A Valószínűségszámítás I. előadássorozat nyolcadik témája.

A sűrűségfüggvény fogalma, konvoluciója. Fontos eloszlásfüggvények.

Az előző téma ismertetésében megmutattuk, hogy egy valószínűségi változó, illetve e valószínűségi változó egy függvényének a várható értékét ki lehet számolni e valószínűségi változó eloszlásfüggvényének az ismeretében.

Gyakorlati szempontból, annak érdekében, hogy a leggyakrabban előforduló esetekben jobban tudjunk számolni érdemes bevezetni egy eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényének a fogalmát. Ez lehetővé teszi, hogy a problémákban felmerülő és sokszor kényelmetlenül kezelhető Lebesgue integrálokat átírjuk (közönséges) Riemann integrálokká.

Sűrűségfüggvény definiciója. *Egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek az $f(u)$, $-\infty < u < \infty$, függvény sűrűségfüggvénye, ha minden $-\infty < x < \infty$ számra teljesül az*

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(u)\,du$$

azonosság.

Megjegyzés: Többször fogunk beszélni egy valószínűségi változó sűrűségfüggvényéről is. Ez azt jelenti, hogy e valószínűségi változó eloszlásfüggvényének a sűrűségfüggvényét tekintjük. Sok érdekes és fontos eloszlásfüggvénynek létezik sűrűségfüggvénye, de nem mindegyiknek. Például egy diszkrét eloszlású valószínűségi változónak nincs sűrűségfüggvénye.

Tétel eloszlásfüggvények által definiált integrálok kifejezésére sűrűségfüggvények segítségével . *Ha egy $F(x)$ eloszlásfüggvénynek létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, akkor minden (mérhető) $g(\cdot)$ függvényre teljesül a következő azonosság:*

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)du.$$

Ez az azonosság úgy értendő, hogy az azonosság két oldalán szereplő kifejezés egyszerre létezik vagy nem létezik, ha mind a két kifejezést mint Lebesgue integrált értelmezzük. Ha a jobboldalon szereplő integrál létezik mint (közönséges) Riemann integrál, akkor ez az integrál tekinthető úgy is mint (egy a Riemann integrál értékével megegyező) Lebesgue integrál. Tehát az azonosság ebben a fontos speciális esetben is érvényes.

Annak érdekében, hogy megértsük, hogyan tudjuk egy eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényét kiszámítani, idézzük fel a klasszikus analízis egyik alapvető eredményét, a Newton–Leibniz formulát.

Kissé(?) pontatlanul a Newton–Leibniz formulát úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a differenciálás és integrálás egymás inverzei, azaz egy függvény differenciálhányadosának az integrálja, illetve a függvény integráljának a differenciálhányadosa egyenlő a kiinduló függvénnyel. Pontosabb megfogalmazás esetén a következő tényeket kell figyelembe venni.

a) Egy függvény differenciálhányadosa nem változik, ha hozzáadunk egy konstanst. Ennek a ténynek az felel meg az integrálásnál, hogy egy függvény $\int_a^x f(u)\,du$ (az x változó szerinti) határozatlan integrálja függ az integrálás a alsó határától, ha az a konstanst megváltoztatjuk, akkor a határozatlan integrál értékéhez egy konstans adódik hozzá. Ezt a körülményt úgy fogjuk figyelmbe venni, hogy az $F(x)$ függvényt $F(x) = F(a) + \int_a^x f(u)\,du$, $f(u) = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ alakban állítjuk elő.
b) Nem minden függvény differenciálható. E tény integrálásra vonatkozó megfelelője az, hogy csak bizonyos tulajdonságokkal rendelkező függvény állítható elő, mint egy alkalmas függvény határozatlan integrálja. Egy határozatlan integrál folytonos függvény, sőt egy ennél erősebb simasági tulajdonságot is teljesít. (Ennek az erősebb simasági tulajdonságnak a pontos megfogalmazása a mértékelmélet tárgya, ezzel a kérdéssel itt nem foglalkozunk.) Ezenkívül vegyük észre azt is, hogy egy függvény határozatlan integrálja nem változik, ha a függvény értékét véges sok pontban (vagy akár egy null-mértékű halmazon) megváltoztatjuk.

Megfogalmazom a Newton–Leibniz formulát részletesebben. A modern matematikában (a mértékelméletben) ennek az eredménynek pontosabb, általánosabb változatát bizonyítják be.

Newton–Leibniz formula. *Legyen $F(x)$ folytonos függvény egy $[a, b]$ véges intervallumon, amely véges sok pont kivételével folytonosan deriválható. Legyen $f(u) = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ minden olyan u pontban, ahol az $F(\cdot)$ függvény differenciálható. Ekkor $F(x) - F(a) = \int_a^x f(u)\,du$ minden $a \le x \le b$ számra. Továbbá, ha a fenti feltétel teljesül minden véges $[a, b]$ intervallumban, és létezik a $F(-\infty) = \lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$ határérték, akkor $F(x) - F(-\infty) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ minden $-\infty < x < \infty$ számra.*

Megfordítva, ha $f(u)$, (pontosabban annak abszolut értéke) integrálható függvény egy $[a, b]$ intervallumban, és $F(x) = \int_a^x f(u)\,du$, $a \le x \le b$, akkor $f(u) = \left.\frac{dF(x)}{dx}\right|_{x=u}$ (majdnem) minden $a \le u \le b$ pontban. Ha az $f(u)$ függvény integrálható az egész számegyenesen, akkor a fenti állítás igaz $a = -\infty$ és $b = \infty$ választással is.

1. megjegyzés. A Newton–Leibniz formula jelentősége számunkra az, hogy eszerint az eredmény szerint a sűrűségfüggvény (feltéve, hogy az létezik) egyenlő az eloszlásfüggvény deriváltjával. Megfordítva, a sűrűségfüggvény ismeretében ki tudjuk számolni az eloszlásfüggvényt. Annak értéke az x pontban megegyezik a sűrűségfüggvény integráljával a $[-\infty, x]$ intervallumban.

2. megjegyzés. A mértékelméletben bebizonyították a Newton–Leibniz formula élesebb formáját is. Pontosan leírták azon függvények osztályát, az úgynevezett abszolut folytonos függvényeket, amelyekre igaz, hogy a függvény egyenlő a deriváltjának a (Lebesgue) integráljával. Az általunk kimondott eredmény csak egy elégséges feltételt ad arra, hogy egy $F(\cdot)$ függvény teljesítse ezt a tulajdonságot. Viszont ez az eredmény alkalmazható a gyakorlatban előforduló feladatok majdnem mindegyikében.

A kimondott tételben megengedtük, hogy az $F(\cdot)$ függvény néhány pontban ne legyen differenciálható. Ezt azért tettük, hogy ne zárjunk ki néhány érdekes esetet.

Ilyen eset például a következő $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény: $F(x) = 0$, ha $x \le 0$, $F(x) = x$, ha $0 \le x \le 1$, és $F(x) = 1$, ha $x \ge 1$. Ennek az eloszlásfüggvénynek a sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, amelyre $f(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, és $f(u) = 0$ különben. Ebben az esetben az $F(\cdot)$ függvény folytonosan deriválható mindenütt, kivéve az $x = 0$ és $x = 1$ pontot.

3. megjegyzés: A Newton–Leibniz formula második részében megfogalmazott állítás szerint egy $f(\cdot)$ függvény integráljának a deriváltja csak *majdnem* mindenütt egyezik meg az eredeti $f(\cdot)$ függvénnyel. Valóban, kissé óvatosabban kell megfogalmazni az állításokat, mert ha például egy függvényt véges sok pontban megváltoztatunk, akkor annak integrálja megegyezik az eredeti függvény integráljával. Ez azt jelenti, hogy nem várhatjuk azt, hogy egy függvény integráljának a deriváltja minden pontban megegyezzék az eredeti függvénnyel. Viszont ez az állítás igaz *majdnem minden* pontban. Azt, hogy mit jelent a ,,majdnem minden" kitétel pontosan elmagyarázzák a mértékelméletben, de ez nem témája ennek az előadásnak.

Az eloszlásfüggvényekhez hasonlóan a sűrűségfüggvényeket is pontosan lehet jellemezni. Erről szól az alábbi tétel.

Tétel sűrűségfüggvények jellemzéséről. *Egy $f(\cdot)$ (mérhető) függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas eloszlásfüggvénynek, ha $f(u) \ge 0$ majdnem minden $-\infty < u < \infty$ számra, és $\int_{-\infty}^{\infty} f(u)\,du = 1$.*

Ezt a tételt nem nehéz bebizonyítani néhány alapvető mértékelméleti eredmény segítségével, de most elhagyom a bizonyítást. Külön tételben megfogalmazom azt az eredményt, amely megadja, hogyan lehet kiszámolni egy valószínűségi változó várható értékét a valószínűségi változó eloszlás vagy sűrűségfüggvényének az ismeretében. Ez közvetlen következménye néhány korábban megfogalmazott eredménynek.

Tétel várható érték kiszámolásáról a sűrűségfüggvény segítségével. *Jelölje $F(\cdot)$ illetve $f(\cdot)$ egy ξ valószínűségi változó eloszlás illetve sűrűségfüggvényét. Legyen $g(\cdot)$ mérhető függvény a számegyenesen. Ekkor*

$$E\xi = \int_{-\infty}^{\infty} uF(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} uf(u)\,du$$

és

$$Eg(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)F(\,du) = \int_{-\infty}^{\infty} g(u)f(u)\,du$$

Ha ismerjük egy valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényét akkor könnyen kiszámolhatjuk annak sűrűségfüggvényét is. Ezt az eredményt, amely a Newton–Leibniz formula egyszerű következménye külön lemmában mondom ki.

Lemma a sűrűségfüggvény kiszámításáról. *Ha egy valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, és a valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(x)$, akkor a valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f(x) = \frac{dF(x)}{dx}$, $-\infty < x < \infty$, függvény.*

Egy valószínűségi változónak létezik sűrűségfüggvénye, ha az eloszlásfüggvénye esetleg véges sok pont kivételével folytonosan differenciálható, és a lehetséges kivételes pontokban is folytonos.

Feladat:

1.) Legyen ξ valószínűségi változó $f(u)$ sűrűségfüggvénnyel, a és b valós számok. Határozzuk meg az $a\xi+b$ és a ξ^2 valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Legyen $F(x)=P(\xi<x)=\int_{-\infty}^x f(u)\,du$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az $\eta=a\xi+b$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x)=P(\eta<x)=P\left(\xi<\frac{x-b}{a}\right)=F\left(\frac{x-b}{a}\right)$ függvény, ha $a>0$, és $G(x)=P(\eta<x)=P\left(\xi>\frac{x-b}{a}\right)=1-F\left(\frac{x-b}{a}\right)$, ha $a<0$. Innen η sűrűségfüggvénye $g(x)=\frac{dG(x)}{dx}=\frac{1}{|a|}f\left(\frac{x-b}{a}\right)$.

A $\zeta=\xi^2$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvénye

$$G(x)=P(\xi^2<x)=P\left(-\sqrt{x}<\xi<\sqrt{x}\right)=F\left(\sqrt{x}\right)-F\left(-\sqrt{x}\right),$$

ha $x\ge 0$, és $G(x)=0$, ha $x<0$. Innen deriválással ζ sűrűségfüggvénye $g(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}\left(f\left(\sqrt{x}\right)+f\left(-\sqrt{x}\right)\right)$, ha $x>0$, és $g(x)=0$, ha $x\le 0$.

