

A Valószínűségszámítás I. előadássorozat második témája.

Kolmogorov valószínűségszámítási modelljének a vizsgálata

Az előző előadás egyik fontos témája volt annak vizsgálata, hogy hogyan lehet véletlen jelenségeket a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle elméletének keretein belül vizsgálni. Ennek érdekében olyan a valószínűségszámítás Kolmogorov-féle definícióját kielégítő (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőket kellett definiálni, amelyekben a minket érdeklő véletlen jelenségek viselkedése vizsgálható. Az elsőként tárgyalt feladatokban olyan speciális véletlen kísérleteket tekintettem, amelyeknek véges sok különböző lehetséges kimenetele volt. Ilyen esetekben viszonylag egyszerű a minket érdeklő jelenségeket leíró valószínűségi mezőt konstruálni. Egy természetes konstrukció első lépésében bevezetjük az ω elemi eseményeket, amelyeket érdemes a tekintett kísérlet lehetséges kimeneteleiként választani, és a kísérlet összes lehetséges kimenetelét felsorolni. Ezután az Ω biztos eseményt úgy definiáljuk, mint az összes ω elemi eseményt tartalmazó halmazt, az \mathcal{A} σ -algebrát pedig mint az Ω összes lehetséges részhalmazából álló σ -algebrát. Végül minden lehetséges ω kimenetelnek megadjuk a valószínűségét, és egy $A \in \mathcal{A}$ halmaz valószínűségét úgy definiáljuk, mint az általa tartalmazott elemi események valószínűségeinek az összegét. Ez a konstrukciós módszer jól működik, ha a tekintett kísérlet lehetséges kimeneteleinek száma véges vagy megszámlálhatóan végtelen. De olyan esetekben, amikor a lehetséges kimenetek száma ennél is nagyobb, például úgynevezett kontinuum számosságú, akkor új gondolatokat és a mértékelmélet néhány mély eredményét kell alkalmazni egy a valószínűségszámítási problémák vizsgálatában alkalmas modell megkonstruálásához.

Tekinthetjük például annak a valószínűségét, hogy egy az egységnégyzetbe véletlenül ledobott pont az egységnégyzet egy részhalmazába esik vagy annak a valószínűségét, hogy egy végtelen fej-írás sorozatban az első n dobásban megjelenő fej-dobások számának a relatív gyakorisága konvergál egy előírt α számhoz. Az ilyen feladatok vizsgálata nehezebb, és ezek igényelték a Kolmogorov-féle modellben szereplő olyan az első hallásra kissé talán szokatlan fogalmak és tulajdonságok bevezetését, mint a σ -algebra vagy a σ -additív halmazfüggvény. Néhány példát mutatok, amelyek jelzik, hogy hogyan lehet ilyen bonyolultabb problémákat Kolmogorov elméletének a segítségével tárgyalni. Előtte azonban megfogalmazok néhány olyan kérdést, amelyek vizsgálata segíthet Kolmogorov elméletének megértésében.

Néhány Kolmogorov elméletével kapcsolatos probléma.

- A) Természetes volt-e az \mathcal{A} σ -algebra bevezetése a valószínűségi mező definíciójában? Mivel csak az \mathcal{A} σ -algebra által tartalmazott halmazok valószínűségét definiáltuk, felmerülhet a kérdés: Nem fordulhat-e elő, hogy olyan esemény valószínűségére vagyunk kíváncsiak, amelyre ezt a valószínűséget nem definiáltuk?
- B) Van-e mélyebb oka annak, hogy a valószínűségi mező definíciójában szereplő P valószínűségi mértékről nem csak azt tettük fel, hogy additív, hanem azt is, hogy σ -additív? A fő probléma annak tisztázása, hogy nem okoz-e ez a követelmény nehézségeket. Előfordulhatnak-e, olyan véletlen jelenségnek, amelyeknek azért nem

tudjuk megadni a Kolmogorov-féle valószínűségi modelljét, mert nem tudjuk biztosítani a modellben megjelenő P valószínűség σ -additivitását?

A fenti kérdésekre megnyugtató választ lehet adni. Ezt fogom ismertetni, részben az előadás fő részében, részben egy kiegészítésben. De e kérdések tisztázása több mély mértékelméleti eredményen alapul, amelyek bizonyítása nem része ezen kurzus anyagának. Ezek bizonyítását elhagyom. Viszont egy kiegészítésben felidézek néhány (korábban tanult) fontos tényt a végtelen és azon belül a megszámlálható halmazokról. E kérdések tárgyalása előtt egy olyan feladat megoldását írom le, amely jelzi, hogy a fent jelzett problémák még viszonylag egyszerű és természetes kérdések vizsgálatában is megjelennek.

1. feladat:

Dobjunk fel egy szabályos pénzdarabot végtelen sokszor. Mi a valószínűsége annak, hogy az első fej-dobás megjelenéséig (szigorúan) kevesebb ideig kell várni, mint az első fej-dobás után arra, hogy a második fej-dobás is megjelenjen?

Megoldás: Jelölje $A(i, j)$ azt az eseményt, hogy az első fej-dobás az i -ik, a második fej-dobás pedig az $i + j$ -ik dobás. Ekkor minket a $B = \bigcup_{(i,j): j>i\geq 1} A(i, j)$ esemény

valószínűsége érdekel. Továbbá, az $A(i, j)$ esemény azt az eseményt jelenti, hogy először $i - 1$ írás, azután fej, utána $j - 1$ írás, utána pedig fej-dobás következik. Ennek valószínűsége $2^{-(i+j)}$. Továbbá az $A(i, j)$ események (halmazok) diszjunktak. Ezért

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(\bigcup_{(i,j): j>i\geq 1} A(i, j)\right) = \sum_{(i,j): j>i\geq 1} P(A(i, j)) \\ &= \sum_{(i,j): j>i\geq 1} 2^{-(i+j)} = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-i} 2^{-j} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-i} \sum_{j=i+1}^{\infty} 2^{-j} = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{-2i} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{1}$$

Érdeemes meggondolni, hogy milyen valószínűségi modellben tudjuk a fenti megoldást tárgyalni, és milyen matematikai ismeretek szükségesek annak igazolásához, hogy jogunk van ebben a modellben dolgozni. Vegyük észre, hogy mivel az első fej-dobásig vagy az első és második fej-dobás között végzett dobások száma tetszőlegesen nagy lehet, ezért a feladatot természetes olyan modellben tárgyalni, ahol végtelen sok független fej-írás dobás lehetséges. Megmutatom, hogyan lehet ilyen modellt konstruálni, és milyen matematikai eredményekre van szükségünk annak igazolásához, hogy ez a modell teljesíti a Kolmogorov-féle elmélet által előírt feltételeket.

Szabályos pénzdarab végtelen számú feldobásának a valószínűségszámítási modellje.

A következő problémát tekintjük. Egy szabályos pénzdarabot feldobunk *végtelen sokszor* egymás után. Alkossuk meg ennek egy lehetséges valószínűségszámítási modelljét, és vizsgáljuk meg, képesek vagyunk-e tárgyalni abban az ilyen dobássorozatokra megfogalmazható természetes problémákat.

A természetes hozzáállás a következő: Legyenek az elemi események az

$$\omega = (\dots, F, \dots, I, \dots)$$

végtelen fej-írás sorozatok, és legyen az Ω biztos esemény az összes ilyen sorozatból álló halmaz. Ezután ki kell jelölni az Ω bizonyos részhalmazából álló \mathcal{A} σ -algebrát és definiálni kell az $A \in \mathcal{A}$ halmazok $P(A)$ valószínűségét. Hangsúlyozni szeretném, hogy nem vagyunk kötelesek az Ω minden lehetséges részhalmazát belevenni az \mathcal{A} σ -algebrába, és azoknak a halmazoknak, amelyek nincsenek benne ebben a σ -algebrában nem kell definiálnunk a valószínűségét. Ezzel a szabadságunkkal élni is fogunk.

Vegyük észre, hogy minden ω elemi eseménynek nulla a valószínűsége, továbbá egy „tipikus” Ω -beli halmaz kontinuum sok ω elemi eseményből áll. Gondoljuk például meg, hogy az az esemény, hogy az első dobás fej azon végtelen fej-írás sorozatokból áll, amelynek első jegye F, ezt pedig tetszőleges további sorrendben követhetik F és I jelek. Az az esemény, hogy az első 20 dobásban több fej-dobás történt, mint írás dobás azon végtelen fej-írás sorozatból áll, amelynek első 20 jegyében legalább 11 F jel van, és más megkötés nincsen. Az előbb definiált halmazok kontinuum sok (null mértékű) ω elemi esemény uniói. Viszont ez az információ nem elegendő ezen halmazok (események) valószínűségének a definíciójához. Hogyan érdemes a minket érdeklő események valószínűségét definiálni?

Természetes a következő gondolat. Vannak bizonyos „szép” halmazok, amelyeknek egy szabályos pénzdobás esetén meg tudjuk adni a valószínűségét. Abból, hogy a valószínűségi mérték σ -additív következik, hogy ezáltal további halmazok valószínűsége is egyértelműen meg van határozva. Abban bízhatunk, hogy ily módon halmazok egy olyan elég gazdag osztályának is meghatároztuk a valószínűségét, amely minden minket érdeklő halmazt tartalmaz, és e halmazok valószínűségét a kívánt módon definiálva jó modellt kapunk. Látni fogjuk, hogy ez az elképzelés helyes, és bizonyos (mély) mértékelméleti ismeretek segítségével jó modellt kapunk.

Fejtsük ki a fent mondottakat részletesebben: Definiáljuk minden $k = 1, 2, \dots$ számra, és k hosszúságú $(\dots, F, \dots, I, \dots)$ sorozatra az

$$A_k(\dots, F, \dots, I, \dots) = \{\omega: \omega \text{ olyan végtelen fej-írás sorozat,} \\ \text{amelynek első } k \text{ jegye ez a } (\dots, F, \dots, I, \dots) \text{ sorozat}\} \quad (*)$$

halmazt, és legyen $P(A_k(\dots, F, \dots, I, \dots)) = 2^{-k}$ e halmaz valószínűsége. Szemléletesen azt tettük, hogy tekintettük azokat az eseményeket, amelyek azt írják le, hogy mi volt az első k dobás eredménye, és ezek valószínűségét úgy definiáltuk ahogy egy szabályos pénzdobás esetében azt tenni kell. Természetes elvárás, hogy az előbbi események legyenek benne a konstruálandó valószínűségi mező \mathcal{A} σ -algebrájában, és ezek valószínűsége legyenek az előbb megadott számok. A valószínűségi mező definíciója lényegében ezen követelmények teljesítéséből áll. A formális definíció megadása érdekében bebizonyítom a következő egyszerű lemmát.

