Gáll József

Pap Gyula

BEVEZETÉS A PÉNZÜGYI MATEMATIKÁBA

HASZNOSSÁGELMÉLET

PORTFÓLIÓ-MENEDZSMENT
OPCIÓELMÉLET

2009

Tartalomjegyzék

Előszó

Az elmúlt néhány évtizedben a pénzügyi matematika látványos fejlődésen ment keresztül. Ez a fejlődés természetesen nem válaszható el a közgazdaságtan és a matematika kapcsolódó területeinek fejlődésétől. Így többek között a portfóliók választásának és menedzsmentjének problémái, általánosságban a bizonytalan körülmények közötti döntéshozatal kérdéskörei, a kockázatmenedzsment vagy éppen az opcióárazás és azzal kapcsolatos problémák egyre fontosabb szerepet játszottak és játszanak ma is a modern közgazdaságtan és különösképpen a modern pénzügy gyakorlati és elméleti területein egyaránt.

Ebben a könyvben a fentiekben említett problémákhoz kapcsolódóan három terület köré csoportosítva mutatunk be pénzügyi matematikai alapismereteket, illetve hozzájuk tartozóan egyes közgazdasági, matematikai eredményeket: hasznosságelmélet, portfólió--menedzsment és opcióelmélet. Könyvünk, ahogy címe is tartalmazza, bevezető ismereteket nyújt a szóban forgó területeken. Így nyilvánvalóan nem saját —pl. egyes, speciális piacokhoz, problémához tartozó— kutatási eredményeinket, hanem a szakirodalom ismert eredményeinek alapszintű bemutatását, néhol apróbb kiegészítését vállaljuk olyan egységes formában, hogy az reményeink szerint alkalmas lesz mind egyetemi tankönyvként graduális és posztgraduális szinten, mind a szakterület iránt érdeklődőknek az alapfogalmak elsajátításában.

A könyv felépítése

A *Hasznosságelmélet* részben célunk a közgazdaságtan számos területén alkalmazott hasznosságfoglalom és hasznosságelmélet axiomatikus megalapozásának bemutatása, különös tekintettel a bizonytalan körülmények közötti döntésekkel kapcsolatos kérdésekre. A hasznosságelméletet követő részekben leginkább portfóliókkal kapcsolatos döntésekkel kívánunk foglalkozni. Így az 1. és 2. Fejezetekben, figyelembe véve a későbbi fejezetekhez szükséges fogalmakat és elméleti kérdéseket, kialakítjuk a hasznosság és a várható hasznosság koncepciójának (Neumann-Morgenstern féle hasznosságfüggvény) a számunkra szükséges axiomatikus felépítését és kereteit az irodalomban ismert modellek alapján. Továbbá áttekintjük, hogy milyen kapcsolat van egy egyén (preferenciái által meghatározott) hasznosságfüggvényének alakja és az általa hozott döntések között. Ezt követően a kockázatkerülés és annak mérése segítségével (az Arrow-Pratt mértéket használva) ismertetjük, hogy milyen eszközöket javasolnak az irodalomban az egyén kockázattal kapcsolatos viselkedésének, döntésének a leírására.

A pénzügy és pénzügyi matematika elméletének egyik klasszikus problémája értékpapírok és portfóliók kockázatosságának jellemzése és különösképpen (valamilyen értelemben) optimális portfólió kiválasztása. Ezzel a kérdéskörrel foglalkozunk a *Portfólió-menedzsment és kockázat* című részben.

Képzeljünk el egy értékpapírpiacot, ahol különböző értékpapírokkal lehet kereskedni, mint például kötvényekkel, részvényekkel, határidős ügyletekkel és opciós szerződésekkel. Tegyük fel, hogy adott egy piaci szereplő, aki egy bizonyos tőkemennyiséget birtokol, és szeretné azt a piacon befektetni értékpapírokba. Természetesen a tőkéjét számos módon lehet allokálnia a papírok között. Ezen allokációkat, azaz a megvásárolt értékpapírok együttesét fogjuk portfóliónak nevezni. Egyes portfóliók más portfólióknál ígéretesebbek lehetnek (például abban az értelemben, hogy nagy a jövőbeli várható hozamuk), míg egyes portfóliók pedig kevésbé kockázatosak lehetnek (például azért, mert alacsony szórással rendelkeznek).

Ekkor számos kérdés merül fel természetesen módon. Melyik portfóliót fogja a piac egy szereplője választani? Mi a különbség az egyes szereplők döntéshozatalában és mivel magyarázható ez? Milyen eszközök és mértékek segítségével lehetne karakterizálni az egyének döntéshozatalát és kockázattal szembeni viselkedését ilyen körülmények között? Ezen részben a fenti kérdésekkel és azokkal kapcsolatos egyéb problémákkal kívánunk foglalkozni az irodalomban ismert eredményeket alapul véve.

Ebben a részben először várható hasznosság értelmében optimális portfóliók kiválasztásának problémakörével foglalkozunk, s bemutatjuk azt, hogy hogyan lehet abból az egyéni keresleti függvényt származtatni értékpapírok esetén a nem bizonytalan döntések esetének analógiájára (3. Fejezet). Ezt követően, szintén az optimális portfólió problémájából kiindulva azzal foglalkozunk, hogy a sztochasztikus dominancia fogalmát hogyan lehet értékpapírok kockázatosságának összevetésére használni ilyen modellekben (4. Fejezet).

Majd rátérünk egy másik megközelítésre portfóliók optimalizálása esetén: az ún. 'mean-variance' portfólió analízis témakörére. Ahogy a név is utal rá, itt a portfóliók várható hozama és a portfóliók szórása (vagy varianciája) figyelembe vételével alakítunk ki optimális portfóliókat. Ez a portfólió-menedzsment leginkább klasszikus területe, melyet gyakran Markowitz-féle portfólióelméletnek is neveznek, s mely alapját képezi a Capital Asset Pricing Model-nek (CAPM) is.

Egy fontos területe a modern pénzügynek portfóliók és pénzügyi eszközök kockázatosságának (kockázatának) mérése. Ennélfogva a 6. fejezetben koherens kockázati mértékekkel foglalkozunk, majd két széles körben használt kockázati mértéket tanulmányozunk, nevezetesen a Value at Risk („a kockáztatott érték") és az expected shortfall („a nagy veszteségek átlaga") mértékeket.

A könyvünk utolsó, *Opcióelmélet* című részében a modern pénzügy talán legdinamikusabban fejlődő, s számos más területre nagy hatással bíró problémakörével, az opciók árazásával ismerkedünk meg. Az elmúlt 3-4 évtizedben a pénzpiacok fejlődésével együtt járt a származtatott értékpapírok egyre nagyobb mértékű elterjedése. Ezen értékpapírok más értékpapírok, pénzügyi vagy egyéb eszközök segítségével vannak definiálva, azaz a másik eszközből vannak származtatva. Gyors elterjedésükhöz számos ok járult hozzá, itt csak azt említjük meg, hogy a kockázatkezelésben ezen értékpapírok szerepe igen fontos.

Az opciós szerződések a származtatott értékpapírok egy típusát képezik, könyvünkben elsősorban ezekre koncentrálva tekintünk át problémákat. Például ilyen (egyben az egyik legegyszerűbb) egy adott részvényre vonatkozó európai vételi opció, mely a tulajdonosát azzal a joggal ruházza fel, hogy egy jövőbeli rögzített időpontban egy rögzített áron vásárolhat egy részvényt. Az opcióelmélet alapvető feladata az opció ésszerű (arbitrázsmentes) árának a meghatározása.

Ebben a részben diszkrét idejű piacokon a szükséges alapfogalmak (pl. önfinanszírozó stratégiák, fedezeti stratégiák) után két kulcsfontosságú kérdést járunk körbe, ezek: piaci arbitrázsmentesség és piaci teljesség. Ezek ismeretében bemutatjuk a legfontosabb opcióárazási eredményeket diszkrét idejű piacokon, különös tekintettel a binomiális piacokra és azon a Cox-Ross-Rubinstein árazásra.

Célok és motivációk: kiknek szánjuk könyvünket?

A könyvünket mindazoknak írjuk, akik szeretnének alapozó ismereteket szerezni a fentiekben ismertetett pénzügyi matematikai területeken. Reményeink szerint könyvünk segítséget nyújthat egyrészt az egyetemi oktatásban egyetemi oktatók és hallgatók számára egyaránt, továbbá a közgazdasági szakmában dolgozóknak és természetesen minden kedves érdeklődőnek.

A könyv megírásánál az volt az alapelvünk, hogy egy bevezető (egy féléves) egyetemi valószínűségszámítás kurzus tananyagának elsajátítása után a könyv feldolgozható legyen minden érdeklődő számára. Ezért nem célunk minden elmélet ma ismert legáltalánosabb formájában való kifejtése. Másrészt ez az oka annak, hogy a könyvben szereplő minden részletesen feldolgozott kérdés diszkrét idejű piacokra épül, így bonyolult sztochasztikus kalkulus ismerete nem feltételezett. Mivel viszont egy bevezető valószínűségszámítási kurzusnak nem feltétlenül része a diszkrét idejű sztochasztikus folyamatok alapvető fogalmainak tárgyalása sem, így az olvasót melléklet segíti ezen területen, különösképpen az opcióelmélet fejezethez szükséges martingálelméleti alapok megismerése céljából. Ezen melléklet megírásánál is arra figyeltünk, hogy csak a céljainkhoz feltétlenül szükséges szinten tárgyaljuk a fogalmakat a könnyebb feldolgozhatóság érdekében. Hasonlóan mellékletben adunk meg néhány egyéb matematikai eredményt is, melyek az alapozó matematikai kurzusoknak nem feltétlenül részei.

A mellékletek mellett a könyv bibliográfiai megjegyzéseket is tartalmaz a könyv írása során felhasznált irodalomról, illetve néhány ehhez kapcsolódó általunk ajánlott műről.

A fentiek alapján reméljük, hogy könyvünk nem csak matematikus, matematika szakos hallgatók modern pénzügyi matematikába való bevezetésére alkalmas, hanem segítséget nyújthat gazdaságtudományi és egyéb tudományterületek képzéseiben.

A Debreceni Egyetemen az utóbbi évtizedben számos pénzügyi matematikai kurzust hoztunk létre és vezettünk be különböző szakok programjába. Így oktattunk és oktatunk többek között matematikus, alkalmazott matematikus szakon hallgatókat, különös tekintettel a közgazdasági és pénzügyi szakirányokra, de hasonló témakörben indultak természetesen több közgazdász képzésben is kurzusaink, ahol szintén kiemelendőek természetesen a pénzügyi tárgyú szakirányok a szempontunkból. Ezek mellett más szakokon, így például gazdaságinformatikus szakokon is beindítottunk hasonló tartalmú kurzusokat. Könyvünk egyes részeit ezen kurzusok oktatása során fejlesztettük ki és dolgoztuk át többször. Egyes fejezeteit, de bizonyos szakokon a teljes anyagot használjuk az oktatás során.

Itt megemlítendő egy másik fontos cél is a könyv megírása kapcsán. Hiszen felmerül a kérdés, hogy miért kezdtünk el egy ilyen munkát, ha adott számos hasonló tárgyú munka a szakirodalomban. Egyrészt a pénzügyi és a pénzügyi matematikai és a kapcsolódó területek szakirodalmának olvasása és feldolgozása során egyes területeken számos esetben kiderült, hogy az irodalom klasszikus eredményei pontatlanul, hibásan vagy éppen hiányos feltételrendszerrel vannak közölve, amely nem csak az oktatásban, de a kutatásban is jelentős gondokat okozott. Ez különösen a fenti kurzusok kialakítása során volt így, ma már örvendetes látni, hogy ebben a tekintetben javult a helyzet. Ezen probléma miatt célunk volt, hogy a tárgyalásmódunk precíz legyen és lehetőleg egységes keretek között ismertessük a kérdéses témaköröket. Így, bár természetesen az ismertetett eredmények ismertek a szakirodalomban, azok nyilvánvalóan nem sajátjaink, de a bizonyítások kidolgozása, precízzé tétele vagy éppen alternatív bizonyítások adása több helyen adott munkát számunkra. Másrészt úgy gondoltuk, hogy magyar nyelven egyébként is kevés könyv, jegyzet jelent meg a területen, így reméáljük, hogy könyvünk tekinthető hiánypótlónak ezen szempontból.

Könyvünk kevés példát tartalmaz, s az nagyrészt csak az elméleti eredmények, ismeretek bemutatását végzi el. (A példák csak néhány klasszikus eredményt, esetet mutatnak be, néhol a pontos matematikai feltételek leírásának szükségességét igazolják, esetenként segítenek néhány meglepőnek tűnő állítás bemutatására.) A kevés példa legfőbb oka, hogy könyvünk mellé két példatár is elkészült. Az elsőt, [6], Barczy Mátyás kollégánk készítette, aki szintén részt vett a fentiekben említett egyetemi kurzusok gyakorlatainak az oktatásában. Ebben könyvünk első két részéhez kínál a szerző számos feladatot, példát és még elméleti kiegészítéseket is. A második, Barczy és Gáll [7], pedig az opcióelmélet részhez kínál hasonló példákat és kiegészítéseket. Az oktatásban az elkészült anyagokat együtt használjuk, s ezek együttes olvasását ajánljuk a kedves olvasóinknak is. Ennek megfelelően azonos jelölésrendszert használunk, sőt, számos helyen hivatkozunk mindkét irányban egymásra.

Köszönetnyilvánítás

Végezetül szeretnénk köszönetet mondani mindazoknak, különös tekintettel kollégáinknak, korábbi hallgatóinknak, akik megjegyzéseikkel, támogatásukkal segítették a munkánkat.

Külön köszönetet mondunk Martien van Zuijlen professzornak, akivel közösen kezdtünk el pénzügyi matematikai jegyzeteket fejleszteni. Ezen könyvünk nagyban támaszkodik a korábban együtt kifejlesztett angol nyelvű jegyzeteinkre is. Barczy Mátyás mind a könyv témájához tartozó egyetemi gyakorlatok tartása során, mind a könyv írása során számtalan észrevétellel segítette munkánkat, amiért nagyon hálásak vagyunk. Köszönetet mondunk Krámli Andrásnak, aki hosszú fáradságos munkával végezte el a könyv lektorálását, és adott számtalan tanácsot, tett számtalan megjegyzést, mely nagyban hozzájárult a könyv elkészítéséhez, javításához.

Munkánkat a korábbi években nagyban támogatta az Országos Tudományos Kutatási Alapprogramok által finanszírozott több pályázat, továbbá Tempus és Erasmus pályázatok, a Debreceni Egyetem Informatikai Kara, Közgazdaság- és Gazdaságtudományi Kara, valamint Természettudományi Kara, a Nijmegeni Egyetem Matematikai Intézete (Nijmegen University, IMAPP), a Szegedi Egyetem Bolyai Intézete. Végül köszönjük a fenti intézetek munkatársainak számtalan módon biztosított segítségét, támogatását.

A jövőben is szívesen veszünk minden olvasói megjegyzést, kritikát. A könyvvel kapcsolatos későbbiekben felmerülő megjegyzéseket, kiegészítéseket, segédanyagokat és hibalistát az alábbi honlapjainkon tervezzük elérhetővé tenni:

Gáll József, Debreceni Egyetem, Közgazdaság- és Gazdaságtudományi Kar,
http://www.econ.unideb.hu/jgall,

Pap Gyula, Szegedi Tudományegyetem, Bolyai Intézet,
http://www.math.u-szeged.hu/portal/hu/2.html (ld. Sztochasztika Tanszék).

a szerzők

Debrecen, 2009. november

I. rész

Hasznosságelmélet

1. fejezet

Hasznosságelméleti bevezető

Több mint egy évszázaddal ezelőtt nagy változásokat hozott a modern közgazdaságtan fejlődésében az ún. marginális forradalom. Ennek egyik legfontosabb eredménye volt a modern hasznosságelmélet kiépítésének megkezdése, amely nagy áttörést eredményezett a közgazdaságtanban általában, de különös tekintettel a mikroökonómiában napjainkig. Azóta számos olyan modellt hoztak létre különböző problémák megoldása során, melyek alapját a hasznosságelmélet képezi. Egyike ezen területeknek az egyéni döntések vizsgálata akár az egyszerűbb, ,,bizonytalanságok nélküli", akár a kicsit bonyolultabb, bizonytalan körülmények közötti esetben.

A későbbi portfólióval kapcsolatos problémák megoldásához nekünk is szükségünk lesz több hasznosságelméleti fogalomra, ezért először leírjuk az általunk használt modellt[1], feltevéseket és fogalmakat, bár megjegyezzük, hogy nem célunk az irodalomban ismert legáltalánosabb hasznosságelméleti modell ismertetése annak számos kérdéskörével.

[1]A fejezetben tárgyalt felépítés és modell kialakítása során leginkább [42] segített az axiomatikus felépítéshez a [48] monográfia mellett, míg [33], [40] és [29] az ezt követő néhány kérdés tárgyalásában.

1.1. Preferenciarendezés és hasznosságfüggvények

Az alábbiakban a döntéshozókat legtöbbször egyéneknek fogjuk nevezni, vagy ezzel ekvivalens módon a fogyasztó szót fogjuk használni. Nyilvánvaló, hogy az egyes egyének a döntéseiket a saját preferenciarendszerük alapján hozzák. Ezt írjuk most le.

Tegyük fel, hogy az alábbiakban adott n (különböző) jószág, amelyek elérhetőek, azaz megvásárolhatók az egyének számára a piacon. Feltételezzük, hogy az egyének képesek arra, hogy az ezen jószágokból összeállított jószágkosarakat (a későbbiekben ezeket egyszerűen kosárnak is fogjuk nevezni) értékeljék és így azokat össze is hasonlítsák. A továbbiakban egy jószágkosarat egy $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ alakú vektorral fogunk jelölni, ahol x_i $(i = 1, \ldots, n)$ azt mutatja, hogy az i-edik jószágból milyen mennyiséget tartalmaz a kosár, azaz vásárolt meg az egyén. Jelölje továbbá $\mathcal{B}$ az összes, az egyén számára elérhető (azaz megvásárolható) kosarak halmazát. Természetesen adódik, hogy $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$.

A következő megjegyzésekben $\mathcal{B}$-re vonatkozóan olyan feltételeket ismertetünk, melyekkel gyakran élnek a hasznosságelméletben, hiszen azok közgazdaságilag reálisabbá és egyben matematikailag kezelhetőbbé teszik az alaphalmazunkat.

1.1.1. Megjegyzés. Az esetek többségében ésszerű azt feltételezni, hogy létezik egy $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ vektor úgy, hogy bármely $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ kosárra teljesül $\mathbf{x} \geq \mathbf{b}$, ahol az egyenlőtlenséget koordinátánként értjük. Ha ez teljesül, akkor $\mathcal{B}$-t (koordinátánként) alulról korlátosnak nevezzük. Ennek az alulról való korlátosságot leíró feltételnek az értelmében azt mondhatjuk, hogy a jószágkosár egyes koordinátáiban lehet ugyan akár negatív szám is (azaz negatív mennyiséget birtokol az egyén az adott jószágból), ám nem élhetünk ezzel a lehetőséggel korlátlanul. Például feltehetnénk speciálisan azt is, hogy $\mathcal{B} = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_i \geq 0,\ i = 1, \ldots, n\}$, azaz csak pozitív mennyiségek elérhetőek, méghozzá korlátlanul. Azonban jegyezzük meg azt is, hogy $\mathcal{B}$ gyakorta felülről is korlátos a jószágok szűkössége miatt, vagy éppen az egyén rögzített (korlátos) jövedelme miatt nincs jelentősége annak, hogy $\mathcal{B}$ esetleg felülről nem korlátos. △

1.1.2. Megjegyzés. Továbbá azt is feltételezik a legtöbb esetben a hasznosságelméleti modellekben, hogy $\mathcal{B}$ konvex halmaz és $\mathbf{0} = (0, \dots, 0) \in \mathcal{B}$. Utóbbi alapján az origó (a ,,semmit sem tartalmazó kosár") is megvásárolható, míg e két feltétel így együtt azt is implikálja, hogy a jószágmennyiségek ,,végtelenül oszthatók". Így, ha például 2 egység megvásárolható, akkor 1 egység, de akár $1/7$ vagy $\sqrt{2}$ mennyiségű jószág is megvásárolható (hiszen egy $\mathcal{B}$-beli kosár esetén minden azt az origóval összekötő szakaszon elhelyezkedő kosár is $\mathcal{B}$-beli). △

Az egyének preferenciáit a $\mathcal{B}$ halmazon egy $\preceq$ preferenciareláció (vagy preferenciarendezés) írja le. Bár jegyezzük meg, hogy ez a reláció nem feltétlenül rendezés, mégis gyakori az irodalomban a preferenciarendezés elnevezés. Az

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}, \qquad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B},$$

kijelentés úgy olvasandó, hogy ,,$\mathbf{y}$ kosár az $\mathbf{x}$ kosárral szemben preferált", azaz az $\mathbf{y}$-t jobban szereti az egyén $\mathbf{x}$-nél. Definíció szerint $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$ és $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ jelentése azonos. Az $\mathbf{y}$ és $\mathbf{x}$ kosarakat közömbösnek nevezzük (az egyén szempontjából), —vagy másképpen azt mondjuk, hogy ezen kosarak közömbös viszonyban állnak— és ezt $\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$ módon jelöljük, ha mind $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ mind $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$ teljesül. (Az egyszerűség kedvéért ilyenkor azt fogjuk mondani, hogy az adott kosarak közömbösek.) Azt mondjuk, hogy az $\mathbf{y}$ kosár szigorúan preferált az $\mathbf{x}$ kosárral szemben, ha $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ úgy, hogy $\mathbf{y}$ és $\mathbf{x}$ nem közömbösek. Ennek jelölése: $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$ vagy $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$.

A továbbiakban a preferenciarendezés azon tulajdonságait soroljuk fel, s egyben definiáljuk, amelyek leginkább elterjedtek a szakirodalomban, ezek többségét a későbbi tételekben feltételezni is fogjuk. Ezek választását az 1.1.4. Tétel teszi indokolttá.

1.1.3. Definíció. *A $\mathcal{B}$ halmazon adott $\preceq$ preferenciarendezésnek a továbbiakban az alábbi tulajdonságait definiáljuk.*

(a) Reflexivitás, *azaz* $\mathbf{x} \preceq \mathbf{x}$ *minden* $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ *esetén.*

(b) Tranzitivitás, *azaz* $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ *és* $\mathbf{y} \preceq \mathbf{z}$ *együttes teljesülése esetén* $\mathbf{x} \preceq \mathbf{z}$, *ahol* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{B}$.

(c) Linearitás (vagy teljesség), *azaz bármely* $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{B} \times \mathcal{B}$ *pár esetén* $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$ *vagy* $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ *teljesül.*

(d) Folytonosság, *ami azt jelenti, hogy minden* $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ *kosár esetén az ehhez képest szigorúan preferált jószágkosarak halmaza (azaz* $\{\mathbf{y} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{y} \succ \mathbf{x}\}$*) és az azon jószágkosarak halmaza, mellyekkel szemben* $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ *szigorúan preferált (azaz* $\{\mathbf{y} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{y} \prec \mathbf{x}\}$*) egyaránt nyílt halmazok* $\mathcal{B}$*-ben.*

A fentiekben ismertettük azt a relációt, mely az egyének preferenciáit írja le. Ezen preferenciarendezés leírja tehát azt, hogy az egyén milyen döntéseket hozhat. Nyilvánvaló, hogy ha egy $\mathbf{x}$ jószágkosár preferált egy $\mathbf{y}$ kosárral szemben, akkor ezen kettő kosár közül az egyén az $\mathbf{x}$ kosarat kívánja megvásárolni, vagy kiválasztani (amennyiben csak ezen kettő közül van lehetősége választani). Mindezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy az $\mathbf{x}$ kosarat hasznosabbnak találja az egyén, mint a másik kosarat.

