrm{Re}\,(1 - \varphi_0(t))$ az origó egy kis környezetében. Ezért a Lebesgue tétel alapján létezik a

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\delta} \left| \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,\left(1 - \varphi_n(t)\right)\, dt \right| = \frac{1}{2\delta} \left| \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,(1 - \varphi_0(t)\, dt \right| \le \varepsilon$$

határérték minden $\delta < \delta_0$ számra. Ez azt jelenti, hogy teljesül a (1) feltétel, és a fenti tétel alapján az $F_n(x)$ függvények feszesek ebben az esetben.

Megjegyzés. Be lehet látni, hogy az (1) formulában megfogalmazott feltétel nemcsak elégséges, hanem ugyanakkor szükséges feltétele is annak, hogy az F_n eloszlásfüggvények feszesek legyenek. Erre a tényre azonban nem lesz szükségünk.

A tétel bizonyítása. Rögzítsünk egy tetszőleges $K > 0$ számot, és írjuk fel a következő azonosságot:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}\,[1-\varphi_n(t)]\,dt &= \int_{-\delta}^{\delta}\frac{1}{2\delta}\int_{-\infty}^{\infty}[1-\cos tx]\;dF_n(x)\,dt\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta}[1-\cos tx]\,dt\,dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{t}{2\delta}-\frac{\sin tx}{2\delta x}\right]_{t=-\delta}^{t=\delta} dF_n(x) \qquad (2)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)\,dF_n(x) = \int_{-K}^{K}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)\,dF_n(x)\\ &\quad+\int_{|x|>K}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)\,dF_n(x) = I_{1,n}^{\delta}(K)+I_{2,n}^{\delta}(K).\end{aligned}$$

Mivel $\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right) \ge 0$ minden x-re és δ-ra, ezért a (2) formula baloldala felső becslést ad az $I_{2,n}^{\delta}(K)$ kifejezésre tetszőleges $\delta > 0$ $n \ge 1$ és $K > 0$ számokra. Ezért az (1) formula alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám és $n_0 = n_0(\delta)$ küszöbindex, amelyekre $\frac{\varepsilon}{2} \ge \int_{|x|>K}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)\,dF_n(x)$, ha $n \ge n_0$, és $K > 0$ tetszőleges. Legyen $K = \frac{2}{\delta}$. Akkor minden $|x| \ge K$ számra $1-\frac{\sin\delta x}{\delta x} \ge \frac{1}{2}$. Ezért az előző becslésből következik, hogy $\frac{\varepsilon}{2} \ge \int_{|x|>K}\left(1-\frac{\sin\delta x}{\delta x}\right)\,dF_n(x) \ge \frac{1}{2}[(1-F_n(K))+F_n(-K)]$, azaz $\varepsilon \ge [(1-F_n(K))+F_n(-K)]$ ezzel a K számmal, ha $n \ge n_0$. A $K > 0$ szám esetleges megnövelésével elérhetjük, hogy a fenti egyenlőtlenség minden $n \ge 1$ számra érvényes legyen. Tehát az F_n, $n = 1,2,\dots,$ eloszlásfüggvények feszesek.

A fenti tétel, illetve annak következménye alapján, ha eloszlásfüggvények egy sorozata teljesíti az Alaptétel feltételeit, akkor az feszes. Ekkor viszont e Kiegészítés másik tétele alapján egy ilyen sorozat relatíve kompakt, és ezt akartuk igazolni. Az előadásban tekintettünk egy olyan példát, amelyben az eloszlássorozatban definiált eloszlások karakterisztikus függvényei az origóban nem folytonos függvényhez konvergáltak. Ebben a példában az eloszlásfüggvények sorozata nem volt feszes.

4. kiegészítés. A karakterisztikus függvény módszer egy számelméleti alkalmazása.

A következő eredmény bizonyítását ismertetem.

Tétel irracionális szám többszöröseinek eloszlásáról moduló 1. *Legyen α irracionális szám. Rögzítsünk egy $[a,b] \subset [0,1]$ intervallumot, és tekintsük minden n pozitív egész számra a $k\alpha$ moduló 1, $1 \le k \le n$, sorozatot, illetve e sorozat $[a,b]$ intervallumba eső pontjainak $\frac{1}{n}\#\{k\colon\ \{k\alpha\} \in [a,b],\ 1 \le k \le n\}$ relatív gyakoriságát, ahol $\#A$ egy A*

halmaz elemeinek számát jelöli, $\{x\}$ pedig egy x szám tört részét. Ez a relatív gyakoriság tetszőleges $[a,b] \subset [0,1]$ intevallumra konvergál az $[a,b]$ intervallum $b-a$ hosszához, ha $n \to \infty$.