Lemma: *Legyen adva egy Ω halmaz, és Ω részhalmazainak valamilyen \mathcal{F}_0 rendszere. Létezik egy az \mathcal{F}_0 halmazrendszert tartalmazó legszűkebb σ -algebra, azaz egy olyan \mathcal{F} σ -algebra, amelyre igaz, hogy*

a.) \mathcal{F} tartalmazza az \mathcal{F}_0 halmazrendszert, azaz, ha $F \in \mathcal{F}_0$, akkor $F \in \mathcal{F}$.

b.) Ha egy $\bar{\mathcal{F}}$ σ -algebra tartalmazza az \mathcal{F}_0 halmazrendszert, akkor az tartalmazza az \mathcal{F} σ -algebrát is, azaz, ha minden $F \in \mathcal{F}_0$ halmazra teljesül az $F \in \bar{\mathcal{F}}$ reláció, és $\bar{\mathcal{F}}$ σ -algebra, akkor az is igaz, hogy minden $F \in \mathcal{F}$ halmazra teljesül az $F \in \bar{\mathcal{F}}$ reláció.

Megjegyzés: A fenti \mathcal{F} σ -algebrát szokták az \mathcal{F}_0 által generált σ -algebrának is hívni.

Bizonyítás: Vegyük észre, hogy létezik az \mathcal{F}_0 halmazrendszert tartalmazó σ -algebra. Ilyen például, az Ω összes részhalmazát tartalmazó σ -algebra. Tekintsük az \mathcal{F}_0 halmazrendszert tartalmazó összes \mathcal{G} σ -algebra

$$\mathcal{F}^* = \bigcap_{\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}} \mathcal{G}$$

metszetét, ahol $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{G}$ azt jelenti, hogy a \mathcal{G} σ -algebra tartalmazza az \mathcal{F}_0 halmazrendszert, a metszet pedig úgy értendő, hogy $F \in \bigcap \mathcal{G}$, ha $F \in \mathcal{G}$ a metszetben szereplő mindegyik \mathcal{G} σ -algebrára. Nyilván $F \in \mathcal{F}^*$ minden $F \in \mathcal{F}_0$ halmazra. Azt állítom továbbá, hogy \mathcal{F}^* σ -algebra. Valóban, ha F_n , $n = 1, 2, \dots$ halmazokra igaz, hogy $F_n \in \mathcal{F}^*$, akkor az $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n$ halmazra szintén teljesül, hogy $F \in \mathcal{F}^*$. Ugyanis, ekkor minden $\mathcal{G} \supset \mathcal{F}_0$ σ -algebrára, $F_n \in \mathcal{G}$, tehát a σ -algebra tulajdonság miatt $F \in \mathcal{G}$ az ilyen σ -algebrákra. Innen következik, hogy $F = \bigcap_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}^*$. Hasonlóan $\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \in \mathcal{F}^*$, $\Omega \in \mathcal{F}^*$, és $\Omega \setminus F \in \mathcal{F}^*$, ha $F \in \mathcal{F}^*$.

Ezért \mathcal{F}^* egy az \mathcal{F}_0 halmazrendszert tartalmazó σ -algebra. Innen, illetve \mathcal{F}^* definíciójából viszont következik, hogy ez az \mathcal{F}_0 -t tartalmazó legszűkebb σ -algebra.

Jelen esetben tekinthetjük az összes (*) alakú halmazból álló \mathcal{F}_0 halmazrendszert és az általa generált σ -algebrát. Ez lesz a definiálandó (Ω, \mathcal{A}, P) rendszerben az \mathcal{A} σ -algebra. Definiálnunk kell még a P valószínűségi mértéket is az \mathcal{A} σ -algebrán. Ez lehetséges az alább kimondott, és ebben az előadássorozatban bizonyítás nélkül elfogadott (mély) tétel alapján.

Tétel. *Tekintsük az összes fej-írás sorozatból álló Ω halmaz (*) képlet által definiált $A_k(F, \dots, I, \dots)$ alakú halmazokból álló \mathcal{F}_0 halmazrendszert, és az \mathcal{F}_0 halmazrendszer által generált (azaz azt tartalmazó legszűkebb) \mathcal{A} σ -algebrát. Minden rögzített k -ra legyen $P(A_k(F, \dots, I, \dots)) = 2^{-k}$ tetszőleges k -hosszúságú fej-írás sorozatra. (Azaz, akárhogy is adjuk meg az első k dobás eredményét, annak valószínűsége, hogy egy ilyen kezdetű dobássorozat jelenik meg, legyen 2^{-k} .) Ekkor létezik egy és csak egy olyan az \mathcal{A} σ -algebra halmazain definiált P σ -additív halmazfüggvény, amely az $A_k(\dots, F, \dots)$ alakú halmazokon az előbb előírt 2^{-k} értékeket veszi fel. Továbbá az összes ω -t tartalmazó Ω 'biztos eseményre' $P(\Omega) = 1$.*

Megjegyzés: Egy mértékelméleti kiegészítésben megfogalmazom a fenti eredménynek egy hasznos általánosítását, amelyet mértékterek végtelen szorzatáról szóló eredménynek neveznek. Ez lehetővé teszi, hogy véletlen kísérletek végtelen sokszori egymástól

független elvégzését leíró, és a valószínűségi számítás Kolmogorov-féle axiómarendszerét kielégítő modelleket konstruáljunk.

A fenti eredmény azt jelenti, hogy létezik a természetes elvárásokat kielégítő valószínűségi mérték, sőt ezek a feltételek egyértelműen meghatározzák a \mathcal{A} σ -algebra összes eseményének a valószínűségét. A mérték egyértelműsége is fontos tulajdonság. Ez azt fejezi ki, hogy az \mathcal{A} σ -algebrában szereplő halmazok valószínűségi mértéke értelmes, egyértelműen meghatározott szám. Megjegyzem, hogy ez a nem-triviális eredmény valójában speciális esete egy általánosabb eredménynek. Ezeket az eredményeket itt nem tárgyalom, de az ezen előadáshoz írt 2. kiegészítés függelékben megadom a kérdéskör vizsgálatához szükséges legfontosabb tételeket. A részletek pontos kidolgozása a mértékelmélet tantárgy témája.

Megjegyzem, hogy a fent kimondott tétel nem csak azt állította, hogy a valószínűségi mérték additív, hanem azt is, hogy az σ -additív. Vegyük észre, hogy az 1. feladat megoldásában a valószínűségi mértékeknek nem csak az additívitasát hanem a σ -additívitasát is kihasználtuk. (Lásd az (1) formulát.) A következőkben tárgyalok néhány további példát. Látni fogjuk, hogy a 4. feladat két különböző megoldásának az összehasonlítása azt mutatja, hogy a valószínűségi mérték σ -additívitasából nem-triviális azonosságok is következnek.

Feladatok:

- 2.) Dobjunk fel egy szabályos dobókockát egymás után egymástól függetlenül végtelen sokszor. Mutassuk meg, hogy annak a valószínűsége, hogy az első n dobásban pontosan k darab 6-os dobás van $\binom{n}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^k$. Annak a valószínűsége, hogy az n -ik dobásban jelenik meg a 6-os dobás a k -ik alkalommal $\binom{n-1}{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^k$.

Megoldás: Minden dobássorozatnak feleltessük meg azt a J és R jelekből álló sorozatot, amelynek az i -ik helyén a J jel áll, ha a i -ik dobás 6-os, és az R jel, ha az i -ik dobás 1, 2, 3, 4 vagy 5. Ezzel a jelöléssel a feladat első része úgy fogalmazható át, hogy mi annak a valószínűsége, hogy az így definiált J és R jelekből álló sorozat első n tagjában pontosan k darab J és $n - k$ R jel áll. A sorozat minden helyén egymástól függetlenül $\frac{1}{6}$ valószínűséggel J , és $\frac{5}{6}$ valószínűséggel R jel áll. Minden olyan n hosszúságú sorozatnak, amely k darab J és $n - k$ R jelből áll $\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$ a valószínűsége. Mivel $\binom{n}{k}$ olyan n hosszúságú sorozat van, amelynek első n jegyében pontosan k darab J jel van, ezért annak a valószínűsége, hogy a sorozat első n jelében pontosan k darab J jel van $\binom{n}{k} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^k$.

Az, hogy a k -ik J jel a sorozat n -ik tagjában jelenik meg azt jelenti, hogy a sorozat első $n - 1$ tagjában pontosan $k - 1$ J -jel van, és az n -ik jel J . Összesen $\binom{n-1}{k-1}$ ilyen n hosszúságú sorozat van, és minden ilyen sorozat valószínűsége $\left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$. Ezért a második kérdésre a válasz $\binom{n-1}{k-1} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k} \left(\frac{1}{6}\right)^k$.

- 3.) Dobjunk fel egy szabályos dobókockát egymás után egymástól függetlenül végtelen sokszor. Mutassuk meg, hogy nulla annak a valószínűsége, hogy ebben a végtelen dobássorozatban háromnál kevesebb 6-os dobás van. (Valójában, mint a megoldás is mutatni fogja, a három helyett tetszőleges k egész számot is írhattam volna.)

Megoldás: Kényelmesebb azt megmutatni, hogy a vizsgált esemény komplementerének, tehát annak az eseménynek, hogy van legalább 3 hatos dobás a végtelen dobássorozatban 1 a valószínűsége. Jelölje ezt az eseményt A . Elég belátni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra lehet definiálni olyan $A(\varepsilon)$ eseményt, amelyre $A(\varepsilon) \subset A$, és $P(A(\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$. Valóban, innen következik, hogy $P(A) \geq P(A(\varepsilon)) > 1 - \varepsilon$ minden $\varepsilon > 0$ számra. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $P(A) = 1$.

Tekintsünk egy nagy N számot, és definiáljuk azt az A_N eseményt, hogy az első N dobás tartalmaz legalább egy hatos dobást, és az $N + 1$ -ik és $2N$ -ik, illetve a $2N + 1$ -ik és $3N$ -ik dobások között is szerepel legalább egy hatos dobás. Nyilván $A_N \subset A$, ezért elég megmutatni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $N = N(\varepsilon)$ index, amelyre $P(A(\varepsilon)) = P(A_{N(\varepsilon)}) > 1 - \varepsilon$.