A preferenciareláció birtokában természetesnek tűnik az az igény, hogy az egyes jószágkosarakat értékeljük, azaz hasznosségértéket tulajdonítsunk nekik úgy, hogy egy magasabb érték nyilván egy magasabb (jobb) hasznosságszintet jelöljön egy alacsonyabb értékkel szemben. Matematikailag ez azt jelenti, hogy szükségünk lenne egy olyan U függvényre, melyre teljesülnek az alábbiak:

$$U : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$$

és

$$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}. \tag{1.1}$$

Egy ilyen függvényt nevezünk hasznosságfüggvénynek. Jegyezzük meg, hogy (1.1) ekvivalens azzal, hogy

$$\mathbf{x} \prec \mathbf{y} \quad \Longleftrightarrow \quad U(\mathbf{x}) < U(\mathbf{y}) \qquad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}.$$

A közgazdaságtanban jól ismert az az állítás, hogy ilyen függvény létezik, ha a fentiekben ismertetett feltételeket teljesíti a preferenciareláció. A következő tétel ezt az állítást ismerteti pontosan.

1.1.4. Tétel. (Arrow-Debreu) [2] *Tegyük fel, hogy $\mathcal{B}$ összefüggő halmaz $\mathbb{R}^n$-ben és adott egy $\preceq$ szimbólummal jelölt reláció $\mathcal{B}$-n.*

Ekkor a $\preceq$ preferenciareláció akkor és csak akkor elégíti ki az 1.1.3. Definícióban ismertetett (a)-(d) axiómákat, ha létezik egy folytonos $U : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ függvény úgy, hogy arra (1.1) *teljesül.*

Bizonyítás. *Először tegyük fel, hogy a reláció teljesíti az (1)-(4) tulajdonságokat.* Ekkor megkonstruálunk egy U függvényt, mely a tétel állításának megfelel. Ennek az iránynak az igazolását a könnyebb érthetőség kedvéért 5 lépésre bontjuk.

(i) lépés: $\bar{U}$ konstrukciója.

Legyen Y egy megszámlálható és sűrű halmaz $\mathcal{B}$-ben. Egy ilyen halmaz létezése következik abból, hogy $\mathcal{B}$ szeparábilis. (Ilyen például $\mathbb{Q}^n \cap \mathcal{B}$ is, azaz a racionális koordinátájú $\mathcal{B}$-beli pontok halmaza.) Ekkor Y a megszámlálhatósága miatt felírható egy sorozatként, azaz legyen $Y = \{\mathbf{y_i}\}_{i \in \mathbb{N}}$. Először egy $\bar{U} : Y \mapsto \mathbb{R}$ függvényt definiálunk, melyre (1.1) teljesül. Majd az $\bar{U}$ függvényt kiterjesztjük minden jószágkosárra. Az $\bar{U}$ definícióját indukcióval adjuk meg.

Legyen $\bar{U}(\mathbf{y_0}) = 1/2$. Ha $\bar{U}(\mathbf{y_0})$, $\bar{U}(\mathbf{y_1}), \ldots, \bar{U}(\mathbf{y_m})$ már egyaránt definiáltak, akkor tekintsük $\mathbf{y_{m+1}}$-t és vizsgáljuk az alábbi négy (egymást kizáró) esetet és definiáljuk ekkor $\bar{U}$ értékét az alábbi módon:

- $\mathbf{y_{m+1}}$ közömbös egy olyan kosárral szemben, amelynek a hasznosságértéke már de-

[2]Ezen tétel bizonyításához nem Arrow és Debreu eredeti munkája szolgált, hanem a [42] munkában leírtak segítettek, amelynek biztosításáért ezúton is köszönetet szeretnénk mondani Jos Pottersnek.

finiált, azaz létezik egy $0 \leq j \leq m$ index úgy, hogy $\mathbf{y_{m+1}} \approx \mathbf{y_j}$. Ekkor legyen $\bar{U}(\mathbf{y_{m+1}}) := \bar{U}(\mathbf{y_j})$.

- $\mathbf{y_{m+1}}$ nem közömbös egyetlen már definiált hasznosságértékű Y-beli kosárral szemben sem, méghozzá úgy, hogy léteznek olyan $0 \leq i_1, i_2 \leq m$ indexek, melyekre $\mathbf{y_{i_1}} \prec \mathbf{y_{m+1}} \prec \mathbf{y_{i_2}}$. Ebben az esetben legyen $0 \leq k_1 \leq m$ és $0 \leq k_2 \leq m$ két olyan index, melyre $\bar{U}(\mathbf{y_{k_1}}) = \max\{\bar{U}(\mathbf{y_i}) \mid \mathbf{y_{m+1}} \succ \mathbf{y_i}, \quad 0 \leq i \leq m\}$ illetve $\bar{U}(\mathbf{y_{k_2}}) = \min\{\bar{U}(\mathbf{y_i}) \mid \mathbf{y_{m+1}} \prec \mathbf{y_i}, \quad 0 \leq i \leq m\}$. Ekkor legyen $\bar{U}(\mathbf{y_{m+1}}) := \left(\bar{U}(\mathbf{y_{k_1}}) + \bar{U}(\mathbf{y_{k_2}})\right)/2$.

- Legyen a következő az az eset, amikor $\mathbf{y_{m+1}}$ nem közömbös egyetlen már definiált hasznosságértékű Y-beli kosárral szemben sem, méghozzá úgy, hogy létezik egy $0 \leq r_1 \leq m$, melyre $\mathbf{y_{m+1}} \prec \mathbf{y_{r_1}} \preceq \mathbf{y_i}$ minden $0 \leq i \leq m$ esetén. Ekkor legyen $\bar{U}(\mathbf{y_{m+1}}) := \bar{U}(\mathbf{y_{r_1}})/2$.

- Végül maradt az az eset, amikor $\mathbf{y_{m+1}}$ nem közömbös egyetlen már definiált hasznosságértékű Y-beli kosárral szemben sem, méghozzá úgy, hogy létezik egy $0 \leq r_2 \leq m$, melyre $\mathbf{y_{m+1}} \succ \mathbf{y_{r_2}} \succeq \mathbf{y_i}$ minden $0 \leq i \leq m$ esetén. Ekkor legyen $\bar{U}(\mathbf{y_{m+1}}) := \bar{U}(\mathbf{y_{r_2}}) + 1/2$.

(ii) lépés: belátjuk, hogy $A = \{\bar{U}(\mathbf{y_i}) \mid i \in \mathbb{N}\}$ egy sűrű halmaz $[a,b]$-ben, ahol b illetve a az A halmaz supremumát illetve infimumát jelöli. Ennek megmutatásához elég belátni, hogy

$$B = \left\{ \frac{k}{2^n} \in (a,b) \mid k, n \in \mathbb{N} \right\} \subset A.$$

Definíció szerint $\bar{U}(\mathbf{y_0})$ értéke $1/2$.

A folytonosság axiómája szerint ekkor az $A_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{y_0}\}$ és a $A_2 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{y_0}\}$ halmaz egyaránt nyílt. Ha A_1 üres, akkor $a = 1/2$. Hasonlóan, ha A_2 üres, akkor $b = 1/2$. Ha A_1 (A_2) nemüres, akkor az Y sűrűségéből azt kapjuk, hogy van egy olyan $\mathbf{y_{i_1}}$ ($\mathbf{y_{i_2}}$) kosár Y-ban úgy, hogy $\mathbf{y_{i_1}} \in A_1$ és $\mathbf{y_{i_2}} \in A_2$. Ennélfogva létezik olyan k, $k \in \mathbb{N}$, hogy $\bar{U}(\mathbf{y_k}) = 1/4$ ($\bar{U}(\mathbf{y_k}) = 3/4$).

Ha $k/2^n = \bar{U}(\mathbf{y_{r_1}})$ és $(k+1)/2^n = \bar{U}(\mathbf{y_{r_2}})$, akkor az $B_0 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{y_{r_1}} \prec \mathbf{x} \prec \mathbf{y_{r_2}}\}$ halmaz szintén nyílt és nemüres. A B_0 nemüressége indirekt könnyen látható, hiszen ha üres lenne, akkor a $B_1 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{y_{r_2}}\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \preceq \mathbf{y_{r_1}}\}$ és a $B_2 = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{y_{r_1}}\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succeq \mathbf{y_{r_2}}\}$ halmazok nyíltak lennének úgy, hogy $\mathcal{B} = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \emptyset$, ami ellentmond az összefüggőségnek. Ekkor B_0 nemürességéből pedig az következik, hogy létezik egy olyan $\mathbf{y} \in Y$ kosár, melyre $\bar{U}(\mathbf{y}) = (2k+1)/2^{n+1}$.

Hasonlóan látható az is, hogy ha $k \in \mathbb{N}$ a legkisebb (vagy a legnagyobb) olyan index rögzített $n \in \mathbb{N}$ esetén, melyre teljesül, hogy $k/2^n = \bar{U}(\mathbf{y_r})$ valamely $\mathbf{y_r} \in Y$ kosárral, akkor vagy a $C_r = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{y_r}\}$ ($C_r = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{y_r}\}$) halmaz üres és így $a = k/2^n = 1/2^n$ ($b = k/2^n = 1 - 1/2^n$), vagy C_r nemüres és nyílt, amelyből pedig az következik, hogy létezik olyan $r' \in \mathbb{N}$, hogy $1/2^{n+1} = \bar{U}(\mathbf{y_{r'}})$ (illetve $1 - 1/2^{n+1} = \bar{U}(\mathbf{y_{r'}})$).

Tehát beláttuk A sűrű az $[a, b]$ intervallumban. Valójában azt láttuk be, hogy az (a, b) intervallumban levő összes diadikus tört megtalálható A-ban.

Az is nyilvánvaló továbbá, hogy $\bar{U}$-ra teljesül az (1.1) tulajdonság.

(iii) lépés: U definíciója. Az $\bar{U}$ segítségével az U függvényt az alábbi módon definiáljuk. Legyen ekkor minden $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ esetén $B_{\mathbf{x}} := \{\bar{U}(\mathbf{y}) \mid \mathbf{y} \in Y,\ \mathbf{y} \preceq \mathbf{x}\}$ és tekintsük a következő definíciót:

$$U(\mathbf{x}) := \begin{cases} \sup B_{\mathbf{x}} & \text{ha } B_{\mathbf{x}} \neq \emptyset \\ \\ a & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Ekkor belátjuk, hogy $U = \bar{U}$ az Y halmazon. Ehhez vegyük észre, $x \in Y$ esetén egyrészt definíció szerint $U(\mathbf{x}) \geq \bar{U}(\mathbf{x})$, hiszen $\mathbf{x} \in B_{\mathbf{x}}$. Másrészt $U(\mathbf{x}) > \bar{U}(\mathbf{x})$ esetén létezne egy $\mathbf{y} \in B_{\mathbf{x}}$ kosár úgy, hogy $\bar{U}(\mathbf{x}) < \bar{U}(\mathbf{y})$, ami ellentmondáshoz vezetne, hiszen $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ teljesülne.

(iv) lépés: azt fogjuk ellenőrizni, hogy (1.1) teljesül az U függvényre.

Ha $\mathbf{x} \preceq \mathbf{z}$ akkor $B_{\mathbf{x}} \subset B_{\mathbf{z}}$ és ennélfogva $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{z})$.

A másik irány bizonyításához először vegyük észre, hogy ha $\mathbf{x} \prec \mathbf{z}$ akkor léteznek olyan $\mathbf{y_1}, \mathbf{y_2} \in Y$ jószágkosarak, melyekre $\mathbf{x} \prec \mathbf{y_1} \prec \mathbf{y_2} \prec \mathbf{z}$ (a fentiekhez hasonlóan látható ez is be a folytonosság és az összefüggősség segítségével), amiből pedig azt kapjuk, hogy $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y_1}) = \bar{U}(\mathbf{y_1}) < \bar{U}(\mathbf{y_2}) = U(\mathbf{y_2}) \leq U(\mathbf{z})$. Így $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{z})$ és $\mathbf{x} \succ \mathbf{z}$ együtt azt eredményeznék, hogy $U(\mathbf{x}) > U(\mathbf{z})$, ami pedig nem lehetséges.

(v) lépés: belátjuk, hogy U folytonos. A hasznosságfüggvény folytonosságát a preferencia-reláció folytonosságából fogjuk igazolni. Ha $u \in U(\mathcal{B})$, akkor létezik egy $\mathbf{x_0} \in \mathcal{B}$ kosár úgy, hogy $U(\mathbf{x_0}) = u$. Legyen $V = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{x_0}\}$ és $Z = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{x_0}\}$. Ekkor világos, hogy

$$U^{-1}\big((u,\infty)\big) = V \quad \text{és} \quad U^{-1}\big((-\infty,u)\big) = Z,$$

amelyből így az is következik, hogy ezek egyaránt nyílt halmazok. (Jegyezzük meg, hogy $\mathbb{R}$-ben a nyílt halmazok struktúratétele miatt elegendő azt ellenőrizni, hogy az (u,∞) vagy a $(-\infty,u)$ alakú nyílt intervallumok ősképe (teljes inverzképe) nyílt-e $\mathcal{B}$-ben.)

Most pedig belátjuk a tétel állításának másik irányát. Tehát tegyük fel most, hogy adott egy folytonos $U : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ függvény, amely teljesíti az (1.1) *tulajdonságot.*

A preferenciareláció 1.1.3. Definícióban megadott (a)-(d) tulajdonságait ekkor könnyű ellenőrizni.

Reflexivitás: mivel $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$, így $\mathbf{x} \preceq \mathbf{x}$. Tranzitivitás: $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y}) \leq U(\mathbf{z})$ esetén $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y} \preceq \mathbf{z}$ minden $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathcal{B}$ esetén. Linearitás: ha adott $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, akkor vagy $U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbf{y})$ vagy $U(\mathbf{y}) \leq U(\mathbf{x})$, ezért teljesül $\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ vagy $\mathbf{y} \preceq \mathbf{x}$. Folytonosság: tekintve egy $\mathbf{x_0} \in \mathcal{B}$ kosarat, melyre $U(\mathbf{x_0}) = u$ és felhasználva, hogy

$$U^{-1}\big((u,\infty)\big) = V \quad \text{és} \quad U^{-1}\big((-\infty,u)\big) = Z,$$

ahol $V = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \succ \mathbf{x_0}\}$ és $Z = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \prec \mathbf{x_0}\}$, az U függvény folytonosságából (mely szerint nyílt halmaz inverzképe nyílt) rögtön adódik, hogy V és Z nyílt halmazok.

Ezzel az állítás bizonyított. □

1.1.5. Megjegyzés. Hangsúlyozandó, hogy U-nak csak a létezését állítottuk és bizonyítottuk a fentiekben, ám U nem egyértelmű. Ugyanis U-nak bármely monoton növekvő folytonos függvénye is olyan függvényt szolgáltatna, amely kielégíti a fenti tétel feltételeit, azaz bármely $\Phi : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ szigorúan növekvő folytonos függvény esetén $\Phi(U) : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ is teljesíti az 1.1.4. Tétel feltételeit, amennyiben U teljesítette azokat. △

A következő megjegyzésben összegyűjtünk néhányat azon legfontosabb tulajdonságok közül, amelyekkel az egyes egyének hasznosságfüggvényeit szokás karakterizálni.

1.1.6. Megjegyzés. Először rögzítsük azt, hogy az elkövetkezendőek során azt fogjuk mondani, hogy egy adott hasznosságfüggvény reprezentálja egy egyén preferenciáit, ha a függvény teljesíti az (1.1) tulajdonságot.

Az esetek jelentős részében meglehetősen természetesnek tűnik az a feltételezés, hogy az egyén a többet preferálja a kevesebbel szemben. Ez annyit jelent, hogy $\mathbf{x} > \mathbf{y}$ (koordinátánként értendő) esetén, ahol nyilván $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$, teljesül az is, hogy $\mathbf{x} \succ \mathbf{y}$. Ezt a tulajdonságot szokás az irodalomban a *dominancia elvének* nevezni. Ebben az esetben tehát a hasznosságfüggvény szigorúan monoton növekvő. Továbbá differenciálható hasznosságfüggvény esetén ebből az is adódik, hogy nemnegatív parciális deriváltakkal rendelkezik a függvény. Hangsúlyozandó, hogy ez a tulajdonság az 1.1.3. Definícióban megadott (a)-(d) tulajdonságból nem következik.

Mivel a hasznosságfüggvénybe sűrített információ a preferenciarendezésről nem több, mint az (1.1) ekvivalenciában leírt tulajdonság, így valójában a preferenciarendezést leírhatnánk az $IC_{\mathbf{x_0}} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x} \approx \mathbf{x_0}\} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid U(\mathbf{x}) = U(\mathbf{x_0})\}$ $(\mathbf{x_0} \in \mathcal{B})$ halmazokkal is. Egy ilyen halmaz tehát egy adott kosárral közömbös kosarak halmazát tartalmazza, s ezt ezért a közgazdaságtanban közömbösségi görbének vagy közömbösségi felületnek nevezik.

Most pedig tegyük fel, hogy U kétszer differenciálható és koordinátánként növekvő hasznosságfüggvény. Legyen adott egy $\mathbf{x^0} \in \mathcal{B}$ kosár és tegyük fel továbbá, hogy U szigorúan konkáv az $\mathbf{x^0}$ egy V környezetében (ahol $V \subset \mathcal{B}$). (A monotonitáshoz hasonlóan egy hasznosságfüggvény konkávságának is tudunk egyszerű értelmezést adni, nevezetesen az egyén kockázatkerülését, kockázathoz való viszonyát fogja jellemezni. Ezt a későbbiekben a várható hasznosság ismeretében tárgyaljuk.) Esetünkben világos, hogy $\frac{\partial}{\partial x_i}U(\mathbf{x^0}) > 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$.

Megmutatjuk, hogy ha $\mathbf{x} \in V \bigcap IC_{\mathbf{x^0}}$, akkor $\mathbf{x}$-nek bármely koordinátáját ki tudjuk fejezni a többi koordináta függvényében.

Az implicit függvény tétel alapján ugyanis (ld. Függelék, A.1.1. Tétel) létezik egy olyan folytonosan differenciálható g függvény az $\mathbf{x_i^0} = (x_1^0, \ldots, x_{i-1}^0, x_{i+1}^0, \ldots, x_n^0) \in \mathbb{R}^{n-1}$ pont egy V^* környezetében úgy, hogy

$$U\big(x_1, \ldots, x_{i-1}, g(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n), x_{i+1}, \ldots, x_n\big) = U(\mathbf{x^0}) \tag{1.2}$$

és $g(\mathbf{x_i^0}) = x_i^0$, ahol $(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \in V^*$. Másképpen ezt úgy fogalmazhatjuk meg, hogy rögzítve a hasznosságszintet (esetünkben ez éppen $u = U(\mathbf{x^0})$) és csak az ezen szinthez tartozó közömbösségi görbén mozogva azt állíthatjuk, hogy a jelenlegi helyzetünknek megfelelő pont n koordinátájából elég $n - 1$ ismerete ahhoz, hogy helyzetünket meghatározzuk, azaz bármely koordináta felírható a többi koordináta függvényeként, legalábbis az $\mathbf{x^0}$ pont egy megfelelő környezetében. Így világos, hogy lényegében g nem más, mint az x_i koordináta (amely $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ által egyértelműen meghatározott), és ezért a könnyebb jelölésmód kedvéért x_i-t fogunk írni g helyett (például az (1.3) egyenletben).

Ennélfogva világos tehát az is, hogy $n - 1$ jószág esetében az egyén által fogyasztott mennyiség változása egyértelműen meghatározza a kimaradó egyetlen jószágban bekövetkezett fogyasztásváltozást abban az esetben, ha ugyanazt a hasznosságszintet kívánjuk elérni (feltéve persze azt, hogy a változás során nem kerülünk ki a V^* környezetből).

Vegyük most az (1.2) egyenletben a parciális deriváltakat a j-edik koordináta szerint. Ekkor

$$\frac{\partial}{\partial x_j} U(\mathbf{x^0}) + \frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x^0}) \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\mathbf{x_i^0}) = 0$$

amiből

$$-\frac{\partial x_i}{\partial x_j}(\mathbf{x_i^0}) = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j} U(\mathbf{x^0})}{\frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x^0})} \qquad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{1.3}$$

Az így kapott kifejezést nevezik az irodalomban az i és j jószágok között a *helyettesítés határrátájának* és $MRS_{i,j}(\mathbf{x^0})$ a szokásos jelölése. Lényegében azt fejezzük ezzel ki, hogy mennyi egységnyi i jószágról kellene lemondanunk akkor, ha a j jószágból eggyel több egységet kívánnánk fogyasztani, feltéve, hogy azonos hasznossági szinten maradunk (és a többi koordináta nem változik, azaz a többi jószágból a fogyasztásunk nem változik); ugyanis

$$MRS_{i,j}(\mathbf{x^0}) \approx -\frac{\Delta x_i}{\Delta x_j} \; .$$

Vegyük észre azt is, hogy a közömbösségi görbék invariánsak a hasznosságfüggvény bármely $f(U)$ szigorúan növekvő transzformáltjára. Ugyancsak teljesül az invariancia a helyettesítési határráta esetén is, ha f differenciálható és $f' > 0$, hiszen a fenti (1.3) formula alapján ekkor

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_j} f(U(\mathbf{x^0}))}{\frac{\partial}{\partial x_i} f(U(\mathbf{x^0}))} = \frac{f'(U(\mathbf{x^0}))\frac{\partial}{\partial x_j} U(\mathbf{x^0})}{f'(U(\mathbf{x^0}))\frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x^0})} = MRS_{i,j}(\mathbf{x^0}) \qquad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n. \tag{1.4}$$

Végül megjegyezzük, hogy az előbbiekben tárgyalt tulajdonságokkal, levezetésekkel kapcsolatban további részleteket tartalmaz Barczy Mátyás [6] példatára. △

1.1.7. Megjegyzés. (Ordinális versus kardinális hasznosságfogalom) Amikor a múlt század nyolcvanas éveiben, a marginális forradalom idején, Menger, Walras és Jevons először kezdték használni a hasznosságfüggvény fogalmát, még úgy goldolták, hogy a hasznosságfüggvény többet fejezne ki a fogyasztói hasznosság vagy elégedettség fokáról, mint amely az (1.1) tulajdonság alapján a hasznosságfüggvény segítségével leolvasható az elégedettségről.

Valójában a fent említett szerzők egyváltozós hasznosságfüggvényeket értelmeztek, amelyek egy-egy jószágra vonatkozóan reprezentálták a hasznosságot, azaz minden egyes jószághoz egy külön hasznosságfüggvényt értelmeztek. (Említsük meg azt is, hogy ebben az egyszerű modellben a szerzők egy jószágkosár teljes hasznát az egyes jószágok által okozott hasznosságok összegeként értelmezték.)

A fenti szerzők úgy goldolták, hogy a hasznosságfüggvénnyel ne csak egyszerűen azt dönthessük el, hogy például kettő jószágkosár közül melyiket választaná az egyén, azaz azt, hogy lényegében számára melyik a jobb, hanem azt is, hogy a jobb (preferált kosár) mennyivel lesz jobb a másiknál. Például $U(x_0) = 2$ és $U(x_1) = 4$ esetén azt mondták, hogy az x_1 kosár éppen kétszer olyan hasznosnak bizonyul az egyéni preferenciák szerint, mint az x_0 kosár.

Tudjuk, hogy az ilyen tulajdonságokkal rendelkező hasznosságfüggvényeket *kardinális hasznosságfüggvényeknek* nevezzük, megkülönböztetve azokat az *ordinális hasznosságfüggvényektől*. Utóbbiak nem hordoznak több információt a kosarak hasznosságáról, mint amit az (1.1) alapján le tudunk olvasni. Ennélfogva azt mondhatjuk, hogy az 1.1.4. Tétel egy folytonos ordinális hasznosságfüggvény létezését mondja ki, mely konzisztens a megfelelő preferenciarendezéssel az (1.1) tulajdonság szerinti értelemben.