Néhány fontos folytonos eloszlás.

a.) *Normális eloszlásfüggvény.*

Bevezetem a standard normális eloszlásfüggvény definicióját. Későbbi eredményekből fog kiderülni, hogy ez az eloszlás miért játszik fontos szerepet a valószínűségszámításban.

A standard normális eloszlás definiciója. *A $\Phi(x)$ standard normális eloszlás az az eloszlás, amelynek sűrűségfüggvénye a $\varphi(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$, $-\infty<u<\infty$ függvény.*

E definició helyességének igazolásához meg kell mutatni, hogy a fent definiált $\varphi(\cdot)$ függvény valóban sűrűségfüggvény. Ennek érdekében be kell bizonyítani a következő eredményt.

Tétel a normális eloszlásfüggvény definiciójának a jogosságáról.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du=1.$$

Bizonyítás. Vezessük be az $I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du$ jelölést. Ekkor

$$\begin{aligned}I^2&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-v^2/2}\,dv=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2\pi}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv\\&=\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{2\pi}re^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi=\int_0^{\infty}re^{-r^2/2}\,dr=\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\infty}=1.\end{aligned}$$

Ebben a számolásban az I^2 mennyiséget kifejező az (u,v) térben megadott kettős integrált kifejeztük mint az (r,φ) polárkoordinátarendszerben, $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$, $0\le r<\infty$, $0\le\varphi<2\pi$, helyettesítéssel kifejezett integrált. Ezen számolás során felhasználjuk, hogy a polárkoordináta rendszerbe való áttérést leíró transzformáció Jacobianja r, azaz formálisan $du\,dv=r\,dr\,d\varphi$. Ezért jelenik meg egy r szorzó az integrálban a polárkoordinátarendszerbe való áttéréskor. Ezt az integráltranszformációkról szóló eredményt, illetve annak szemléletes tartalmát a kiegészítésben magyarázom el.

Megjegyzés: Természetesnek látszódna a fent kimondott tételt úgy bizonyítani, hogy kiszámítjuk a $\varphi(x)$ függvény $\Phi(x)=\int_{-\infty}^x \frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\,du$ primitív függvényét, és ebbe a képletbe $x=\infty$ értéket helyettesítünk. Erre azonban nem vagyunk képesek, mert a fenti primitív függvényt nem tudjuk kiszámítani. Be lehet látni, hogy ez a primitív függvény nem írható fel szokásos függvények és műveletek segítségével zárt alakban. Ez azonban mély matematikai eredmények felhasználását igényli. (A Galois elméletet kell használni.)

Megmutatom, hogy egy standard normális eloszlású ξ valószínűségi változó várható értéke nulla, szórásnégyzete 1. Ez az oka a standard jelzőnek a standard normális eloszlás definiciójában.

Valóban, $E\xi=0$, mert $E\xi=\int_{-\infty}^\infty u\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du$, és ez az integrál nulla, mert az integrandus páratlan függvény. Ezután parciális integrálással kapjuk $f(x)=x$ és $g(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}xe^{-x^2/2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)$ választással, hogy

$$E\xi^2=\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x^2e^{-x^2/2}\,dx=\left[-\frac{x}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right]_{-\infty}^\infty+\int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx=1.$$

Innen $\operatorname{Var}\xi=E\xi^2-(E\xi)^2=1$.

Feladatok:

2.) Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, m, σ valós számok, akkor az $\sigma\xi+m$ valószínűségi változó várható értéke m szórásnégyzete σ^2, sűrűségfüggvénye pedig $g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$.

Megoldás: $E(\sigma\xi+m)=\sigma E\xi+m=m$, és $\operatorname{Var}(\sigma\xi+m)=\sigma^2\operatorname{Var}\xi=\sigma^2$. Továbbá, az első feladat eredménye alapján a $\sigma\xi+m$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az $f(x)=\frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$, ahol $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, a standard normális sűrűségfüggvény. Innen következik a feladat állítása.

A fenti feladat eredménye alapján egy valószínűségi változót akkor nevezünk normális eloszlásúnak, ha van sűrűségfüggvénye, és az $g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(u-m)^2/2\sigma^2}$ alakban adható meg alkalmas m és $\sigma>0$ számokkal. A képletben szereplő m és σ^2 számok megegyeznek a normális eloszlású valószínűségi változó várható értékével és szórásnégyzetével. Ez speciálisan azt is jelenti, hogy egy normális eloszlást két paraméter határoz meg, a normális eloszlás várható értéke és szórásnégyzete.

3.) Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $E\xi^{2k-1}=0$, $E\xi^{2k}=1\cdot 3\cdots(2k-1)$ minden $k=1,2,\dots$ számra.

Megoldás:

$$E\xi^{2k-1}=\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k-1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx=0,$$

mert az integrandus páratlan függvény. Másrészt parciális integrálással $f(x)=x^{2k-1}$ és $g(x)=x\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}=\frac{d}{dx}\left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\right)$ kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}E\xi^{2k}&=\int_{-\infty}^{\infty}x^{2k}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}(2k-1)x^{2k-2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\,dx\\&=(2k-1)E\xi^{2k-2}.\end{aligned}$$

Innen k szerinti indukcióval kapjuk a feladat második állítását.

4.) Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$, és legyen t valós szám. Számoljuk ki az $e^{t\xi}$ valószínűségi változó $Ee^{t\xi}$ várható értékét.

Megoldás:

$$\begin{aligned}Ee^{t\xi}&=\int_{-\infty}^{\infty}e^{tu}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{tu-u^2/2-t^2/2+t^2/2}\,du\\&=e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(t-u)^2/2}\,du=e^{t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du=e^{t^2/2}.\end{aligned}$$

5.) Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $m=2$ várható értékkel és $\sigma^2=3$ szórásnégyzettel. Számoljuk ki a ξ valószínűségi változó $E\xi^4$ negyedik momentumát.

Megoldás: Tudjuk, hogy a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}}=\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-(x-2)^2/6},$$

ahonnan $E\xi^4=\int_{-\infty}^{\infty}x^4\frac{1}{\sqrt{6\pi}}e^{-(x-2)^2/6}\,dx$. Ezt az integrált ki tudjuk számolni hasonlóan a standard normális eloszlás momentumaihoz, sőt a számolást egyszerűen visszavezethetjük az ilyen momentumok kiszámolására, az $u=\frac{x-2}{\sqrt{3}}$ helyettesítés segítségével. Valójában egyszerűbben is megoldhatjuk a feladatot a következő módon. Vezessünk be egy η standard normális eloszlású valószínűségi változót, és legyen $\bar\xi=\sqrt{3}\eta+2$. Ekkor $\bar\xi$ és ξ eloszlása megegyezik, mivel mindkettő normális eloszlású $m=2$ várható értékkel és $\sigma^2=3$ szórásnégyzettel. Innen $E\xi^4=E\bar\xi^4=E(\sqrt{3}\eta+2)^4=9E\eta^4+24\sqrt{3}E\eta^3+72E\eta^2+32\sqrt{3}E\eta+16=9E\eta^4+72E\eta^2+16=27+72+16=105$ a harmadik feladat eredménye alapján.

b.) *Egyenletes eloszlásfüggvény.*

Egyenletes eloszlásfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó egyenletes eloszlású egy $[a,b]$ intervallumban, $-\infty < a < b < \infty$, ha sűrűségfüggvénye $f(u) = \frac{1}{b-a}$, ha $a \le u \le b$, és $f(u) = 0$ egyébként.*

Kiszámítjuk egy az $[a,b]$ intervallumban egyenletes eloszlású ξ valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

$$E\xi = \int_a^b u\frac{1}{b-a}\,du = \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^2}{2}\right]_a^b = \frac{b^2-a^2}{2(b-a)} = \frac{b+a}{2},$$

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}\xi &= E\left(\xi - \frac{b+a}{2}\right)^2 = \int_a^b \left(u - \frac{b+a}{2}\right)^2 \frac{1}{b-a}\,du = \frac{1}{b-a}\int_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} u^2\,du \\ &= \frac{1}{b-a}\left[\frac{u^3}{3}\right]_{-\frac{b-a}{2}}^{\frac{b-a}{2}} = \frac{2}{3(b-a)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 = \frac{(b-a)^2}{12}.\end{aligned}$$

Feladatok:

6.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumban, azaz legyen $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$ egyébként. Számítsuk ki a ξ^2 valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.
Első megoldás:

$$\operatorname{Var}\xi^2 = E\left(\left(\xi^2\right)^2\right) - \left(E\xi^2\right)^2 = E\xi^4 - \left(E\xi^2\right)^2 = \int x^4 f(x)\,dx - \left(\int x^2 f(x)\,dx\right)^2,$$

ahol $f(x) = 1$, ha $0 \le x \le 1$, $f(x) = 0$ egyébként, azaz $f(x)$ a ξ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye. Innen $E\xi^2 = \int_0^1 x^2\,dx = \frac{1}{3}$, és $\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^4\,dx - \left(\int_0^1 x^2\,dx\right)^2 = \frac{1}{5} - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{5} - \frac{1}{9} = \frac{4}{45}$.
Második megoldás: Számítsuk ki először a ξ^2 valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét. A ξ^2 valószínűségi változó $F(\cdot)$ eloszlásfüggvénye

$$F(x) = P(\xi^2 < x) = P(-\sqrt{x} < \xi < \sqrt{x}) = P(0 \le \xi \le \sqrt{x}) = \sqrt{x}, \quad \text{ha } 0 \le x \le 1,$$

$F(x) = 0$, ha $\xi < 0$, $F(x) = 1$, ha $x > 1$. Innen a ξ^2 valószínűségi változó $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$, ha $0 \le x \le 1$, és $f(x) = 0$ egyébként. Ezért

$$E\xi^2 = \int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3} = \frac{1}{3},$$

és

$$\operatorname{Var}\xi^2 = \int_0^1 x^2\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx - \left(\int_0^1 x\frac{1}{2\sqrt{x}}\,dx\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5} - \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{45}.$$

c.) *Exponenciális eloszlásfüggvény.*

Exponenciális eloszlásfüggvény definiciója. *Egy ξ valószínűségi változó exponenciális eloszlású λ paraméterrel, $\lambda > 0$, ha eloszlásfüggvénye, $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-\lambda x}$, ha $x \ge 0$, és $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x < 0$. Ezzel ekvivalens jellemzés: Egy valószínűségi változó exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, ha létezik $f(u)$ sűrűségfüggvénye, és az $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, ha $u \ge 0$, $f(u) = 0$, ha $u \le 0$ alakú.*

Számoljuk ki egy λ paraméterű ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értékét és szórásnégyzetét.

Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E\xi = \int_0^\infty u\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda}\int_0^\infty ue^{-u}\,du = \frac{1}{\lambda}\left(\left[-ue^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty e^{-u}\,du\right) = \frac{1}{\lambda},$$

$$E\xi^2 = \int_0^\infty u^2\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda^2}\left(\left[-u^2e^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty 2ue^{-u}\,du\right) = \frac{2}{\lambda^2}.$$

Ezért $\operatorname{Var}\xi = E\xi^2 - (E\xi)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$.

Feladatok:

7.) Számítsuk ki egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó momentumait.
Megoldás:

$$E\xi^k = \int_0^\infty u^k\lambda e^{-\lambda u}\,du = \frac{1}{\lambda^k}\left(\left[-u^ke^{-u}\right]_0^\infty + \int_0^\infty ku^{k-1}e^{-u}\,du\right) = \frac{k}{\lambda^k}E\xi_1^{k-1},$$

ahol ξ_1 egy exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel. Innen k szerinti indukcióval $E\xi_1^k = k!$, és $E\xi^k = \frac{k!}{\lambda^k}$.