Viszont az $P(A_N)$ valószínűséget nem nehéz kiszámolni. Annak valószínűsége, hogy az első N dobás nem tartalmaz hatos dobást $\left(\frac{5}{6}\right)^N$, így annak a valószínűsége, hogy legalább egy hatos dobást tartalmaz $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N$. Hasonlóan számolható ki az is, hogy annak a valószínűsége, hogy az $N + 1$ -ik és $2N$ -ik, illetve a $2N + 1$ -ik és $3N$ -ik dobások között szerepel legalább egy hatos dobás szintén $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N$. Innen $P(A_N) = \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^N\right)^3$. E formula alapján $\lim_{N \rightarrow \infty} P(A_N) = 1$, ezért létezik olyan $N = N(\varepsilon)$, amelyre $P(A_{N(\varepsilon)}) > 1 - \varepsilon$, amint állítottuk.

Második megoldás: Jelölje B_N azt az eseményt, hogy az első N dobásban legalább 3 hatos dobás van. Mint az előző megoldásban láttuk, elég megmutatni azt, hogy $\lim_{N \rightarrow \infty} P(B_N) = 1$ vagy ami ezzel ekvivalens, azt hogy $\lim_{N \rightarrow \infty} P(\Omega \setminus B_N) = 1 - \lim_{N \rightarrow \infty} P(B_N) = 0$. Viszont az $\Omega \setminus B_N$ esemény azt jelenti, hogy az első N dobás 0, 1 vagy 2 hatos dobást tartalmaz. Ezért a 2. feladat eredménye alapján $P(\Omega \setminus B_N) = \binom{N}{0} \left(\frac{5}{6}\right)^N + \binom{N}{1} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-1} \frac{1}{6} + \binom{N}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{N-2} \left(\frac{1}{6}\right)^2$. Innen látható, hogy valóban $\lim_{N \rightarrow \infty} P(\Omega \setminus B_N) = 0$.

Megjegyzés: A valószínűségi mező definíciójából következik, hogy az üres esemény (szemléletesen a be nem következő esemény) valószínűsége nulla. Van olyan esemény, ami bekövetkezhetsen, a valószínűsége mégis nulla. Erre mutat példát az előző feladat eredménye. Később még több ilyen példát fogunk látni.

- 4.) Dobjunk fel egy szabályos dobókockát egymás után egymástól függetlenül végtelen sokszor. Számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy a harmadik hatos dobás vagy a huszadik vagy valamely későbbi dobásban jelenik meg.

Első megoldás. Annak a valószínűsége, hogy a 3. hatos dobás az n -ik dobásban jelenik meg a 2. feladat eredménye alapján $\binom{n-1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \left(\frac{1}{6}\right)^3$. Ezért a tekintett esemény a valószínűsége

$$\sum_{n=20}^{\infty} \binom{n-1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = \sum_{n=19}^{\infty} \binom{n}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^3.$$

Második megoldás. Először megmutatom, hogy annak a valószínűsége, hogy a harmadik hatos dobás a 20. dobásban vagy azután jelenik meg egyenlő annak a valószínűségével, hogy a az első tizenkilenc dobásban 0, 1 vagy két hatos dobás történt. Valóban, a keresett esemény komplementere az az esemény, hogy a harmadik hatos dobás vagy az első tizenkilenc dobás valamelyikében vagy soha nem következett be. De mivel annak valószínűsége, hogy nem következett be három hatos dobás nulla, (lásd a 3. feladat eredményét) és egy esemény bekövetkezésének a valószínűsége egyenlő egy mínusz a komplementer esemény valószínűségével, ezért a keresett valószínűség egyenlő egy mínusz annak a valószínűsége, hogy az első 19 dobásban legalább három hatos dobás történt. Ez viszont egyenlő annak a valószínűségével, hogy az első 19 dobásban 0, 1 vagy két hatos dobás történt. Ezért a második feladat eredménye alapján a keresett valószínűség

$$\left(\frac{5}{6}\right)^{19} + \binom{19}{1} \left(\frac{5}{6}\right)^{18} \frac{1}{6} + \binom{19}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{17} \left(\frac{1}{6}\right)^2.$$

5.)

- a.) Mutassuk meg a 2. feladat (második) eredményének a segítségével és az analízis módszerével, hogy ha egy szabályos dobókockát végtelen sokszor feldobunk, akkor az 1 valószínűséggel tartalmaz legalább 3 hatos dobást. Azaz számoljuk ki ezt a valószínűséget, és mutassuk meg, hogy az 1-gyel egyenlő.
- b.) Az előző feladat két megoldásában ugyanannak az eseménynek a valószínűségére két formálisan különböző kifejezést kaptunk. Mutassuk meg közvetlenül (valószínűségi megfontolások nélkül), hogy a két kifejezés egyenlő.

Megoldás. Oldjuk meg először a feladat a) részét. A 2. feladat eredménye alapján annak a valószínűsége, hogy a 3. hatos dobás az n -ik dobásban jelenik meg

$$\binom{n-1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^3.$$

Ezért annak a valószínűsége, hogy lesz 3 hatos dobás, azaz a 3. hatos dobás bekövetkezik a $k = 3$ -ik, 4-ik, \dots , dobások valamelyikében $\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n-1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^3$, és azt kell megmutatni, hogy $\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n-1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 1$.

Ennek érdekében felírom az $(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} x^k$, ha $|x| < 1$ azonosságot, ahol $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}$. (A fenti azonosság minden valós α számra érvényes, és az $(1+x)^\alpha$ függvény Taylor sorfejtéséből következik.) Vegyük továbbá észre, hogy

$$\binom{n-1}{2} = \binom{n-1}{n-3} = (-1)^{n-1} \frac{(-3)(-4)\cdots(1-n)}{(n-3)!} = (-1)^{n-1} \binom{-3}{n-3}.$$

Ezért $\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n-1}{2} x^{n-3} = \sum_{n=3}^{\infty} \binom{-3}{n-3} (-x)^{n-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-x)^n = (1-x)^{-3}$ minden $|x| < 1$ számra. Speciálisan, $x = \frac{5}{6}$ választással $\sum_{n=3}^{\infty} \binom{n-1}{2} \left(\frac{5}{6}\right)^{n-3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 = 1$, és ezt kellett belátni.

A b) rész igazolása érdekében hasonló számolással bebizonyítom a

$$\begin{aligned} & \binom{19}{0} x^{19} (1-x)^{-3} + \binom{19}{1} x^{18} (1-x)^{-2} + \binom{19}{2} x^{17} (1-x)^{-1} \\ &= \sum_{n=17}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n = \sum_{n=19}^{\infty} \binom{n}{2} x^{n-2} \end{aligned}$$

azonosságot. Előtte azonban megmutatom, hogy ebből az azonosságból következik a kívánt állítás. Valóban, az azonosság mind a két oldalát megszorozva $(1-x)^3$ -nel, és behelyettesítve az $x = \frac{5}{6}$ értéket az így kapott azonosságba megkapjuk, hogy a 4. feladatban szereplő valószínűségekre adott két kifejezés egyenlő. (Az azonosság jobboldalán a feladat első, a baloldalán pedig a feladat második megoldása jelenik meg.)

A bizonyítandó azonosság baloldalán szereplő kifejezést Taylor sorba fejthetjük a következő azonosságok segítségével: $(1-x)^{-3} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-3}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n$, $(1-x)^{-2} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-2}{n} (-1)^n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{n} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} x^n$, és $(1-x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} x^n$. Ezen azonosságok segítségével azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} & x^{19} (1-x)^{-3} + \binom{19}{1} x^{18} (1-x)^{-2} + \binom{19}{2} x^{17} (1-x)^{-1} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+2}{2} \binom{19}{0} x^{n+19} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n+1}{1} \binom{19}{1} x^{n+18} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} \binom{19}{2} x^{n+17} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{2} \binom{19}{0} x^{n+17} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{1} \binom{19}{1} x^{n+17} + \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n}{0} \binom{19}{2} x^{n+17}. \end{aligned}$$

Rendezzük át a fenti azonosság jobboldalát úgy, hogy vonjuk össze az azonos n kitevőt tartalmazó x^n tagokat. Ekkor egy olyan hatványsort kapunk, amelyben x^n együtthatója $\binom{n-17}{2} \binom{19}{0} + \binom{n-17}{1} \binom{19}{1} + \binom{n-17}{0} \binom{19}{2}$ minden $n \geq 17$ kitevőre, és nulla az $n < 17$ kitevőkre. Viszont tudjuk, hogy $\binom{n-17}{2} \binom{19}{0} + \binom{n-17}{1} \binom{19}{1} + \binom{n-17}{0} \binom{19}{2} x^{n+17} = \binom{(n-17)+19}{2} = \binom{n+2}{2}$. (Lásd az első téma jegyzetének kiegészítésében szereplő 7. feladatot, amely ennek az azonosságnak egy általánosítását tartalmazza.) Ez azt jelenti, hogy a bizonyítandó azonosság baloldala $\sum_{n=17}^{\infty} \binom{n+2}{2} x^n = \sum_{n=19}^{\infty} \binom{n}{2} x^{n-2}$ -vel egyenlő. Ezzel a kívánt állítást bebizonyítottuk.

Az előző feladatokban olyan azonosságokat bizonyítottunk viszonylag egyszerű valószínűségszámítási megfontolások segítségével, amelyeknek analitikus bizonyítása sok munkát igényel. Érdemes megjegyezni, hogy valójában a valószínűségszámítási megfontolások háttérében is mély és nehezen bizonyítható eredmények rejtőznek. Számolásainkban feltételeztük, hogy valószínűségek végtelen összegeivel ugyanúgy számolhatunk, mint ahogy végtelen sorokkal számoltunk az elemi analízisben. Ez egy igaz, de nem magától értetődő állítás. Itt használtuk ki azt, hogy a valószínűség σ -additív. Pontosabban fogalmazva azt használtuk ki, hogy egy szabályos dobókocka végtelen sok egymást követő független feldobásának létezik Kolmogorov feltételrendszerét kielégítő valószínűségi modellje. A 3. feladat megoldásainak összehasonlítása segítségével kapott azonosság ezen az igaz, de nem-triviális eredményen alapult.

Tekintsünk még egy egyszerű valószínűségszámítási modellt, valójában a legegyszerűbb modellt, amely sok feladatban megjelenik. Tekintsünk egy kísérletet, amelynek N lehetséges kimenetele van, és ezek mindegyike egyformán valószínű. Egy ilyen kísérlet valószínűségi modellje a következő. Vegyünk egy N elemű $\{x_1, \dots, x_N\}$ halmazt. Defináljuk az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőt a következő módon. $\Omega = \{x_1, \dots, x_N\}$, \mathcal{A} az Ω összes részhalmazából álló halmaz, és egy $A \in \mathcal{A}$ halmazra $P(A) = \frac{|A|}{N}$, ahol $|A|$ az A halmaz elemeinek számát jelöli. Ezt a képletet úgy is szokás interpretálni, hogy

$$\text{valószínűség} = \frac{\text{kedvező esetek száma}}{\text{összes eset száma}},$$

ahol a kedvező eset egy a vizsgált A esemény által tartalmazott elemi eseményt jelent. Természetesen ez a képlet csak akkor érvényes, ha minden lehetséges kimenet (elemi esemény) valószínűsége egyenlő. Sokszor találkozunk olyan feladattal, amelyben ez a feltétel teljesül, viszont az A halmaz közvetett módon, az X halmaz elemeinek bizonyos tulajdonságai által van definiálva. Ilyen feladatokban az A halmaz elemeinek összeszámlálása valamilyen nem feltétlenül egyszerű kombinatorikus megfontolásokat igényel.