Bár tudjuk, hogy előbb jelent meg a közgazdaságtanban a kardinális hasznosság-értelmezés és csak később az ordinális, mégsem szeretnénk azt sugallni, hogy az utóbbi fogalom a helyes, sőt, még azt sem, hogy általában jobban szolgálja az ökonómiai elméletek céljait. Ez a problémafelvetés még ma is egy fontos kérdése a modern közgazdaságtannak. Így mindössze annyit mondhatunk, hogy bizonyos problémák esetén jobb eszközöket biztosít az ordinális megközelítés, míg más esetekben nem. A mi céljainkhoz azonban szerencsésebb (elegendő) az ordinális megközelítés, ahogy ezt már láttuk az 1.1.4. Tételben és fogjuk látni még az elkövetkezendő fejezetekben. $\triangle$

1.2. A hasznosság maximalizálása

Egy klasszikus probléma a mikroökonómiában az optimális fogyasztói jószágkosár —azaz a leginkább preferált jószágkosár— meghatározása akkor, ha adott egy bizonyos jövedelem (vagyon) a fogyasztó számára. Ez lényegében nem más, mint a hasznosság maximalizálása egy $\mathcal{F}$ halmaz felett, amelyet a lehetséges (a fogyasztó számára elérhető) kosarak alkotnak. Világos, hogy $\mathcal{F} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \sum_{i=1}^n x_i p_i \leq I\}$, ahol I a fogyasztó jövedelme, p_i pedig az i-edik jószág árát jelöli. Tehát a feladat az, hogy találjuk meg U maximumának a helyét az $\mathcal{F}$ halmaz felett.

1.2.1. Tétel. *Legyen $\mathcal{B} = [0, \infty)^n$ és tegyük fel, hogy $\mathbf{0} \in \mathcal{B}$ és $U : \mathcal{B} \mapsto \mathbb{R}$ egy (koordinátánként) folytonos, szigorúan konkáv hasznosságfüggvény. Bármely $(p_1, \ldots, p_n)$ árvektor esetén, melyre $p_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$, és adott $I > 0$ jövedelem mellett egyértelműen létezik egy $\mathbf{x}$ kosár $\mathcal{F}$-ben úgy, hogy*

$$U(\mathbf{x}) = \max_{\mathbf{y} \in \mathcal{F}} U(\mathbf{y}),$$

ahol $\mathcal{F} = \{\mathbf{y} \in \mathcal{B} \mid \sum_{i=1}^n y_i p_i \leq I\}$. Továbbá $\sum_{i=1}^n x_i p_i = I$, ha U növekvő.

Bizonyítás. Az $\mathcal{F}$ halmaz felülről korlátos (hiszen világos, hogy $y_i \leq I/p_i$ ha $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathcal{F}$), így $\mathcal{F}$ tehát korlátos, zárt és nemüres, ennélfogva kompakt. Mivel U folytonos, így a globális maximumát fel kell vennie. Legyen ez a pont az $\mathbf{x}$. Ha U a maximumát egy $\mathbf{x}^* \in \mathcal{F}$ pontban is felvenné, ahol $\mathbf{x}^* \neq \mathbf{x}$, akkor az adódna, hogy

$$\frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}^*}{2} \in \mathcal{F} \qquad \text{és} \qquad U\left(\frac{\mathbf{x} + \mathbf{x}^*}{2}\right) > \frac{1}{2}U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}U(\mathbf{x}^*) = U(\mathbf{x}),$$

ahol kihasználtuk U szigorú konkávságát. Ezért $\mathbf{x}$ egyértelmű. Végül jegyezzük meg, hogy triviálisan $\sum_{i=1}^n x_i p_i = I$. Egyébként ugyanis az

$$\left(x_1 + \frac{I - \sum_{i=1}^n p_i x_i}{p_1}, x_2, \ldots, x_n\right)$$

kosár szigorúan preferált lenne az $\mathbf{x}$ kosárral szemben. □

Jegyezzük meg, hogy más feltételrendszerrel is ki lehetne hasonló állításokat mondani az optimum létezésére, egyértelműségére vonatkozóan. A fenti tétel csak egy a lehetséges állításokból.

Az optimum megkeresése

Egy, a fentiekben leírt feltételes szélsőérték feladat megoldásához használhatjuk a Lagrange-féle multiplikátor módszert akkor, ha U differenciálható. (Ezt a módszert, a módszerrel kapcsolatos fontos állításokat részletesen tárgyalja Barczy Mátyás [6] példatárában.) Tekintsük az x_i-re és λ-ra vonatkozó parciális deriváltját ($i = 1, \dots, n$) az $U(\mathbf{x}) + \lambda(I - \sum_{i=1}^n p_i x_i)$ kifejezésnek! Ekkor az alábbi elsőrendű feltételrendszert kapjuk:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x}) &= \lambda p_i \qquad i = 1, \dots, n \\ I - \sum_{i=1}^n p_i x_i &= 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Mivel U konkáv a konvex $\mathcal{F}$ halmaz felett, így az (1.5) feladat megoldása szükségképpen egyben globális maximuma is lesz az U-nak $\mathcal{F}$ felett.

Tekintsünk most egy, az 1.2.1. Tételbeli feltételeket és legyen $U' > 0$. Legyen T az az $n-1$ dimenziós hipersík, amelyet az $I = \sum_{i=1}^n p_i x_i$ egyenlettel adhatunk meg. A fenti tételben tárgyaltak alapján nyilvánvaló, hogy az optimum helye a $T \cap \mathcal{F}$ halmazban van. Azt is tudjuk, hogy a megoldást a Lagrange-féle multiplikátor módszerrel biztosan megtaláljuk abban az esetben, ha a megoldás (a T tér topológiájára nézve) a $T \cap \mathcal{F}$ halmaz belsejében van. Azonban fontos megjegyezni, hogy amennyiben a maximum helye a $\partial(T \cap \mathcal{F})$ halmaz[3] egy pontja ismét a T tér topológiáját alapul véve, akkor a Lagrange-féle multiplikátor módszer nem feltétlenül találja meg az optimumot, hiszen az optimum nem lesz megoldása a (1.5) egyenletrendszernek. Ezen különböző eseteket is bemutatják a jól ismert 1.3.1., 1.3.2. Példák is a következő részben. (Talán hasznos ismételten kiemelni, hogy a $T \cap \mathcal{F}$ halmaz határát T-ben, a T tér topológiájában tekintettük és nem az n dimenziós $\mathbb{R}^n$ térben, hiszen utóbbiban

[3]Egy topologikus térbeli A halmaz esetén ∂A jelölje az A halmaz határpontjainak a halmazát.

az a teljes halmazt adná vissza.) Az optimum megkeresésével kapcsolatosan számos példát tartalmaz —a fenti megjegyzésekre vonatkozóan is— a [6] példatár.

Gossen második törvénye

Ha az $\mathbf{x}^{\text{opt}}$ optimumot a Lagrange-féle multiplikátorok segítségével kapjuk meg, úgy a megoldásra szükségképpen teljesül az alábbi egyenletet:

$$MRS_{j,i}\left(\mathbf{x}^{\text{opt}}\right)\right) = \frac{p_i}{p_j} \qquad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n.$$

Ez egyszerűen adódik az (1.5) egyenletekből. Ennélfogva az optimumban a helyettesítési határráta ($MRS_{j,i}$) –amelyet az egyéni preferenciák határoznak meg– megegyezik azzal a helyettesítési (határ)rátával, amelyet a piac tesz lehetővé, azaz p_i/p_j-vel. Világos, hogy ha $MRS_{j,i}$ nagyobb lenne p_i/p_j-nél, akkor bizonyos mennyiségű j jószágot az egyén (vagy fogyasztó) helyettesítene valamennyi i jószággal. Másképpen úgy is írhatjuk, hogy az optimumban

$$\frac{\frac{\partial}{\partial x_i} U(\mathbf{x}^{\text{opt}})}{p_i} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j} U(\mathbf{x}^{\text{opt}})}{p_j} \qquad i \neq j, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{1.6}$$

tehát egy egységnyi pénz elköltése ugyanakkora haszonnövekedéssel járna az adott pontban, függetlenül attól, hogy azt melyik jószág vásárlására fordítanánk. A közgazdaságtanban az (1.6) formula Gossen második törvényeként ismert.

Az egyéni keresleti görbe

Most tekintsük az egyik jószágot, legyen ez az i-edik, és tegyük fel, hogy az összes többi jószág ára rögzített, továbbá a jövedelmünk is rögzített és végül feltesszük, hogy az 1.2.1. Tétel feltételei teljesülnek. Ekkor bármely $p_i > 0$ ár esetén a tételben ismertetett állítás alapján egyértelműen létezik egy ehhez az árhoz tartozó optimális jószágkosár, amelyet jelöljünk most $\mathbf{x}_{p_i}^{\text{opt}}$-vel. Így már értelmezhetjük $\mathbb{R}^2$-ben a $D_i = \{(p,q) \mid p = p_i,\ q = x_{p_i,i}^{\text{opt}}\}$ halmazt, ahol persze $x_{p_i,i}^{\text{opt}}$ az optimális jószágkosár i-edik koordinátáját jelöli. A D_i halmaz nem más, mint az egyéni keresleti görbe az i jószágra vonatkozóan, amely azt mutatja, hogy adott áron mekkora mennyiséget kíván (a hasznosság-maximalizáló) fogyasztó az adott jószágból (feltéve, hogy minden más rögzített a modellben). Itt nem célunk a keresleti görbe részletes tanulmányozása, hiszen az számos mikroökonómiai könyvben megtalálható (ld. [40] vagy [33]). Azonban a későbbiek során kitérünk az egyéni keresleti görbe tárgyalására abban az esetben, amikor az egyén bizonytalan körülmények között dönt, ami azt fogja jelenteni, hogy a hasznosság helyett, annak a várható értékét maximalizálja az egyén (ld. bővebben a 3.4. alfejezetben).

1.3. Néhány klasszikus hasznosságfüggvény

Ebben a részben feltételezzük, ha mást nem mondunk, hogy a jószágkosarak halmaza $\mathcal{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i \geq 0, \quad i = 1, \ldots, n\}$. Feltesszük továbbá, hogy $I > 0$ jelöli az egyén jövedelmét és p_i ($p_i > 0$, $i = 1, \ldots, n$) pedig az i-edik jószág piaci ára.

Az alábbiakban ismertetjük a leggyakrabban használt hasznosságfüggvényeket, amelyek esetén a korábbi részekben ismertetett mennyiségeket származtatjuk.

1.3.1. Példa. (Cobb-Douglas-féle hasznosságfüggvény) Ebben az esetben legyen $\mathcal{B} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid x_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n\}$. Ekkor a Cobb-Douglas-féle hasznosságfüggvény definíciója az alábbi:

$$U(\mathbf{x}) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{a_i}, \qquad \text{ahol } a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

A könnyebb számolás kedvéért megtehetjük az 1.1.5. Megjegyzés és (1.4) alapján, hogy az $\ln U$ függvényt tekintjük az eredeti U függvény helyett, hiszen előbbi egy szigorúan monoton növekvő transzformációval adódik U-ból. Ekkor (1.3) alapján

$$MRS_{i,j} = \frac{\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \ln x_k\right)}{\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \ln x_k\right)} = \frac{a_j/x_j}{a_i/x_i} = \frac{a_j x_i}{a_i x_j}. \tag{1.7}$$

Közelítésként azt írhatjuk, hogy $MRS_{i,j} \approx -\Delta x_i/\Delta x_j$, s ez az (1.7) formula alapján azt adja, hogy

$$-\frac{\Delta x_j/x_j}{\Delta x_i/x_i} \approx \frac{a_j}{a_i}.$$

Ez tehát azt jelenti, hogy az i jószág egy konstans százalékáról való lemondásunkért cserében a $\mathcal{B}$ bármely pontjában azonos százalékkal kellene növelnünk a j jószág mennyiségét, ha közben egy rögzített hasznosságszintet akarunk elérni. Úgy is mondhatnánk, hogy a „százalékokban kifejezett helyettesítési határráta" (amelyet rugalmasságnak nevezünk) konstans az egész $\mathcal{B}$ halmaz felett.

Az optimális kosár koordinátáit kiszámolhatjuk (1.5) segítségével, nevezetesen: $a_i/x_i = \lambda p_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ és $I = \sum_{i=1}^n a_i/\lambda$. Így azt kapjuk, hogy

$$x_i = \frac{a_i}{\lambda p_i} = \frac{a_i I}{p_i \sum_{k=1}^n a_k} .$$

△

1.3.2. Példa. (Lineáris hasznosságfüggvény) Legyen most a hasznosságfüggvény az alábbi alakú:

$$U(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n a_i x_i, \qquad \text{ahol} \quad a_i > 0, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Ekkor könnyen látható, hogy a helyettesítési határráta éppen konstans (mindenhol), hiszen:

$$MRS_{i,j} = \frac{a_j}{a_i} , \qquad 1 \leq i, j \leq n.$$

Ez pedig pontosan azt jelenti, hogy a jószágok *tökéletesen helyettesíthetők* egymással és ennélfogva egy hasznosságmaximalizáló vásárló csak az egyik fajta jószágból fog vásárolni, mégpedig nyilván abból, mely az ő személyes preferenciái szerint a legolcsóbbnak bizonyul. Legyen most ennek megfelelően i az az index ($i \in \{1, \ldots, n\}$), melyre

$$\frac{a_i}{p_i} = \max_{1 \leq j \leq n} \frac{a_j}{p_j}$$

teljesül. Ekkor az $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ optimális kosár a következő:

$$x_j = \delta_{ij} \frac{I}{p_i} \qquad j = 1, \ldots, n,$$

ahol δ_{ij} a Kronecker féle delta függvényt jelöli.

Vegyük észre ugyanakkor, hogy a Lagrange-féle módszer most nem adja meg a megoldást (általában), itt éppen egy olyan esettel állunk szemben, ahol a megoldás a megengedett halmaz határán van.

Jegyezzük meg továbbá, hogy $\mathbf{x}$ nem szükségképpen egyértelmű. Ugyanis abban az esetben, ha létezik egy $j \in \{1, \dots, n\}$ index úgy, hogy $i \neq j$ és $a_i/p_i = a_j/p_j$ akkor végtelen sok optimális allokáció létezik. $\triangle$

1.3.3. Példa. (Kiegészítő jószágok) Ebben az esetben tegyük fel, hogy az alábbi hasznosságfüggvényt vizsgáljuk:

$$U(\mathbf{x}) = \min\{a_i x_i \mid i = 1, \dots, n\},$$

ahol $a_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$. Tehát adott egy hasznosságfüggvény, mely ugyan folytonos, de nem differenciálható. (Így nem használható például a Lagrange féle multiplikátor eljárás sem.) Legyen $\mathbf{x}$ egy kosár és $i \in \{1, \dots, n\}$ egy olyan index, melyre

$$a_i x_i = \min\{a_j x_j \mid j = 1, \dots, n\}.$$

Ha $a_j x_j > a_i x_i$ $(j \in \{1, \dots, n\})$ akkor az egyén a j jószágból egy bizonyos mennyiséget feleslegesen birtokol. A felesleges szó magyarázatához vezessük be a következő jelölést: $x_j^* = a_i x_i / a_j$. Ekkor $x_j > x_j^*$. Továbbá x_j^* pontosan elég lenne ahhoz, hogy ugyanazt a hasznosságszintet érjük el, amit egyébként x_j-vel is elérnénk, tehát az $x_j - x_j^*$ mennyiség haszontalan, mert nem okoz hasznosságnövekedést. Másképpen úgy fogalmazhatunk, hogy ha adott x_i, akkor pontosan az $x_j = \frac{a_i}{a_j} x_i$ mennyiségre van szükségünk a j jószágból ($j = 1, \dots, i-1, i+1, \dots, n$) ahhoz, hogy az $u = a_i x_i$ hasznosságszintet elérjük pénzpazarlás nélkül. Ezért használatos tehát ilyen hasznosságfüggvény az egymást kiegészítő jószágok esetén a preferenciarendszer leírására. Ezen javak egy rögzített arányban fogyaszthatók csak –ezt az arányt az a_i konstansok határozzák meg– és nem helyettesíthetők egymással egyáltalán.

Most pedig tekintsük a hasznosság maximalizálásának problémáját. Világos a fenti érvelés értelmében, hogy csak olyan pont lehet optimum, ahol $a_i x_i = a_j x_j$ teljesül minden $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ esetén. Ezért az optimális pont nem más, mint az

$$x_i = \frac{1}{a_i} t, \qquad t \in \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, n,$$

egyenlettel meghatározott egyenes és a

$$\sum_{i=1}^{n} x_i p_i = I$$

egyenletű hipersík metszéspontja. Ebből pedig már azonnal adódik, hogy

$$x_i = \frac{I}{a_i \sum_{j=1}^{n} \frac{p_j}{a_j}} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

△

A későbbi fejezetekben még más példákat is mutatunk hasznosságfüggvényekre.

2. fejezet

A várható hasznosság

Az előző fejezetben tárgyalt hasznosságfüggvények egyik legfontosabb szerepe, hogy egy könnyen kezelhető eszközt jelentenek az egyéni preferenciák leírására és vizsgálatára. Így számos mikroökonómiai problémát tudunk egyszerűen megoldani hasznosságfüggvények segítségével, mint például az optimális döntés egyes kérdéseit (a hasznosság maximalizálásával), az egyéni keresleti görbe származtatását, stb. Ezek a problémák mind determinisztikus kimeneteket feltételezve voltak megfogalmazva, tehát ,,bizonyosság feltétele mellett" vizsgáltuk őket. Azonban nagyon gyakran olyan problémákkal szembesülünk, ahol bizonyos kockázattal is kell számolnunk, azaz olyan döntési lehetőségek között kell választanunk, amelyek kimenetele a véletlentől is függ. Például tekintsünk egy különböző lehetséges értékpapírokból (vagy általánosabban pénzügyi eszközökből) alkotott portfóliót. Ebben sokféle értékpapír, eszköz lehet, például bizonyos mennyiségű készpénz, deviza, kötvények, részvények, határidős szerződések, opciós szerződések. Egy ilyen portfólió értéke vagy kifizetése (kifizetési függvénye) egy jővőbeli időpontban bizonytalan (kockázatos), hiszen az függ a 'világ' vagy a gazdaság' jövőbeli állapotától.

Ilyen és ehhez hasonló bizonytalan döntések esetén az egyik lehetséges megközelítés alapötlete az, hogy a hasznosság várható értékét maximalizáljuk. Ezt a megközelítést kívánjuk a továbbiakban áttekinteni, ám ehhez előbb néhány újabb fogalmat kell definiálnunk.

Az irodalomban számos helyen találkozhatunk a várható hasznosság elméletének felépítésével.[1] Figyelembe véve természetesen a többi fejezetben tárgyaltakat is, az alábbiakat leginkább [42] és [43] alapján alakítottuk ki. Megemlítjük még, hogy a [48] munkában számos kérdés tárgyalásra kerül az axiomatikus várható hasznosság felépítése kapcsán, például kitérve ennek biztosítási problémákban való alkalmazási lehetőségeire is.

2.1. Axiómák és a modell

2.1.1. Definíció. *Legyen $X = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ egy kosár m-es, $\mathbf{x}_i \in \mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$, $(i = 1, \dots, m)$, és $P = (p_1, \dots, p_m)$ egy m dimenziós vektor úgy, hogy $\sum_{i=1}^m p_i = 1$, $0 \le p_i \le 1$ $(i = 1, \dots, m)$, azaz P egy diszkrét eloszlás . Ekkor az (X, P) párt lottónak, az X elemeit a lottó lehetséges kimeneteleinek, P elemeit pedig a megfelelő kimenetelek valószínűségeinek fogjuk nevezni. Jelölje $\mathbb{L}$ az összes lottók halmazát.*
Ha adott $\mathcal{L}_1 = (X^1, P^1), \dots, \mathcal{L}_k = (X^k, P^k) \in \mathbb{L}$ és $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in [0, 1]$ úgy, hogy $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$, akkor a lottók $\sum_{i=1}^k \alpha_i \mathcal{L}_i$ konvex lineáris kombinációja alatt azt az (X, P) lottót értjük, melyre

$$X = (\mathbf{x}_1^1, \dots, \mathbf{x}_{m_1}^1, \mathbf{x}_1^2, \dots, \mathbf{x}_{m_2}^2, \dots, \mathbf{x}_1^k, \dots, \mathbf{x}_{m_k}^k),$$

$$P = (\alpha_1 p_1^1, \dots, \alpha_1 p_{m_1}^1, \alpha_2 p_1^2, \dots, \alpha_2 p_{m_2}^2, \dots, \alpha_k p_1^k, \dots, \alpha_k p_{m_k}^k)$$

(ahol a felső index nem hatványozást jelöl, hanem az adott kimenetel —azaz kosár— vagy valószínűség esetén azt, hogy az melyik lottóhoz tartozik).

Világos, hogy a definíció ,,jó”, azaz a lottók lineáris kombinációja szintén teljesíti a

[1]Jegyezzükk meg ám azt is, hogy több helyen nem teljes’ tárgyalást találhatunk a várható hasznosság felépítésére (bár ezek munkánk során hasznosnak bizonyultak), így például a következőket említhetjük: [48], [29], [27].

lottó definícióját.

2.1.2. Megjegyzés. Egy $\mathcal{L}$ lottót úgy képzelhetünk el, mint egy m különböző kimenetelű játékot, ahol az $\mathbf{x}_i$ kimenetel bekövetkezésének valószínűsége p_i. Másképpen fogalmazva minden lottónak megfeleltethetünk egy alkalmas $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn értelmezett l diszkrét valószínűségi vektorváltozót, melyre $\mathbb{P}(l = \mathbf{x}_i) = p_i$. Az egyszerűség kedvéért egy $\mathcal{L}$ lottó esetén a hozzá tartozó valószínűségi vektorváltozót l fogja jelölni.

Valójában csak azért nem valségi változóként vezettük be a fenti definícióban a lottó fogalmát, mert a konvex lineáris kombinációnál lényeges a fentiekben, hogy a lottók esetén az nem azonos azzal, ahogy valószínűségi változóknál definiálnánk. $\triangle$

2.1.3. Feltétel. *Feltételezni fogjuk az elkövetkezendőek során, hogy két lottót azonosnak tekintünk, amennyiben az az azokat leíró valószínűségi változók eloszlásban megegyeznek. Így az egyén szükségképpen közömbös is két ilyen lottó esetén. Speciálisan,* $\alpha\mathcal{L} + (1-\alpha)\mathcal{L} = \mathcal{L}$, *minden* $\mathcal{L} \in \mathbb{L}$ *és* $\alpha \in [0,1]$ *esetén.*

Az összes jószágkosarat tartalmazó halmazon korábban ismertetett preferenciarendezés mintájára (ld. (1.1)) most az összes lottót tartalmazó $\mathbb{L}$ halmazon kívánunk bevezetni egy preferenciarendezést.

Legyen $\mathcal{L}_1 = (X_1, P_1)$ és $\mathcal{L}_2 = (X_2, P_2)$ két lottó. Jelentse $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ azt, hogy az egyén az $\mathcal{L}_2$ lottót preferálja (jobban kedveli) az $\mathcal{L}_1$ lottóval szemben. Jelöljük továbbá $\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2$ formában azt, ha $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ közömbösek az egyén számára —vagy másképpen mondva közömbös viszonyban állnak—, amely alatt azt értjük, hogy $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ és $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_1$ egyaránt teljesül. (Itt is élünk azzal az egyszerűsítéssel, hogy $\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2$ esetén a szóbanforgó lottókat egyszerűen közömbösnek fogjuk nevezni.) Ha $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ úgy, hogy ezek a lottók nem közömbösek, akkor $\mathcal{L}_2$-t szigorúan preferáltnak (jobbnak) nevezzük az $\mathcal{L}_1$ lottóval szemben, ennek jelölése $\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2$ vagy $\mathcal{L}_2 \succ \mathcal{L}_1$.

Az alábbiakban ismertetjük azokat a tulajdonságokat (axiómákat), amelyeket a későbbiekben feltételezünk egy gazdaságilag racionális döntéshozótól. Majd az ezt követő tétel teszi világossá, hogy miért éppen ezeket az axiómákat választjuk és hogy ezek miért lesznek elegendőek céljainkhoz.