8.) Mutassuk meg, hogy egy exponenciális eloszlású ξ valószínűségi változó teljesíti a következő úgynevezett örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y|\xi > y) = P(\xi > x)$$

minden $x \ge 0$ és $y \ge 0$ számra.
Megoldás: Mivel $P(\xi > u) = e^{-\lambda u}$ minden $u \ge 0$ számra, ezért $P(\xi > x + y|\xi > y) = \frac{e^{-\lambda(x+y)}}{e^{-\lambda y}} = e^{-\lambda x} = P(\xi > x)$.

Nem kötelező házi feladat:

Ha egy ξ valószínűségi változó teljesíti az örökifjú tulajdonságot akkor az exponenciális eloszlású.

Adok egy rövid heurisztikus magyarázatot arra, hogy miért csak az exponenciális eloszlás teljesíti az örökifjú tulajdonságot.

Az örökifjú tulajdonság így is átírható: Az $F(x) = P(\xi > x)$ függvény teljesíti az $F(x+y) = F(x)F(y)$ egyenletet minden $x > 0$ és $y > 0$ számra. Ebben az egyenletben logaritmust véve azt kapjuk, hogy a $G(x) = \log F(x)$ függvényre $G(x+y) = G(x) + G(y)$. Ennek az egyetlen (szép) megoldása a $G(x) = \alpha x$ lineáris függvény valamely rögzített α számmal. Innen $P(\xi > x) = F(x) = e^{\alpha x}$. Mivel $P(\xi > x) < 1$ elég nagy x-re, ezért $\alpha < 0$.

A precíz bizonyítás ezen heurisztika pontossá tételén alapulhat. Azt kell megmutatni, hogy az $F(x+y) = F(x)F(y)$ egyenlet 'nem szép' megoldásait figyelmen kívül hagyhatjuk. Nem nehéz belátni, hogy az örökifjú tulajdonság kizárja annak lehetőségét, hogy $P(\xi > x) = F(x) = 0$ valamely x-re. Ezért jogunk van logaritmust venni, és így eljutunk a $G(x+y) = G(x) + G(y)$ egyenlethez. Továbbá $G(x)$ monoton és negatív értékű függvény. Ez kizárja a $G(x)$-re vonatkozó egyenlet csúnya (nem mérhető) megoldásait, és ezért csak a $G(x) = -\alpha x$, $F(x) = e^{-\alpha x}$, $\alpha > 0$ megoldás lehetséges. Ennek igazolása során érdemes először azt megmutatni, hogy véve egy tetszőleges $u > 0$ számot a $G(x)$ függvény megszorítása az ru alakú számokra, ahol r pozitív racionális szám lineáris, azaz $G(ur) = \alpha(u)r$ valamilyen csak az u számtól függő $\alpha(u)$ együtthatóval.

Az örökifjú tulajdonság szemléletes tartalma a következő. Tekintsünk egy személyt vagy tárgyat amelynek élettartama véletlen ξ valószínűségi változó. Tekintsük a $\xi + y$ valószínűségi változó feltételes eloszlását azon feltétel mellett, hogy $\xi > y$, azaz azt, hogy milyen valószínűséggel fog az a személy vagy tárgy legalább még x ideig élni, feltéve, hogy megélte az y időpontot. Ha ez a feltételes eloszlás nem függ az y értéktől, akkor azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó teljesíti az örökifjú tulajdonságot. A fenti feladatban ezt a tulajdonságot fogalmaztuk meg formálisan.

Megjegyzés: A 6. téma ismertetésének nyolcadik feladatában, illetve az azt követő megjegyzésben láttuk, hogy a geometriai eloszlás teljesíti az örökifjú tulajdonság diszkrét változatát, azaz a $P(\xi > x + y|\xi > y) = P(\xi > y)$ azonosságot akkor, ha x és y csak nem-negatív egész értékeket vehetnek fel.

9.) Mutassuk meg, hogy létezik olyan ξ valószínűségi változó teljesíti a következő szuper örökifjú tulajdonságot:

$$P(\xi > x + y|\xi > y) > P(\xi > x)$$

minden $x > 0$ és $y > 0$ számra.

Megoldás: Legyen a ξ valószínűségi változó olyan, hogy $P(\xi > x) = e^{-\sqrt{x}}$, ha $x \ge 0$ és $P(\xi > x) = 1$, ha $x < 0$. Ekkor $P(\xi > x + y|x > y) = e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}}$, ha $x > 0$, $y > 0$. Ezért elég megmutatni, hogy $e^{-\sqrt{x+y}+\sqrt{y}} > e^{-\sqrt{y}}$, illetve hogy $\sqrt{x+y} < \sqrt{x} + \sqrt{y}$, ha $x > 0$ és $y > 0$. Ez az egyenlőtlenség viszont (négyzetre emelés után) könnyen látható.

10.) Ledobunk a $[0, 2]$ intervallumra 100 pontot egymástól függetlenül a $[0, 2]$ intervallumba egyenletes eloszlással. A $[0, 1]$ intervallumba eső pontok értékeit beírjuk egy jegyzőkönyvbe, az $[1, 2]$ intervallumbe eső pontokat viszont figyelmen kívül hagyjuk. Számítsuk ki a jegyzőkönyvbe írt számok összegének a várható értékét és szórásnégyzetét.

Megoldás: Először megmutatom, hogyan lehet ezt a feladatot úgy megoldani, hogy a benne szereplő várható értékeket Riemann–Stieltjes integrálok segítségével számoljuk ki, majd megmutatom, hogyan lehet ezeket a várható értékeket hagyományos módon, Riemann integrálok segítségével kiszámolni.

Vezessük be a következő ξ_j, $1 \le j \le 100$, valószínűségi változókat. $\xi_j = x$, ha a j-ik ledobott pont értéke $x \in [0,1]$, és nulla, ha a j-ik pont az $[1,2]$ intervallumba esik. Ekkor minket az $S = \sum\limits_{j=1}^{100} \xi_j$ valószínűségi változó várható értéke és szórásnégyzete érdekel. A ξ_j valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvénye sem nem diszkrét, sem nem folytonos, hanem $F(x) = F_1(x) + F_2(x)$ alakban írható fel, ahol $F_1(x)$-nek $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 \le x \le 1$ sűrűségfüggvénye van, azaz $F_1(x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ ezzel az $f(\cdot)$ sűrűségfüggvénnyel, $F_2(x)$ pedig egy olyan (nem valószínűségi) μ mértéknek az eloszlásfüggvénye, amelyre $\mu(\{0\}) = \frac{1}{2}$, és $\mu(R \setminus \{0\}) = 0$. Ezért $E\xi_j = \int xF(\,dx) = \int xf(x)\,dx + 0 \cdot \mu(\{0\}) = \int_0^1 \frac{1}{2}x\,dx = \frac{1}{4}$, $E\xi_j^2 = \int x^2F(\,dx) = \int x^2 f(x)\,dx + 0^2 \cdot \mu(\{0\}) = \int_0^1 \frac{1}{2}x^2\,dx = \frac{1}{6}$, $\operatorname{Var}\xi_j = \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$ minden $1 \le j \le 100$ indexre. Innen $ES = 25$, $\operatorname{Var} S = \frac{125}{12}$.

Az $E\xi_j$ és $E\xi_j^2$ mennyiségeket egyszerűbb meggondolások segítségével is kiszámolhatjuk. Legyen η_j a j-ik ledobott pont értéke, és vezessük be a következő $h(u)$ függvényt a $[0,1]$ intervallumon: $h(u) = u$, ha $0 \le u \le 1$, $h(u) = 0$, ha $1 \le u \le 2$. Ekkor $\xi_j = h(\eta_j)$, és η_j egyenletes eloszlású a $[0,2]$ intervallumon. Innen $E\xi_j = Eh(\eta_j) = \int_0^2 \frac{1}{2}h(u)\,du = \int_0^1 \frac{u}{2}\,du + \int_1^2 0 \cdot \frac{1}{2}\,du = \frac{1}{4}$, $E\xi_j^2 = Eh^2(\eta_j) = \int_0^2 \frac{1}{2}h^2(u)\,du = \int_0^1 \frac{u^2}{2}\,du = \frac{1}{6}$, $\operatorname{Var}\xi_j = E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2 = \frac{1}{6} - \frac{1}{16} = \frac{5}{48}$.

Független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvénye. Sűrűségfüggvények konvoluciója.

A következő kérdéssel foglalkozunk. Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyeknek létezik $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye. Lássuk be, hogy a $\xi + \eta$ összegnek is létezik $h(\cdot)$ sűrűségfüggvénye, és adjuk meg azt a formulát, amelynek segítségével azt kiszámolhatjuk. E vizsgálat során be fogjuk vezetni két (sűrűség)függvény konvoluciójának a fogalmát. Ezután alkalmazzuk ezt az eredményt néhány konkrét esetben.

Jelölje $H(x) = P(\xi + \eta < x)$ a független $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvényű ξ és η valószínűségi változók $\xi + \eta$ összeg eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$\begin{aligned} H(x) = P(\xi + \eta < x) &= \int\int_{\{(u,v)\colon\, u+v<x\}} f(u)g(v)\,du\,dv \\ &= \int\int_{\{(\bar u,\bar v)\colon\, \bar v<x\}} f(\bar u)g(\bar v - \bar u)\,d\bar u\,d\bar v \\ &= \int_{-\infty}^x \left[\int_{-\infty}^\infty f(\bar u)g(\bar v - \bar u)\,d\bar u\right] d\bar v = \int_{-\infty}^x K(v)\,dv, \end{aligned}$$

ahol

$$K(v) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(v-u)\,du.$$

A fenti számolásokban egy integráltranszformációt alkalmaztunk $\bar{v} = u + v$, $\bar{u} = u$ helyettesítéssel, majd felhasználtuk a Fubini tételt. Az elvégzett számolásban észre kell venni, hogy a $\bar{v} = u + v$, $\bar{u} = u$ transzformáció az $\{(u,v)\colon\ u+v < x\}$ tartomány a $\{(\bar{u},\bar{v})\colon\ \bar{v} < x,\ -\infty < \bar{u} < \infty\}$ tartományba képezi, és e (lineáris) transzformáció Jacobiánja azonosan 1.

Ezután bevezetjük a következő definiciót.

(Sűrűség)függvények konvoluciójának a definiciója. *Legyen $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ két sűrűségfüggvény a számegyenesen, általánosabban integrálható függvények, azaz tegyük fel, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\,du < \infty$ és $\int_{-\infty}^{\infty} |g(u)|\,du < \infty$. Az $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ függvények $f * g(\cdot)$ konvoluciója az*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du, \quad -\infty < x < \infty,$$

függvény.

Külön tételben fogalmazom meg az előbb elvégzett számolások eredményeként kapott azonosságot arról, hogy hogyan kell kiszámolni független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét.

Tétel független valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényéről. *Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $\xi + \eta$ összegnek is létezik sűrűségfüggvénye, és az az*

$$f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du, \quad -\infty < x < \infty$$

függvény.