Bizonyítás. Az állítás átfogalmazható a következő módon. Definiáljuk minden n számra a következő μ_n valószínűségi mértéket: A μ_n mérték a $k\alpha \pmod 1$, $1 \le k \le n$, pontokba van koncentrálva, és minden ilyen $k\alpha \pmod 1$ pont μ_n mértéke $\frac{1}{n}$. Ekkor a tétel állítása ekvivalens azzal, hogy a μ_n mértéksorozat eloszlásban konvergál a $[0,1]$ intervallumban $f(x) \equiv 1$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező μ_0 egyenletes eloszláshoz.

A karakterisztikus függvény módszer, pontosabban annak a $[0,1]$ mod 1 csoportra megfogalmazott változata azt mondja ki, hogy μ_n valószínűségi mértékek egy sorozatának eloszlásban való konvergenciája egy μ_0 valószínűségi mértékhez ekvivalens azzal, hogy teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} \int e^{2\pi ijx}\mu_n(\,dx) = \int e^{2\pi ijx}\mu_0(\,dx)$ reláció minden $j = 0, \pm1, \pm2, \dots$ egész számra, ahol $i = \sqrt{-1}$. Valójában ez az ekvivalencia következik Weierstrass második approximációs tételéből, és az eloszlásban való konvergencia következő jellemzéséből: Tekintsük a $[0,1]$ mod 1 egységkört, és azon μ_n, $n = 0,1,2,\dots$, valószínűségi mértékeket. A μ_n mértékek akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban a μ_0 mértékhez $n \to \infty$ esetén, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \int f(x)\mu_n(\,dx) = \int f(x)\mu_0(\,dx)$ minden az egységkörön folytonos (és ezért korlátos) $f(x)$ függvényre. (Olyan függvényeket tekintünk, amelyekre $f(1) = f(0)$.)

Viszont a tétel bizonyításához szükséges limesz relációkat könnyen ellenőrizhetjük az adott esetben. Valóban $\int e^{2\pi ijx}\mu_0(\,dx) = \int_0^1 e^{2\pi ijx}\,dx = 0$, ha $j \ne 0$, és

$$\int e^{2\pi ijx}\mu_n(\,dx) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} e^{2\pi ijk\alpha} = \frac{e^{2\pi i(n+1)j\alpha} - e^{2\pi ij\alpha}}{n(e^{2\pi ij\alpha}-1)} \to 0,$$

ha $n \to \infty$, és $j \ne 0$, mert $\left|\frac{e^{2\pi i(n+1)j\alpha} - e^{2\pi ij\alpha}}{n(e^{2\pi ij\alpha}-1)}\right| \le \frac{2}{n(1-\cos 2\pi j\alpha)}$, és $1-\cos 2\pi j\alpha > 0$ minden $j \ne 0$ egész számra, ha α irracionális szám. Másrészt a $j = 0$ indexre $e^{2\pi ijx} = 1$, és $\int \mu_n(\,dx) = \int \mu_0(\,dx) = 1$ minden $n = 1,2,\dots$ számra.

Feladat:

Legyen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ k irracionális szám, amelyek kiegészítve az $\alpha_0 = 1$ számmal lineárisan függetlenek a racionális számok teste felett, azaz az $r_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} r_j\alpha_j = 0$ reláció racionális r_j, $0 \le j \le k$, számokkal csak akkor teljesül, ha $r_j = 0$ minden $0 \le j \le k$ indexre. Rögzítsünk egy $B = \prod\limits_{j=1}^{k}[a_j, b_j] \subset [0,1]^k$ a k-dimenziós egységkocka által tartalmazott téglatestet, és tekintsük minden n pozitív egész számra azon l számok relatív gyakoriságát az $1 \le l \le n$ egész számok között, amelyekre az $(l\alpha_1 \bmod 1, \dots, l\alpha_k \bmod 1)$ vektor beleesik a B téglatestbe. Lássuk be, hogy ez a relatív gyakoriság tart a B téglatest térfogatához, ha $n \to \infty$.