2.1.4. Definíció. *Legyen $\preceq$ egy $\mathbb{L}$ halmazon megadott preferenciareláció (preferenciarendezés).*

(1) Reflexivitás*: $\mathcal{L} \preceq \mathcal{L}$ teljesül minden $\mathcal{L} \in \mathbb{L}$ esetén.*

(2) Tranzitivitás*: ha $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ és $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_3$ akkor $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_3$ minden $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3 \in \mathbb{L}$ esetén.*

(3) Linearitás (vagy teljesség)*: ha $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{L}$ akkor vagy $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ vagy $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_1$ teljesül.*

(4) Folytonosság*: ha $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3 \in \mathbb{L}$, melyekre $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ és $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_3$, akkor létezik egy p konstans $[0, 1]$-ben úgy, hogy $p\mathcal{L}_1 + (1 - p)\mathcal{L}_3 \approx \mathcal{L}_2$.*

(5) Függetlenség*: minden $\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{K} \in \mathbb{L}$, $p \in (0, 1]$ és $\mathcal{L} \prec \mathcal{L}'$ esetén*

$$p\mathcal{L} + (1 - p)\mathcal{K} \prec p\mathcal{L}' + (1 - p)\mathcal{K}.$$

(6) Monotonitás*: ha $\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2$ ($\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{L}$) és $0 \leq s < t \leq 1$, akkor*

$$t\mathcal{L}_1 + (1 - t)\mathcal{L}_2 \prec s\mathcal{L}_1 + (1 - s)\mathcal{L}_2.$$

2.1.5. Megjegyzés. Ahogy már említettük, a fenti (1)-(6) tulajdonságokat axiómáknak is nevezik az irodalomban, például az ötödiket szokás a függetlenségi axiómának nevezni. A függetlenségi axiómát helyettesítési axiómaként is szokás a szakirodalomban említeni.

Könnyen látható, hogy a függetlenség axiómáját úgy is írhatnánk ekvivalens alakban, hogy minden $\mathcal{L}, \mathcal{L}', \mathcal{K} \in \mathbb{L}$ és $p \in [0, 1]$ esetén $\mathcal{L} \preceq \mathcal{L}'$, akkor és csak akkor, ha

$$p\mathcal{L} + (1 - p)\mathcal{K} \preceq p\mathcal{L}' + (1 - p)\mathcal{K}.$$

Végül megjegyezzük, hogy a monotonitás axiómájából adódik, hogy minden $\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2 \in \mathbb{L}$ és $0 \leq s, t \leq 1$ esetén $s \leq t$ akkor és csak akkor, ha

$$t\mathcal{L}_1 + (1-t)\mathcal{L}_2 \preceq s\mathcal{L}_1 + (1-s)\mathcal{L}_2.$$

$\triangle$

2.1.6. Megjegyzés. Az előző fejezetben a jószágkosarak $\mathcal{B}$ halmazán foglalkoztunk rendezéssel. Természetesen a jelenlegi preferenciarendezés tekinthető a korábbi probléma kibővítésének, hiszen a jószágkosarak halmaza beágyazható a lottók $\mathbb{L}$ halmazába természetes módon: egy $\mathbf{x} \in \mathcal{B}$ jószágkosárnak a $((\mathbf{x}), (1))$ lottót logikus megfeleltetni, hiszen ez egy valószínűséggel adja az $\mathbf{x}$ jószágkosarat. Ezek alapján a következő jelöléseket vezetjük be. $\triangle$

2.1.7. Jelölés. *Egy* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$ *jószágkosár esetén* $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} := ((\mathbf{x}), (1))$, *továbbá* $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{B}$ *esetén* $\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ *(*$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$*) alatt azt fogjuk érteni (a fenti 2.1.6. Megjegyzés alapján), hogy* $\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \prec \mathcal{L}_{\mathbf{y}}$, *(*$\mathcal{L}_{\mathbf{x}} \preceq \mathcal{L}_{\mathbf{y}}$*).*

2.1.8. Lemma. *Tekintsünk egy preferenciarelációt, melyre teljesül a folytonosság és a monotonitás. Ekkor, ha* $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ *olyan lottók, melyekre* $\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$, $\mathcal{L}_2 \preceq \mathcal{L}_3$ *és* $\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_3$, *akkor* egyértelműen *létezik egy* p *konstans* $[0, 1]$*-ben úgy, hogy* $p\mathcal{L}_1 + (1-p)\mathcal{L}_3 \approx \mathcal{L}_2$.

Bizonyítás. Legyenek az $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \mathcal{L}_3$ lottók a tételbeli feltételeket kielégítőek. Tegyük fel, hogy $p_1, p_2 \in [0, 1]$ olyan konstansok, hogy $p_i\mathcal{L}_1 + (1-p_i)\mathcal{L}_3 \approx \mathcal{L}_2$, $i = 1, 2$. Ilyen konstans a folytonosság alapján létezik. Tegyük fel, hogy $p_1 < p_2$. Ekkor a monotonítás alapján

$$\mathcal{L}_2 \approx p_1\mathcal{L}_1 + (1-p_1)\mathcal{L}_3 \prec p_2\mathcal{L}_1 + (1-p_2)\mathcal{L}_3 \approx \mathcal{L}_2,$$

ami nyilvánvalóan ellentmondás. $\square$

2.1.9. Lemma. *Egy preferenciareláció esetén a függetlenségi axiómából következik a monotonitás axiómája.*

Bizonyítás. Legyen $\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2$ és $0 \le s < t \le 1$. Azt kell belátnunk, hogy

$$t\mathcal{L}_1 + (1-t)\mathcal{L}_2 \prec s\mathcal{L}_1 + (1-s)\mathcal{L}_2. \tag{2.1}$$

Legyen $\mathcal{L} := s\mathcal{L}_1 + (1-s)\mathcal{L}_2$ és $\gamma \in (0,1)$. Ekkor a függetlenséget használva $\mathcal{L} = s\mathcal{L}_1 + (1-s)\mathcal{L}_2 \succ s\mathcal{L}_1 + (1-s)\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1$, így ezt és a függetlenséget ismét használva

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &= \gamma\mathcal{L} + (1-\gamma)\,\mathcal{L} \succ \gamma\mathcal{L} + (1-\gamma)\,\mathcal{L}_1 \\ &= \gamma\left(s\mathcal{L}_1 + (1-s)\mathcal{L}_2\right) + (1-\gamma)\,\mathcal{L}_1 \\ &= (\gamma s + 1 - \gamma)\,\mathcal{L}_1 + \gamma\,(1-s)\,\mathcal{L}_2.\end{aligned} \tag{2.2}$$

Legyen $\gamma := (1-t)/(1-s)$. Ekkor $\gamma \in (0,1)$, és $\gamma(1-s) = 1-t$, míg

$$\gamma s + 1 - \gamma = \frac{1-t}{1-s}\,(s-1+1) + 1 - \frac{1-t}{1-s} = -\,(1-t) + 1 = t,$$

így a (2.2) levezetésből éppen (2.1) adódik.

$\square$

Az alábbi tétel alapozza meg a várható hasznosság koncepcióját.

2.1.10. Tétel. [2] *Legyen a $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^n$ kosarak halmazán értelmezett összes lottók halmaza $\mathbb{L}$ és tegyük fel, hogy azon adott egy preferenciarendezés, melyre teljesülnek az ebben a fejezetben ismertetett (1)-(6) axiómák. Ekkor létezik egy $U : \mathcal{B} \to \mathbb{R}$ (hasznosság)függvény amelyre*

$$\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathbb{E}\,U(\mathcal{L}_1) \le \mathbb{E}\,U(\mathcal{L}_2), \tag{2.3}$$

ahol egy $\mathcal{L} = (X,P) = ((\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_m),(p_1,\ldots,p_m)) \in \mathbb{L}$ lottó esetén

$$\mathbb{E}\,U(\mathcal{L}) := \sum_{i=1}^{m} U(\mathbf{x}_i)p_i. \tag{2.4}$$

Egy $\mathcal{L} \in \mathbb{L}$ lottó esetén tekintsük a hozzá tartozó l valószínűségi változót (ld. 2.1.2. Megjegyzés). Így valójában $\mathbb{E}\ U(\mathcal{L})$ alatt a definíciója szerint az $\mathbb{E}\ U(l)$ várható hasznosságot

[2] A tétel bizonyításához elsősorban a [43] kéziratban leírtakat vettük alapul.

értjük. Ezek segítségével a fenti tétel állítását tehát úgy fogalmazhatjuk meg, hogy az egyén számára az a lottó a jobb (preferált), amelynek a várható hasznossága magasabb.

A 2.1.10. Tétel bizonyítása. A bizonyítás során közvetlenül az U hasznosságfüggvényt konstruáljuk meg.

Először tekintsünk két olyan $\mathbf{x_1}$, $\mathbf{x_2} \in \mathcal{B}$ kosarakat, melyek nem közömbösek. Például tegyük fel, hogy $\mathbf{x_1} \prec \mathbf{x_2}$. Ha nem létezne két ilyen kosár, akkor minden $\mathcal{B}$-beli kosár közömbös lenne, ennélfogva U-t választhatnánk konstans függvénynek és az triviálisan kielégítené a (2.3) ekvivalenciát.

Használjuk a következő jelölést: $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq} = \{\mathbf{x} \in \mathcal{B} \mid \mathbf{x_1} \preceq \mathbf{x} \preceq \mathbf{x_2}\}$. Először az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$,,intervallumon" konstruálunk egy U függvényt úgy, hogy az teljesíti a (2.4) ekvivalenciát.

Ehhez legyen $U(\mathbf{x_1}) = 0$, $U(\mathbf{x_2}) = 1$ és $L_{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}} = \{\mathcal{L} = (X, P) \in \mathbb{L} \mid X \subset [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}\}$.

Most tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{y} \in [\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ kosarat és vezessük be az alábbi jelölést: $\mathcal{L}_{\mathbf{y}}$ legyen az az egyszerű lottó, amelynek egyetlen kimenetele van, nevezetesen $\mathbf{y}$, azaz $\mathbb{P}(\mathcal{L}_{\mathbf{y}} = \mathbf{y}) = 1$. Legyen továbbá —a jelölés további egyszerűsítése céljából— az $\mathbf{y} = \mathbf{x_1}$ és $\mathbf{y} = \mathbf{x_2}$ speciális esetekben $X_1 := \mathcal{L}_{\mathbf{x_1}}$ és $X_2 := \mathcal{L}_{\mathbf{x_2}}$. (Tehát $\mathbb{P}(X_1 = \mathbf{x_1}) = 1$ és $\mathbb{P}(X_2 = \mathbf{x_2}) = 1$.) A preferenciarendezés folytonossága miatt tudjuk, hogy létezik egy olyan $t_{\mathbf{y}} \in [0, 1]$ konstans, melyre

$$\mathcal{L}_{\mathbf{y}} \approx (1 - t_{\mathbf{y}})X_1 + t_{\mathbf{y}}X_2.$$

Továbbá a 2.1.8. Lemma szerint még azt is tudjuk, hogy egy ilyen konstans egyértelmű. Legyen ekkor $U(\mathbf{y}) = t_{\mathbf{y}}$ módon definiálva. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\mathcal{L}_{\mathbf{y}} \approx (1 - U(\mathbf{y}))X_1 + U(\mathbf{y})X_2. \tag{2.5}$$

Ha $\mathcal{L} \in L_{\mathbf{x_1},\mathbf{x_2}}$ és $\mathbb{P}(\mathcal{L} = \mathbf{y_i}) = p_i$, $i = 1, \ldots, k$, ahol $\sum_{i=1}^{k} p_i = 1$ akkor (2.5) és a függetlenségi axióma együtt azt adja, hogy

$$\begin{aligned}\mathcal{L} &\approx \sum_{i=1}^{k} p_i \mathcal{L}_{\mathbf{y_i}} = \sum_{i=1}^{k} p_i \Big[\big(1-U(\mathbf{y_i})\big)X_1 + U(\mathbf{y_i})X_2\Big] \\ &= \left[1-\sum_{i=1}^{k} p_i U(\mathbf{y_i})\right] X_1 + \sum_{i=1}^{k} p_i U(\mathbf{y_i}) X_2 = \big(1-\mathbb{E}\,U(\mathcal{L})\big)X_1 + \big(\mathbb{E}\,U(\mathcal{L})\big)X_2.\end{aligned} \tag{2.6}$$

Jegyezzük meg, hogy egy ilyen $\mathcal{L}$ lottó esetén a konstrukcióból adódóan $\mathbb{E}\,U(\mathcal{L}) \in [0,1]$. A fentiekből pedig a reláció monotonitását a 2.1.5. Megjegyzéssel együtt, továbbá a (2.6) levezetést felhasználva kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\,U(\mathcal{L}_1) \leq \mathbb{E}\,U(\mathcal{L}_2) \iff (1-\mathbb{E}\,U(\mathcal{L}_1))X_1 + (\mathbb{E}\,U(\mathcal{L}_1))X_2$$

$$\preceq (1-\mathbb{E}\,U(\mathcal{L}_2))X_1 + (\mathbb{E}\,U(\mathcal{L}_2))X_2 \iff \mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2.$$

Vegyük észre, hogy az $U(\mathbf{x_1}) = 0$ és $U(\mathbf{x_2}) = 1$ feltételek mellett $t_{\mathbf{y}}$ az egyetlen lehetséges érték $U(\mathbf{y})$-ra, ha azt akarjuk, hogy (2.3) teljesüljön. Tehát megállapíthatjuk, hogy a tétel feltételeit az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ intervallumon kielégítő és $U(\mathbf{x_1}) = 0$ és $U(\mathbf{x_2}) = 1$ peremértékkel rendelkező U függvény már egyértelműen meghatározott az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ intervallumon.

Most pedig kiterjesztjük az U függvényt. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges $\mathbf{x_3}$ kosarat, amely nem eleme az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ intervallumnak. (Ha nincs ilyen kosár, akkor a tétel állítása már bizonyított is.) Vagy az teljesül most, hogy $\mathbf{x_3} \prec \mathbf{x_1}$ vagy az, hogy $\mathbf{x_2} \prec \mathbf{x_3}$. Tegyük fel például, hogy az előbbi teljesül. (A másik esetben a bizonyítás további része teljesen analóg.) Ekkor a fenti gondolatmenetet ismét alkalmazva tudjuk, hogy lehet konstruálni egy olyan $\bar{U}$ hasznosságfüggvényt, amely pedig az $[\mathbf{x_3}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ intervallumon teljesíti a tétel feltételeit. Legyen most

$$\tilde{U}(\mathbf{y}) = \frac{\bar{U}(\mathbf{y}) - \bar{U}(\mathbf{x_1})}{\bar{U}(\mathbf{x_2}) - \bar{U}(\mathbf{x_1})}, \quad \text{ahol} \quad \mathbf{y} \in [\mathbf{x_3}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}.$$

Így $\tilde{U}(\mathbf{x_1}) = 0$ és $\tilde{U}(\mathbf{x_2}) = 1$, ami azt jelenti, hogy $\tilde{U}$ egyenlő kell, hogy legyen U-val az $[\mathbf{x_1}, \mathbf{x_2}]_{\preceq}$ halmazon, hiszen ott U egyértelmű.

Ezzel beláttuk, hogy U kiterjeszthető az egész $\mathcal{B}$ halmazra úgy, hogy teljesíti a tétel állításában megfogalmazottakat. □

Lényegében a 2.1.10. Tétel bizonyítása során láttuk, hogy U értékét két, egymással nem közömbös viszonyban álló kosár esetén rögzítve már csak egyetlen hasznosságfüggvény teljesíti a tétel feltételeit. Az is látszik könnyen, hogy egy alkalmas U függvény esetén ennek a függvénynek egy tetszőleges pozitív affin transzformáltja (ld. (2.7)) is kielégíti a tétel feltételeit.

Ezeket a megállapításokat foglaljuk össze az alábbi következményben.

2.1.11. Következmény. *A 2.1.10. Tétel feltételei mellett legyen U_1 és U_2 kettő (ordinális) hasznosságfüggvény úgy, hogy azok egyaránt kielégítik a 2.1.10. Tétel állítását, azaz a (2.3) ekvivalenciát. Ekkor léteznek olyan $a, b \in \mathbb{R}$, $a > 0$ konstansok, hogy*

$$U_2(\mathbf{x}) = aU_1(\mathbf{x}) + b, \qquad \mathbf{x} \in \mathcal{B}. \tag{2.7}$$

2.1.12. Megjegyzés. Egy olyan U hasznosságfüggvényt, mely teljesíti a 2.1.10. Tétel állítását, azaz amelyre a várható hasznosság (2.3) rendezési tulajdonsága teljesül, *Neumann-Morgenstern féle hasznosságfüggvénynek vagy indexnek* nevezünk. Noha Ramsey volt az, aki először vezette be a várható hasznosság koncepcióját modern megközelítésben a XX. század 30-as éveiben, mégis Neumann és Morgenstern nevei találhatók az elmélet alapítóiként említve az irodalomban[3]. Neumann és Morgenstern ugyanis szintén kidolgozták az elmélet lényegét, Ramsey munkáját nem ismerve, attól függetlenül.

A későbbiekben egy hasznosságfüggvény alatt mindig Neumann-Morgenstern típusú függvényt értünk, hacsak nem értelmezzük azt másképpen. Tehát feltételezzük, hogy várható hasznosság alapján hozza az egyén a döntéseit a (2.3) alapján.

Végezetül azt is megjegyezzük, hogy természetesen egy preferenciarendezés lehet olyan, hogy az mind az 1.1.4. Arrow-Debreu Tétel, mind a 2.1.10. Neumann-Morgenstern Tétel feltételeit kielégíti. $\triangle$

[3] A hasznosságelméletről és a várható hasznosság fogalmának kialakulásáról további történeti megjegyzéseket is találhatunk a [9] és [23] cikkekben.

2.2. Gyakorlati cáfolatok, kritikák

Ugyan azt már korábban is említettük, hogy a várható hasznosság koncepciója igen elterjedt a közgazdaságtanban (elsősorban a korábbiakban ismertetett axiómákra támaszkodva, bár ismert néhány alternatív felépítés), mégis vannak jól ismert gyakorlati példák és kritikák, amelyek szerint az elmélet bizonyos axiómái a gyakorlatban cáfolhatók. Ezen kritikák legnagyobb része a függetlenségi axióma létjogosultságát kérdőjelezi meg. Rögtön az elején érdemes leszögeznünk, hogy az ismertetendő cáfolatok természetesen nem azt jelentik, hogy 'rossz' (hibás) lenne az elmélet egy-egy eredménye, bizonyítása, mindössze azt kérdőjelezik meg, hogy alkalmas-e az egyének preferenciáinak leírására.

Az irodalomban az első és talán egyben a legismertebb ilyen cáfolat az ún. Allais paradoxon. Ez nem egyetlen kísérletet jelent, ugyanis számos más kutató megismételte Allais kísérletét és lényegében minden esetben az adódott, hogy az emberek döntései során a függetlenségi axióma nem teljesül. Mi most ennek azt a változatát ismertetjük, amelyet Kahneman és Tversky végzett el.

Megkértek egyetemistákat, hogy bizonyos felkínált lehetőségek közül jelöljék meg azt, amelyiket választanák. Ezek a lehetőségek mind egy-egy lottónak felelnek meg. Először az alábbi kettő lottót ajánlották fel nekik (ingyen), amelyek egyikét kellett kiválasztaniuk.

- *A lottó* = ((4000 IS, 0 IS), (0.8, 0.2)), azaz ezen lottó esetén 0.8 valószínűséggel nyerhetnek 4000 IS-t vagy 0.2 valószínűséggel nem kapnak semmit. (Az IS az izraeli sékel rövidítése itt.)
- *B lottó* = ((3000 IS), (1)), azaz kockázat nélkül kapnak 3000 IS-t, ha ezt választják.

Az egyetemisták többsége, nevezetesen 80 százaléka a B lottót választotta. Ezek után az alábbi döntési helyzet elé állították őket ismét. Most is két lottó egyikét kellett választaniuk.

- *C lottó* $= ((4000 \text{ IS}, 0 \text{ IS}), (0.2, 0.8))$,
- *D lottó* $= ((3000 \text{ IS}, 0 \text{ IS}), (0.25, 0.75))$.

Ebben az esetben ugyanazon megkérdezett egyetemisták 65 százaléka adta a C választ. A kettő kísérlet alapján tehát biztosak lehetünk abban, hogy több egyetemista is volt, akik az első kérdésnél a B lottót míg a másodiknál a C lottót jelölték meg. Most tegyük fel, hogy ezek az egyetemisták a várható hasznosság maximalizálása alapján hozták meg döntéseiket. Ekkor az első döntés alapján azt kapjuk, hogy

$$U(0) \cdot 0.2 + U(4000) \cdot 0.8 = U(4000) \cdot 0.8 < U(3000), \tag{2.8}$$

ahol U jelöli az adott egyén hasznosságfüggvényét és feltesszük továbbá, hogy $U(0) = 0$ (ezt a 2.1.11. Következmény miatt megtehetjük, hiszen $U(0) = 0$ egy lineáris transzformációval is elérhető). (Jegyezzük meg, hogy itt csak egyváltozós hasznosságfüggvényt tekintünk –vagy másképpen mondva a többi változót rögzítjük– ahol ezen egyetlen változónak megfelelő jószág a pénz.) Ha azonban a második döntést is figyelembe vesszük, akkor abból pedig adódik, hogy

$$U(0) \cdot 0.8 + U(4000) \cdot 0.2 > U(0) \cdot 0.75 + U(3000) \cdot 0.25,$$

azaz $U(4000) \cdot 0.8 > U(3000)$, ami nyilvánvalóan ellentmond a (2.8) egyenlőtlenségnek és így valójában a függetlenségi axiómának. Ennek belátásához pedig tekintsük azt a K lottót, amely 1 valószínűséggel 0 kifizetést ad. Ekkor könnyen látható, hogy $C = 0.25A + 0.75K$ és $D = 0.25B + 0.75K$. Azonban a függetelenségi axióma teljesülése esetén azt kapnánk ebből, hogy

$$A \preceq B \iff C \preceq D.$$

Egy másik kísérletben Kahneman és Tversky először az alábbi kérdést tette fel.
I. játék: A résztvevő kap 1000 IS-t majd választania kell (a) és (b) közül:

(a) további 1000 IS nyereményt lehet elérni, melynek valószínűsége 0.5 vagy szintén 0.5 valószínűséggel nincs további nyeremény.

(b) 500 IS-t kap biztosan az, aki ezt választja.

Majd feltették a következő döntési feladatot a résztvevőknek.

II. játék: Kap 2000 IS majd válasszon (c) és (d) közül:

(c) 1000 IS-t veszíthet 0.5 valószínűséggel vagy nem veszít semmit ugyanennyi valószínűséggel.

(d) biztosan veszít 500 IS-t.

Meglepő módon a megkérdezettek 84 százaléka választotta az első játékban I/(b)-t az I/(a)-val szemben, ám csak 27 százaléka ugyanazon megkérdezetteknek választotta II/(d)-t a II/(c) lehetőséggel szemben. Azonban vegyük észre, hogy I/(a) és II/(c) pontosan ugyanazt a lottót jelenti, nevezetesen a ((2000 IS, 1000 IS), (0.5, 0.5)) lottót, míg hasonlóan I/(b) és II/(d) is azonos, mindkettő a ((1500), (1)) lottóval írható le.

Érdemes megjegyeznünk, hogy Kahnemann bizonytalan körülmények közötti döntéshozatallal (is) kapcsolatos pszichológiai kutatásait Közgazdasági Nobel Emlékéremmel jutalmazták 2002-ben ("for having integrated insights from psychological research into economic science, especially concerning human judgment and decision-making under uncertainty").

Végül még említünk egy érdekes kísérleti eredményt, amely Lichtenstein és Slovic nevéhez fűződik és a preferenciák megfordulásáról árulkodik. Két egyszerű lottót ajánlottak fel a megkérdezetteknek:

I: ezen lottó esetén nagy valószínűséggel nyerhet egy kisebb összeget,

II: ezen lottó esetén pedig egy kicsi valószínűséggel nyerhet egy nagyobb összeget.

A megkérdezettek többsége ekkor a kicsi, de majdnem biztos nyereményt preferálta, azaz az első lottót választotta. Ezt követően azonban megkérték őket arra is, hogy árazzák be ezt a két lottót. Ekkor azonban már a többség a második lottónak nagyobb árat adott, azaz preferenciái „megfordultak".