1. megjegyzés: Egyszerű (lineáris) transzformációval kapjuk, hogy a konvoluciót másképp is kiszámolhatjuk. Ez mutatja, hogy a konvolucióban résztvevő függvények szimmetrikus szerepet játszanak.

$$\begin{aligned} f * g(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-u)g(u)\,du \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\frac{x}{2} - u\right) g\left(\frac{x}{2} + u\right)\,du, \quad -\infty < x < \infty. \end{aligned}$$

2. megjegyzés: Érdemes megérteni azt szemléletes képet, amely egyszerűen megmagyarázza, hogy független valószínűségi változók összegének sűrűségfüggvényét miért az általunk megadott képlet fejezi ki. A következő meglehetősen informális magyarázat hasznos lehet. Legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x)$, η sűrűségfüggvénye $g(x)$. A $\xi+\eta$ összeg

$h(x)$ sűrűségfüggvényét egy x pontban a $P(\xi+\eta \in [x, x+dx) \sim h(x)dx$ reláció határozza meg. A $\xi+\eta \in [x, x+dx]$ esemény úgy következhet be, ha $\xi \in [y, y+dy)$ és $\eta \in [x-y, x-y+dx)$ valamely y számra. Ennek valószínűsége rögzített y számra $f(y)g(x-y)dydx$. Ezeket a valószínűségeket ,,összegezve", pontosabban integrálva az y érték szerint azt kapjuk, hogy $h(x)dx = \int f(y)g(x-y)\,dy \cdot dx$, ahonnan dx-szel leosztva megkapjuk a keresett formulát. Ugyanez az érvelés azt sugallja, hogy $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye $\int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(y)\,dy$. Ennek az állításnak a precíz indoklását tartalmazza a következő feladat.

Feladat:

Legyen ξ és η két független valószínűségi változó $f(x)$ illetve $g(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Ekkor a $\xi - \eta$ valószínűségu változónak létezik $h(x)$ sűrűségfüggvénye, és az $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(y)\,dy$ alakban adható meg.
Megoldás: Tekintsük az $\bar\eta = -\eta$ valószínűségi változót. Ekkor $\bar\eta$ sűrűségfüggvénye $\bar g(x) = g(-x)$. Valóban, legyen $G(x)$ az η, és $\bar G(x)$ az $\bar\eta$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor $\bar g(x) = \frac{d\bar G(x)}{dx} = \frac{d(1-G(-x))}{dx} = g(-x)$. Ezért $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye megegyezik $\xi + \bar\eta$ sűrűségfüggvényével, és ez

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)\bar g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(-y)\,dy = -\int_{\infty}^{-\infty} f(x+y)g(y)\,dy \\ = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+y)g(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(y-x)\,dy.\end{aligned}$$

3. megjegyzés. Felmerülhet a kérdés, hogy amennyiben $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ integrálható függvény, de nem teszünk fel semmilyen további tulajdonságot ezekről a függvényekről, akkor szükségszerűen létezik-e az $f * g(\cdot)$ konvolució? Rögzített x számra az $f * g(x)$ számot definiáló integrál nem feltétlenül létezik. Viszont a mértékelméletben belátják, hogy az olyan kivételes pontok halmaza, amelyekre ez az integrál nem létezik, kicsi, (pontosabban fogalmazva nulla Lebesgue mértékű halmaz). Ez azt jelenti, hogy a számegyenes majdnem minden pontjában a konvoluciót definiáló integrál létezik. Azokban a konkrét esetekben, amelyekkel találkozni fogunk ez a probléma nem merül fel. Ezért ezzel a kérdéssel nem foglalkozom, csak megemlítem a bizonyítás részleteinek tárgyalása nélkül, hogy az általános eset vizsgálata a következő észrevételen alapul.

Be lehet látni, hogy

$$\int_{\infty}^{\infty} |f| * |g|(u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)||g(u)|\,du\,dv,$$

és az általános eredmény ebből az azonosságból és az integrálok alapvető tulajdonságaiból következik.

4. megjegyzés. Az $f * g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$ konvolució kiszámolásában az integrálást az egész számegyenesen el kell végezni. Viszont a konvoluciós integrál definiciója alapján az integrálási tartományból ki lehet hagyni azt a halmazt, ahol

$f(y)g(x-y)=0$. Például abban a fontos speciális esetben, ha az $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ sűrűségfüggvények olyanok, hogy $f(x)=0$ és $g(x)=0$ az $x\le 0$ értékekre a következő azonosság érvényes:

$f*g(x)=\int_0^x f(y)g(x-y)\,dy$, ha $x>0$, és $f*g(x)=0$, ha $x<0$. Ekkor ugyanis $f(y)g(x-y)\neq 0$ csak akkor, ha $y\ge 0$ és $x-y\ge 0$, azaz $0\le y\le x$.

Lássunk néhány példát a fenti eredmények alkalmazására.

Feladatok:

11.) Legyenek ξ_1 és ξ_2 független exponenciális eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}$ ha $x\ge 0$, és $f(x)=0$, ha $x>0$. Számítsuk ki $\xi_1+\xi_2$ sűrűségfüggvényét.

Általánosabban, legyen $\xi_1,\dots\xi_m$ m darab független, exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel. Mutassuk meg, hogy $\xi_1+\cdots+\xi_m$ sűrűségfüggvénye $f_m(x)=\frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$, és $f_m(x)<0$, ha $x<0$.

Megoldás: Ki kell számolnunk az $f*f(x)$ illetve $\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ konvoluciókat a fenti $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Mivel $f(x)=0$, ha $x\le 0$, a konvoluciót meghatározó integrálban szereplő $f(y)f(x-y)$ integrandus nulla, ha $y\le 0$ vagy $x-y\le 0$. Innen a konvoluciót definiáló integrál csak $x\ge 0$ esetén lehet nem nulla. Az $x\le 0$ esetben ugyanis $f(y)f(x-y)=0$ minden y-ra, és $x\ge 0$ esetén az $f(y)f(x-y)>0$ egyenlőtlenség csak $0\le y\le x$ esetén teljesül. Innen a $\xi_1+\xi_2$ valószínűségi változó $f_2(x)=f*f(x)$ sűrűségfüggvényére $f_2(x)=0$, ha $x<0$, és

$$\begin{aligned}f_2(x)=f*f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x\lambda e^{-\lambda y}\lambda e^{-\lambda(x-y)}\,dy\\&=\int_0^x\lambda^2e^{-\lambda x}\,dy=\lambda^2xe^{-\lambda x},\quad\text{ha } x\ge 0.\end{aligned}$$

Hasonlóan, ha $f_m(x)=\underbrace{f*\cdots*f}_{m-\text{szer}}(x)$ jelöli $\xi_1+\cdots\xi_m$ sűrűségfüggvényét, akkor $f_m(x)=0$ minden $m\ge 1$ számra, ha $x<0$. Azt állítom, hogy $f_m(x)=\frac{\lambda^m x^{m-1}}{(m-1)!}e^{-\lambda x}$, ha $x\ge 0$. Ezen állítás bizonyításához elég belátni teljes indukcióval azt, hogy $f_{m-1}*f(x)=f_m(x)$ a fent definiált f_m függvényekkel. Viszont

$$\begin{aligned}f_{m-1}*f(x)&=\int_{-\infty}^{\infty}f_{m-1}(y)f(x-y)\,dy=\int_0^x\lambda^{m-1}\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\lambda e^{-\lambda y}e^{-\lambda(x-y)}\,dy\\&=\lambda^me^{-\lambda x}\int_0^x\frac{y^{m-2}}{(m-2)!}\,dy=e^{-\lambda x}\frac{\lambda^mx^{m-1}}{(m-1)!},\quad\text{ha } x\ge 0.\end{aligned}$$

Másrészt $f_m(x)=0$, ha $x\le 0$.

12.) Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók valamely $\lambda>0$ paraméterrel, definiáljuk ezek $S_n=\sum\limits_{j=1}^n\xi_j$ részletösszegeit, és vegyünk valamely $x > 0$ számot. Lássuk be minden $n = 0, 1, \dots$ számra, hogy annak a valószínűsége, hogy mind az $S_{n+1} > x$, mind az $S_n \le x$ események bekövetkeznek $\frac{(\lambda x)^n}{n!} e^{-\lambda x}$. (Az $S_0 = 0$ definiciót használjuk.) Ez azt jelenti, hogy az $S_1(\omega)$, $S_2(\omega), \dots$ (véletlen) sorozatnak a $[0, x]$ intervallumba eső pontjainak száma Poisson eloszlású λx paraméterrel.

Megoldás: $P(S_{n+1} > x,\, S_n \le x) = P(S_n \le x) - P(S_{n+1} \le x) = \int_0^x [f_n(u) - f_{n+1}(u)]\, du$, ahol $f_n(u)$ jelöli az S_n valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Innen az előző feladat eredménye alapján

$$P(S_{n+1} > x,\, S_n \le x) = \int_0^x \frac{\lambda^n u^{(n-1)}}{(n-1)!} e^{-\lambda u}\, du - \int_0^x \frac{\lambda^{n+1} u^n}{n!} e^{-\lambda u}\, du.$$

Parciális integrálással ($f'(u) = \lambda e^{-\lambda u}$ és $g(u) = \frac{\lambda^n u^n}{n!}$ választással) kapjuk, hogy

$$\int_0^x \frac{\lambda^{n+1} u^n}{(n)!} e^{-\lambda u}\, du = -\frac{\lambda^n x^n}{n!} e^{-\lambda x} + \int_0^x \frac{\lambda^n u^{n-1}}{(n-1)!} e^{-\lambda u}\, du.$$

A fenti két azonosságból következik a feladat állítása.

13.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, mind a kettő $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, sűrűségfüggvénnyel. Lássuk be először, hogy $f(x)$ valóban sűrűségfüggvény. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Az $f(x)$ függvény minden pontban nem negatív. Annak ellenőrzéséhez, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény azt kell megmutatnunk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Ez igaz, mert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{0} e^x\, dx + \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-x}\, dx = \frac{1}{2} \left[e^x\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2} \left[-e^{-x}\right]_0^{\infty} = 1$.

A $\xi + \eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét a $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) f(x-y)\, dy$ formula segítségével számíthatjuk ki. Számítsuk ki ezt az integrált. Tekintsük először azt az esetet, amikor $x \ge 0$. Az integrált számítsuk ki úgy, hogy nézzük mind a négy (elvileg) lehetséges esetet, amikor a) $y \ge 0$ és $x - y \ge 0$, b) $y \ge 0$ és $x - y < 0$, c) $y < 0$, $x - y \ge 0$, d) $y < 0$, $x - y < 0$. Számítsuk ki mind a négy esetben azt, hogy milyen tartományban veszi fel értékét az y változó, és mi az integrandus illetve az integrál értéke ebben a tartományban. Az a) esetben $0 \le y \le x$, az integrandus $f(y) f(x-y) = \frac{1}{4} e^{-y} e^{-(x-y)} = \frac{e^{-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{x e^{-x}}{4}$ az a) tartományban. A b) esetben $y > x$ és $f(y) f(x-y) = \frac{e^{-y} e^{x-y}}{4} = \frac{e^{x-2y}}{4}$ az integrál pedig $\frac{1}{4} \int_x^{\infty} e^{x-2y}\, dy = \frac{e^{-x}}{8}$, a c) esetben $y < 0$ és $f(y) f(x-y) = \frac{1}{4} e^y e^{-(x-y)} = \frac{e^{2y-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{1}{4} \int_{-\infty}^{0} e^{2y-x}\, dy = \frac{e^{-x}}{8}$, a d) eset nem lehetséges, mert ekkor egyrészt az $y < 0$ másrészt az $y > x \ge 0$ feltételeknek kellene teljesülniük. Innen azt kapjuk, hogy $g(x) = \frac{(x+1) e^{-x}}{4}$, ha $x > 0$. Mivel f szimmetrikus függvény, ezért, mint nem nehéz megmutatni, $g(x)$ is az. Tehát $g(-x) = g(x)$, és $g(x) = \frac{(|x|+1) e^{-|x|}}{4}$.