Tekintsünk egy ilyen feladatot, egy a lottóhúzás lehetséges eredményének a viselkedésével kapcsolatos problémát. Értsük először meg, hogy a lottóhúzás eredményéről szóló feladatok, vagyis azok a problémák, amelyek arról szólnak, hogy a húzás eredménye milyen valószínűséggel esik egy halmazba, (milyen valószínűséggel teljesít valamilyen tulajdonságot) az előbb említett feladattípusba tartozik. Valóban, ha előírjuk azt is, hogy mi volt az első, a második, \dots ötödik húzás, akkor minden húzássorozat valószínűsége egyenlő, (történetesen $\frac{1}{90 \cdot 89 \cdot 88 \cdot 87 \cdot 86}$). De minket most nem érdekel a húzássorozatban megjelenő számok sorrendje, csak az, hogy melyik 5 húzáseredmény jelent meg. Egy előírt eredmény annak az $5!$ húzássorozat valószínűségének az összege, amely húzássorozatok ezt az 5 számot tartalmazzák tetszőleges sorrendben. Innen következik, hogy minden lehetséges húzáseredménynek ugyanannyi a valószínűsége, nevezetesen $\frac{1}{\binom{90}{5}}$. Oldjuk meg a következő feladatot.

- 6.) Mi annak a valószínűsége, hogy öt, négy illetve, hogy három találatot érünk el egy kitöltött lottószelvényvel?

Megoldás: Egy lottóhúzás során minden lehetséges húzássorozatnak egyforma a valószínűsége. Mint azt korábban láttuk, 90 számból 5 számot $\binom{90}{5}$ -féleképpen lehet kiválasztani, (ha nem számít az, hogy milyen sorrendben húztuk ki a számokat). Ezért annak a valószínűsége, hogy 5 találatunk lesz, azaz pont a lottószelvényen levő számokat húzták ki, $\frac{1}{\binom{90}{5}}$. Az az esemény, hogy 4 találatunk van azt jelenti, hogy egy olyan számötöst húztak ki, amely pontosan 4 olyan számot tartalmaz, amely megegyezik az általunk bejelölt 5 szám valamelyikével. Hány ilyen sorozat van? Egy ilyen sorozat a lottószelvényen megjelölt 5 számból 4-et, az ott meg nem jelölt 85 számból 1-et tartalmaz. Összesen $\binom{5}{4}\binom{85}{1} = 5 \cdot 85$ ilyen sorozat van. Annak a valószínűsége, hogy ezek valamelyikét húzták ki, azaz 4 találatunk lesz $\frac{\binom{85}{1}\binom{5}{4}}{\binom{90}{5}}$. Hasonló megfontolások alapján annak a valószínűsége, hogy 3 találatunk lesz $\frac{\binom{85}{2}\binom{5}{3}}{\binom{90}{5}}$.

Tárgyaljuk az előadás elején felvetett másik kérdést is: Nem okoz-e gondot az, hogy nem minden halmaznak definiáltuk a valószínűségét, hanem csak azoknak, amelyek egy alkalmas σ -algebrába esnek? Erre a kérdésre is megnyugtató, nemleges választ lehet adni, de ez a válasz némi indoklásra szorul. Az indoklás háttérében az az érv van, hogy csak az olyan események valószínűsége érdekel minket, amelyeket bizonyos egyszerű megfigyeléseknek a segítségével pontosan definiálni tudunk. Azt kell megértenünk, hogy az eredeti események segítségével definiált új események (halmazok) benne vannak az ezen események által generált σ -algebrában. Ugyanis az új halmazok definíciója leírható az eredeti halmazok unióinak, metszeteinek és különbségeinek a segítségével. Egy körülményre azonban figyelni kell. Csak olyan definíciókat tekinthetünk, amelyekben véges vagy megszámlálható sok halmaz metszetét vagy unióját vesszük, mert csak így tudjuk biztosítani azt, hogy az újonnan definiált halmazok benne legyenek az eredeti halmazok által generált σ -algebrában. Az e korlátozás miatt felmerülő nehézségek leküzdése érdekében érdemes felidézni néhány klasszikus eredményt. Ilyen számunkra érdekes eredmény például az a tény, hogy a racionális számok a valós számok egy mindenütt sűrű, megszámlálható részhalmazát alkotják. A probléma jobb megértése érdekében tekintsünk néhány példát.

Az első példa a következő:

Állítás: Tekintsük az előbb definiált valószínűségi mezőt, ahol egy szabályos pénzdarab végtelen dobássorozatát definiáltuk. Adva egy ω végtelen fej-írás dobássorozat, jelölje $k(n, \omega)$ az ω sorozat első n jelében szereplő F betűk számát. Lássuk be, hogy az az A halmaz, amelyet úgy definiálunk, hogy

$$A = \left\{ \omega: \text{Létezik a } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n, \omega)}{n} \text{ határérték.} \right\}$$

teljesíti az $A \in \mathcal{A}$ tulajdonságot. Más szavakkal: Az az esemény, hogy a fejdobások relatív gyakoriságának van határértéke azon események közé tartozik, amelyeknek definiáltuk a valószínűségét.

Bizonyítás Az, hogy a $\frac{k(n,\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat valamely ω -ra konvergál, ekvivalens azzal, hogy a $\frac{k(n,\omega)}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat Cauchy sorozat. Ez azt jelenti, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon, \omega)$ küszöbindex, amelyre $n \geq n_0$ és $\bar{n} \geq n_0$ esetén $\left| \frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}} \right| < \varepsilon$. Ez ekvivalens azzal, hogy minden p pozitív egész számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(p, \omega)$ küszöbindex, amelyre $n \geq n_0$ és $\bar{n} \geq n_0$ esetén $\left| \frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}} \right| < \frac{1}{p}$.

Az, hogy ez az utóbbi állítás teljesül egy ω végtelen sorozatra valamilyen p és n_0 számra, ekvivalens azzal, hogy $\omega \in A_{p,n_0}$, ahol

$$\begin{aligned} A_{p,n_0} &= \left\{ \omega: \left| \frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}} \right| < \frac{1}{p} \quad \text{ha } n \geq n_0, \bar{n} \geq n_0 \right\} \\ &= \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcap_{\bar{n}=n_0}^{\infty} \left\{ \omega: \left| \frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}} \right| < \frac{1}{p} \right\} = \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcap_{\bar{n}=n_0}^{\infty} A(p, n, \bar{n}) \end{aligned}$$

az $A(p, n, \bar{n}) = \left\{ \omega: \left| \frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}} \right| < \frac{1}{p} \right\}$ jelöléssel.

Rögzítsünk egy p pozitív egész számot. Egy ω végtelen fej-írás sorozatra akkor és csak akkor létezik olyan $n_0 = n_0(k, \omega)$ küszöbindex, amelyre a $\left| \frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}} \right| < \frac{1}{p}$ reláció teljesül minden $n \geq n_0$ és $\bar{n} \geq n_0$ szám esetén, ha

$$\omega \in A_p = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{p,n}.$$

A $\frac{k(n,\omega)}{n}$ számsorozat azokra az ω elemi eseményekre Cauchy sorozat, amelyekre

$$\omega \in A = \bigcap_{p=1}^{\infty} A_p.$$

Vegyük észre, hogy az $A(p, n, \bar{n}) = \left\{ \omega: \left| \frac{k(n,\omega)}{n} - \frac{k(\bar{n},\omega)}{\bar{n}} \right| < \frac{1}{p} \right\}$ halmaz minden előírt (n, \bar{n}) számpárra és p számra eleme az \mathcal{A} σ -algebrának, mert megmondható, hogy mely $\max(n, \bar{n})$ fej és írásjellel kezdődő sorozatok tartoznak hozzá ehhez a halmazhoz, és melyek nem. Innen és a σ -algebra definíciójából az is következik, hogy az ilyen halmazok segítségével definiált A_{p,n_0} és A_p halmazok minden p és n_0 indexre elemei az \mathcal{A} σ -algebrának, és ugyanez igaz az A halmazra is. Az $A \in \mathcal{A}$ állítást kellett bizonyítanunk.

Tekintek néhány hasonló, de egyszerűbb problémát.

Feladatok:

- 7.) Legyenek A_1, A_2, \dots , események egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$ jelöli azt az eseményt, hogy az A_1, A_2, \dots , események közül végtelen sok bekövetkezik.

Megoldás: Az, hogy az A_n események közül végtelen sok bekövetkezik, azt jelenti, hogy minden pozitív egész n számhoz van olyan $k \geq n$ index, amelyre az az A_k esemény bekövetkezik, azaz a $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n esemény minden pozitív egész n számra bekövetkezik azt jelenti, hogy bekövetkezik a $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \right)$ esemény.

- 8.) Legyenek A_1, A_2, \dots , események egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right)$ jelöli azt az eseményt, hogy az A_1, A_2, \dots , események közül véges sok kivétellel mindegyik bekövetkezik.

Megoldás: Az, hogy az A_n események majdnem mindegyike bekövetkezik, azt jelenti, hogy van olyan n szám, melyre igaz, hogy minden $k \geq n$ indexre bekövetkezik az A_k esemény, azaz a $B_n = \bigcap_{k=n}^{\infty} A_k$ esemény is bekövetkezik. Az, hogy a B_n

esemény bekövetkezik valamely n számra azt jelenti, hogy bekövetkezik az $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=n}^{\infty} A_k \right)$ esemény.

Házi feladat:

Tekintsük egy szabályos pénzdarab végtelen egymás utáni feldobását. Lássuk be, hogy az az esemény, hogy három egymás utáni fej-dobás csak azután történt, hogy e sorozat első elemének a megjelenése előtt már volt tíz fej-dobás mérhető esemény, amelynek van valószínűsége.

Megjegyzés: Mind az itteni mind későbbi feladatok vizsgálata érdekében érdemes feleleveníteni azt, hogy hogyan lehet számolni halmazok metszeteivel, unióival, különbségével. Különösen hasznos feleleveníteni a Morgan-féle azonosságról, illetve a konjunktív és diszjunktív normálformáktól tanultakat.