A fenti és ahhoz hasonló kísérletek eredményei találhatók még meg több munkában, például: [27], [9], [23], [48]. Egyben megjegyezzük, hogy a könyvünkhöz ajánlott Barczy [6] példatárban pedig megtalálhatja az érdeklődő olvasó az Ellsberg és a Rabin paradoxonokat.

Számos módon lehet a fenti és a fentiekhez hasonló eredményeket magyarázni. Mondhatjuk azt, hogy egyes esetek azt igazolják, hogy az emberek nem racionális, nem következetes döntést hoznak, vagy ha igen, akkor azt nem abban az axiómarendszerben, amelyet mi is ismertettünk korábban. A második kísérlet kapcsán egyesek azt javasolják, hogy a hasznosságfüggvény változója ne a vagyon, a teljes érték legyen, hanem csak a nyereségek és a veszteségek hasznát kellene vizsgálni. Persze egy újabb kézenfekvő megoldás az is, ha a függetlenségi axiómát helyettesítjük valami más axiómával és így próbálunk egy elméletet felépíteni. Erre is ismertek próbálkozások az irodalomban (erre további hivatkozásokat találhatunk a [9] és a [23] munkákban.) De jegyezzük meg végül azt is, hogy az sem probléma, ha egyes emberek nem racionális és következetes döntéseket hoznak. Ugyanis egy ilyen elmélet céljai között az is szerepel, hogy segítsen a racionális objektív döntésekben bennünket például portfoliók kiválasztásánál, s adjon erre döntési szabályokat, tanácsokat. Ha pedig erre törekszünk, akkor már nem biztos, hogy jogosak a függetlenségi axiómát ért bírálatok.

II. rész

Portfóliómenedzsment és kockázat

3. fejezet

Kockázatkerülés

Ebben a fejezetben a hasznosságfüggvény további tulajdonságait fogjuk megismerni. Elsősorban az érdekel bennünket, hogy kockázatos jószágok vagy értékpapírok esetén milyen döntéseket hoznak az egyének (tehát akkor, amikor a jószág értéke véletlenül változhat). Az alábbiakban leírt megállapítások segítenek megérteni azt, hogy milyen körülmények esetén fog kockázatot vállalni az egyén és hogy ez milyen kapcsolatban van a hasznosságfüggvény alakjával, jellemzőivel.

3.1. A kockázatkerülés értelmezése

Jelölések. Először néhány ettől a ponttól kezdve használt jelölésbeli könnyebbséget ismertetünk. Ahogy azt már említettük, az elkövetkezendőek során egy U hasznosságfüggvény alatt mindig Neumann-Morgenstern típusú függvényt fogunk érteni (ld. 2.1.12. Megjegyzés), hacsak másképpen nem definiáljuk az adott esetben. Bár az U egy többváltozós függvény (méghozzá annyi változóval, ahány jószág elérhető a piacon), a tárgyalandó problémák többségében elég egyváltozós függvényt tekintenünk, ahol a 'pénz' lesz ezen egyetlen változóhoz tartozó jószág, hiszen pénzügyi eszközöknek (értékpapíroknak), portfólióknak fogjuk a hasznosságát tekinteni. Így ezen esetekben egy egyváltozós függvényként fogjuk felírni a hasznosságfüggvényt az egyszerűség kedvéért. Tehát nem jelöljük a többi változót, hiszen azt rögzítettnek tekintjük.

3.1.1. Definíció. *Legyen $U : I \mapsto \mathbb{R}$ egy hasznosságfüggvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum és ξ pedig egy alkalmas valószínűségi mezőn értelmezett valószínűségi változó I-beli értékekkel. Ekkor ξ-t játéknak nevezzük. Legyen $P \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\,|\xi| < \infty$. Ekkor a (ξ, P) párt igazságos (fair) játéknak a P-t pedig az ξ játék igazságos (fair) árának nevezzük, ha $\mathbb{E}\,\xi = P$.*

Egy fogyasztó (vagy egyén) kockázatkerülő a $P \in I$ pontban, ha nem kíván egyetlen (ξ, P) igazságos játékot sem elfogadni, vagy közömbös velük szemben, ami alatt azt értjük, hogy $\mathbb{E}\,U(\xi) \leq U(P)$. (Akkor mondjuk, hogy nem kíván egy játékot elfogadni, ha nem kíván abban résztvenni, azaz a fix P összeg és a bizonytalan ξ összeg közül az előbbit választja.) Ha egy egyén kockázatkerülő a $P \in I$ pontban és nem közömbös egyetlen olyan igazságos játékkal szemben sem, melynek az ára P, akkor az egyént szigorúan kockázatkerülőnek nevezzük a $P \in I$ pontban. Ha az I intervallum minden pontjában (szigorúan) kockázatkerülő, akkor egyszerűen (szigorúan) kockázatkerülőnek fogjuk nevezni.

3.1.2. Tétel. [1] *Tegyük fel, hogy $U : I \mapsto \mathbb{R}$ egy hasznosságfüggvény, ahol $I \subset \mathbb{R}$ egy intervallum.*
Ekkor az egyén pontosan akkor (szigorúan) kockázatkerülő a $P \in \mathbb{R}$ pontban, ha U (szigorúan) konkáv P-ben.
Továbbá az egyén pontosan akkor (szigorúan) kockázatkerülő, ha U (szigorúan) konkáv.

[1] A tétel második állítását szokás az irodalomban megfogalmazni (ld. [27]), ám a bizonyításból látható, hogy az lényegében az első pontbeli tulajdonságból adódik. Ez pedig a 3.1.4 Megjegyzés miatt lényeges esetünkben, ahol a 3.1.1 Definíció többdimenziós megfelelőjére adunk javaslatokat és fogalmazzuk meg azok alapján ezen tétel általánosabb alakját.

Bizonyítás. Csak az első állítást kell bizonyítanunk, hiszen a második annak következményeként adódik triviálisan.

Elégségesség. Tegyük fel, hogy U konkáv $P \in I$-ben. Ekkor a konkávságból következik, hogy létezik egy c konstans úgy, hogy

$$U(x) \leq c(x - P) + U(P), \qquad \forall x \in I, \tag{3.1}$$

és ennélfogva minden igazságos (ξ, P) játék esetén

$$U(\xi) \leq c(\xi - P) + U(P). \tag{3.2}$$

Vegyük a (3.2) egyenletben a várható értéket mindkét oldalon! Ekkor a jobb oldalon eltűnik az első tag és kapjuk a kívánt állítást:

$$\mathbb{E}\, U(\xi) \leq U(\mathbb{E}\, \xi).$$

Szükségesség. Legyen ξ egy olyan egyszerű játék, amelynek csak kettő lehetséges kimenete van, ezek legyenek x és y, méghozzá úgy, hogy $p = \mathbb{P}(\xi = x)$ és $1 - p = \mathbb{P}(\xi = y)$, továbbá feltesszük, hogy $px + (1 - p)y = P$. Ekkor a P-beli kockázatkerülésből következik, hogy

$$\mathbb{E}\,\big(U(\xi)\big) = p\, U(x) + (1 - p)\, U(y) \leq U(px + (1 - p)y) = U(P), \tag{3.3}$$

ebből pedig már adódik, hogy P-ben a hasznosságfüggvény konkáv.

Ha pedig a szigorú konkávság és szigorú kockázatkerülés esetén akarjuk a tételt belátni, akkor apró módosításoktól eltekintve azonos módon bizonyítható az állítás (például a (3.1), (3.2) és (3.3) egyenlőtlenségekben a szigorú egyenlőtlenségek is teljesülnek, ha $x, \xi, y \neq P$). $\square$

3.1.3. Megjegyzés. Jegyezzük meg, hogy valójában a 3.1.2. Tétel bizonyításának az első fele a Jensen egyenlőtlenség bizonyítása. Továbbá a fenti tétel lényegében annyit állít, hogy egy g valós függvény pontosan akkor konkáv, ha $\mathbb{E}\; g(\xi) \leq g(\mathbb{E}\; \xi)$ teljesül minden olyan valószínűségi változó esetén, melynek értékei g értelmezési tartományába esnek. $\triangle$

3.1.4. Megjegyzés. Ugyan elsősorban pénzügyi kérdésekre keresünk a későbbiekben választ, de megemlítjük, hogy a 3.1.2. Tételt általánosabban is kimondhatjuk, ha bizonyos módosításokat teszünk a hozzá szükséges definíciókban. Ugyanis tudjuk kezelni azt az esetet is, amikor több jószágot tekintünk és így többváltozós a függvényünk is. Ez egyrészt elméleti szempontból lehet érdekes a mikroökonómia iránt érdeklődőknek, de a gyakorlatban is előfordulhatnak olyan problémák, ahol ilyen körülmények között kell döntést hoznunk. Ehhez az alábbiakban ismertetjük, hogy a 3.1.1. Definíció mintájára mi lehetne egy lehetséges értelmezése egy játék igazságos árának.

Emlékezzünk arra, hogy U a $\mathcal{B}$ halmazon van definiálva. Legyenek $p_1, \ldots, p_n$ a jószágok piaci árai. Tegyük fel, hogy minden I jövedelem mellett egyértelműen létezik optimális hasznosságú jószágkosár, amelyet jelöljön $\mathbf{x}_I^{\mathrm{opt}}$. Ilyen esetre ad elégséges feltételt az 1.2.1. Tétel. Legyen továbbá az egyszerűség kedvéért U szigorúan növekvő. Ekkor az is látszik, hogy nagyobb jövedelemhez nagyobb hasznosságú optimum tartozik. Így minden közömbösségi görbén legfeljebb egy ilyen optimum lehetséges. Egy ilyen esetben már értelmezhető a következő definíciót.

Definíció (Hicks-féle ár) Legyen most $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ egy valószínűségi vektorváltozó $\mathcal{B}$-beli értékekkel és tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\,|\xi_i| < \infty$ $(i = 1, \ldots, n)$. Ekkor a $P \in \mathbb{R}$ árat az egyén számára a ξ játék Hichs-féle igazságos árának nevezzük, ha $U(\mathbb{E}\,\xi) = U\left(\mathbf{x}_P^{\mathrm{opt}}\right)$.

Ez azt jelenti ugyanis, hogy a ξ játék és a P jövedelem az egyén számára közömbös, ha a játék várható hasznossága megegyezik azzal a maximális hasznosságszinttel, amelyet a P jövedelemből vásárolható kosarakkal el tudunk érni (nyilván az optimálissal tudjuk ezt elérni). Tehát ekkor azt kapjuk, hogy $\sum_{i=1}^{n} p_i x_{P,i}^{\mathrm{opt}} = P$.

Az is jól látszik a fenti értelmezésből, hogy $n = 1$ és $p_1 = 1$ értékek választásával visszakapjuk a 3.1.2. Tétel feltételeit. Tehát ez valóban egy lehetséges általánosításhoz vezet.

Így a fenti tétel megfelelőjét (azaz általánosítását) az alábbi módon írhatjuk esetünkben le.

Tétel. *Az egyén akkor és csak akkor nem fog elfogadni egyetlen (ξ, P) igazságos játékot sem, melyre $\mathbb{E}\,\xi = \mathbf{x}$, ha U konkáv az $\mathbf{x}$ pontban.*
Az egyén akkor és csak akkor nem fog elfogadni egyetlen igazságos játékot sem, ha a hasznosságfüggvénye konkáv (és ekkor ő kockázatkerülő).

Lényegében a 3.1.2. Tétel bizonyítását ismételhetjük meg többdimenziós esetre, lépésről lépésre. Ugyanis most az U konkávsága az $\mathbb{E}\,\xi$ pontban azt jelenti, hogy létezik az adott ponthoz tartozóan támasztósík, azaz létezik egy olyan $c \in \mathbb{R}^n$ vektor, melyre

$$U(\mathbf{x}) \leq U(\mathbb{E}\,\xi) + \langle c, \mathbf{x} - \mathbb{E}\,\xi \rangle, \qquad \forall \mathbf{x} \in \mathcal{B},$$

teljesül (ld. [44]), ahol $\langle \cdot, \cdot \rangle$ a belső szorzatot jelöli az $\mathbb{R}^n$ térben. Így a fentivel megegyező indoklással kaphatjuk ismét az elégségességet. A szükségesség bizonyításához pedig csak az x és y értékeit kell a (3.3) egyenlőtlenségben olyan $\mathcal{B}$-beli vektorokkal helyettesíteni, hogy azok konvex lineáris kombinációja az $\mathbb{E}\,\xi$ vektort adja.

Említsük itt meg, hogy egy játék igazságosságosságának fentiekben leírt definíciója az adott egyén prerefenciarendszerétől függ. Azonban a 3.1.1. Definícióban még nem volt szerepe a hasznosságnak, így az a hasznosságfüggvény választásától független volt. Hiszen vegyük észre, hogy egy jószág esetén az optimális kosár minden növekvő hasznosságfüggvény esetén azonos lesz. Ám több jószág esetén az optimális jószágkosár különböző prerefencia-rendszerek esetén különbözhet, még akkor is, ha a jövedelmek azonosak.

Ennek bemutatására legyen U_1 és U_2 két hasznosságfüggvény. Jelölje P_1 és P_2 a ξ játék igazságos árát az U_1 illetve az U_2 függvényekre nézve. Ekkor úgy is fogalmazhatunk, hogy P_i az $\mathbf{x}_{P_i}^{i,\text{opt}}$ kosár piaci ára, ahol $\mathbf{x}_P^{i,\text{opt}}$ a P jövedelemhez tartozó optimális kosarat jelöli a megfelelő U_i $(i = 1, 2)$ hasznosságfüggvény esetén. Ekkor $U_i(\mathbb{E}\,\xi) = U_i\left(\mathbf{x}_{P_i}^{i,\text{opt}}\right)$ $(i = 1, 2)$, azonban $U_1\left(\mathbf{x}_{P_1}^{1,\text{opt}}\right)$ és $U_2\left(\mathbf{x}_{P_2}^{2,\text{opt}}\right)$ között bármilyen lehet a kapcsolat ugyanúgy, mint ahogy azt sem tudjuk, hogy P_1 vagy P_2 lesz-e a nagyobb ár.

Felmerülhet a kérdés: nem lehetne-e „megszabadulni” a hasznosság használatától egy játék igazságos árának az értelmezésénél. Találhatunk ilyen definíciót, méghozzá az alábbi módon.

Definíció (Szluckij-féle ár) *Legyen* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ *egy valószínűségi vektorváltozó* $\mathcal{B}$*-beli értékekkel és tegyük fel, hogy* $\mathbb{E}\,|\xi_i| < \infty$ *(*$i = 1, \ldots, n$*). Ekkor a* ξ *játék Szluckij-féle igazságos ára* $P = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}\,\xi_i$*, amely nem más, mint az* $\mathbb{E}\,\xi$ *kosár piaci ára.*

A következőképpen magyarázhatjuk a két definíció közötti különbséget. Az első esetben rögzítettünk egy hasznosságszintet, méghozzá az $\mathbb{E}\,\xi$ kosár hasznosságát és igazságosság esetén itt pontosan azt az összeget ajánlottuk az egyénnek, amely éppen elég ahhoz, hogy a hasznosság maximalizálásával az egyén ezt a rögzített hasznosságszintet ismét el tudja érni. Ezzel szemben a második definíció esetén az egyénnek az $\mathbb{E}\,\xi$ kosár piaci árát ajánlottuk igazságosság esetén, tehát azt az árat a játékért, amellyel az $\mathbb{E}\,\xi$ kosár (és nem csak azzal azonos hasznosság) ismét megvásárolható a piacon. Ez a két definíció csak akkor ad azonos árat, ha mindössze egy jószág adott (tehát mindkettő az eredeti 3.1.1. Definíció általánosításaként fogható fel) vagy akkor, ha $\mathbb{E}\,\xi$ véletlenül éppen az optimális kosár, azaz $\mathbf{x}_V^{\mathrm{opt}} = \mathbb{E}\,\xi$, ahol $V = \sum_{i=1}^{n} p_i \mathbb{E}\,\xi_i$. Azonban ennek ellenére az is világosan látszik, hogy a kosarak teljes halmazán (azaz globálisan) már mindkettő definíció esetén ekvivalens lesz az egyén kockázatkerülése és a hasznosságfüggvényének a konkávsága.

Tudjuk, hogy a közgazdaságtanban, különösen a mikroökonómiában, több olyan probléma merült fel, ahol kétféle megoldási javaslat született, s ahol a két megközelítés éppen azon elvekben különbözik egymástól, mint esetünkben. Ezt a különbséget pedig úgy fogalmazhatjuk meg, hogy a következő kérdést tesszük fel: mit jelent az, hogy a korábbival azonos lehetőséget biztosítunk az egyén számára? Azt jelenti-e, hogy ugyanannak a hasznosságszintnek az elérését biztosítjuk a számára, vagy azt, hogy pontosan ugyanazt a fogyasztást biztosítjuk a számára? Más, ismert problémáknál ezt a két megközelítést Hicks illetve Szluckij nevével jelzik. Így mondhatjuk azt, hogy az általunk adott két megközelítésből az első a Hicks féle, a második pedig a Slutsky féle választ adja. Ezért neveztük a fenti definíciókban az igazságos árakat Hicks-féle illetve Szluckij-féle igazságos áraknak.

Könnyű látni, hogy a Hick-féle P_H ár nem haladjatja meg a Szluckij-féle P_S árat. Ehhez tekintsük azt az $\mathbf{x}_{P_H}^{\text{opt}}$ optimális kosarat a Hick-féle ár definíciójában, melyre $U(\mathbb{E}\ \xi) = U\left(\mathbf{x}_{P_H}^{\text{opt}}\right)$, továbbá az $\mathbb{E}\ \xi$ kosarat a Szluckij-féle ár definíciójában. Ha ezek nem esnek egybe, akkor $\mathbf{x}_{P_S}^{\text{opt}}$ nem lehet alacsonyabb jövedelmi szinthez tartozó jövedelmi egyenesen (síkon), mint $\mathbb{E}\ \xi$, hiszen ekkor a $P_S = \sum_{i=1}^n p_i \mathbb{E}\ \xi_i$ jövedelemhez tartozó $\mathbf{x}_{P_S}^{\text{opt}}$ optimum kisebb jövedelem mellett nagyobb hasznosságú optimumot adna, mint $\mathbf{x}_{P_H}^{\text{opt}}$.

Jegyezzük meg azt is, hogy a céljainhoz az első megközelítés látszik hasznosabbnak, hiszen ez az az eset, ahol az egyén a saját preferenciái alapján hozza a döntéseit. $\triangle$

3.2. A kockázatkerülés mértéke

Most pedig tekintsünk egy ξ játékot és legyen $\mathbb{E}\ \xi = P$. Tegyük fel, hogy a vizsgált egyén hasznosságfüggvénye U, amely szigorúan monoton növekvő és a P pontban szigorúan konkáv. A korábbiakban leírtak miatt ekkor tudjuk (3.1.2. Tétel), hogy nem fogja a (ξ, P) igazságos játékot elfogadni (azaz nem vesz benne részt). Az U monotonításából azt is tudjuk, hogy egyértelműen létezik egy pozitív P^* érték úgy, hogy arra

$$U(P - P^*) = \mathbb{E}\ U(\xi). \tag{3.4}$$

Bármely $(P - P^*, \infty)$ intervallumbeli áron is ajánlanánk az egyén számára a ξ játékot, azt biztosan nem fogadná el, ám elfogadná azt akkor, ha az ár kevesebb lenne, mint $P - P^*$. Másképpen ezt úgy is megfogalmazhatjuk, hogy inkább hajlandó lenne még csökkenteni is a vagyonát (1 valószínűséggel) legfeljebb P^* mennyiséggel azért, hogy a ξ játék kockázatát elkerülje. Ezért nevezhetnénk a P^* értéket egyfajta biztosítási díjnak, mert ez mutatja, hogy mekkorra díjat hajlandó az egyén a biztonságos –azaz 1 valószínűséggel biztos– kimenetelű játék választásáért fizetni. Ez egyben alkalmas fogalom arra, hogy ezzel mérjük az egyén kockázatkerülését az ξ játékra vonatkozóan a P^* pontban (azaz a P^* vagyoni szint mellett). Nyilvánvaló, hogy minél magasabb biztosítási díjat hajlandó fizetni az egyén egy (ξ, P) játék esetén, annál nagyobb a kockázattal szemben az elutasítása. Világos, de ismét hangsúlyozandó, hogy P^* értéke függ a ξ játék megválasztásától is, tehát játékonként különböző.

A 3.1.2. Tétel alapján megérthetjük azt is, hogy miért hajlandóak az emberek a biztosítók szolgáltatásait megvásárolni. Emlékezve az ott használt gondolatmenetre és jelölésekre, most tegyük fel hogy U konvex az értelmezési tartományának egy J részhalmazában. A tétel állításának mintájára már triviálisan látható az is, hogy ekkor az egyén elfogad minden olyan igazságos ξ játékot, amelyre teljesül, hogy $\mathbb{P}(\xi \in J) = 1$. Tehát ebből már látszik az is, hogy egy egyén bizonyos kockázatokat elfogadhat, míg másokat (akár hasonló nagyságút) elutasíthat, ha a hasznosságfüggvényének egyes részei konvexek más részei pedig konkávok. Egyes szerzők ezzel magyarázzák egyébként azt a jelenséget is, hogy ugyanazon emberek miért haljandóak lottót játszani és közben más kockázatokra pedig biztosítást kötni.

A fenti előkészítés után definiáljuk az egyén különböző játékokhoz tartozó biztosítási díjainak a fogalmát.

3.2.1. Definíció. *Legyen U egy szigorúan konkáv, monoton növekvő hasznosságfüggvény az I intervallumon. Tegyük fel, hogy ξ egy valószínűségi változó, mely az I intervallumból vesz fel értékeket és $\mathbb{E}\,|\xi| < \infty$ és $\mathbb{E}\,U(\xi)$ véges. Ekkor a $P(\xi) \in \mathbb{R}$ értéket a ξ játék biztosítási díjának nevezzük (az adott egyén esetén), ha $U(\mathbb{E}\,\xi - P(\xi)) = \mathbb{E}\,U(\xi)$.*

A biztosítási díj elnevezést az is indokolhatja, hogy annak konstrukciója nagyon hasonlít a biztosítástanban használt egyik elméleti díjkalkulációs elvhez. Ez az ún. zéró hasznosság elve[2], amely szerint legyen egy ξ valószínűségi változóval leírt káreloszlás esetén annyi a biztosítási díj, amennyivel a várható haszon éppen zéró. Azaz legyen P a díj, ha kielégíti az

[2]A fent említett elvet, más díjkalkulációs elveket és a nem-élet biztosítás egyéb kérdésköreit is meg-

$\mathbb{E}\, U(P-\xi)=0$ egyenletet.

A biztosítási díj fogalma általánosabban $\mathbb{E}\ U(\xi)=\infty$ esetére is definiálható, ezzel könyvünkben nem foglalkozunk, az érdeklődő olvasónak ajánljuk a [6] példatárat.

3.2.2. Definíció. *Egy kétszer folytonosan differenciálható $U: I \mapsto \mathbb{R}$ hasznosságfüggvény esetén, ha $U'(P)\neq 0$, akkor az*

$$R(P)=-\frac{U''(P)}{U'(P)}, \qquad P\in I,$$

mennyiséget az egyén (relatív) kockázatkerülésének nevezzük (a P szinten), ahol U az egyén hasznosságfüggvénye. Az $R_A(P)=R(P)\cdot P$ $(P\in I)$ értéket pedig abszolút kockázatkerülésnek nevezzük a P szinten.

Ezeket a mértékeket (mérőszámokat) a kockázat mérésére Arrow és Pratt vezette be, szokás ezeket Arrow-Pratt-féle (kockázatkerülési) mértékeknek is nevezni. (A kockázatkerülés mértékével kapcsolatos ezen részben leírt tételhez és megállapításainkhoz ((3.8) formula, 3.2.3. Tétel) elsősorban a [29] monográfiát vettük alapul és a [27] művet egyes részek esetén. Azt is megjegyezzük, hogy természetesen egy befektetés, vagy egy portfólió kockázatosságát is mérhetnénk. Ez már inkább a kockázatmenedzsment területéhez tartozik. Értékpapírok és általánosabban portfóliók kockázatosságával és azok mérésével a 4., 5. és 6. fejezetekben is foglalkozunk.