Megjegyzem, hogy az előző feladatokban tekintett konvoluciót csak akkor használhatjuk, ha olyan valószínűségi változók összegének a sűrűségfüggvényét akarjuk kiszámolni, amelyek függetlenek. Ez az oka annak, hogy a következő feladat megoldásában nem használhatjuk a konvoluciót, hanem más módszert kell alkalmaznunk.

14.) Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz $F(x) = P(\xi < x) = 1 - e^{-x}$, ha $x \ge 0$, $F(x) = P(\xi < x) = 0$, ha $x \le 0$. Számítsuk ki a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Jelölje $G(x)$ a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor a $G(x) = P(\{\omega\colon\ \xi(\omega) + \xi^2(\omega) < x\})$ eloszlásfüggvényt kell kiszámolni az $F(x)$ eloszlásfüggvény ismeretében. Viszont egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye meghatározza a $P(\omega\colon\ \xi(\omega) \in B)$ halmazok valószínűségét is minden „szép”, azaz Borel mérhető B halmazra. Vegyük észre, hogy jelen feladatban is ilyen jellegű problémát kell megoldani. Az ebben a feladatban megjelenő B halmaz egyszerű szerkezetű, és ezért ez a feladat könnyebben megoldható. Tekintsük az $A(\omega, x) = \{\omega\colon\ \xi(\omega) + \xi(\omega)^2 < x\}$ halmazokat. Ezek valószínűségét kell kiszámítanunk. Ennek érdekében tekintsük az $B(x) = \{y\colon\ y + y^2 < x\}$ hamazt. Vegyük észre, hogy $B(x) = \{y\colon\ y_1(x) < y < y_2(x)\}$, ahol $y_1(x) = \frac{-1-\sqrt{1+4x}}{2}$ és $y_2(x) = \frac{-1+\sqrt{1+4x}}{2}$ az $y^2 + y = x$ egyenlet kisebb és nagyobb megoldása, (feltéve, hogy a fenti megoldások léteznek, mint valós számok), és $A(\omega, x) = \{\omega\colon\ y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}$. Innen

$$G(x) = P\left(\{\omega\colon\ y_1(x) < \xi(\omega) < y_2(x)\}\right) = F(y_2(x)) - F(y_1(x)), \quad \text{ha } x \ge -\frac{1}{4},$$

azaz, ha a fenti $y_1(x)$ és $y_2(x)$ megoldások léteznek, és az $G(x) = 0$, ha ezek a megoldások nem léteznek, és az $A(\omega, x)$ halmaz üres. Így $G(x) = 0$, ha $x \le -\frac{1}{4}$. Mivel $P(\xi \le 0) = 0$, ezért $G(x) = P(\xi + \xi^2 < x) = 0$, ha $y_2(x) \le 0$, azaz, ha $x \le 0$. Másrészt $y_1(x) \le 0 \le y_2(x)$ minden $x \ge 0$ számra, és $P(\xi < 0) = 0$. Ezért a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye a $G(x) = P\left(y_1(x) < \xi < y_2(x)\right) = P\left(\xi < y_2(x)\right) = 1 - e^{-y_2(x)} = 1 - \exp\left\{\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$, és $G(x) = 0$, ha $x \le 0$. A $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó $g(\cdot)$ sűrűségfüggvénye ennek deriváltja, ezért $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1+4x}} \exp\left\{\frac{1-\sqrt{1+4x}}{2}\right\}$, ha $x \ge 0$.

15.) Legyenek ξ és η független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Lássuk be, hogy $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

Megoldás: $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x}) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1$, ha $x \ge 0$. Írjuk fel ξ^2 sűrűségfüggvényét és konvolúció segítségével számoljuk ki $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvényét. A ξ^2 valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} e^{-x/2}$, ha $x \ge 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$, és $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f(x) = g * g(x) &= \int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{u(x-u)}} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2}\, du \\ &= e^{-x/2} \int_0^1 \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\, dv = \frac{1}{2} e^{-x/2}, \quad \text{ha } x \ge 0, \end{aligned}$$

és $f(x) = 0$, ha $x \le 0$.

Megjegyzés: Az x paramétertől nem függő $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}}\, dv$ integrál értékét meghatározza az a tény, hogy a végeredményként kapott függvény sűrűségfüggvény, ezért integrálja a számegyenesen eggyel egyenlő. De ki is tudjuk számolni ezt az integrált. Valóban, vegyük észre, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{v(1-v)}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{4}-(v-\frac{1}{2})^2}} = \frac{2}{\sqrt{1-(2v-1)^2}},$$

ezért $u = 2v-1$ helyettesítéssel

$$\int_0^x \frac{1}{2\pi\sqrt{v(1-v)}}\,dv = \int_{-1}^{2x-1} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{2\pi}\left[\arcsin x\right]_{-1}^{2x-1} = \frac{\arcsin(2x-1)+\frac{\pi}{2}}{2\pi}.$$

Innen következik, hogy a tekintett integrál értéke $x=1$ esetén $\frac{1}{2}$. Ugyanis $\arcsin 1 = \frac{\pi}{2}$.

16.) Bevezették a $\Gamma(t) = \int_0^\infty e^{-x}x^{t-1}\,dx$, $t>0$, úgynevezett Γ-függvényt, és a $\gamma_t(x) = \frac{1}{\Gamma(t)}e^{-x}x^{t-1}$, ha $x>0$ és $\gamma_t(x)=0$, ha $x<0$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező t paraméterű γ eloszlást minden $t>0$ paraméterre. Mutassuk meg, hogy $\gamma_t * \gamma_s(x) = \gamma_{t+s}(x)$ minden $s>0$ és $t>0$ paraméterre.

Megoldás. Azt kell megmutatni, hogy

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(t)}\int_0^x e^{-u}u^{s-1}e^{-(x-u)}(x-u)^{t-1}\,du = \frac{1}{\Gamma(s+t)}e^{-x}x^{s+t-1}, \quad \text{ha } x>0.$$

Viszont $u = xv$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_0^x e^{-u}u^{s-1}e^{-(x-u)}(x-u)^{t-1}\,du &= e^{-x}\int_0^x u^{s-1}(x-u)^{t-1}\,du \\ &= e^{-x}x^{t+s-1}\int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,dv.\end{aligned}$$

Innen következik, hogy $x>0$ esetben

$$\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(t)}\int_0^x e^{-u}u^{s-1}e^{-(x-u)}(x-u)^{t-1}\,du = \frac{C(s,t)}{\Gamma(s)\Gamma(t)}e^{-x}x^{s+t-1},$$

ahol a $C(s,t) = \int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,dv$ konstans nem függ az x változótól. Viszont az azonosságban szereplő függvények sűrűségfüggvények, ha $x\le 0$ esetben a függvényeket nullának választjuk. Másrészt a $\gamma_{s+t}(x) = \frac{1}{\Gamma(s+t)}e^{-x}x^{t+s-1}$, ha $x\ge 0$, és $\Gamma_{s+t}(x)=0$, ha $x\le 0$ függvény szintén sűrűségfüggvény. Ez a két függvény csak úgy lehet egyenlő, ha $\gamma_s*\gamma_t = \gamma_{s+t}$, és $\frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(t)}C(s,t) = \frac{1}{\Gamma(s)\Gamma(t)}\int_0^1 v^{s-1}(1-v)^{t-1}\,dv = \frac{1}{\Gamma(s+t)}$.

1. megjegyzés. Megmutatható, hogy a 15. feladat eredménye tekinthető a 16. feladatban megfogalmazott állítás speciális esetének az $s=t=\frac{1}{2}$ választással. Valóban, láttuk, hogy ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor a ξ^2 valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^{-x/2}$, ha $x\ge 0$, és $g(x)=0$, ha $x<0$.

Innen következik, hogy $g(x)=\frac12\gamma_{1/2}(\frac x2)$, (és mellékeredményként $\Gamma(\frac12)=\sqrt{\pi}$). Mivel $\gamma_1(x)=e^{-x}$, ha $x>0$, és $\gamma_1(x)=0$, ha $x<0$, a 15. feladat állítása a $\gamma_{1/2}*\gamma_{1/2}(x)=\gamma_1(x)$ azonosság átskálázott változata.

2. megjegyzés. A $\gamma_1(x)$ függvény a $\lambda=1$ paraméterű exponenciális eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért a 16. feladat alapján a $\gamma_k(x)$ függvény pozitív egész k számokra k független, 1 paraméterű, exponenciális eloszlású valószínűségi változó összegének a sűrűségfüggvénye. Ez a 11. feladat eredményből is következik.

17.) Legyen ξ és η két független, a $\left[-\frac12,\frac12\right]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változó, azaz legyen ξ és η sűrűségfüggvénye $f(x)=1$, ha $-\frac12\le x\le\frac12$, és $f(x)=0$ egyébként. Számoljuk ki $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye a $g(x)=\int f(y)f(x-y)\,dy$ függvény, ahol $f(x)$ a $\left[-\frac12,\frac12\right]$ intervallumban egyenletes eloszlás sűrűségfüggvénye. Ezért $f(y)f(x-y)=1$, ha $-\frac12\le y\le\frac12$, és $-\frac12\le x-y\le\frac12$, azaz $-\frac12+x\le y\le\frac12+x$, és nulla egyébként. Ez azt jelenti, hogy a $\xi+\eta$ összeg $g(x)$ sűrűségfüggvénye az x pontban megegyezik a $\left[-\frac12,\frac12\right]\cap\left[-\frac12+x,\frac12+x\right]$ intervallum hosszával. Ha $|x|>1$, akkor a fenti metszet üres, ezért ebben az esetben $g(x)=0$. Ha $0\le x\le1$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac12+x,\frac12\right]$ intervallum, és ennek hossza $1-x$, azaz ebben az esetben $g(x)=1-x$. Ha $-1\le x\le0$, akkor ez a metszet a $\left[-\frac12,\frac12+x\right]$ intervallum amelynek hossza $1+x=1-|x|$, azaz $g(x)=1+x=1-|x|$ ebben az esetben. Ez azt jelenti, hogy $g(x)=1-|x|$, ha $|x|\le1$, és $g(x)=0$, ha $|x|>1$.

Megadok egy másik megoldást is, amely a korábban tárgyalt geometriai érvelésen alapul.