Egy másik probléma, amelynek megoldása nem-triviális analízisbeli eredmények felhasználását igényli. A geometriai valószínűségek módszere.

Ledobunk egymástól függetlenül egy x és egy y pontot egyenletesen a $[0, 1]$ intervallumba, azaz mind az x mind az y pont egymástól függetlenül $|b - a|$ valószínűséggel esik egy $[a, b] \subset [0, 1]$ intervallumba. Az (x, y) számpár kijelöl egy véletlen pontot az egységnégyzeten. Mi annak a valószínűsége, hogy ez a pont belesik az egységnégyzet valamely A halmazába?

Azt várjuk, hogy ez a valószínűség megegyezik a halmaz és az egységnégyzet metszetének a területével. Ez az elképzelés lényegében helyes, de természetesen csak azal a megszorítással, hogy olyan halmazt tekintünk, amelynek van területe. A következő tételben megfogalmazom az analízisnek azt az eredményét, amely lehetővé teszi a szükséges valószínűségi modell megkonstruálását. Ebben tételben bevezetem az analízisben definiált Borel σ -algebra és Lebesgue mérték fogalmát is.

Tétel a Lebesgue mérték létezéséről az Euklideszi térben. *Tekintsük a sík $[a, b] \times [c, d]$ alakú részhalmazait, (amelyek téglalapok), és definiáljuk ezek területét a $(b-a)(d-c)$ képlet segítségével. Általánosabban, tekintsük az n -dimenziós teret, $n \geq 1$, és abban az $[a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ alakú téglatesteket, ahol $a_j < b_j$, $1 \leq j \leq n$. Definiáljuk e téglatestek térfogatát a $\prod_{j=1}^n (b_j - a_j)$ képlet segítségével. Jelölje \mathcal{B} az ezen téglatesteket tartalmazó legszűkebb σ -algebrát. (Az irodalomban ezt a σ -algebrát a Borel σ -algebrának, a σ -algebra elemeit pedig Borel mérhető halmazoknak nevezik.) Ekkor létezik olyan mérték a \mathcal{B} σ -algebrán, amelyre teljesül az a feltétel, hogy minden téglatest mértéke megegyezik annak térfogatával, és ez a mérték egyértelműen meg van határozva. (Ezt a mértéket hívják az irodalomban Lebesgue mértéknek.) Azoknak a halmazoknak, amelyeknek a geometriában definiálták a térfogatát megegyezik a térfogata és Lebesgue mértéke.*

Ennek az eredménynek a segítségével definiálni tudunk egy számunkra kívánatos valószínűségi modellt. Tekintsük a síkon definiált Lebesgue mérték megszorítását a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnyezet, Borel mérhető részhalmazaira, amelyek egy \mathcal{B}_0 Borel σ -algebrát alkotnak. Definiálhatjuk a következő (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőt.

Legyenek az ω elemi események az egységnyezet pontjai, és a biztos esemény az $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$ egységnyezet. Legyen $\mathcal{A} = \mathcal{B}_0$, a \mathcal{B} Borel σ -algebra megszorítása az egységnyezetre, a P mérték pedig a Lebesgue mérték megszorítása a \mathcal{A} σ -algebrára. Mutatok néhány példát arra, hogy hogyan lehet bizonyos feladatokat megoldani ennek a modellnek a segítségével.

E feladatok megoldása egy olyan modell konstrukcióján alapul, ahol az (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mező Ω halmaza a sík vagy (néhány hasonló problémában) az n dimenziós tér valamely (mérhető) részhalmaza, \mathcal{A} az Ω halmaz Borel mérhető részhalmazából áll, és $P(A)$ az A halmaz alkalmasan normált (a $P(\Omega) = 1$ feltételt teljesítő) térfogata minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra, illetve síkbeli modellek esetén $P(A)$ az A halmaz alkalmasan normalizált területe. Ezt az eljárást a geometriai valószínűségek módszerének is szokás nevezni.

9. feladat: Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

Megoldás: Tekintsük az egységnyezetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnyezeten, amelynek x koordinátája megadja, hogy az első ember az y koordinátája pedig megadja, hogy a második ember mikor (8 plusz hány óraker) érkezett. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnyezeten, azaz annak valószínűsége, hogy ez a pont az egységnyezet egy (szép) részhalmazába esik megegyezik e halmaz területével. Az, hogy a két ember találkozik azt az eseményt jelenti, hogy az így definiált (x, y) pont az egységnyezet

$$A = \left\{ (x, y) : -\frac{1}{2} \leq y - x \leq \frac{1}{2} \right\} \cap [0, 1] \times [0, 1]$$

részhalmazába esik. Ennek a halmaznak a területe $1 - 2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$, és ez a keresett valószínűség.

10. feladat: Két egy méter hosszú botot véletlenszerűen, (egymástól függetlenül) egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi annak a valószínűsége, hogy az így kapott új bot hossza kisebb mint 0.8 méter?

Megoldás: Ez a feladat is tárgyalható hasonló módon. Tekintsük az egységnégyzetet, és válasszuk azt a véletlen pontot az egységnégyzeten, amelynek x koordinátája megadja, hogy hol törtük el az első botot az y koordinátája pedig azt, hogy hol törtük el a második botot. Ekkor az így definiált pont egyenletes eloszlású az egységnégyzeten. Az az esemény, hogy az összeragasztott bot hossza kisebb mint 0.8 megegyezik annak az eseménynek a valószínűségével, hogy az (x, y) pont a következő A_1, A_2, A_3 és A_4 halmazok $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ uniójába esik: $A_1 = \{(x, y): x + y < 0.8\} \cap [0, \frac{1}{2}] \times [0, \frac{1}{2}]$, $A_2 = \{(x, y): x + (1 - y) < 0.8\} \cap [0, \frac{1}{2}] \times [\frac{1}{2}, 1]$, $A_3 = \{(x, y): 1 - x + y < 0.8\} \cap [\frac{1}{2}, 1] \times [0, \frac{1}{2}]$ és $A_4 = \{(x, y): 1 - x + 1 - y < 0.8\} \cap [\frac{1}{2}, 1] \times [\frac{1}{2}, 1]$. Rajzoljuk le ezeket a halmazokat. Az ábra mutatja, hogy az $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ halmaz komplementere az a négyzet amelynek csúcsai a $(0.3, 0.5)$, $(0.5, 0.3)$, $(0.7, 0.5)$, és $(0.5, 0.7)$ pontok. Ennek a négyzetnek a területe, 0.08 tehát a minket érdeklő valószínűség $1 - 0.08 = 0.92$.

Később tanulni fogunk olyan módszereket, amelyek lehetővé teszik a fenti két feladat megoldását más módon. Akkor vissza fogunk térni ezekhez a feladatokhoz.

11. feladat: Dobjunk le az egységintervallumra véletlenül, egymástól függetlenül 2 pontot. (Az, hogy egy pont az egységintervallum valamely részintervallumába esik egyenlő ezen intervallum hosszával.) Ez a két ledobott pont az egységintervallumot három részintervallumra osztja. Mi annak a valószínűsége, hogy az így létrejött három részintervallumból szerkeszthető háromszög?

Megoldás: A három szakaszból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha teljesítik a háromszögegyenlőtlenséget, azaz bármely kettő összhossza nagyobb, mint a harmadik intervallum hossza. Mivel a három részintervallum összhossza 1, ez ekvivalens azzal, hogy mindegyikük hossza kisebb, mint $\frac{1}{2}$. Legyen az első ledobott pont koordinátája x a második ledobott ponté pedig y . Ekkor az (x, y) pont egyenletes eloszlású a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzeten, és a keletkezett szakaszok hossza x , $y - x$ és $1 - y$, ha $x < y$, és y , $x - y$ és $1 - x$, ha $x > y$. A három szakaszból akkor és csak akkor szerkeszthető háromszög, ha a következő két (egymást kizáró) esemény valamelyike bekövetkezik:

$$\text{a.) } 0 \leq x < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < y < 1, 0 < y - x < \frac{1}{2},$$

$$\text{b.) } 0 \leq y < \frac{1}{2}, \frac{1}{2} < x < 1, 0 < x - y < \frac{1}{2}.$$

(Az a.) eset annak felel meg, hogy $x < y$, a b.) eset pedig annak, hogy $y < x$.) Egyszerű geometriai megfontolás mutatja, hogy mind az a) mind a b) esetben definiálhatunk egy olyan $\frac{1}{2}$ hosszú befogókkal rendelkező szabályos derékszögű egyenlőszárú háromszöget, amelyre az a) illetve b) feltétel teljesülése azt jelenti, hogy az (x, y) pont a megfelelő háromszögbe esik. Így a keresett valószínűség $2 \cdot \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$.

12. feladat: Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezek távolsága α -nál kisebb, ($1 \leq \alpha < \sqrt{2}$)?

Megoldás: Jelölje u a négyzet egyik, és v a négyzet átellenes oldalára ledobott pont értékét. A két ledobott pont távolsága (a Pitagorasz-tétel szerint) $\sqrt{(u-v)^2 + 1}$, ezért minket a $P(\sqrt{(u-v)^2 + 1} < \alpha) = P(|u-v| < \sqrt{\alpha^2 - 1})$ valószínűség értéke érdekel, ahol az (u, v) véletlen vektor egyenletes eloszlású a $[0, 1] \times [0, 1]$ egységnégyzeten. A feladatot megoldhatjuk a geometriai valószínűségek módszerével is. Ekkor azt használjuk, ki, hogy mivel az (u, v) véletlen vektor az egységnégyzet egy véletlen pontja, és a keresett valószínűség az $\{(u, v): 0 \leq u, v \leq 1, -\sqrt{\alpha^2 - 1} < u - v < \sqrt{\alpha^2 - 1}\}$ halmaz területe, az a $1 - (1 - \sqrt{\alpha^2 - 1})^2 = 2\sqrt{\alpha^2 - 1} - (\alpha^2 - 1)$ kifejezéssel egyenlő.

13. feladat. A $[0, 1]$ intervallumon találomra felvesszünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két felvett pont távolsága kisebb, mint a 0 pontnak a hozzá közelebb eső ponttól való távolsága?