Az $R(P)$ kettő olyan előnyös tulajdonságát emeljük ki, amely a használatát megkönnyíti.

Az egyik tulajdonsága az, hogy az U függvény skálázásra nézve invariáns. Ehhez emlékezzünk arra, hogy egy egyén Neumann-Morgenstern típusú hasznosságfüggvénye csak pozitív affin transzformáció erejéig meghatározott. Azonban, ha vesszük az egyén egy másik hasznosságfüggvényét, legyen ez $\tilde{U}(P)=aU(P)+b$ $(a>0,\ b\in\mathbb{R})$, akkor

$$U''(P)/U'(P)=\tilde{U}''(P)/\tilde{U}'(P), \qquad P\in I,$$

találhatjuk Arató Miklós nagyszerű jegyzetében ([3]).

és ebből már láthatjuk, hogy egy adott preferenciarendszer esetén az abszolút kockázatelutasítás már egyértelműen definiált minden P szinten.

Másrészt pedig az is látszik a definícióból, hogy $R(P)$ csak a hasznosságfüggvény segítségével van definiálva, tehát az már egy olyan mérték, amely nem függ a játék megválasztásától.

Felvetődik ezek után az a kérdés, hogy találhatunk-e valamilyen kapcsolatot a biztosítási díj (P^*) és a kockázatkerülés között (hiszen előbbi függ a játék megválasztásától). Található ilyen kapcsolat, méghozzá a játék kockázata (pontosabban szórása) és a kockázatkerülés segítségével becsülni tudjuk P^* értékét.

Ehhez tegyük fel, hogy $U \in \mathcal{C}^3(I)$ és tekintsük az U Taylor sorfejtését a P körül. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\, U(\xi) = U(P - P^*) = U(P) - U'(P)P^* + \frac{U''(\tilde{P})}{2} P^{*2} \tag{3.5}$$

egy alkalmas $\tilde{P} \in (P - P^*, P)$ esetén. Továbbá

$$U(\xi(\omega)) = U(P) + U'(P)(\xi(\omega) - P) + \frac{U''(P)}{2}(\xi(\omega) - P)^2 + \frac{U'''(\bar{P}(\omega))}{6}(\xi(\omega) - P)^3 \tag{3.6}$$

minden $\omega \in \Omega$ esetén, ahol ξ egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn értelemezett valószínűségi változó, $\bar{P}(\omega)$ pedig eleme a $\xi(\omega)$ és P végpontok által meghatározott intervallumnak minden $\omega \in \Omega$ esetén. Ha vesszük a (3.6) egyenletben a várható értéket mindkét oldalon, akkor az a (3.4) és (3.5) egyenletekkel együtt azt adja, hogy

$$-U'(P)P^* + \frac{U''(\tilde{P})}{2} P^{*2} = \frac{U''(P)}{2}\, Var\xi + \mathbb{E}\left(\frac{U'''(\bar{P})}{6}(\xi - P)^3\right). \tag{3.7}$$

A (3.7) egyenletben mindkét oldalon az utolsó tag kicsi a többi taghoz képest, ha ξ a P pont egy kicsi környezetéből veszi az értékeit. Így végül az alábbi becsléshez jutottunk:

$$P^* \approx \frac{1}{2}\, R(P)\, Var\xi. \tag{3.8}$$

Tehát a biztosítási díj két tényező szorzataként írható fel. Az egyik tényező csak az egyéni preferenciáktól függ, míg a másik tényező csak a játék által meghatározott. Tehát, ha nőne a kockázatkerülés vagy a játék szórása, az egyaránt azt jelentené, hogy az egyén hajlandó lenne többet fizetni a kockázat elkerülése érdekében.

A (3.8) formula csak egy becslést adott, amely a P kicsi környezetében lesz csak viszonylag pontos. A következő tétel tovább jellemzi az abszolút kockázatkerülést és elmagyarázza, hogy miért alkalmas ez az egyén kockázathoz és annak elutasításához való viszonyának a jellemzésére.

3.2.3. Tétel. *Legyen $U_i : I \mapsto \mathbb{R}$ monoton növekvő, szigorúan konkáv hasznosságfüggvény $i = 1, 2$ esetén és tegyük fel, hogy $U_i \in \mathcal{C}^3(I)$, ahol I egy intervallum. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek.*

(1) *$R_1(x) > R_2(x)$ minden $x \in I$ esetén, ahol R_i $(i = 1, 2)$ a relatív kockázatkerülést jelöli egy U_i hasznosságfüggvénnyel rendelkező egyén esetén.*

(2) *Létezik egy kétszer differenciálható valós értékű G függvény az $U_2(I)$ halmazon értelmezve úgy, hogy*

$$G'(x) > 0, \quad G''(x) < 0 \qquad x \in U_2(I)$$

és

$$U_1(x) = G\big(U_2(x)\big) \quad \text{teljesül, ha} \quad x \in U_2(I). \tag{3.9}$$

(3) *$P_1(\xi) > P_2(\xi)$ tejesül bármely ξ valószínűségi változó esetén, melynek értékei az I intervallumban vannak úgy, hogy $\mathbb{E}\,|\xi| < \infty$ és $\mathbb{E}\,U(\xi)$ véges, ahol $P_i(\xi)$ az U_i $(i = 1, 2)$ hasznosságfüggvénnyel számolt biztosítási díjat jelöli.*

Bizonyítás.

(1) $\Longrightarrow$ **(2)** Az U_2 szigorú monotonitása miatt a

$$G(x) := U_1(U_2^{-1}(x)), \qquad x \in U_2(I),$$

függvény definiálható, továbbá az $U_2(I)$ halmazon kétszer differenciálható és (3.9) is teljesül G-re. Ha a (3.9) egyenletben vesszük az első deriváltakat, akkor azt kapjuk, hogy

$$G'\big(U_2(x)\big)U_2'(x) = U_1'(x), \tag{3.10}$$

$$G''\big(U_2(x)\big)\big(U_2'(x)\big)^2 + G'\big(U_2(x)\big)U_2''(x) = U_1''(x), \quad x \in I. \tag{3.11}$$

Így ekkor a (3.10) alapján azonnal adódik $G'(x) > 0$ $(x \in I)$. Továbbá ha elosztjuk a (3.11) egyenletet a (3.10) egyenlettel és abban előjelet váltunk, akkor az adódik, hogy

$$\begin{aligned} R_1(x) &= \frac{-G''\big(U_2(x)\big)\big(U_2'(x)\big)^2 - G'\big(U_2(x)\big)U_2''(x)}{G'\big(U_2(x)\big)U_2'(x)} \\ &= R_2(x) - \frac{G''\big(U_2(x)\big)\big(U_2'(x)\big)}{G'\big(U_2(x)\big)}. \end{aligned} \tag{3.12}$$

Így a (3.12) második sorában a hányados pozitív kell, hogy legyen (**(1)** miatt), amiből pedig következik, hogy $G''(x) < 0$, ha $x \in I$.

(2) $\Longrightarrow$ **(3)** Most tegyük fel, hogy ξ egy valószínűségi változó I-beli értékekkel úgy, hogy $\mathbb{E}\,|\xi| < \infty$. Jegyezzük meg, hogy ekkor G konkávsága **(2)**-ből adódik. Ekkor a Jensen egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned} U_1\big(\mathbb{E}\,\xi - P_1(\xi)\big) &= \mathbb{E}\,U_1(\xi) = \mathbb{E}\,G\big(U_2(\xi)\big) < G\big(\mathbb{E}\,U_2(\xi)\big) \\ &= G\Big(U_2\big(\mathbb{E}\,\xi - P_2(\xi)\big)\Big) = U_1\big(\mathbb{E}\,\xi - P_2(\xi)\big), \end{aligned}$$

és ezért $P_2(\xi) < P_1(\xi)$.

(3) $\Longrightarrow$ **(1)** Legyen most $P \in I$, $\varepsilon > 0$ és ξ egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(\xi = P+\varepsilon) = \mathbb{P}(\xi = P-\varepsilon) = 1/2$. Ekkor nyilvánvalóan $\mathbb{P}(|\xi - P| = \varepsilon) = 1$, $\mathbb{E}\,\xi = P$ és $\mathrm{var}\,\xi = \varepsilon^2$. Úgy, ahogy a (3.5) és a (3.6) egyenletekben tettük, most felírjuk a Taylor sorfejtést U_1-re és U_2-re a P körül és így a (3.7) egyenlet megfelelőjeként kapjuk az alábbiakat.

$$-U_i'(P)P_i(\xi) + \frac{U_i''(\tilde{P}_i)}{2}\,P_i(\xi)^2 = \frac{U_i''(P)}{2}\,Var\xi + \mathbb{E}\,\frac{U_i'''(\bar{P}_i)}{6}(\xi - P)^3, \qquad i = 1,2, \tag{3.13}$$

ahol $|\tilde{P}_i - P| \le P_i(\xi)$ és $\bar{P}_i$ $(i = 1,2)$ egy olyan valószínűségi változó, melyre $\mathbb{P}(|\bar{P}_i - P| \le \varepsilon) = 1$. Ha most felírjuk a (3.13) egyenletet $i = 1$ és $i = 2$ esetére, akkor a kettőből azt kapjuk, hogy

$$P_1(\xi) - P_2(\xi) + \frac{U_2''(\tilde{P}_2)}{U_2'(P)} P_2(\xi)^2 - \frac{U_1''(\tilde{P}_1)}{U_1'(P)} P_1(\xi)^2 = \frac{1}{2}\Big(R_1(P) - R_2(P)\Big)\varepsilon^2$$
$$+ \frac{1}{U_2'(P)} \mathbb{E}\, \frac{U_2'''(\bar{P}_2)}{6}(\xi - P)^3 - \frac{1}{U_1'(P)} \mathbb{E}\, \frac{U_1'''(\bar{P}_1)}{6}(\xi - P)^3.$$

Ha ε elég kicsi, akkor

$$sgn(P_1(\xi) - P_2(\xi)) = sgn\left(P_1(\xi) - P_2(\xi) + \frac{U_2''(\tilde{P}_2)}{U_2'(P)} P_2(\xi)^2 - \frac{U_1''(\tilde{P}_1)}{U_1'(P)} P_1(\xi)^2\right)$$
$$= sgn\Bigg(\frac{1}{2}\left(R_1(P) - R_2(P)\right)\varepsilon^2$$
$$- \left(\frac{1}{U_1'(P)} \mathbb{E}\, \frac{U_1'''(\bar{P}_1)}{6}(\xi - P)^3 - \frac{1}{U_2'(P)} \mathbb{E}\, \frac{U_2'''(\bar{P}_2)}{6}(\xi - P)^3\right)\Bigg)$$
$$= sgn\left(\frac{1}{2}\left(R_1(P) - R_2(P)\right)\varepsilon^2\right) = sgn\big(R_1(P) - R_2(P)\big).$$

Ezért a $P_1(\xi) > P_2(\xi)$ egyenlőtlenségből következik $R_1(P) > R_2(P)$ és így a tétel bizonyítását befejeztük. □

3.3. Optimális hasznosságú portfóliók

Az optimális portfóliók kiválasztásának a problémája egy alapvető fontosságú területe a mikroökonómiának, de különösen a pénzügyi elméleteknek és természetesen azok alkalmazásának, ahol bizonyos pénzügyi döntések meghozatalára van szükség.

Általánosan a következőképpen közelíthetjük meg a problémát: tekintsünk egy egyént (fogyasztót) vagy akár egy pénzügyi döntéseket hozó szervezetet (például pénzintézetet), és tegyük fel, hogy birtokában áll egy adott összeg, amelyből a piacon vásárol („befektet"), s így kialakítja portfólióját. A piacon ugyanakkor bizonyos pénzügyi eszközökkel kereskednek, így azok a fenti döntéshozó számára is megvásárolhatók. Ilyenek például: a valuták, a különböző értékpapírok, azaz kötvények, részvények, határidős ügyletek, csereügyletek (swapok) vagy akár opciós szerződések, de lényegében minden más, melynek árát pénzben ki tudjuk fejezni, s kereskednek vele a szükséges mennyiségben a piacon. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért a pénzügyi eszközzel azonos jelentésben fogjuk az értékpapír szót használni, azaz így fogunk nevezni bármely dolgot, amivel a piacon kereskednek és így az egyén megvásárolhatja azokat a portfóliója kialakításakor. Abban is megegyezünk, hogy a döntéshozó helyett ekvivalens módon használjuk az egyén szót, sőt még a szemléletesség kedvéért néha befektetőnek fogjuk nevezni, bár itt hangsúlyozni kell, hogy a közgazdasági elméletekben a befektető fogalmának értelmezése nem esik egybe ezzel a definícióval és a köznapi nyelvben elterjedt befektető fogalommal. Ennek megfelelően értékpapírok vásárlása esetén is néha azt fogjuk egyszerűen írni, hogy az egyén befektetett (az értékpapírba).

Ekkor nyilván az a legfontosabb feladata a befektetőnek, hogy a tőkéjét allokálja ezen pénzügyi eszközök között. Azonnal láthatjuk, hogy ez a probléma teljesen analóg azzal a (nem bizonytalan körülmények közötti) választási problémával, amelyet az 1.2. alfejezetben tárgyaltunk. Ismét adott egy feltételes optimalizálási feladat, ahol esetünkben a feltételt elsősorban a rögzített kezdeti tőke jelenti, ám rögtön megjegyezzük, hogy további feltételek is korlátozhatnak még bennünket; például egyes esetekben a fedezet nélküli részvényeladás (short sale) nem megengedett, vagy csak korlátozottan engedélyezett.

Azonban van egy lényegi különbség a két optimalizálási probléma között. Nevezetesen: az optimális jószágkosár meghatározásánál nem volt bizonytalan körülmény a modellben, a jószágok ára és az általuk eredményezett haszon előre ismert volt minden választható kosár esetén (ld. 1.2., 1.3. alfejezetek). Azonban az optimális portfólió keresése során olyan pénzügyi eszközökből kell választanunk, amelyek jövőbeli ára nem ismert előre, hiszen annak változása véletlen, így portfóliónk jövőbeli értéke, s ennélfogva hasznossága sem ismert előre.

Az elkövetkezendőek során egy $[0, T]$ időintervallumot fogunk tekinteni, ahol 0 a portfólió meghatározásának ideje, T pedig egy jövőbeli időpont, amelyet nevezhetünk akár más hasonló pénzügyi problémák mintájára lejárati időnek. Az értékpapírok árai a $[0, T]$ időszakban véletlenszerűen változhatnak, azonban azt fel fogjuk tenni, hogy a döntéshozó ismeri ezen véletlen változások eloszlását. Most egy egyszerű egylépéses modellt fogunk tanulmányozni, ami azt jelenti, hogy csak egyszer változnak az árak a vizsgált periódus alatt, méghozzá a T időpontban. Ezzel szemben a többlépéses modellekben az árak többször változhatnak, míg azon modelleket nevezzük folytonosnak[3], amelyek esetén az árak állandóan, a periódus minden pontjában változhatnak.

Tekintjük majd a lehetséges (az egyén számára elérhető) allokációk halmazát, amelyeket portfólióknak fogunk nevezni. Célunk adott szempont szerint az optimális portfólió meghatározása. Ezen szempontot később írjuk le. Nyilvánvaló ekkor, hogy a portfólió értéke éppen a kezdeti tőkével egyenlő a 0 időpontban, ugyanakkor véletlen, így előre nem ismert a lejáratkori értéke. Ezen modellben azt a portfóliót fogjuk keresni és optimálisnak nevezni, mely a legnagyobb várható hasznosságot biztosítja a lehetséges portfóliók között. Persze nem ez az egyetlen módja az optimális portfólió értelmezésének. Kereshetnénk például csak azon portfóliók között a legnagyobb várható hasznosságút, melyek egy előre megadott minimális értéket biztosan el fognak érni. Vagy kereshetnénk a minimális szórású portfóliót azok között, amelyek egy megadott szintet elérő várható hasznossággal rendelkeznek.

Ahogy már mondtuk, mi a maximális várható hasznosságú portfóliót fogjuk keresni. Feltesszük, hogy az egyik értékpapír ára determinisztikus lesz, tehát nem függ véletlentől. Ezt fogjuk a 0 indexszel jelölni, míg az ehhez tartozó megtérülési rátát vagy hozamot (amelyet akár kamatlábnak is nevezhetnénk) r_0 fogja jelölni. Ez természetesen azt jelenti, hogy a 0 időpontban vásárolva β_0 értékben az adott értékpapírból, az $\beta_0(1 + r_0)$ értékkel fog rendelkezni a lejárati T időpontban.

Ennek mintájára az i-edik értékpapír hozamát r_i fogja jelölni, amely viszont egy valószínűségi változó lesz. Tehát akár véletlen kamatlábnak is nevezhetnénk az r_i-t, s ennek

[3]Folytonos és többlépéses diszkrét idejű portfóliódöntésekkel, optimális stratégiákkal kapcsolatos munkák például: [19] és [32].

értelmében $\beta_i(1+r_i)$ értéket fog a befektető birtokolni az i-edik értékpapírból a lejárati időben, ha arra β_i összeget költött a döntés meghozatalakor. Legyen X_0 a kezdeti tőke (amelyet be fog fektetni a döntéshozó) és β_i $(i=1,\ldots,n)$ pedig jelölje azt, hogy az i-edik értékpapírra mekkora összeget költött a befektető. Tehát ekkor adott egy $\pi=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n)$ portfólió, amelynek értéke $X_0=\sum_{i=0}^n \beta_i$ a 0 időpontban és

$$\begin{aligned} X_T^\pi = \sum_{i=0}^n \beta_i(1+r_i) &= \left(X_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i\right)(1+r_0) + \sum_{i=1}^n \beta_i(1+r_i) \\ &= X_0(1+r_0) + \sum_{i=1}^n \beta_i(r_i - r_0) \end{aligned} \tag{3.14}$$

a T időpontban.

3.3.1. Definíció. *Legyen $(\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P})$ egy valószínűségi mező, $r_0 \geq 0$ és $i=1,\ldots,n$ esetén legyen $r_i:\Omega\mapsto(-1,\infty)$ egy valószínűségi változó ezen a mezőn úgy, hogy $\mathbb{E}\ r_i^2<\infty$ és $\mathbb{P}(r_i=r_0)<1$. Legyen továbbá $r=(r_0,r_1,\ldots,r_n)$.*
Ekkor az $\{\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},r,n\}$ halmazt egy ($n+1$ értékpapírból álló) értékpapírpiacnak nevezzük. Egy $n+1$ dimenziós $\pi=(\beta_0,\beta_1,\ldots,\beta_n)$ vektort ($\beta_i\in\mathbb{R}$) portfóliónak fogunk nevezni, ahol β_i azt a pénzmennyiséget jelöli, amelyet az i-edik értékpapírba fektettünk.

Jegyezzük meg, hogy a $\mathbb{P}(r_i=r_0)<1$ feltétel nem jelent valódi megszorítást, hiszen egy értékpapír nem lenne különböző a kockázatmentes r_0 kamatot ígérő értékpapírtól, ha a hozama teljesítené a $\mathbb{P}(r_i=r_0)=1$ egyenletet.

Érdemes továbbá azt is feltételezni (bár ezt a 3.3.1. Definíció nem tartalmazza), hogy egy adott értékpapír hozama r_0-nál kisebb illetve nagyobb értékeket egyaránt pozitív valószínűséggel vehet fel. Ha ugyanis vagy $\mathbb{P}(r_i\geq r_0)=1$ vagy $\mathbb{P}(r_i\leq r_0)=1$ teljesülne, akkor tetszőlegesen nagy profitot lehetne elérni kockázat nélkül úgy, hogy kölcsönt vennénk fel a 0 indexű értékpapírból és az így nyert összeget az i indexű papírba fektetnénk az első esetben, illetve éppen ennek a fordítottját cselekednénk a második esetben. Egy ilyen lehetőséget nevezünk arbitrázs lehetőségnek. Az arbitrázs szerepének részletesebb tárgyalása az Opcióelmélet részben található.

A fentiekben leírt stratégia lényegében egy arbitrázs lehetőséget használ ki, hiszen segítségével kezdeti tőke nélkül és kockázatmentesen tudunk profithoz jutni. A fentiekhez hasonlóan így azt is érdemes általában megkövetelni, hogy a $\mathbb{P}(r_i \leq r_j) < 1$ feltétel teljesüljön $i \neq j$ esetén, $i, j \in \{1, \ldots, n\}$.

3.3.2. Jelölés. *A továbbiakban feltesszük, hogy a T lejárati időpontban fogja a befektető a hozamokat realizálni és X_T^π fogja jelölni egy π portfólió értékét a T időpontban, ahogy azt már a (3.14) egyenletben is használtuk. Definiáljuk ekkor a*

$$C_{X_0} = \left\{ \pi \;\middle|\; \pi = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \sum_{i=0}^{n} \beta_i = X_0 \right\}$$

halmazt, amelyet az X_0 kezdeti tőke mellett lehetséges portfóliók halmazának nevezünk, ahol feltételeztük, hogy az értékpapírok kereskedésében semmiféle korlátozás nincs és ennélfogva β_i tetszőleges (tehát akár negatív) valós értéket is felvehet.

3.3.3. Megjegyzés. A 3.3.1. Definícióban a kockázatmentes kamatlábra, a 3.3.4. Definícióban pedig a kezdőtőkére feltettük, hogy nemnegatív. Valójában a későbbi állításokban látni fogjuk, hogy ezek nem lényeges feltételezések, hiszen általánosan $r_0 > -1$ és $X_0 \in \mathbb{R}$ mellett is szinte minden állítás kimondható lenne. A fenti megszorításokkal inkább abból az okból élünk, hogy ezek életszerűbb piaci szituációt jelenítenek meg.

3.3.4. Definíció. *Legyen $U \to \mathbb{R}$ egy hasznosságfüggvény, $X_0 \geq 0$. Ekkor a π^* portfóliót az X_0 kezdőtőkéhez tartozó optimális portfóliónak nevezzük várható hasznosság értelmében (röviden: optimális várható hasznosságú portfólió), ha*

$$\mathbb{E}\, U\left(X_T^{\pi^*}\right) = \max_{\pi \in C_{X_0}} \mathbb{E}\, U\left(X_T^{\pi}\right).$$

Az alábbi lemma céljainkhoz kulcsfontosságú, ugyanis azt tárgyaljuk, hogy hogyan lehet az optimális portfóliót megkeresni (ld. (3.16) egyenlet) kockázatkerülő egyének esetén. Itt tárgyaljuk az egyértelműség kérdését is, ám csak később fogjuk vizsgálni, hogy mi biztosítja az optimális portfólió létezését (ld. 3.4.2. Tétel).

3.3.5. Lemma. *Legyen* $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ *egy hasznosságfüggvény, melyre* $U''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, *legyen* $X_0 \geq 0$ *és tegyük fel, hogy* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ *egy értékpapírpiac korlátos hozamokkal. Ekkor a* π^* *portfólió akkor és csak akkor optimális az*

$$\mathbb{E}\, U\left(X_T^{\pi^*}\right) = \max_{\pi \in C_{X_0}} \mathbb{E}\, U\left(X_T^{\pi}\right) \tag{3.15}$$

értelemben, ha

$$\mathbb{E}\left(U'\big(X_T^{\pi^*}\big)(r_i - r_0)\right) = 0 \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{3.16}$$

Továbbá az $r_1, \ldots, r_n$ *valószínűségi változók függetlensége, azaz az értékpapírok hozamának a függetlensége esetén az optimális portfólió (persze feltéve, hogy létezik ilyen) egyértelmű.*

Bizonyítás. Jegyezzük először meg, hogy a portfólió n koordinátáját szabadon megválaszthatjuk, ha azt akarjuk elérni, hogy $\pi \in C_{X_0}$ teljesüljön, hiszen ekkor azok a maradék egy koordináta értékét egyértelműen meghatározzák. Legyen $\pi = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n) \in C_{X_0}$ és definiáljuk az

$$F(\beta_1, \ldots, \beta_n) := \mathbb{E}\, U\left(X_T^{\pi}\right) = \mathbb{E}\, U\left(X_0(1 + r_0) + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(r_i - r_0)\right) \tag{3.17}$$

függvényt. A célunk az F függvény maximumának megkeresése $\mathbb{R}^n$-ben. Mivel $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, így ha felírjuk annak az elsőrendű szükséges feltételét, hogy a $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ pontban a maximum eléretik, akkor abban a várható érték és a differenciálás felcserélhető. Ezért azt kapjuk, hogy

$$0 = \frac{\partial}{\partial \beta_i} F(\beta) = \mathbb{E}\, \frac{\partial}{\partial \beta_i} U\left(X_T^{\pi}\right) = \mathbb{E}\left(U'\big(X_T^{\pi}\big)(r_i - r_0)\right), \tag{3.18}$$

ahol kihasználtuk, hogy a várható érték képzése és a differenciálás felcserélhető, hiszen esetünkben hozamaink korlátosak.