Számítsuk ki először a $\xi+\eta$ valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvényét. Definiáljuk a $K=\left[-\frac12,\frac12\right]\times\left[-\frac12,\frac12\right]$ négyzetet, és jelölje λ a Lebesgue mértéket, azaz a területet a síkon. Ekkor a sík tetszőleges $A\subset R^2$ mérhető részhalmazára igaz az, hogy $P((\xi,\eta)\in A)=\lambda(A\cap K)$. Speciálisan, $G(x)=P(\xi+\eta<x)=\lambda(K\cap\{(u,v)\colon\ u+v<x\})$. Ha $x\le-1$, akkor $G(x)=0$, ha $-1\le x\le0$, akkor $G(x)$ a $\left(-\frac12,-\frac12\right)$, $\left(-\frac12,\frac12+x\right)$ és $\left(\frac12+x,-\frac12\right)$ pontok által meghatározott háromszög területe $\frac12(1+x)^2$. Hasonlóan, ha $x\ge1$, akkor $G(x)=1$. Ha $0\le x\le1$, akkor a $G(x)$ eloszlásfüggvény megegyezik annak a poligonnak területével, amelyet úgy kapunk, hogy a K négyzetből kihagyjuk a $\left(\frac12,\frac12\right)$, $\left(\frac12,-\frac12+x\right)$ és $\left(-\frac12+x,\frac12\right)$ pontok által meghatározott háromszöget. Ezért $G(x)=1-\frac12(1-x)^2$ ebben az esetben. A $G(x)$ függvényt deriválva kapjuk, hogy $g(x)=0$, ha $|x|\le1$, $g(x)=1+x$, ha $-1\le x\le0$, és $g(x)=1-x$, ha $0\le x\le1$.

18.) Legyen ξ és η két független egyforma eloszlású valószínűségi változó valamely $[a,a+1]$ illetve $[b,b+1]$ intervallumon. Számítsuk ki a $\xi+\eta$ és $\xi-\eta$ valószínűségi változók sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A feladatot meg lehet oldani megfelelő konvoluciók kiszámításának a segítségével. De mivel ezt a feladatot már megoldottuk egy speciális esetben a 17. feladatban, ezért egyszerűbb a feladat megoldását visszavezetni erre a speciális esetre. Ennek érdekében vezessünk be két független ξ_0 és η_0 a $[-\frac12,\frac12]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változót. Feltehetjük, hogy $\xi=\xi_0+a+\frac12$ és

$\eta = \eta_0 + b + \frac{1}{2}$. Ekkor $\xi + \eta = \xi_0 + \eta_0 + a + b + 1$, $\xi - \eta = \xi_0 - \eta_0 + a - b$. Ezenkívül $\xi_0 + \eta_0$ és $\xi_0 - \eta_0$ sűrűségfüggvénye megegyezik, és ez az említett feladat eredménye szerint $g(x) = 1 - |x|$, ha $-1 \le x \le 1$, $g(x) = 0$, ha $x < -1$ vagy $x > 1$. Innen $x + \eta$ sűrűségfüggvénye $g(x - a - b - 1) = 1 - |x - a - b - 1|$, ha $|x-a-b-1| \le 1$, $g(x-a-b-1) = 0$, ha $|x-a-b-1| > 1$, $\xi - \eta$ sűrűségfüggvénye $g(x-a+b) = 1 - |x-a+b|$, ha $|x-a+b| \le 1$, $g(x-a+b) = 0$, ha $|x-a+b| > 1$.

Tekintsünk két a második téma ismertetésében tárgyalt feladatot, amelyeket annak idején geometriai meggondolások alapján oldottunk meg. Megmutatom, hogy ezek a feladatok megoldhatóak a most tárgyalt konvolució segítségével is.

19.) Két ember 8 és 9 óra között megjelenik egy téren egymástól függetlenül és egyenletes eloszlással. Mind a kettő félórát vár a másikra, és ha az addig nem jön, akkor hazamegy. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?

Megoldás. Jelölje ξ_j, $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy hány (0 és 1 közötti számmal kifejezhető) órával 8 óra után jelent meg a j-ik ember a helyszínen. Ekkor ξ_1 és ξ_2 független a $[0, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Minket a $-\frac{1}{2} \le \xi_1 - \xi_2 \le \frac{1}{2}$ események valószínűsége érdekel. Mivel $\xi_1 - \xi_2 = \xi_1 + (-\xi_2) = \xi_1 + \bar{\xi}_2$-t is írhatunk, ahol $\bar{\xi}_2 = -\xi_2$, és $\bar{\xi}_2$ sűrűségfüggvényét könnyen kiszámolhatjuk, ezért a konvolucióról tanultak alapján ezt a feladatot meg tudjuk oldani. Az $F(u) = P(\xi_1 - \xi_2 < u)$ eloszlás sűrűségfüggvénye a $g(u) = f_1 * f_2(u)$ konvolució, ahol $f_1(u) = 1$, ha $0 \le u \le 1$, $f_1(u) = 0$, különben, $f_2(u) = 1$, ha $-1 \le u \le 0$, $f_2(u) = 0$ különben. Ekkor a minket érdeklő mennyiség az $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} g(u)\,du$ integrál. Továbbá,

$$g(x) = f_1 * f_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_1(u) f_2(x-u)\,du = \int_{-\infty}^{\infty} f(u) f(x-u)\,du, \quad -\infty < x < \infty,$$

ahol $f(u) = 1$, ha $\frac{1}{2} \le u \le \frac{1}{2}$, $f(u) = 0$, ha $u \ge \frac{1}{2}$.

A 17. feladat megoldásában láttuk, hogy $g(u) = 1 - u$, ha $0 < u < 1$ $g(u) = 1 + u$, ha $-1 < u < 0$. Innen $F\left(\frac{1}{2}\right) - F\left(-\frac{1}{2}\right) = \int_{-1/2}^{1/2} (1 - |u|)\,du = \frac{3}{4}$.

20.) Két botot véletlenszerűen, egyenletes eloszlással eltörünk. A két rövidebb darabot összeragasztjuk. Mi az így kapott új bot hosszának az $F(u)$ eloszlásfüggvénye?

Megoldás. Jelölje ξ_j, $j = 1, 2$, azt a valószínűségi változót, amely azt adja meg, hogy a j-ik bot rövidebb végének mi a hossza. Ekkor ξ_1, és ξ_2 független valószínűségi változók, amelyek sűrűségfüggvénye az az $f(\cdot)$ függvény, amelyre $f(x) = 2$, ha $0 \le x \le \frac{1}{2}$, és $f(x) = 0$ egyébként. Minket a $\xi_1 + \xi_2$ valószínűségi változó eloszlása érdekel. Viszont $\xi_1 + \xi_2$ sűrűségfüggvénye $g(x) = f * f(x)$, ahonnan $g(x) = 2 - |2 - 4x|$, ha $0 \le x \le 1$, $g(x) = 0$ különben. Ezt kiintegrálva megkapjuk az eredményt, amelyet a a következő képletek adnak meg: $F(u) = 0$, ha $u \le 0$, $F(u) = 1 - 2u^2$, ha $0 \le u \le \frac{1}{2}$, $F(u) = 1 - 2(1-u)^2 = 4u - 2u^2 - 1$, ha $\frac{1}{2} \le u \le 1$. Ha $u \ge 1$, akkor $F(u) = 1$.

21.) Egy egységnyi oldalú négyzet két átellenes oldalán találomra választunk egy-egy pontot. Mekkora annak a valószínűsége, hogy ezek távolsága α-nál kisebb $(1 \le \alpha < \sqrt{2})$?

Megoldás: Jelölje ξ a négyzet egyik, η a négyzet átellenes oldalára ledobott pont értékét. A két ledobott pont távolsága (a Pitagorasz-tétel szerint) $\sqrt{(\xi-\eta)^2+1}$, ezért minket a $P(\sqrt{(\xi-\eta)^2+1}<\alpha)=P(|\xi-\eta|<\sqrt{\alpha^2-1})$ valószínűség értéke érdekel. ξ és η két független a $[0,1$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változó. A feladatot egyrészt megoldhatjuk a geometriai valószínűségek módszerével. Ekkor azt használjuk, ki, hogy a (ξ,η) véletlen vektor az egységnégyzet egy véletlen pontja, és a keresett valószínűség az $\{(u,v)\colon\ 0\le u,v\le 1,\ -\sqrt{\alpha^2-1}<u-v<\sqrt{\alpha^2-1}\}$ halmaz területe, ami $1-(1-\sqrt{\alpha^2-1})^2=2\sqrt{\alpha^2-1}-(\alpha^2-1)$. Másrészt a minket érdeklő valószínűséget kiszámolhatjuk a 18. feladat eredményének a segítségével is. Ezen eredmény szerint ugyanis ismerjük a $\xi-\eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét, ahonnan tetszőleges $0\le u\le 1$ számra $P(|\xi-\eta|<u)=\int_{-u}^{u}g(x)\,dx=2\int_0^u(1-x)\,dx=2u-u^2$ Innen $u=\sqrt{\alpha^2-1}$ választással a keresett valószínűség $2\alpha-\alpha^2=2\sqrt{\alpha^2-1}-(\alpha^2-1)$.

22.) A $[0,1]$ intervallumon találomra felveszünk két pontot. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a két felvett pont távolsága kisebb, mint a 0 pontnak a hozzá közelebb eső ponttól való távolsága?

Megoldás: Ezt a feladatot legegyszerűbben a geometriai valószínűségek módszerével tudjuk megoldani. Egyszerűbb először a feladatban kérdezett esemény komplementerének a valószínűségét kiszámolni. Legyen ξ az első, η a második ledobott pont értéke, és vezessük be az $A=\{\omega\colon\ \xi(\omega)>2\eta(\omega)\}$ és $B=\{\omega\colon\ \eta(\omega)>2\xi(\omega)\}$ eseményeket. Ekkor a minket érdeklő esemény komplementere az $A\cup B$ esemény. Továbbá, az A és B események diszjunktak, $P(A)=P(B)$, ezért $P(A\cup B)=2P(A)$. A (ξ,η) véletlen vektor egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, és az A esemény azt jelenti, hogy ez a pont az $\{(u,v)\colon\ 0<2v<u\le 1\}$ halmazba esik. Ennek valószínűsége $\frac14$. Ezért $P(A\cup B)=\frac12$, és a keresett valószínűség $1-\frac12=\frac12$.
Megjegyzem, hogy az előbb tekintett $P(A)$ eseményt a következőképp számolhatjuk ki általános elvek segítségével. A (ξ,η) véletlen vektor sűrűségfüggvényét ismerjük. Ez a ξ és η valószínűségi változók függetlensége miatt $g(u,v)=f(u)f(v)$, ahol $f(u)=1$, ha $0\le u\le 1$, $f(u)=0$, ha $u<0$ vagy $u>1$ a ξ és η valószínűségi változók sűrűségfüggvénye. Innen,

$$\begin{aligned}P(A)&=\int_{\{(x,y)\colon\ x>2y\}}g(x,y)\,dx\,dy=\int_{\{(x,y)\colon\ x>2y\}}f(x)f(y)\,dx\,dy\\&=\int_{\{(x,y)\colon\ 1\ge x>2y>0\}}dx\,dy=\int_0^1\left(\int_0^{x/2}dy\right)dx=\int_0^1\frac{x}{2}\,dx=\left[\frac{x^2}{4}\right]_0^1=\frac14.\end{aligned}$$

23.) Legyen ξ és η két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számítsuk ki a $\frac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlás és sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Tegyünk először egy általános megjegyzést. Ha adva van két valószínűségi változó ξ és η, amelyek (együttes sűrűségfüggvénye egy ismert $f(u,v)$ sűrűségfüggvény, akkor az $\frac{\eta}{\xi}$ hányados eloszlásfüggvényét a következő módon számolhatjuk ki: Vezessük be a $g(u,v)=g_x(u,v)$ függvényt, amely a síkon az $\left\{(u,v)\colon\ \frac{v}{u}<x\right\}$ halmaz indikátorfüggvénye, azaz $g(u,v)=1$, ha $\frac{v}{u}<x$, és $g(u,v)=0$, ha $\frac{v}{u}\ge x$.