Megoldás: Ezt a feladatot legegyszerűbben a geometriai valószínűségek módszerével tudjuk megoldani. Egyszerűbb először a feladatban kért esemény komplementerének a valószínűségét kiszámolni. Legyen ξ az első, η a második ledobott pont értéke, és vezessük be az $A = \{\omega: \xi(\omega) > 2\eta(\omega)\}$ és $B = \{\omega: \eta(\omega) > 2\xi(\omega)\}$ eseményeket. Ekkor a minket érdeklő esemény komplementere az $A \cup B$ esemény. Továbbá, az A és B események diszjunktak, $P(A) = P(B)$, ezért $P(A \cup B) = 2P(A)$. A (ξ, η) véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, és az A esemény azt jelenti, hogy ez a véletlen vektor az $\{(u, v): 0 < 2v < u \leq 1\}$ halmazba esik. Ennek valószínűsége $\frac{1}{4}$. Ezért $P(A \cup B) = \frac{1}{2}$, és a keresett valószínűség $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$.

A valószínűség definíciójában feltettük, hogy a valószínűségi mérték nemcsak additív, hanem σ -additív is. Ez kényelmesebbé teszi a számolásokat, és ezenkívül ez tette lehetővé a végtelen dobássorozatot definiáló valószínűségi mérték illetve a pontledobást leíró Lebesgue mérték egyértelmű definícióját. Érdekes megérteni a σ -additív és additív halmazfüggvények közötti kapcsolatot. Belátjuk, hogy a mértékek σ -additivitása ekvivalens azzal, hogy az ilyen halmazfüggvények az additivitáson kívül még egy folytonosságnak nevezett, alább ismertetett tulajdonságot is teljesítenek. Ezt az állítást az alábbi Tétel A eredményben pontosabban is megfogalmazom. A Tétel A (egyszerű) bizonyítását a 2. kiegészítésben adom meg.

Tétel A. Legyen adva egy Ω halmaz, annak bizonyos részhalmazából álló \mathcal{A} σ -algebra, és azon egy véges, P additív nem-negatív halmazfüggvény, azaz feltesszük, hogy $0 < P(\Omega) < \infty$, és $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$, ha A és B diszjunkt halmazok. A P halmazfüggvény akkor és csak akkor σ -additív az \mathcal{A} σ -algebrán, ha teljesíti az alábbi a mérték folytonosságának nevezett tulajdonságot:

Ha $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ az \mathcal{A} σ -algebra olyan elemei, amelyekre

$$\dots \subset A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A_1, \quad \text{és} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset,$$

akkor $\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$.

A fenti állítás akkor is érvényes, ha \mathcal{A} algebra, de nem feltétlenül σ -algebra. Ez esetben a σ -additivitás úgy értendő, hogy amennyiben az A_n , $n = 1, 2, \dots$, halmazok diszjunktak, $A_n \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és ezenkívül az $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$

feltétel is teljesül, akkor $P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$.

Ha P véges, σ -additív nem-negatív halmazfüggvény egy algebrán, akkor teljesíti a fent megfogalmazott folytonossági tulajdonság következő erősebb változatát is. Legyen $B_n \in \mathcal{A}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, az \mathcal{A} algebra olyan monoton csökkenő halmzsorozata, melyre

$$\dots \subset B_n \subset B_{n-1} \subset \dots \subset B_1, \quad \text{és} \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B_0 \in \mathcal{A},$$

$C_n \in \mathcal{A}$, $n = 0, 1, 2, \dots$, az \mathcal{A} algebra olyan monoton növekvő halmzsorozata, melyre

$$\dots \subset C_n \subset C_{n+1} \subset \dots \quad \text{és} \quad \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n = C_0 \in \mathcal{A}.$$

Ekkor $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = P(B_0)$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = P(C_0)$.

Világos, hogy legalábbis formálisan a σ -additivitás erősebb követelmény mint csak az additivitás. De tudunk-e példát adni egy σ -algebrán additív, de nem σ -additív halmazfüggvényre? Elképzelhető-e, hogy a σ -additivitás előírása miatt bizonyos érdekes feladatokra nem tudunk valószínűségi modellt adni?

Ezekre a kérdésekre megnyugtató választ tudunk adni. Léteznek σ -algebrán additív, de nem σ -additív halmazfüggvények. Ezeket viszont mindig csak nem konstruktív módon (kiválasztási axióma vagy egy vele ekvivalens állítás segítségével lehet megadni.) A teljesség kedvéért a 3. kiegészítés részben példát mutatok egy additív, de nem σ -additív halmazfüggvényre. Konkrét, jól megfogalmazható feladatokban nem jelenik meg az a probléma, hogy a valószínűséget megadó természetes jelölt additív, de nem σ -additív.

Végül teszek még egy megjegyzést valószínűségi modellek konstrukciójáról. Ebben az előadásban különböző véletlen jelenségeknek megadtuk egy valószínűségszámítási konstrukcióját. Ezek jó konstrukciók voltak, de nem ezek az egyedüli jó konstrukciók. Például egy szabályos pénzdarab 10 egymás utáni feldobására az is lehet modell, hogy a pénzdarabot, 20 alkalommal dobjuk fel, de az utolsó tíz dobás eredményét nem vesszük figyelembe. Jegyezzük meg azt is, hogy a vizsgált feladatokban a valószínűségek kiszámolásában nem játszott szerepet az, hogy a kívánt feladatnak milyen (a feladat feltételeit kielégítő) modelljét tekintettük.

Kissé részletesebben kifejtve a következőről van szó. A tekintett feladatok mindegyikében bizonyos A_n eseményeket tekintettünk egy (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőn,

amelyek elemei a \mathcal{A} σ -algebrának, és amelyek valószínűségét ismerjük. Bizonyos megfontolások segítségével kiszámoltuk egy ezen A_n eseményektől függő B esemény valószínűségét. A jobb megértés érdekében megkonstruáltunk egy olyan (Ω, \mathcal{A}, P) valószínűségi mezőt, ahol jól át tudjuk tekinteni a feladatot. Ezt a valószínűségi mezőt úgy volt kényelmes megkonstruálni, hogy az A_n események elemi események voltak, azaz olyan események, amelyeket nem lehet kisebb halmazok uniójaként előállítani. De ennek nem volt jelentősége érvelésünkben, amely minden olyan valószínűségi mezőben elmondható, amely teljesíti a vizsgált feladat feltételeit.

1. kiegészítés. Végtelen halmazok számossága. Megszámlálható halmazok.

Két véges halmaz nagyságát természetes módon össze tudjuk hasonlítani. Azt mondjuk, hogy az egyik nagyobb, mint a másik, ha több elemet tartalmaz. Ha két halmaz ugyanannyi elemet tartalmaz, akkor egyforma nagynak tekintjük őket. Felmerülhet az igény, hogy hasonlítsuk össze végtelen halmazok nagyságát is. Ez lehetséges a következő észrevétel segítségével.

Két véges halmaz akkor és csak akkor egyenlő nagy, ha elemeik között kölcsönösen egyértelmű leképezést lehet létesíteni. Ezt a tulajdonságot meg lehet fogalmazni végtelen halmazokra is, és ez teszi lehetővé végtelen halmazok nagyságának az összehasonlítását. Két A és B (nem feltétlenül véges) halmazt egyforma nagynak tekintünk, hivatalos terminológiával azt mondjuk róluk, hogy egyenlő számosságúak, ha létezik elemeik között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés. Ez azt jelenti, hogy létezik olyan $F: A \rightarrow B$ leképezés, amelyben minden $a \in A$ elemnek megfeleltetünk egy $b \in B$ elemet, az A halmaz különböző $a \in A$ és $a' \in A$, $a \neq a'$, elemeinek $b = F(a) \in B$ és $b' = F(a')$ képei különbözőek, azaz $b \neq b'$, és minden $b \in B$ elemre létezik egyetlen $a \in A$ elem, amelyre $b = F(a)$. Azt mondjuk, hogy a B halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint az A halmaz számossága, ha létezik az A halmaznak kölcsönösen egyértelmű leképezése a B halmaz valamely részhalmazára. Ha a B halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint az A halmaz számossága, de nem egyenlő vele, azaz a két halmaz között nem létezik kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés, akkor azt mondjuk, hogy a B halmaz számossága (szigorúan) nagyobb, mint az A halmaz számossága.

Ilyen módon egy rendezést vezettünk be halmazok számossága között. Megjegyzem, hogy ez nem magától értetődő állítás. Ahhoz, hogy jogunk legyen halmazok nagyságának előbb bevezetett összehasonlítását rendezésnek hívni, be kell látni néhány állítást. Így például meg kell mutatni, hogy tetszőleges két A és B halmazra igaz, hogy vagy az A halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint a B halmaz számossága, vagy a B halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint az A halmaz számossága. Továbbá azt is be kell bizonyítani, hogy ha mind az A halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint a B halmaz számossága, mind a B halmaz számossága nagyobb vagy egyenlő, mint az A halmaz számossága, akkor a két halmaz számossága egyenlő, azaz ebben az esetben létezik az A halmaznak kölcsönösen egyértelmű leképezése a B halmazra. Ezenkívül még igazolni kell azt a (viszonylag egyszerű) állítást, hogy ha három A , B és C halmaz olyan, hogy az A halmaz számossága kisebb, mint a B halmazé, a B halmaz számossága kisebb, mint a C halmazé, akkor az A halmaz számossága kisebb,

mint a C halmaz számossága. Ezeknek az állításoknak a bizonyítása mély matematikai gondolatokat igényel. De ezek ismertetése nem ennek a kurzusnak a témája.

Egy lényeges különbség véges és végtelen halmazok között az, hogy egy végtelen halmaz és annak egy valódi részhalmaza lehet egyenlő számosságú. Például az egész számok halmazának a számossága megegyezik a páros számok halmazáéval. Valóban, az $F(x) = 2x$ függvény kölcsönösen egyértelmű leképezést létesít az egész számok és páros számok között. Ez a példa is mutatja, hogy végtelen halmazok nagyságának az összehasonlításakor nem igaz minden olyan állítás természetes megfelelője, amely véges halmazok között igaz volt.

A végtelen halmazok számossága között különösen fontos szerepet játszik a megszámlálható számosság. Egy halmazt megszámlálható számosságúnak nevezünk, ha számossága egyenlő a természetes számok számosságával. Az elnevezés oka az, hogy egy X halmaz akkor és csak akkor megszámlálható számosságú, ha egyrészt nem véges sok elemből áll, másrészt elemei felsorolhatóak, azaz megadható olyan az X elemeiből álló $\{x_1, x_2, \dots\}$ sorozat, amelyben előbb-utóbb az X halmaz minden eleme sorra kerül. Valóban, ha az X halmaz megszámlálható, akkor létezik egy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetése a természetes számokkal. Ebben az esetben az X halmaz megadható, mint az az x_1, x_2, \dots sorozat, amelynek j -ik eleme, az x_j pont az az érték, ahová a j természetes számot képezi a természetes számoknak ez a kölcsönösen egyértelmű leképezése az X halmazra. Másrészt, ha az X halmaz elemeinek van $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ alakú felsorolása, akkor az $F: j \rightarrow x_j$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesít a természetes számok és az X halmaz között.