Az F függvény $\mathbb{R}^n$ felett konkáv, amelyet az alábbi módon ellenőrizhetünk. Legyen $\beta \in \mathbb{R}^n$ és $z_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, \ldots, n)$ és definiáljuk a $\pi = (X_0 - \sum_{i=1}^{n} \beta_i, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ portfóliót.

Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i z_j \frac{\partial^2 F(\beta)}{\partial\beta_i\partial\beta_j} &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} z_i z_j \mathbb{E}\, U''\left(X_T^\pi\right)(r_i - r_0)(r_j - r_0) \\ &= \mathbb{E}\, U''\left(X_T^\pi\right)\left(\sum_{i=1}^{n} z_i(r_i - r_0)\right)^2 \leq 0,\end{aligned} \tag{3.19}$$

hiszen U'' mindenhol negatív. A (3.19) egyenlőtlenségből pedig már látszik, hogy F konkáv, ami azt jelenti egyben, hogy a maximumra felírt (3.16) elsőrendű szükséges feltétel egyben elégséges is.

Tegyük most fel, hogy létezik optimum. Ekkor a (3.16) egyenletből az adódik, hogy $\mathbb{P}(r_j - r_0 < 0) > 0$ és ezért $\mathbb{P}(r_j - r_0 > 0) > 0$ is teljesül $j = 1, \ldots, n$ esetén. Így ha a kockázatos piaci értékpapírok hozamai függetlenek, akkor a (3.19) egyenlőtlenség bal oldala negatív lesz abban az esetben, ha valamely $\{1, \ldots, n\}$ halmazbeli i index esetén $z_i \neq 0$ teljesül. Ebből pedig az adódik, hogy az F függvény $\mathbb{R}^n$-ben szigorúan konkáv és ennélfogva az optimum egyértelmű. □

3.3.6. Megjegyzés. A fenti tételt más feltételekkel is ki lehetne (általánosabban) mondani. Abban a hozamok korlátossága csak a (3.18) egyenlőségben volt szükséges a várható érték képzése és a differenciálás felcserélésére. Ezért ezt a felcserélhetőséget más elégséges feltétellel is lehetne pótolni. Erre vonatkozóan a [6] példatár ismertet további alternatívákat. △

3.4. Értékpapírok kereslete

Láttuk korábban, hogy a kockázatkerülés jellemzi az egyén bizonytalan körülmények közötti döntéseit. Felvetődik ezért a kérdés, hogy milyen kapcsolat van az egyén kockázatkerülése és az általa kiválasztott optimális portfólió között. Az alábbiakban bemutatjuk, hogy valóban található ilyen kapcsolat. Ennek megmutatására egy olyan egyszerű értékpapírpiacot fogunk tekinteni, ahol csak egyetlen kockázattal járó értékpapír van a kockázatmentes mellett.

Tudjuk, hogy a közgazdaságtanban azokat a jószágokat nevezzük normál jószágoknak, amelyek kereslete növekszik a fogyasztó jövedelmének (vagy vagyonának) a növekedése esetén. Egy jószág pedig inferior, ha a jövedelemnövekedés a jószág keresletének csökkenésével párosul. Most ugyanezen fogalmakat definiáljuk értékpapírok esetére is.

3.4.1. Definíció. *Tegyük fel, hogy U egy szigorúan konkáv, monoton növekvő hasznosság-függvény és $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ pedig egy értékpapírpiac. Tegyük továbbá azt is fel, hogy minden $X \geq 0$ kezdeti tőke esetén egyértelműen létezik optimális várható hasznosságú portfólió (ld. 3.3.4. Definíció). Legyen ennek jelölése $\pi(X) = (\beta_0(X), \ldots, \beta_n(X))$.*

Ekkor az i indexű értékpapírt ($i \in \{0, \ldots, n\}$) normálnak nevezzük, ha $\beta_i(X)$, azaz az értékpapír X jövedelemszinthez tartozó kereslete az X változó egy monoton növekvő függvénye. Hasonlóan, az értékpapír inferior, ha β_i monoton csökkenő X-ben.
Ha β_i nullától különböző az X pontban és differenciálható X-ben, akkor az

$$\varepsilon_i(X) = \frac{\frac{d\beta_i(X)}{dX}}{\frac{\beta_i(X)}{X}} = \frac{d\beta_i(X)}{dX}\frac{X}{\beta_i(X)}, \quad X > 0,$$

mennyiséget az i értékpapír keresletének jövedelemrugalmassága az X jövedelemszinten.

Lényegében az értékpapír keresletének jövedelemrugalmassága azt mutatja, hogy 1 százalékos jövedelemnövekedés az értékpapír keresletében hány százalékos növekedést okoz. Tehát egy 1-nél nagyobb jövedelemrugalmasság azt jelenti, hogy a jövedelem növekedése esetén az optimális portfólióban az adott értékpapír aránya növekedni fog a többi értékpapír arányához képest, míg $\varepsilon(X) \in [0, 1)$ esetén ez az arány pedig természetesen csökkenni fog. Az $\varepsilon(X) = 1$ esetben pedig nyilván nem lesz változás ebben az arányban. Végül említsük meg, hogy negatív rugalmasság esetén az adott értékpapír kereslete maga is csökkenni fog a jövedelem növekedése esetén (s nem csak egyszerűen a többihez képest lesz kisebb az aránya a portfólióban).

Korábban már láttuk, hogy az optimális portfóliót a 3.3.5. Lemmában leírt (3.16) feltétel segítségével tudjuk megkeresni, ahol az optimális portfólió egyértelműségét is vizsgáltuk. A következő tételben pedig egyrészt tárgyaljuk az optimális portfólió létezésének elégséges feltételét, másrészt látni fogjuk azt is, hogy milyen kapcsolatban vannak az egyes értékpapírokból vásárolt mennyiségek (előjelei) a papírok várható hozamával..

3.4.2. Tétel. [4] *Legyen $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ egy monoton növekvő hasznosságfüggvénye egy egyénnek, melyre $U''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy az egyén $X_0 \geq 0$ kezdeti tőkével rendelkezik egy egy kockázatos értékpapírt tartalmazó $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, 1\}$ értékpapírpiacon, ahol r_1 korlátos. Tegyük fel továbbá, hogy $\pi^* = (\beta_0^*, \beta_1^*)$ egy X_0-hoz tartozó optimális portfóliót jelöl a 3.3.4. Definíció értelmében.*

Ekkor

$$\beta_1^* > 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}\, r_1 > r_0$$

és hasonlóan

$$\beta_1^* < 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}\, r_1 < r_0,$$

így nyilván

$$\beta_1^* = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}\, r_1 = r_0.$$

Minden $X_0 \geq 0$ jövedelem esetén létezik optimális portfólió, ha a

$$\lim_{x \to \infty} U'(x) = 0 \qquad \text{vagy} \qquad \lim_{x \to -\infty} U'(x) = \infty$$

feltételek közül legalább az egyik teljesül.

Bizonyítás. Tekintsük ismét a (3.17) képlettel definiált F függvényt, amely esetünkben egyváltozós. Legyen $\pi_0 = (X_0, 0)$ egy portfólió. Ekkor F első deriváltját véve a 0 pontban azt kapjuk, hogy

$$F'(0) = \mathbb{E}\, U'\left(X_T^{\pi_0}\right)(r_1 - r_0) = U'\big(X_0(1 + r_0)\big)(\mathbb{E}\, r_1 - r_0). \tag{3.20}$$

[4] A tétel első állítását lényegében ebben a formában találhatjuk az [29] műben, a létezésre vonatkozó állítás bizonyításának ottani tárgyalása nem elégséges, így az nem egyezik az általunk leírtakkal.

Mivel F szigorúan konkáv és $U' > 0$ mindenhol, így a (3.20) egyenlőségből könnyű látni, hogy az F maximumának a helye pontosan akkor van a pozitív félegyenesen, ha $\mathbb{E}\, r_1 - r_0 > 0$ és pontosan akkor kisebb nullánál, ha $\mathbb{E}\, r_1 - r_0 < 0$.

Az 3.3.5 Lemma bizonyításában megmutattuk, hogy F szigorúan konkáv, amiből pedig könnyű látni, hogy F' szigorúan monoton csökkenő. Most a monoton konvergencia tételének alkalmazásával azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to\infty} F'(\beta) &= \lim_{\beta\to\infty} \mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0)+\beta(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0)\\ &= \mathbb{E} \lim_{\beta\to\infty}\Big[U'\big(X_0(1+r_0)+\beta(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0)\Big]^+\\ &\quad+\mathbb{E} \lim_{\beta\to\infty}\Big[U'\big(X_0(1+r_0)+\beta(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0)\Big]^-\\ &= u_+\mathbb{E}\,[r_1-r_0]^+ + u_-\mathbb{E}\,[r_1-r_0]^-,\end{aligned} \tag{3.21}$$

ahol $u_+ = \lim_{x\to\infty} U'(x)$, $u_- = \lim_{x\to-\infty} U'(x)$ és $[\cdot]^+ = \max(0,\cdot)$, $[\cdot]^- = \min(0,\cdot)$. Vegyük észre, hogy $\mathbb{E}\,[r_1-r_0]^+ > 0$ és $\mathbb{E}\,[r_1-r_0]^- < 0$. Ezért világos, hogy a (3.21) egyenlet jobb oldala vagy negatív vagy pedig $-\infty$ abban az esetben, ha $u_+ = 0$ vagy $u_- = \infty$ teljesül. Hasonló gondolatmenettel azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lim_{\beta\to-\infty} F'(\beta) &= \mathbb{E} \lim_{\beta\to-\infty}\Big[U'\big(X_0(1+r_0)+\beta(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0)\Big]^+\\ &\quad+\mathbb{E} \lim_{\beta\to-\infty}\Big[U'\big(X_0(1+r_0)+\beta(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0)\Big]^-\\ &= u_-\mathbb{E}\,[r_1-r_0]^+ + u_+\mathbb{E}\,[r_1-r_0]^- > 0,\end{aligned} \tag{3.22}$$

ha $u_+ = 0$ vagy $u_- = \infty$ teljesül. Végül, mivel folytonos függvény két felvett értéke között minden értéket felvesz (Darboux tétel), így létezik egy β pont, ahol F' eltűnik és ezért (3.16) teljesül. □

A következő két tétel teremti meg a kapcsolatot az egyéni kereslet és az egyén kockázatkerülése között relatív illetve abszolút kockázatkerülés esetén. Ez egyben újabb érv a kockázatkerülés ezen mértékének használatára.

3.4.3. Tétel. [5] *Tegyük fel, hogy $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ egy monoton növekvő hasznosságfüggvény, melyre $U''(x) < 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$, és $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, 1\}$ egy egy kockázatos értékpapírt tartalmazó értékpapírpiac úgy, hogy r_1 korlátos és a kockázatos értékpapír $\mathbb{E}\, r_1 - r_0$ kockázati prémiuma pozitív. Tegyük fel továbbá, hogy minden $X \geq 0$ kezdeti tőke esetén egyértelműen létezik optimális portfólió és jelölje ezt $\pi(X)$.*

(a) *Ha egy U hasznosságfüggvénnyel rendelkező egyén R kockázatkerülése szigorúan csökkenő $\mathbb{R}$-en, akkor a kockázatos értékpapír egy normál értékpapír (az adott egyén esetén).*
(b) *Ha R szigorúan növekvő $\mathbb{R}$-en, akkor a kockázatos értékpapír inferior.*
(c) *Ha a relatív kockázatkerülés konstans $\mathbb{R}$-en, akkor a kockázatos értékpapír egyéni kereslete is konstans függvénye a jövedelemnek.*

Bizonyítás. Definiáljuk az

$$f(X,\beta) = \mathbb{E}\,\big(U'\big(X(1+r_0) + \beta(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0)\big), \qquad (X,\beta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}$$

függvényt és vegyük észre, hogy ekkor f folytonos parciális deriváltakkal rendelkezik, és

$$\frac{\partial f(X,\beta)}{\partial \beta} = \mathbb{E}\,\big(U''\big(X(1+r_0) + \beta(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0)^2\big) < 0 \qquad \forall (X,\beta) \in (0,\infty) \times \mathbb{R}.$$

Az implicit függvény tétel (ld. Függelék, A.1.1. Tétel) segítségével azt kapjuk, hogy létezik egy $\beta \in \mathcal{C}^1\big((0,\infty)\big)$ függvény úgy, hogy

$$f\big(Y, \beta(Y)\big) = 0 \qquad \text{ha} \quad Y \in [0,\infty). \tag{3.23}$$

Ekkor $X^{\pi(Y)} = Y(1+r_0) + \beta(Y)(r_1 - r_0)$ az Y kezdeti tőkéhez tartozó optimális portfólió jövőbeli értéke. A (3.23) egyenletet deriválva azt kapjuk, hogy $Y \geq 0$ esetén

$$\begin{aligned}\frac{df\big(Y,\beta(Y)\big)}{dY} &= \mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)\big(1 + r_0 + \beta'(Y)(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0) \\ &= \mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(1+r_0)(r_1 - r_0) + \beta'(Y)\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1 - r_0)^2 = 0.\end{aligned}$$

[5] A tétel és az ezt követő tétel bizonyításait [27] alapján végezzük.

Emlékezzünk arra, hogy $U''(x) < 0$, $x \in \mathbb{R}$, és $\mathbb{P}(r_1 \neq r_0) > 0$. Ekkor

$$\frac{d\beta}{dY} = \frac{\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(1+r_0)(r_1-r_0)}{-\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2}, \qquad Y \geq 0, \tag{3.24}$$

és ezért

$$\begin{aligned} sgn\left(\frac{d\beta}{dY}\right) &= sgn\left(\frac{\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(1+r_0)(r_1-r_0)}{-\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2}\right) \\ &= sgn\Big(\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)\Big). \end{aligned} \tag{3.25}$$

Most tegyük fel, hogy R szigorúan monoton csökkenő. Ekkor minden olyan $\omega \in \Omega$ esetén, melyre $r_1(\omega) \geq r_0$ azt kapjuk, hogy

$$R\big(Y(1+r_0)\big) \geq R\left(X^{\pi(Y)}\right) = R\big(Y(1+r_0) + \beta(Y)(r_1(\omega) - r_0)\big), \tag{3.26}$$

ahol jegyezzük meg, hogy $\beta(Y) > 0$ teljesül a 3.4.2. Tétel szerint. Továbbá minden olyan $\omega \in \Omega$ esetén, melyre $r_1(\omega) < r_0$ azt kapjuk, hogy

$$R\big(Y(1+r_0)\big) < R\left(X^{\pi(Y)}\right) = R\big(Y(1+r_0) + \beta(Y)(r_1(\omega) - r_0)\big). \tag{3.27}$$

Majd a $-U'\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1(\omega) - r_0)$ értékkel szorozzuk meg ezután a (3.26) és (3.27) egyenlőtlenségeket és vegyük a várható értéket. Azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1 - r_0) > -R\big(Y(1+r_0)\big)\mathbb{E}\, U'\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1 - r_0) = 0,$$

ami a (3.25) egyenlettel együtt az első állítást adja.

A második állítást teljesen analóg módon lehet bizonyítani, míg a harmadik állítás pedig már egy triviális következménye az első kettőnek. □

3.4.4. Tétel. *Tegyük fel, hogy a 3.4.3. Tétel feltételei teljesülnek.*

Ha az egyén R_A abszolút kockázatkerülése szigorúan monoton növekvő $\mathbb{R}$-ben, akkor az egyéni kereslet jövedelemrugalmassága 1-nél kisebb.
Ha R_A szigorúan monoton csökkenő $\mathbb{R}$-ben, akkor az egyéni kereslet jövedelemrugalmassága

1-nél nagyobb.

Végül pedig, ha az egyén abszolút kockázatkerülése konstans, akkor az egyéni kereslet jövedelemrugalmassága éppen 1.

Bizonyítás. A (3.24) formula segítségével az alábbi alakban írhatjuk fel a jövedelemrugalmasságot. (Az egyszerűség kedvéért ε fogja most jelölni a piac egyetlen kockázatos értékpapírjának a jövedelemrugalmasságát a bizonyítás során.) Felelevenítve, hogy $X^{\pi(Y)} = Y(1+r_0) + \beta(Y)(r_1 - r_0)$ azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\varepsilon(Y) &= \frac{d\beta(Y)}{dY}\frac{Y}{\beta(Y)} = 1 + \frac{\frac{d\beta(Y)}{dY}Y - \beta(Y)}{\beta(Y)} \\
&= 1 + \frac{\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(1+r_0)(r_1-r_0)Y + \beta(Y)\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2}{-\beta(Y)\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2} \\
&= 1 + \frac{\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)\left(Y(1+r_0) + \beta(Y)(r_1-r_0)\right)}{-\beta(Y)\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2} \\
&= 1 + \frac{\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)\left(X^{\pi(Y)}\right)}{-\beta(Y)\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0)^2}
\end{aligned}$$

Ebből pedig adódik, hogy

$$sgn(\varepsilon(Y)-1) = sgn\Big(\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0).\left(X^{\pi(Y)}\right)\Big) \tag{3.28}$$

Tekintsük azt az esetet, amikor R_A szigorúan monoton csökkenő. Ekkor

$$\begin{aligned}
U''\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)(r_1(\omega)-r_0) &= -R_A\Big(\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)\Big)U'\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)(r_1(\omega)-r_0) \\
&\le -R_A\big(Y(1+r_0)\big)U'\left(X^{\pi(Y)}(\omega)\right)(r_1(\omega)-r_0),
\end{aligned}$$

ha $r_1(\omega) \ge r_0$ vagy $r_1(\omega) < r_0$ és tudjuk azt is, hogy $\mathbb{P}(r_1(\omega) < r_0) > 0$. Így végül azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\, U''\left(X^{\pi(Y)}\right)\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0) < -R_A\big(Y(1+r_0)\big)\mathbb{E}\, U'\left(X^{\pi(Y)}\right)(r_1-r_0) = 0,$$

ami a (3.28) egyenlettel együtt azt jelenti, hogy az állítást beláttuk.

Világos, hogy a tétel másik két állításának bizonyítása már analóg gondolatmenettel belátható. $\square$

3.4.5. Megjegyzés. A 3.4.3. és 3.4.4. Tételek azt mondják, hogy a kockázatkerülésre bevezetett mérőszámok segítségével jól jellemzhető a kockázatkerülő egyén kereslete és jövedelemrugalmassága. Növekvő egyéni keresletet eredményez például, ha a kockázatkerülés nagyobb értékek esetén kisebb.

A két tételt egyaránt a részvény pozitív kockázati prémium mellett mondtuk ki. Nyilvánvaló a tételek bizonyításából, hogy negatív kockázati prémium esetén analóg állítások fogalmazhatóak meg, ahol értelemszerűen 'megfordul' a keresletre illetve rugalmasságra megfogalmazott tulajdonság. Ha pedig a kockázati prémium nulla, akkor a 3.4.2. Tétel alapján egy elfajuló esetet kapunk, ahol a kereslet nulla, tehát az egyén nem vásárol a részvényből.

Jegyezzük meg azt is, hogy r_1 korlátossága helyett itt is tehetnénk más (elégséges) feltételt, ahogy azt a 3.3.6. Megjegyzésben leírtuk.

Végül megjegyezzük, hogy az értékpapírok esetén a normál vagy inferior tulajdonságot, mint ahogy a jövedelemrugalmasságot is lehetne pontbeli tulajdonságként is definiálni, s ekkor a 3.4.3. és 3.4.4. Tételek teljesen analóg módon kimondhatóak lennének pontbeli esetre, hiszen valójában ezt igazoljuk a bizonyításaikban. Ennek talán még különös jelentősége nem lenne, ám ebből következik, hogy ennek alapján olyan szituációkat is lehet vizsgálni, ahol szakaszonként (intervallumonként) változna a részvényre vonatkozó kereslet (pl. normálból inferiorba) vagy a jövedelemrugalmasság jellege. Ilyen esetre találhatunk is példát a [6] példatárban.

4. fejezet

Sztochasztikus dominancia

Eddig több olyan fogalmat ismertettünk, amelyek segítségével jellemezni tudtuk az egyének preferenciarendezésének tulajdonságait a bizonytalan körülmények közötti döntéshozatalok esetén; például azt, hogy az értékpapírpiacon hogyan reagálnak egyes szituációkban. Természetesen vetődik fel a kérdés: hogyan lehetne (milyen tulajdonságokkal) jellemezni a piacokon található értékpapírokat például annak érdekében, hogy azok kockázatosságát össze tudjuk vetni? Olyan eszközt szeretnénk találni, melynek segítségével meg lehet mondani, hogy a döntéshozók egyes csoportja hogyan hozza ezen értékpapírokkal kapcsolatos döntéseit. A korábbiakból már talán következik az is, hogy az általunk vizsgált döntéshozói (fogyasztói) csoportok egyrészt a kockázatkerülő emberek csoportja, másrészt a ,,többet a kevesebbnél preferáló" egyének csoportja lesz.

Ezen részben a fenti vizsgálatokhoz az első és a másodrendű sztochasztikus dominancia fogalmát fogjuk használni. Ennek kidolgozását a [14] és a [27] könyvekben leírtakra támaszkodva ismertetjük elsősorban 4.1.2. és 4.2.2. Tételek), ahol a [14] monográfia nagy segítséget adott néhány egyszerű valós függvénytani problémához. Egyben azt is megjegyezzük, hogy a [27] műben leírtak jelentették a motivációt a 4.1-4.3. alfejezetekben ismertetett példák konstruálására. (További megjegyzéseket tettünk a felhasznált irodalomról a

Bibliográfiai Megjegyzésekben.)

4.1. Elsőrendű sztochasztikus dominancia

4.1.1. Definíció. *Legyen* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ *egy értékpapírpiac és tegyük fel, hogy a döntéshozó* U *hasznosságfüggvénye folytonos. Legyen* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Ekkor azt mondjuk, hogy az egyén az i *indexű értékpapírt jobban kedveli, azaz* preferálja *a* j *indexű értékpapírral szemben, ha*

$$\mathbb{E}\, U(1 + r_i) \geq \mathbb{E}\, U(1 + r_j).$$

Az i *indexű értékpapír* elsőrendben sztochasztikusan dominálja *a* j *indexű értékpapírt, ha minden monoton növekvő és folytonos hasznosságfüggvénnyel rendelkező egyén (tehát akik ,,a többet preferálják a kevesebbel szemben") az* i *indexű értékpapírt preferálja a* j *indexű értékpapírral szemben. Ezt a relációt úgy fogjuk jelölni, hogy* $r_i \succcurlyeq_{FSD} r_j$ *vagy* $r_j \preccurlyeq_{FSD} r_i$.