Ekkor

$$P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)=Eg(\xi,\eta)=\int\int g(u,v)f(u,v)\,du\,dv=\int\int_{\{(u,v)\colon\ \frac{v}{u}<x\}} f(u,v)\,du\,dv.$$

Látni fogjuk, hogy az ebben a feladatban vizsgálandó integrál viszonylag egyszerű, könnyebben kezelhető.
A feladatban vizsgálandó hányados eloszlásfüggvénye

$$\begin{aligned}F(x)=P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=\iint_{v<xu}\frac{1}{2\pi}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv\\&=2\frac{1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}<\varphi<\arctan x}\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi=\frac12+\frac1\pi\arctan x.\end{aligned}$$

Ebben a számolásban a felírt integrált átírtuk $u=r\cos\varphi$, $v=r\sin\varphi$ transzformációval polárkoordinátarendszerben. E számolás során az integrandusban megjelenik az r Jacobian mint szorzó faktor. Ezután azt vegyük észre, hogy a belső r változó szerinti integrál $\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr=\left[-e^{-r^2/2}\right]_0^\infty=1$.
Kiszámoltuk a keresett valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. E valószínűségi változó sűrűségfüggvénye az eloszlásfüggvény deriváltja, azaz az $f(x)=\frac{dF(x)}{dx}=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$ függvény.
Második megoldás. A (ξ,η) vektor sűrűségfüggvénye $\frac{1}{2\pi}e^{-(x^2+y^2)/2}$, ami forgatásinvariáns függvény. Innen következik, hogy annak valószínűsége, hogy a (ξ,η) vektor egy origóból kiinduló α szögű szögtartományba esik, $\frac{\alpha}{2\pi}$. Ezért

$$\begin{aligned}P\left(\frac{\eta}{\xi}<x\right)&=P\left((\xi,\eta)\in\left[-\frac{\pi}{2},\arctan x\right)\cup\left[\frac{\pi}{2},\arctan x+\pi\right)\text{ szögtartományban}\right)\\&=\frac{1}{2\pi}2\left(\arctan x+\frac{\pi}{2}\right)=\frac12+\frac1\pi\arctan x.\end{aligned}$$

1. kiegészítés: Többváltozós sűrűségfüggvények.

Az egydimenziós esethez hasonlón érdemes bevezetni többváltozós eloszlásfüggvények sűrűségfüggvényének a fogalmát. Látni fogjuk, hogy ha valamely valószínűségi változók együttes eloszlásának van sűrűségfüggvénye, akkor ezen valószínűségi változók valamely függvényének a várható értékét ki lehet számolni ezen sűrűségfüggvény szerinti alkalmas integrál segítségével. Az így kapott formula általában jobban használható konkrét feladatokban, mint az eloszlások szerinti integrál. Megadom a többdimenziós sűrűségfüggvény definicióját és az előbb jelzett eredmény pontos megfogalmazását.

Többdimenziós eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényének definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy $F(x_1,\dots,x_k)$ többváltozós eloszlásfüggvénynek létezik $f(u_1,\dots,u_k)$ sűrűségfüggvénye, ha teljesül az*

$$F(x_1,\dots,x_k)=\int_{-\infty}^{x_1}\cdots\int_{-\infty}^{x_k}f(u_1,\dots,u_k)\,du_1\dots du_k$$

azonosság minden $-\infty < x_j < \infty$, $1 \le j \le k$ számra.

Tétel arról. hogy hogyan lehet kiszámolni egy véletlen vektor függvényének a várható értékét e vektor sűrűségfüggvényének a segítségével. *Létezzék egy $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor $F(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvényének az $f(u_1, \dots, u_k)$ sűrűségfüggvénye. Ekkor minden k-változós (mérhető) $g(x_1, \dots, x_k)$ függvényre érvényes a következő azonosság:*

$$\begin{aligned} Eg(\xi_1, \dots, \xi_k) &= \int g(u_1, \dots, u_k)\mu_F(\,du_1, \dots, \,du_k) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} g(u_1, \dots, u_k) f(u_1, \dots, u_k)\,du_1 \dots \,du_k, \end{aligned}$$

ahol μ_F jelöli az F eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mértéket. Ez az azonosság úgy értendő, hogy az annak két oldalán szereplő kifejezés egyszerre létezik vagy nem létezik, ha mind a két kifejezést mint Lebesgue integrált értelmezzük. Ha a jobboldalon szereplő integrál létezik mint (közönséges) Riemann integrál, akkor ez az integrál tekinthető úgy is, mint (egy a Riemann integrál értékével megegyező) Lebesgue integrál. Tehát az azonosság ebben a fontos speciális esetben is érvényes.

Az egydimenziós esethez hasonlóan a többdimenziós sűrűségfüggvényeket is lehet jellemezni. Igaz a következő tétel.

Tétel többváltozós sűrűségfüggvény jellemzéséről. *Egy k-változós $f(u_1, \dots, u_k)$ függvény akkor és csak akkor sűrűségfüggvénye egy alkalmas k-dimenziós eloszlásfüggvénynek, ha $f(u_1, \dots, u_k) \ge 0$ majdnem minden $(u_1, \dots, u_k)$ pontban, és*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty} f(u_1, \dots, u_k)\,du_1 \dots \,du_k = 1.$$

Megjegyzés: Egydimenziós eloszlások esetében elég sima eloszlásfüggvényeknek létezik sűrűségfüggvényük, és az egyenlő az eloszlásfüggvény deriváltjával. Ez a Newton–Leibniz formulából következik. Létezik ehhez az eredményhez hasonló eredmény a többdimenziós esetben is. Eszerint az eredmény szerint, ha $F(x_1, \dots, x_k)$ elég sima k-dimenziós eloszlásfüggvény, akkor létezik $f(x_1, \dots, x_k)$ sűrűségfüggvénye, és az az

$$f(x_1, \dots, x_k) = \frac{\partial^k F(x_1, \dots, x_k)}{\partial x_1 \partial x_2 \cdots \partial x_k}$$

képlet segítségével számítható ki.

Feladat:

Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és legyen a ξ_j, $1 \le j \le n$, valószínűségi változónak sűrűségfüggvénye, és jelöljük az $f_j(\cdot)$-vel. Lássuk be a Fubini tétel segítségével, hogy a $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektornak is van sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1, \dots, u_n) = f_1(u_1) \cdots f_n(u_n)$ függvény.

Megoldás: Rögzítsünk valamilyen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ számokat, és definiáljuk ezek segítségével a $h_j(u) = 1$, ha $u < x_j$, $h_j(u) = 0$, ha $u \geq x$ $1 \leq j \leq n$, függvényeket. Ekkor

$$
\begin{aligned}
P(\xi_1 < x_1, \cdots, \xi_n < x_n) &= P(\xi_1 < x_1) \cdots P(\xi_n < x_n) \\
&= \int h_1(u) f_1(u)\, du \cdots \int h_n(u) f_n(u)\, du \\
&= \int \cdots \int h_1(u_1) f_1(u_1) \cdots h_n(u_n) f_n(u_n)\, du_1 \ldots du_n \\
&= \int_{-\infty}^{x_1} \cdots \int_{-\infty}^{x_n} f_1(u_1) \cdots f_n(u_n)\, du_1 \ldots du_n
\end{aligned}
$$

ahonnan következik a feladat állítása.

Tárgyaljuk röviden a többdimenziós eloszlások egy fontos speciális esetét, a többdimenziós tér (véges térfogatú) halmazaira koncentrált egyenletes eloszlást. Definiáljuk ezeket sűrűségfüggvényük segítségével, majd adjuk meg az egyenletes eloszlást néhány egyszerű esetben.

Többdimenziós halmazokra koncentrált egyenletes eloszlás definiciója. *Legyen adva egy $A \subset R^k$ (Borel mérhető) halmaz a k-dimenziós téren, amelynek Lebesque mértéke teljesíti a $\lambda(A) > 0$ feltételt. Az A-halmazon definiált egyenletes eloszlás az a P valószínűségi mérték az R^k tér Borel mérhető részhalmazain, amelyre $P(B) = \frac{\lambda(A \cap B)}{\lambda(A)}$ minden Borel mérhető halmazra a k-dimenziós téren. Másképp megfogalmazva, az A halmazra koncentrált egyenletes eloszlás az az eloszlás, amelynek sűrűségfüggvénye $f(u_1, \ldots, u_k) = \frac{1}{\lambda(A)}$, ha $(u_1, \ldots, u_k) \in A$, és $f(u_1, \ldots, u_k) = 0$, ha $(u_1, \ldots, u_k) \notin A$.*

Feladat:

Adjuk meg a $[0,1] \times \cdots \times [0,1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlás eloszlásfüggvényét.

b.) Tekintsük a síkon a $(0,0)$, $(0,1)$ és $(1,0)$ csúcspontok által meghatározott háromszögön az egyenletes eloszlást. Adjuk meg ennek eloszlásfüggvényét.

Megoldás: A $[0, 1 \times \cdots \times [0,1]$ k-dimenziós egységkockán egyenletes eloszlású valószínűségi változó eloszlása az $F(x_1, \ldots, x_k) = G(x_1) \cdots G(x_k)$ függvény, ahol $G(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $G(x) = x$, ha $0 \leq x \leq 1$, és $G(x) = 1$, ha $x \geq 1$.

A tekintett háromszögön definiált egyenletes eloszlás $H(x,y)$ eloszlásfüggvénye, $H(x,y) = 0$, ha $x \leq 0$ vagy $y \leq 0$. $H(x,y) = 1$, ha ≥ 1 és $y \geq 1$. Definiálni kell még a $H(x,y)$ eloszlásfüggvényt abban az esetben, ha $0 \leq x \leq 1$ és $0 \leq y \leq 1$. Ebben az esetben $H(x,y) = 2\lambda([0,x] \times [0,y] \cap \mathbf{K})$. innen $H(x,y) = xy$, ha $0 \leq x \leq 1$ és $0 \leq y \leq 1$, és $x + y \leq 1$. Ha $0 \leq x \leq 1$ és $0 \leq y \leq 1$, és $x + y \geq 1$, akkor $H(x,y) = xy - \frac{1}{2}(x + y - 1)^2$.

2. kiegészítés: Többváltozós integálok kiszámolása új változók bevezetésével.

A normális sűrűségfüggvény kiintegrálásában ($-\infty$-től ∞-ig) a klasszikus analízis két fontos eredményét használtuk fel. Ezek egyike arról szól, hogyan lehet két egyváltozós integrál szorzatát egy kétváltozós integrálként felírni, a másik pedig arról, hogyan lehet koordinátatranszformációkat alkalmazni többváltozós integrálokban. Ez utóbbi eredmény az $\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du = \int_a^b f(g(u))g'(u)\,du$ azonosság többdimenziós megfelelője.