Tulajdonképpen a megszámlálható számosságú halmazok a legkisebb (számosságú) végtelen halmazok. Be lehet látni, hogy a (nem feltétlenül pozitív) egész számok halmaza is megszámlálható. Sőt, be lehet látni, hogy a racionális számok halmaza vagy a sík azon pontjainak a halmaza, amelyeknek mind a két koordinátája racionális szám szintén megszámlálható számosságú. Megszámlálható sok megszámlálható halmaz uniója is megszámlálható.

Felmerülhet a kérdés, hogy létezik-e egyáltalán nem megszámlálható számosságú halmaz. A válasz erre a kérdésre igenlő. Például a végtelen hosszúságú nulla-egy sorozatok halmaza, vagy a számegyenes vagy a sík pontjainak a számossága nagyobb, mint megszámlálható. A most említett halmazok számossága megegyezik, és ezen halmazok számosságát kontinumnak nevezik. Megjegyzem, hogy a kontinumnál is van nagyobb számosság, sőt tetszőleges halmaznál van nála (szigorúan) nagyobb számosságú halmaz.

Miért érdemes ezeket a halmazok számosságáról szóló ismereteket feleleveníteni egy valószínűségszámítási előadásban? Azért, mert ezen ismeretek szükségesek néhány fogalom, eredmény megértéséhez. Például, amikor egy egymás után (megszámlálhatóan) végtelen sokszor feldobott pénzdarab viselkedését leíró valószínűségi modellt konstruálunk, akkor az elemi eseményeket úgy definiáltuk, mint a végtelen fej-írás sorozatokat, és a biztos eseményt úgy definiáltuk, mint az összes ilyen sorozatot tartalmazó halmazt. Ahhoz, hogy lássuk, jogunk van ebben a modellben minden elemi esemény valószínűségét nullának definiálni tudnunk kell, hogy az elemi eseményként definiált fej-írás sorozatok számossága, nagyobb mint megszámlálható. Ez biztosítja, hogy az 1 valószínűségű

biztos esemény nem állítható elő, mint megszámlálhatóan végtelen nulla mértékű halmaz uniója. (A végtelen fej-írás és végtelen nulla-egy sorozatok között kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető. Ezért mind a két halmaz kontinuum számosságú.)

2. kiegészítés. Mértékelméleti ismeretek.

Először leírom az előadásban megfogalmazott Tétel A bizonyítását.

A Tétel A bizonyítása. Lássuk először be, hogy amennyiben a P véges értékű halmazfüggvény nemcsak additív, hanem σ -additív is, akkor teljesíti a folytonossági tulajdonságot: Legyenek $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, az \mathcal{A} σ -algebra (vagy algebra) olyan elemei, amelyekre $\dots \subset A_n \subset A_{n-1} \subset \dots \subset A_1$, és $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$. Definiáljuk a (diszjunkt) $B_n = A_n \setminus A_{n+1}$, halmazokat. Ekkor $A_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} B_k$, $n = 1, 2, \dots$, ezért a P halmazfüggvény σ -additívítása alapján $P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k)$. Speciálisan, $P(A_1) = \sum_{k=1}^{\infty} P(B_k) < \infty$. Ezért minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyre teljesül, hogy $P(A_n) = \sum_{k=n}^{\infty} P(B_k) < \varepsilon$, ha $n \geq n_0$, és ezt kellett belátni.

Ha a P halmazfüggvény additív, és teljesíti a folytonossági feltételt, akkor tekintsük $A_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$ diszjunkt halmazok tetszőleges rendszerét, legyen $B_n = \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k$, $n = 1, 2, \dots$. (Jegyezzük meg, hogy akkor is tudjuk, hogy $B_n \in \mathcal{A}$, ha \mathcal{A} algebra, de nem feltétlenül σ -algebra. Ugyanis feltettük, hogy $B_1 \in \mathcal{A}$, ezért $B_n = B_1 \setminus \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} A_k \right) \in \mathcal{A}$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre.) Ekkor $\dots \subset B_n \subset B_{n-1} \subset \dots \subset B_1$, és $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \emptyset$, ezért a P halmazfüggvény folytonossági tulajdonsága miatt $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = 0$. Ezért tetszőleges N pozitív egész számra

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{N-1} A_n\right) + P(B_N) = \sum_{n=1}^{N-1} P(A_n) + P(B_N).$$

Mivel $\lim_{N \rightarrow \infty} P(B_N) = 0$, innen $N \rightarrow \infty$ határátmenettel megkapjuk a kívánt állítást.

Tekintsük ezután azt az esetet, amikor P véges σ -additív, és ezért folytonos halmazfüggvény. Legyen $B_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, az \mathcal{A} algebra monoton csökkenő halmazsorozata, amelyre $\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = B_0 \in \mathcal{A}$. Ekkor $A_n = B_n \setminus B_0$ választással azt írhatjuk, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} P(B_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) + P(B_0) = P(B_0)$. Legyen $C_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots$, az \mathcal{A} algebra monoton növekvő halmazsorozata, $C_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$.

Ekkor az $A_n = C_0 \setminus C_n$ választással azt írhatjuk, hogy $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset$, és $\lim_{n \rightarrow \infty} P(C_n) = P(C_0) - \lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = P(C_0)$, és ezeket az állításokat kellett bizonyítani.

A valószínűségi modellekben szereplő P valószínűségi mértékek σ -additivitásának igazolásában alapvető szerepet játszik a mértékelmélet alábbi, itt nem bizonyított nagyon fontos eredménye:

Carathéodory tétele mértékek egyértelmű kiterjesztéséről. *Legyen adva egy nem-negatív véges μ mérték (azaz σ -additív halmazfüggvény) egy Ω halmaz bizonyos részhalmazaiából álló \mathcal{A}_0 algebrán. Ekkor a μ mérték egyértelműen kiterjeszthető az \mathcal{A}_0 által generált \mathcal{A} σ -algebrára.*

Megjegyzés: Fontos, hogy ez az eredmény nemcsak a mérték kiterjeszthetőségét állítja, hanem annak egyértelműségét is. Ez azt jelenti, hogy a generált σ -algebrában szereplő halmazok mértékét (a minket érdeklő alkalmazások esetében valószínűségét) egyértelműen tudjuk definiálni.

A fenti eredmény önmagában nem elegendő az előadásban tekintett szabályos pénzdarab végtelen dobássorozatokot leíró modell helyességének a bizonyításához. Meg kell ugyanis először adni azt az \mathcal{A}_0 algebrát és rajta azt a σ -additív halmazfüggvényt, amelyre a tételt alkalmazni tudjuk.

Jelen példában természetes módon definiálhatjuk azt az \mathcal{A}_0 algebrát és a rajta értelmezett P mértéket, amelyre a Carathéodory tételt alkalmazni kívánjuk. Nevezetesen, álljon \mathcal{A}_0 az összes lehetséges végtelen fej-írást tartalmazó Ω halmaz azon részhalmazaiából, amelyek csak véges sok koordinátától függenek, azaz egy A halmaz akkor és csak akkor tartozik a \mathcal{A}_0 algebrához, ha létezik egy k pozitív egész szám és k -hosszúságú fej-írás sorozatoknak egy B halmaza, amelyre igaz, hogy egy végtelen fej-írás sorozat akkor és csak akkor tartozik az A halmazba, ha az első k tagjából álló k hosszúságú fej-írás sorozat a B halmazhoz tartozik. (Az ilyen típusú halmazokat hívják az irodalomban henger-halmazoknak.) Továbbá, legyen egy ilyen A halmaz P mértéke a B halmaz elemszáma szorozva a 2^{-k} számmal.

Nem nehéz belátni, hogy ilyen módon egy \mathcal{A}_0 algebrát definiáltunk, és azon egy P nem-negatív egyre normált additív halmazfüggvényt. Viszont korántsem nyilvánvaló, hogy a P additív halmazfüggvény egyben σ -additív is. Ennek bizonyítása mély matematikai gondolatokat igényel. Ennek részleteire nem térek ki. Viszont megfogalmazok egy olyan az előadásban említett mértékelméleti eredményt, amely valószínűségszámítási szempontból azért érdekes, mert ez az eredmény biztosítja azt, hogy végtelen sok független kísérletnek is van valószínűségszámítási modellje. Létezik Kolmogorovnak egy a valószínűségszámítás számára még hasznosabb eredménye, amelyet a valószínűségszámítás alaptételének is neveznek. Ez az eredmény nagyon pongyolán megfogalmazva azt állítja, hogy minden értelmesen megfogalmazott véletlen jelenségnek létezik a Kolmogorov-féle axiómarendszert kielégítő valószínűségi modellje. Az eredmény pontos megfogalmazására itt nem térek ki.

Tétel mértékterek végtelen szorzatáról. Legyen adva végtelen sok $(\Omega_n, \mathcal{A}_n, P_n)$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mező, azaz legyen adva minden $n = 1, 2, \dots$ számra egy \mathcal{A}_n σ -algebra valamely Ω_n halmazon és egy P_n valószínűségi mérték ezen az \mathcal{A}_n σ -algebrán. (Az, hogy a P_n mérték valószínűségi mérték azt jelenti, hogy $P_n(\Omega_n) = 1$.) Ekkor létezik ezen valószínűségi mezőknek egy $(\Omega^\infty, \mathcal{A}^\infty, P^\infty)$ végtelen szorzata, ami szintén valószínűségi mező.

Részletesebben megfogalmazva ez a következőt jelenti. Definiáljuk az Ω^∞ halmazt úgy, mint az összes $\omega^\infty = (\omega_1, \omega_2, \dots)$, $\omega_n \in \Omega_n$, $n = 1, 2, \dots$, alakú végtelen sorozatból álló halmazt. Vezessük be ezen az \mathcal{A}^∞ σ -algebrát, amely megegyezik az Ω^∞ bizonyos részhalmazai, az

$$A_1 \times \dots \times A_k = \{\omega^\infty = (\omega_1, \omega_2, \dots) : \omega_1 \in A_1, \omega_2 \in A_2, \dots, \omega_k \in A_k\}$$

alakú úgynevezett hengerhalmazok által generált legszűkebb σ -algebrával, ahol $k = 1, 2, \dots$, tetszőleges pozitív egész szám, és $A_j \in \mathcal{A}_j$ minden $1 \leq j \leq k$ számra. Definiáljuk az $A_1 \times \dots \times A_k$ alakú hengerhalmazok P^∞ mértékét a $P^\infty(A_1 \times \dots \times A_k) = \prod_{j=1}^k P_j(A_j)$ képlet segítségével. Ez a hengerhalmazokon definiált függvény egyértelműen kiterjeszhető egy P^∞ valószínűségi mértékké az \mathcal{A}^∞ σ -algebrára, és ezt hívják a P^∞ szorzatmértéknek.