Az első említett eredmény arról szól, hogy két egyváltozós integrál szorzata felírható, mint alkalmas kétváltozós integrál. Pontosabban, ha $f(x)$, $g(x)$ két egyváltozós függvény valamely $[a,b]$ illetve $[c,d]$ intervallumon, $-\infty \le a < b \le \infty$, $-\infty \le c < d \le \infty$ akkor $\int_a^b f(x)\,dx \int_c^d g(x)\,dx = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x)g(y)\,dx\,dy$. Általánosabban, ha $f(x,y)$ kétváltozós függvény az $[a,b]\times[c,d]$ téglalapon, akkor $\int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)\,dx = \int\int_{[a,b]\times[c,d]} f(x,y)\,dx\,dy$. Ebben az azonosságban a baloldalon egyváltozós integrálok szukcesszív alkalmazása szerepel, a jobb-oldalon pedig kétváltozós integrál. Emlékeztetőül felidézem, hogy a többváltozós Riemann integrálokat az egyváltozós integrálokhoz hasonlóan definiálhatjuk. Nevezetesen, adva egy szép $A \subset R^k$ halmaz, és azon egy $f(x_1,\dots,x_k)$ függvény, akkor az $\int_A f(x_1,\dots,x_k)\,dx_1\dots\,dx_k$ integrál definicója érdekében állítsuk elő az A halmazt kis átmérőjű K_j, $\bigcup K_j = A$, halmazok particiójaként, és írjuk fel a definiálandó integrál $\sum f(u_1^{(j)},\dots,u_k^{(j)})\mathrm{Vol}\,(K_j)$ integrál–közelítő összegeit, ahol $\mathrm{Vol}\,(K_j)$ a K_j halmaz térfogatát jelöli. Az integrált ilyen integrál-közelítő összegek limeszeként definiáljuk, ha a K_j halmazok átmérőinek a szuprémuma nullához tart.

A többváltozós integrál definiciója hasonló az egyváltozós integráléhoz. Egy apró különbség van közöttük, amire érdemes felhívni a figyelmet. A $\mathrm{Vol}\,(K_j)$ térfogatot és nem előjeles térfogatot jelöl. Az egyváltozós integrálokkal akkor lesz teljes az analógia, ha az $\int_a^b f(x)\,dx$ integrálokat csak $a < b$ esetben definiáljuk. Megjegyzem, hogy az idézett eredmény nemcsak Riemann, hanem általánosabb Lebesgue integrálokra is érvényes. Ezt az analízisban nagyon fontos eredményt Fubini tételnek hívják. A Fubini tétel fontos szerepet játszott a 7. téma tárgyalásában is, a független valószínűségi változók vizsgálatában.

Szükségünk van a következő probléma megoldására is. Ha adva van az n-dimenziós tér egy A tartományának szép, sima és invertálható $y_k = T_k(x_1,\dots,x_n)$, $1 \le k \le n$, leképezése az n-dimenziós tér egy másik B tartományába valamint egy

$$\int_B f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots\,dy_n$$

alakú integrál a B tartományon, akkor hogyan tudjuk ezt átírni és kiszámítani, mint egy alkalmas az A tartományon értelmezett függvény integrálját? Elsősorban az $n = 2$ változós integrálok kiszámítása érdekel minket, azon belül is az az eset, amikor egy a síkon (pontosabban az $R^2 \setminus \{0\}$ halmazon) definiált integrált kívánunk kiszámítani a változók polárkoordinátás átírásának a segítségével. Ebben az esetben egy a $B = R^2 \setminus \{0\}$ halmazon definiált $\int_{R^2} f(y_1,y_2)\,dy_1\,dy_2$ integrált akarunk átírni az $A = (0,\infty)\times(-\pi,\pi]$ halmazon vett integrál alakjában úgy, hogy az $(y_1,y_2) \in R^2 \setminus \{0\}$ pontokat $y_1 =$

$T_1(x_1,x_2)$, $y_2 = T_1(x_1,x_2)$ alakban adjuk meg, ahol $(x_1,x_2) \in A$. Annak érdekében, hogy a szokásos jelölésrendszer jelenjen meg érvelésünkben, használjuk az $x_1 = r$ és $x_2 = \varphi$ betűket a megfelelő változók jelölésére. Ekkor a T_1 és T_2 transzformációk $y_1 = T_1(x_1,x_2) = x_1 \cos x_2 = r\cos\varphi$ és $y_2 = T_2(x_1,x_2) = x_1 \sin x_2 = r \sin\varphi$ alakúak, és az $(x_1,x_2) = (r,\varphi) \in A$ halmaz pontjait képezik le az $(y_1,y_2) \in R^2 \setminus \{0\}$ halmazba.

Annak érdekében, hogy a számunkra érdekes eredményt meg tudjuk fogalmazni először felidézem egy sima transzformáció Jacobian-jának a definicióját.

Jacobian definiciója. *Legyen $y_k = T_k(x_1,\dots,x_n)$, $1 \le k \le n$, az n-dimenziós tér egy tartományának sima transzformációja az n-dimenziós tér egy másik tartományába. Vezessük be a $\mathbf{T} = (T_1,\dots,T_n)$ jelölést. A $\mathbf{T}$ transzformáció $\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1,\dots,x_n))$ Jacobian-ja egy $(x_1,\dots,x_n)$ pontban a*

$$\left(\frac{\partial T_k(x_1,\dots,x_k)}{\partial x_l}\right), \quad 1 \le l,k \le n,$$

$n \times n$-es (az $(x_1,\dots,x_n)$ pontban vett derivált) mátrix determinánsának az abszolut értéke.

(A Jacobian szemléletes tartalma: Ez adja meg, hogy az $(x_1,\dots,x_n)$ pont kis környezetének a térfogatát a $\mathbf{T} = (T_1,\dots,T_n)$ transzformáció hányszorosára nagyítja ki. Ezt később részletesebben elmagyarázom.)

Integráltranszformációról szóló tétel. *Legyen adva az n-dimenziós tér egy A tartományának egy sima $y_k = T_k(x_1,\dots,x_n)$, $1 \le k \le n$, transzformáltja az n-dimenziós tér egy másik B tartományába, amelyik invertálható, azaz az $y_k = T_j(x_1,\dots,x_n)$, $1 \le k \le n$, egyenletrendszernek egyetlen $(x_1,\dots,x_n) \in A$ megoldása van minden $(y_1,\dots,y_n) \in B$ pontra. Legyen továbbá adva egy (integrálható) $f(y_1,\dots,y_n)$ függvény a B tartományon. Ekkor*

$$\begin{aligned}&\int_B f(y_1,\dots,y_n)\,dy_1\dots dy_n\\ &\qquad = \int_A f(T_1(x_1,\dots,x_n),\dots,T_n(x_1,\dots,x_n))\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1,\dots,x_n))\,dx_1\dots dx_n,\end{aligned}$$

ahol $\mathcal{J}(\mathbf{T}(x_1,\dots,x_n))$ jelöli a $\mathbf{T}(x_1,\dots,x_n)$ leképezés Jacobianját.

Tekintsük az $x = r\cos\varphi$ és $y = r\sin\varphi$ képletekkel megadott polár koordinákra való áttérést, azaz azt, hogy egy síkon adott függvény integrálját hogyan írhatjuk át polár-koordinátarendszerben egy a az $A = \{(r,\varphi)\colon\ r > 0, -\pi < \varphi \le \pi\}$ tartományon definiált függvény integráljává az előző tétel segítségével.

Számoljuk ki a tekintett leképezés Jacobianját. Egyszerű számolás adja, hogy $\frac{\partial x}{\partial r} = \cos\varphi$, $\frac{\partial x}{\partial \varphi} = -r\sin\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial r} = \sin\varphi$, $\frac{\partial y}{\partial \varphi} = r\cos\varphi$, ezért a Jacobian értéke

$$\mathcal{J}(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = \left|\det\begin{vmatrix}\cos\varphi, & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi, & r\cos\varphi\end{vmatrix}\right| = r(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi) = r,$$

ahonnan
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx\,dy = \int_{-\pi}^{\pi}\int_0^{\infty} rf(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\,dr\,d\varphi.$$

Értsük meg a fent kimondott tételt. Ennek érdekében tekintsük egy A $n\times n$ méretű $A=(a_{j,l})$, $1\le j,l\le n$, alakú mátrix $\det A$ determinánsát. Ennek a determinánsnak a következő a szemléletes jelentése: Vegyük az A mátrix $a^{(j)}=(a_{j,1},\dots,a_{j,n})$ sorait, $1\le j\le n$, mint vektorokat az n-dimenziós térben. Ekkor $\det A$ egyenlő az $a^{(j)}$, $1\le j\le n$, vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogatával. Az A mátrix sorvektorai által kifeszített parallelepipedon az n-dimenziós egységkocka képe, ha az A mátrix által meghatározott lineáris transzformációt alkalmazzuk rá. Ezért a $\det A$ kifejezés geometriai tartalma az, hogy az A mátrix által meghatározott lineáris transzformáció hányszorosára nagyítja egy n-dimenziós vektorok által kifeszített parallelepipedon előjeles térfogatát. Ennek a geometriai ténynek fontos következményei vannak. Az előbb tárgyalt eredménynek is ez áll a hátterében.

Tekintsük ugyanis a bizonyítandó azonosság két oldalán szereplő integrál egy-egy integrálközelítését. Ennek érdekében tekintsük az A halmaznak egy kis átmérőjű K_j, $j=1,2,\dots$, halmazokból álló $\bigcup K_j = A$ particióját valamint minden K_j halmazban egy $\xi^{(j)} = \left(\xi_1^{(j)},\dots,\xi_n^{(j)}\right) \in K_j$ pontot. Legyen továbbá $\bar K_j = \mathbf{T}(K_j)$ a K_j halmaz, $\eta^{(j)} = \left(\eta_1^{(j)},\dots,\eta_n^{(j)}\right) \in \bar K_j$ pedig az $\xi^{(j)}$ pont képe a $\mathbf{T}$ transzformáció hatására. Ekkor a baloldali integrálnak jó közelítése a $\sum\limits_j f(\mathbf{T}\xi^{(j)})\mathcal{J}(\xi^{(j)})\mathrm{Vol}\,(K_j) = \sum\limits_j f(\eta^{(j)})\mathcal{J}(\xi^{(j)})\mathrm{Vol}\,(K_j)$, a jobboldali integrálnak pedig a $\sum\limits_j f(\eta^{(j)})\mathrm{Vol}\,(\bar K_j)$ összeg, ahol $\mathrm{Vol}\,(K)$ a K halmaz térfogatát jelöli. Ahhoz, hogy lássuk, hogy ez a két integrálközelítő összeg közel van egymáshoz azt kell megértenünk, hogy $J(\xi^{(j)})\mathrm{Vol}\,(K_j) \sim \mathrm{Vol}\,(\bar K_j)$. Ez utóbbi állítást viszont a mátrixok determinánsáról mondottak tulajdonsága, illetve a $\mathbf{T}$ transzformációnak a $\xi^{(j)}$ pontok körüli természetes linearizációja segítségével lehet látni.

Ha a $\mathbf{T}$ transzormációt az $\xi^{(j)}$ pont kis környezetében tekintjük, és ott vesszük ennek közelítését a $\xi^{(j)}$ pont körüli Taylor sorával az első tagig, akkor láthatjuk, hogy miért érvényes a megfogalmazott állítás. Ez a línearizált transzformáció az $\xi^{(j)}$ pont kis környezetét alkotó K_j halmazt közelítőleg az $\eta^{(j)}$ kis környezetét alkotó $\mathbf{K}_j$ halmazba viszi. Tolvábbá e transzformáció alkalmazása egy halmaz térfogatát a $\mathbf{T}$ transzformáció $\xi^{(j)}$-beli derivált mátrixának a determinánsával, azaz az $J(\xi^{(j)})$ számmal szorozza meg. Mivel minket a tartományoknak nem az előjeles, hanem az előjel nélküli térfogata, pontosabban fogalmazva a térfogat abszolut értéke érdekel, ezért a $|J(\xi^{(j)})|$ számmal kell szoroznunk. Így jelenik meg a Jacobian az integráltranszformációs képletben.