3. kiegészítés. Példa additív, de nem σ -additív halmazfüggvényekre.

A tárgyalt példák mindegyikében olyan additív halmazfüggvényeket vezettünk be, amelyek σ -additívak is. Felmerülhet a kérdés, hogy léteznek-e egyáltalán additív, de nem σ -additív halmazfüggvények egy σ -algebrán. A válasz az, hogy léteznek ilyen halmazfüggvények, de azok explicit módon nem adhatóak meg. Az ilyen halmazfüggvények létezésének a bizonyítása felhasználja a kiválasztási axiómát vagy egy vele ekvivalens állítást.

A teljesség kedvéért ismertetek egy híres példát additív, de nem σ -additív halmazfüggvényre. Az itt leírt eredmény ismerete nem szükséges az anyag fő részének a megértéséhez. Ez inkább arra szolgál, hogy az érdeklődők némi kitekintést kapjanak más jellegű matematikai témákról is. A következő eredmény bizonyítását fogom leírni.

Tétel additív 0–1 értékű függvény létezéséről a természetes számok részhalmazain. Tekintsük a pozitív egész számok $Z = \{1, 2, \dots\}$ halmazát és a Z halmaz összes részhalmazából álló \mathcal{Z} σ -algebrát. Létezik olyan $\mu(A)$, $A \in \mathcal{Z}$, halmazfüggvény a Z halmaz összes részhalmazán, amely teljesíti a következő tulajdonságokat:

- $\mu(\{j\}) = 0$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra, azaz minden egy pontból álló halmaz mértéke nulla.
- $\mu(Z) = 1$, azaz az összes természetes számot tartalmazó halmaz mértéke 1.
- $\mu(A) = 0$ vagy $\mu(A) = 1$ minden $A \in \mathcal{Z}$ halmazra.
- Ha A és B két diszjunkt halmaz, akkor $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$, azaz a μ halmazfüggvény additív.

Egy a tétel feltételeit teljesítő μ halmazfüggvény additív, de nyilván nem σ -additív, mert $\sum_{j=1}^{\infty} \mu(\{j\}) \neq \mu(\mathbb{Z})$. (A baloldalon szereplő kifejezés értéke 0, a jobboldalon szereplő pedig 1.) A tétel bizonyítása úgynevezett transzfinit indukción alapul. A transzfinit indukció végrehajtásának a legkényelmesebb módja a Zorn lemma alkalmazása, és mi is ezt az utat fogjuk követni.

Megfogalmazom a Zorn lemmát. Előtte azonban bevezetek néhány a Zorn lemma megfogalmazásában használt fogalmat. Legyen adva egy X halmaz, és teljesüljön az X halmaz bizonyos (x, y) , $x \in X$ és $y \in X$ elempárjai között egy $x \preceq y$ reláció. Ha $x \preceq y$, akkor azt mondjuk, hogy az x elem kisebb vagy egyenlő, mint az y elem. Akkor mondjuk, hogy egy X halmaz részben rendezett halmaz egy \preceq rendezéssel, ha az (X, \preceq) rendszer teljesíti a következő feltételeket:

- 1.) $x \preceq x$ minden $x \in X$ -re, (reflexivitás).
- 2.) Ha $x \preceq y$ és $y \preceq z$, akkor $x \preceq z$, (tranzitivitás).
- 3.) Ha $x \preceq y$ és $y \preceq x$, akkor $x = y$, (antiszimmetricitás).

Viszont nem követeljük meg, hogy bármely két $x \in X$ és $y \in X$ elem összehasonlítható legyen.

Legyen adva egy (X, \preceq) részben rendezett halmaz. Azt mondjuk, hogy e részben rendezett halmaz egy $Y \subset X$ részhalmaza lánc, ha Y tetszőleges két eleme összehasonlítható, azaz, ha $x, y \in Y$, akkor teljesül vagy az $x \preceq y$ vagy az $y \preceq x$ reláció. Azt mondjuk, hogy egy $x \in X$ elem felső korlátja egy $Y \subset X$ halmaznak, ha $y \preceq x$ minden $y \in Y$ elemre. Egy $x \in X$ elem maximális elem az (X, \preceq) részben rendezett halmazban, ha nincs olyan $y \in X$, $y \neq x$ elem, amelyre $x \preceq y$.

A fenti fogalmak segítségével egyszerűen megfogalmazható (a kiválasztási axiómával ekvivalens) Zorn lemma.

Zorn lemma. *Legyen (X, \preceq) olyan részben rendezett halmaz, amelyben minden láncnak létezik felső korlátja. Akkor az (X, \preceq) részben rendezett halmazban van maximális elem.*

Ezután rátérek a Tétel bizonyítására.

Az egész számok részhalmazain definiált additív 0–1 függvény létezéséről szóló tétel bizonyítása a Zorn lemma segítségével. Meg akarjuk adni azon halmazok rendszerét, amelyeknek a mértéke nulla. Ennek érdekében bevezetjük a Z halmaz részhalmazáiból álló $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}$ halmazrendszereken a következő α tulajdonságot. Egy $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}$ halmazrendszer akkor és csak akkor rendelkezik az α tulajdonsággal, ha teljesíti a következő feltételeket:

- i.) $\{j\} \in \mathcal{A}$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra,
- ii.) Ha $A \in \mathcal{A}$, és $B \in \mathcal{A}$, akkor $A \cup B \in \mathcal{A}$,
- iii.) Ha $A \in \mathcal{A}$, és $B \subset A$, akkor $B \in \mathcal{A}$,
- iv.) $Z \notin \mathcal{A}$.

Vezessük be a $\mathcal{A} \subset \mathcal{Z}$ halmazrendszerek között a következő részbenrendezést: $\mathcal{A} \preceq \mathcal{B}$, akkor és csak akkor, ha minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra $A \in \mathcal{B}$. Tekintsük azt az (X, \preceq) rendszert, amelynek elemei az α tulajdonsággal rendelkező halmazrendszerek, és közöttük az előbb bevezetett \preceq részbenrendezés érvényes. Könnyen látható, hogy (X, \preceq) részben rendezett halmaz a fenti rendezéssel. Sőt, az is igaz, hogy tetszőleges $Y \subset X$ láncnak van felső korlátja. Valóban, $z = \bigcup_{y \in Y} y \in X$, és ez a z elem felső korlátja az Y láncnak. (Megjegyzem, hogy az Y halmaz, így a fenti unió tartalmazhat megszámlálhatónál több elemet. A bizonyítás ezen lépésében van elrejtve a ‘transzfinit indukció’.)

Láttuk, hogy az (X, \preceq) tér teljesíti a Zorn lemma feltételeit. Ezért létezik ebben a térben egy maximális $x = \mathcal{A}$ elem. Azt akarjuk megmutatni, hogy az (X, \preceq) tér egy maximális \mathcal{A} eleme az α tulajdonságban megfogalmazott i.)–iv.) feltételeken kívül még a következő v.) feltételt is teljesíti:

v.) Minden $B \subset Z$ halmazra vagy $B \in \mathcal{A}$ vagy $Z \setminus B \in \mathcal{A}$.

Tekintsünk ugyanis egy olyan \mathcal{A} halmazrendszert, amely teljesíti az i.)–iv.) feltételeket, de nem teljesíti az v.) feltételt. Megmutatjuk, hogy ez az \mathcal{A} nem lehet maximális elem az (X, \preceq) térben. Valóban, ha \mathcal{A} teljesíti az i.)–iv.) feltételeket, de létezik olyan $B \subset X$ halmaz, amelyre mind $B \notin \mathcal{A}$ mind $Z \setminus B \notin \mathcal{A}$, azaz az v.) feltétel nem teljesül, akkor az $\bar{\mathcal{A}} = \{A \cup \bar{B} : A \in \mathcal{A}, \bar{B} \subset B\}$ halmazrendszer (ezzel a B halmazzal) szintén teljesíti az i.)–iv.) feltételeket.

Az i.)–iii.) feltételek teljesülése nyilvánvaló. Továbbá, ha $\bar{\mathcal{A}}$ nem teljesítené a iv.) feltételt, az azt jelentené, hogy fennállna a $Z = A \cup \bar{B}$ reláció valamely $A \in \mathcal{A}$ és $\bar{B} \subset B$ halmazokra. Akkor a $Z = A \cup B$, $Z \setminus B \subset A$, és így a $Z \setminus B \in \mathcal{A}$ relációk is érvényesek volnának, ami ellentmond az \mathcal{A} halmazrendszerre tett feltételeinknek. Ez azt jelenti, hogy $\bar{\mathcal{A}}$ a iv.) feltételt is teljesíti, és ezért $\bar{\mathcal{A}} \in X$. Így, mivel $\mathcal{A} \preceq \bar{\mathcal{A}}$, és $\mathcal{A} \neq \bar{\mathcal{A}}$, az \mathcal{A} elem nem lehet maximális.

Végül megmutatom, hogy amennyiben egy \mathcal{A} halmazrendszer teljesíti az i.)–v.) tulajdonságok mindegyikét, akkor a $\mu(A) = 0$, ha $A \in \mathcal{A}$ és $\mu(A) = 1$, ha $A \notin \mathcal{A}$ képlettel definiált μ halmazfüggvény teljesíti a tétel a)–d) feltételeit. Ezzel a tétel bizonyítását befejezzük.

Az a)–c) feltételek teljesülése nyilvánvaló. A d) pontban megfogalmazott $\mu(A) + \mu(B) = \mu(A \cup B)$ azonosság diszjunkt A és B halmazokra szintén nyilvánvaló (a ii.) és iii.) feltétel miatt), ha $\mu(A) = 0$ vagy $\mu(B) = 0$. Azt kell belátni, hogy nincs két olyan diszjunkt $A \subset Z$ és $B \subset Z$ halmaz, amelyekre $\mu(A) = 1$ és $\mu(B) = 1$. Valóban, ha lenne két ilyen A és B halmaz, akkor az v.) tulajdonság miatt a $C = Z \setminus A$ és $D = Z \setminus B$ halmazokra a $C \in \mathcal{A}$ és $D \in \mathcal{A}$ relációk is teljesülnének, és mivel $C \cup D = Z \setminus (A \cap B) = Z$, ez azt jelentené, hogy $Z \in \mathcal{A}$. Ez viszont ellentmond a iv.) feltételnek.