Tehát a definíció szerint akkor fogjuk a i indexű értékpapírt (melynek hozama r_i) jobbnak nevezni az egyén számára a j indexű értékpapírnál (melynek hozama r_j), ha az egyén U hasznosságfüggvényét használva $\mathbb{E}\, U(1 + r_i) \geq \mathbb{E}\, U(1 + r_j)$ teljesül. Másképpen ezt úgy is mondhatjuk, hogy egy egység pénz befektetése esetén nagyobb várható hasznosságot eredményez annak az i értékpapírba való befektetése, mint a j értékpapírba való befektetése. Azonban vegyük észre, hogy ebben az összehasonlításban a sztochasztikus dominancia definíciója esetén nincs jelentősége annak, hogy az előbbi fogalom definíciójában a pénz mennyisége (az összehasonlításnál) éppen 1 egység. Ugyanis a definícióban leírt tulajdonságot a hasznosságfüggvények egy egész családjára követeljük meg. Azt pedig már könnyű látni, hogy ha módosítanánk annak a relációnak a definícióját, mely megmondja, hogy az egyén milyen esetben preferál egy értékpapírt egy másikkal szemben, például úgy, hogy abban $\mathbb{E}\, U(1+r_i) \geq \mathbb{E}\, U(1+r_j)$ helyett $\mathbb{E}\, U(r_i) \geq \mathbb{E}\, U(r_j)$ egyenlőtlenséget írnánk, akkor a sztochasztikus dominancia fenti definíciója a korábbival ekvivalens fogalomhoz vezetne. Ez a megjegyzés vonatkozik a későbbiekben ismertetendő másodrendű sztochasztikus dominancia fogalmára is (ld. 4.2.1. Definíció). A fent javasolt módosítás egyébként azt mondaná, hogy ne a befektetés várható hasznát, hanem a hozamának a várható hasznát vessük össze.

A következő tétel az elsőrendű sztochasztikus dominancia fogalmát segít értelmezni.

4.1.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ egy értékpapírpiac, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$, úgy, hogy azon a hozamok korlátosak.*

Ekkor

$$r_i \succcurlyeq_{FSD} r_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad F_i(x) \leq F_j(x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R},$$

ahol F_k az r_k hozam eloszlásfüggvénye, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Bizonyítás. Legyen $u \in \mathbb{R}$ egy felső korlát a szóban forgó hozamokra, azaz olyan, hogy $\mathbb{P}(r_i < u) = \mathbb{P}(r_j < u) = 1$. Definiáljuk a következő függvényt:

$$G(z) = F_i(z) - F_j(z) \qquad z \in \mathbb{R},$$

és tegyük fel, hogy $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ monoton növekvő. Ekkor U folytonossága együtt a parciális integrálás formulájával (ld. Függelék, A.1.2 Tétel) azt adja, hogy

$$\begin{aligned}\int_{[-1,u]} U(1+z)dG(z) + \int_{[-1,u]} G(z)dU(1+z)& \\ = U(1+u)G(u) - U(0)G(-1) = 0,&\end{aligned} \tag{4.1}$$

hiszen $G(u) = G(-1) = 0$. Ezért pontosan akkor teljesül

$$\mathbb{E}\, U(1+r_i) - \mathbb{E}\, U(1+r_j) = \int_{[-1,u]} U(1+z)dG(z) \geq 0$$

minden monoton növekvő $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvény esetén, ha teljesül

$$\int_{[-1,u]} G(z)dU(1+z) \leq 0$$

minden monoton növekvő $U \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ függvény esetén, amit ekvivalens módon úgy is írhatunk, hogy $G(z) \geq 0$ majdnem biztosan minden $z \in \mathbb{R}$ esetén. Ezzel az állítást beláttuk. □

A tétel állítása alapján már tudjuk, hogy egy értékpapír elsőrendű sztochasztikus dominanciája egy másik értékpapír felett azt jelenti, hogy annak a valószínűsége, hogy egy adott szintet a papír hozama meghalad, a domináns értékpapírnál minden szint esetén nagyobb vagy egyenlő, mint a másik értékpapír esetén. Ebből speciálisan az is adódik persze, hogy egy elsőrendben sztochasztikusan domináns értékpapír hozamának a várható értéke legalább akkora, mint a dominált papíré.

Azonban fontos hangsúlyozni, hogy ezen állítás megfordítása nem igaz. Tegyük fel például, hogy az első értékpapír hozama egyenletes eloszlású a $[-0.5, 0.5]$ intervallumon, míg a másodiké pedig szintén egyenletes a $[-0.2, 0.4]$ intervallumon. Ekkor a 4.1.2. Tétel alapján világos, hogy ezen értékpapírok egyike sem dominálja elsőrendben sztochasztikusan a másikat, pedig a hozamuk várható értéke nem azonos.

Említsük meg azt is, hogy a $\preccurlyeq_{FSD}$ reláció reflexív és tranzitív is, azonban ez a reláció nem feltétlenül teljes az előbbiek miatt egy adott piac értékpapírjainak a halmazán, hiszen az előbbiekben megmutattuk, hogy két értékpapír ezzel a relációval nem feltételenül hasonlítható össze.

Valójában a 4.1.2. Tételben a hozamok korlátosságára vonatkozó feltétel nem lényeges, nélküle is igazolható az állítás. Sőt, egyéb karakterizásiója is adható az elsőrendű sztochasztikus dominanciának. Ezért rendhagyó módon a következő tétel ezt az általánosabb állítást ismerteti. Ugyanakkor az előző bizonyítás egyszerű (más) eszközökön alapult, mint a következő bizonyítás, így mindkettő közlését hasznosnak tartottuk.

4.1.3. Tétel. *Tegyük fel, hogy $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ egy értékpapírpiac, $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Jelölje*

F_k az r_k hozam eloszlásfüggvényét, $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Ekkor az alábbi állítások ekvivalensek:

(a) $r_i \succcurlyeq_{FSD} r_j$,

(b) $F_i(x) \leq F_j(x)$, $\forall\, x \in \mathbb{R}$,

(c) létezik egy $\{\Omega, \mathcal{F}', \mathbb{P}'\}$ valószínűségi mező és azon r_i', r_j' valószínűségi változók úgy, hogy $r_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} r_i'$, $r_j \stackrel{\mathcal{D}}{=} r_j'$ és $\mathbb{P}'\left(r_i \geq r_j\right) = 1$, ahol $\stackrel{\mathcal{D}}{=}$ az eloszlásban való egyenlőséget jelöli.

Bizonyítás.

(a) $\Longrightarrow$ (b) Legyen $x \in \mathbb{R}$ és $U = \mathbb{1}_{[x,\infty)}$. Ekkor a sztochasytikus domimamcia miatt

$$1 - F_j(x) = \mathbb{P}\left(r_j \geq x\right) = \mathbb{E}\, U(r_j) \leq \mathbb{E}\, U(r_i) = \mathbb{P}\left(r_j \geq x\right) = 1 - F_i(x),$$

amiből az állítás adódik.

(b) $\Longrightarrow$ (c) Tekintsünk egy olyan $\{\Omega, \mathcal{F}', \mathbb{P}'\}$ valószínűségi mezőt, melyen létezik egy ξ valószínűségi változó, amely a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású. Ekkor legyen $r_i' := F_i^{-1}(\xi)$, $r_j' := F_j^{-1}(\xi)$, ahol F_i^{-1} illetve F_j^{-1} jelöli az F_i és F_j eloszlásfüggvények általánosított inverzét, vagy másképpen fogalmazva (alsó) kvantilis-függvényét. Tehát másképpen $r_i' = q_\xi(r_i)$, $r_i' = q_\xi(r_i)$, ahol $q_\alpha(r_i)$ illetve $q_\alpha(r_j)$ az r_i és r_j eloszlásának alsó α-kvantilise. A kvantilisekkel, az általánosított inverz eloszlásfüggvény fogalmával részletesen foglalkozunk a 6. Fejezetben. Ott igazoljuk azt is (6.2.3. Tétel), hogy $r_i \stackrel{\mathcal{D}}{=} r_i'$, $r_j \stackrel{\mathcal{D}}{=} r_j'$.

Ekkor nyilvánvaló, hogy $\forall x \in \mathbb{R}$ esetén $F_i^{-1}(x) \geq F_i^{-1}(x)$, ezért adódik az állítás.

(c) $\Longrightarrow$ (a) Legyen U egy növekvő függvény, ekkor

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}\, U(r_i) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}\, U(r_i') \geq \mathbb{E}_{\mathbb{P}'}\, U(r_j') = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}\, U(r_j).$$

$\square$

A fenti jellezési tételek alapján már világos, hogy miért terjedt el számos (ekvivalens) definíció az elsőrendű sztochasztikus dominanciára vonatkozóan. A következő alfejezetben tárgyalandó másodrendű esetben is hasonló megjegyzéssel élhetnénk, bár ott néhol nem ekvivalens definíciók is használatosak az irodalomban.

4.2. Másodrendű sztochasztikus dominancia

4.2.1. Definíció. *Legyen* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$ *egy értékpapírpiac és tegyük fel, hogy a döntéshozó* U *hasznosságfüggvénye folytonos. Legyen* $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$.

Azt mondjuk továbbá, hogy az i *indexű értékpapír* másodrendben sztochasztikusan dominálja *a* j *indexű értékpapírt, ha minden kockázatkerülő egyén (tehát azok, akiknek konkáv a hasznosságfüggvénye) az* i *indexű értékpapírt preferálja a* j *indexű értékpapírral szemben. Ezt pedig* $r_i \succcurlyeq_{SSD} r_j$ *vagy* $r_j \preccurlyeq_{SSD} r_i$ *fogja jelölni.*

Az elsőrendű sztochasztikus dominancia mintájára a másodrendű sztochasztikus dominancia is jellemezhető az értékpapírok hozameloszlásának néhány tulajdonságával. Ez lehetővé teszi a másodrendű sztochasztikus dominancia esetén is a reláció teljesülésének az egyszerű ellenőrzését adott értékpapírok esetén. Ezt ismertetjük az alábbi tételben.

4.2.2. Tétel. *Tegyük fel, hogy a 4.1.2. Tétel feltételei érvényben vannak és használjuk az ott megadott jelöléseket.*

Ekkor

$$r_i \succcurlyeq_{SSD} r_j \qquad \Longleftrightarrow \qquad \mathbb{E}\, r_i = \mathbb{E}\, r_j \quad \text{és} \quad S(x) \leq 0, \quad \forall x \geq -1,$$

ahol

$$S(x) = \int_{[-1,x]} \big(F_i(z) - F_j(z)\big)\, dz, \qquad x \geq -1.$$

Bizonyítás. Legyen $u \in \mathbb{R}$ ismét egy felső korlát a szóban forgó hozamokra, azaz olyan, hogy $\mathbb{P}(r_i < u) = \mathbb{P}(r_j < u) = 1$. Legyen továbbá U egy függvény $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$-ben. Ekkor világos, hogy $S(-1) = 0$ és

$$S(u) = \int_{[-1,u]} (F_i - F_j)(z)dz = -\int_{[-1,u]} zd(F_i - F_j)(z) = \mathbb{E}\, r_j - \mathbb{E}\, r_i.$$

A (4.1) formulát és a parciális integrálás formuláját ismét használva (ld. A.1.2. Tétel, Függelék) azt kapjuk, hogy (a $G(z) = F_i(z) - F_j(z)$ jelöléssel, $z \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\, U(1+r_i) - \mathbb{E}\, U(1+r_j) &= \int_{[-1,u]} U(1+z)dG(z) = -\int_{[-1,u]} G(z)dU(1+z) \\ &= -\int_{[-1,u]} G(z)U'(1+z)dz = -\int_{[-1,u]} U'(1+z)dS(z) \\ &= -U'(1+u)S(u) + U'(0)S(-1) + \int_{[-1,u]} S(z)dU'(1+z) \\ &= U'(1+u)\big(\mathbb{E}\, r_i - \mathbb{E}\, r_j\big) + \int_{[-1,u]} S(z)dU'(1+z). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Szükségesség. Ha $r_i \succcurlyeq_{SSD} r_j$ akkor a (4.2) egyenlet bal oldala nemnegatív minden $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$-beli U konkáv hasznosságfüggvény esetén. A (4.2) egyenlet utolsó sorában levő integrál azonban eltűnik lineáris hasznosságfüggvények esetén. Speciálisan, $\mathbb{E}\, r_i - \mathbb{E}\, r_j \geq 0$ az $U(x) = x$ választása esetén és $\mathbb{E}\, r_i - \mathbb{E}\, r_j \leq 0$ az $U(x) = -x$ függvénnyel, amelyekből együtt már következik a szóbanforgó értékpapírok várható hozamának az egyenlősége.

Most pedig megmutatjuk, hogy az S függvény a $[-1, u]$ intervallumban nem lehet nullánál nagyobb. Ehhez tegyük fel indirekt módon, hogy létezik egy pont a $[-1, u]$ intervallumban, ahol S pozitív. Az S a definíciójából következően folytonos, ezért létezik egy olyan $[a, b] \subset [-1, u]$ intervallum, ami felett S pozitív. Most tekintsük az alábbi függvényt:

$$U(x) = \mathbb{1}_{(-\infty,a)}\, 2|a|x - \mathbb{1}_{[a,b]}\, x^2 - \mathbb{1}_{(b,\infty)}\, 2|b|x, \qquad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ez a függvény konkáv és $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$-beli, így azt kapjuk, hogy

$$\int_{[-1,u]} S(z)dU'(1+z) = \int_{[a,b]} S(z)dU'(1+z) < 0.$$

Ez pedig nyilván egy ellentmondás a (4.2) egyenlettel, így a szükségesség bizonyítása teljes.

Elégségesség. Ha $U \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ konkáv, akkor U' monoton csökkenő. Ezért egy ilyen hasznosságfüggvény esetén

$$\int_{[-1,u]} S(z)dU'(1+z) \geq 0,$$

végül a (4.2) egyenlettel együtt ebből már következik az állítás. □

Az előző részben láttuk, hogy a ,,többet a kevesebbel szemben preferáló" egyének csoportja egységes abban, hogy ha egy értékpapír elsőrendben sztochasztikusan dominál egy másikat, akkor ezen csoport minden tagja preferálja ezt a domináns értékpapírt a másikkal szemben.

Hasonló értelemben az előző tétel szerint egy újabb csoportját találtuk az egyéneknek (vagy másképpen hasznosságfüggvényeknek), akik szintén azonosak egy tulajdonságban, nevezetesen: ha egy értékpapír másodrendben sztochasztikusan dominál egy másik értékpapírt, akkor azt mondhatjuk, hogy minden kockázatkerülő egyén a domináns értékpapírt fogja preferálni.

Itt is megjegyezhetjük továbbá, hogy a $\succcurlyeq_{SSD}$ relációra is teljesül a reflexivitás és a tranzitivitás, ám erre sem igaz, hogy teljes lenne értékpapírok egy halmazán. Erre adunk is példát az alábbi megjegyzésben.

4.2.3. Megjegyzés. A 4.2.1. Definícióból és a 4.2.2. Tételből könnyen látható, hogy

$$\mathbb{E}\, r_i = \mathbb{E}\, r_j \qquad \text{és} \qquad \operatorname{var} r_i \geq \operatorname{var} r_j \tag{4.3}$$

szükségképpen teljesülnek, ha $r_i \preccurlyeq_{SSD} r_j$, ahol r_i és r_j egy értékpapírpiacon két értékpapírnak hozama. Ennek megmutatásához tekintsük az $U(x) = (x - \mu - 1)^2$ konkáv hasznosságfüggvényt ($x \in \mathbb{R}$), ahol $\mu = \mathbb{E}\; r_i = \mathbb{E}\; r_j$, amelyből azonnal adódik a szórások fenti egyenlőtlensége.

A (4.3) összefüggések világossá teszik azt, hogy miért szokták egyes szerzők a másodrendű sztochasztikus dominancia helyett azt mondani, hogy az egyik értékpapír (a dominált) kockázatosabb, mint a másik (a domináns).

Azonban a fenti (4.3)-beli kettő feltétel nem biztosít egyben elégséges feltételt is a másodrendű sztochasztikus dominanciához. Ennek megmutatásához tekintsünk egy olyan $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, 2\}$ értékpapírpiacot, ahol a két kockázatos értékpapír hozama az alábbi: legyen r_1 egyenletes eloszlású a $[-a, a]$ intervallumon valamely $a \in (0, 1)$ paraméterrel, míg legyen $r_2(\omega) \in \{-a, 0, a\}$ minden $\omega \in \Omega$ esetén úgy, hogy

$$\mathbb{P}(r_2 = -a) = \mathbb{P}(r_2 = a) = \varepsilon$$

és

$$\mathbb{P}(r_2 = 0) = 1 - 2\varepsilon, \qquad \text{ahol} \quad 0 < \varepsilon < \frac{1}{6}\ .$$

Könnyű ellenőrizni, hogy $\mathbb{E}\ r_1 = \mathbb{E}\ r_2 = 0$ és $Var\ r_1 > Var\ r_2$. Másrészt található egy olyan jobboldali környezete $-a$-nak (például $(-a, -a+2a\varepsilon)$), ahol az r_2 hozam F_2 eloszlásfüggvénye nagyobb, mint az r_1 hozam F_1 eloszlásfüggvénye. Ebből pedig azt kapjuk, hogy

$$S(y) = \int_{[-1,y]} F_2(x) - F_1(x) dx > 0,$$

ha y a fenti környezetben van. Innen a 4.2.2. Tétel segítségével pedig láthatjuk, hogy egy r_2 hozamú értékpapír nem dominálhat másodrenben sztochasztikusan egy értékpapírt, melynek hozama r_1. $\triangle$

4.2.4. Megjegyzés. Az elsődrendű sztochasztikus dominancia jellemzésére ismertettünk a 4.1.2. Tétel mellett egy általánosabb alakot a 4.1.3. Tételben. Ezen tétel szerint lehet olyan kópiáit venni az összehasonlított valószínűségi változóknak, hogy azok között egy valószínűséggel rendezés valósítható meg, azaz az egyik mindig legalább annyi lesz, mint a másik. Ezt szokás 'coupling' tételnek nevezni, melynek van alkalmas megfelelője másodrendű sztochasztikus dominancia esetén is. Ebben a könyvben ezzel nem foglalkozunk, az érdeklődő olvasónak ajánljuk Rolski, Schmidli, Schmidt és Teugels [46] könyvét (ld. 3.2. rész). $\triangle$

4.3. Kereslet versus sztochasztikus dominancia

Tekintsünk most két kockázatos értékpapírt és tegyük fel, hogy az első sztochasztikusan dominálja a másodikat. Ha ez a sztochasztikus dominancia elsőrendű, akkor minden olyan egyén, aki a többet a kevesebbel szemben preferálja bármely pénzmennyiség esetén az első értékpapírba fektetné a pénzt és nem a másodikba, persze ha ezen két befektetés időpontja megegyezne (nevezetesen a 3.3 alfejezetben megjelölt 0 időpont lenne). Ezzel szemben az értékpapírok másodrendű sztochasztikus dominanciája esetén pedig a kockázakerülő emberek fogják a pénzüket inkább az első, domináns papírba fektetni (a 0 időpontban).

Ebből esetleg arra gondolhatnánk, hogy különböző értékpapírok kereslete között is tudnánk valamilyen összefüggést találni akkor, ha az egyik értékpapír sztochasztikusan domináns a másikkal szemben. Például gondolhatnánk arra, hogy a domináns értékpapír kereslete nagyobb, mint a másiké (bármely kezdeti tőke esetén).

Azonban ilyen összefüggést nem lehet találni általában. Az alábbiakban példákat adunk, amelyek megmutatják, hogy a fentiekben sugallt összefüggés nem teljesül egymást domináló értékpapírok kereslete között. Látni fogjuk, hogy értékpapírpiacokon, ahol a vizsgált (kockázatos) értékpapír mellett még legalább egy másik értékpapírral is kereskednek, a probléma és általában az egyes papírok keresletének alakulása igen bonyolult is lehet. Azonban egyes esetekben tudunk olyan elégséges feltételt mutatni, amely esetén a szóbanforgó összefüggés teljesül (ld. 4.3.2. Példa).

4.3.1. Példa. Tekintsünk most két értékpapírpiacot, mindkettőn legyen az egyik értékpapír ugyanaz a kockázatmentes kötvény, s mellette legyen adott mindkét piacon egy-egy kockázatos értékpapír, amit nevezzünk részvénynek. Legyen a közös kötvény kamata $r_0 > 0$. A piacok részvényeit nyilván véletlen hozamrátájukkal adjuk meg. Legyen ezen hozamráták jelölése r_1 és r_2 az első illetve a második piac részvénye esetén, amelyeket értelmezzünk a következőképpen:

$$\mathbb{P}(r_1 = a) = \mathbb{P}(r_1 = b_1) = \frac{1}{2}$$

és

$$\mathbb{P}(r_2 = a) = \mathbb{P}(r_2 = b_2) = \frac{1}{2}\,,$$

ahol a számolás könnyebbsége érdekében feltesszük, hogy

$$a - r_0 = -\frac{1}{10}, \qquad b_1 - r_0 = 1 \qquad \text{és} \qquad b_2 - r_0 = 1 - \varepsilon$$

valamely $0 < \varepsilon < 9/11$ választással. Ekkor a korábbi részekben leírtak alapján triviális, hogy az első részvény elsőrendben sztochasztikusan dominálja a második részvényt.

Legyen most X_0 az egyén kezdeti tőkéje és tekintsük ekkor az optimális portfólió választásának problémáját (ld. 3.3. alfejezet) mindkét piacon. Ekkor megadható egy olyan $\beta^* > 0$ és egy $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$-beli U hasznosságfüggvény úgy, hogy teljesülnek a következők:

$$U'\big(g(a)\big) = 10\, U'\big(g(b_1)\big) \quad \text{és} \quad U'\big(g(b_2)\big) = (10 - \varepsilon)\, U'\big(g(b_1)\big)$$

úgy, hogy $U'\big(g(b_1)\big) > 0$, ahol a g függvény definíciója:

$$g(x) = X_0(1 + r_0) + \beta^*\,(x - r_0)\,, \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}.$$

Vegyük észre, hogy $g(a) < g(b_2) < g(b_1)$ és ezért az eddig már U-ra tett feltételek mellett is meg lehet U-t úgy konstruálni, hogy az szigorúan konkáv és monoton növekvő legyen. Ezt fel is tesszük ettől kezdve az U függvényről. Továbbá még azt is feltehetjük, hogy a $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$ és a $\lim_{x\to-\infty} U'(x) = \infty$ feltételek egyike is teljesül.

Természetesen az volt a célunk a fenti konstrukcióban, hogy teljesüljenek a 3.3.5. Lemma és a 3.4.2. Tétel feltételei. (A fenti konstrukció a [6] példatárban részletesebben ki van fejtve.) Hiszen ekkor tudjuk, hogy létezik és egyértelmű az optimális portfólió mindkét piacon. Továbbá, ha az elsőrendű (3.16) feltételeket felírjuk, akkor azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\, U'\big(X_0(1 + r_0) + \beta^*(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0) = \frac{1}{2}\Big[U'\big(g(a)\big)(a - r_0) + U'\big(g(b_1)\big)(b_1 - r_0)\Big] = 0.$$

Ez pedig azt jelenti, hogy a $\pi^* = (X_0 - \beta^*, \beta^*)$ portfólió lesz az optimális választás az első piacon. Ezzel szemben a második piacon azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0) + \beta^*(r_2 - r_0)\big)(r_2 - r_0) = \frac{1}{2}\Big[U'\big(g(a)\big)(a - r_0) + U'\big(g(b_2)\big)(b_2 - r_0)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[U'\big(g(a)\big)(a - r_0) + (10 - \varepsilon)\, U'\big(g(b_1)\big)(b_1 - r_0 - \varepsilon)\Big] \\
&= \frac{1}{2}\Big[U'\big(g(a)\big)(a - r_0) + U'\big(g(b_1)\big)(b_1 - r_0)\Big] + \frac{1}{2}U'\big(g(b_1)\big)(9 + \varepsilon^2 - 11\varepsilon) \\
&> U'\big(g(b_1)\big)\frac{9 - 11\varepsilon}{2} > 0.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

A (4.4) levezetésből pedig az következik, hogy az

$$F(x) = \mathbb{E}\, U\big(X_0(1+r_0) + x(r_2 - r_0)\big), \qquad (x \in \mathbb{R})$$

függvény egy olyan β^{**} pontban veszi fel a maximumát, amely bagyobb β^*-nál (a 3.3.5. Lemma bizonyítása alapján ez látható). Így ezen a piacon az optimális portfólió $\pi^{**} = (X_0 - \beta^{**}, \beta^{**})$.

Megmutattuk tehát, hogy létezik olyan hasznosságfüggvény, hogy az ezzel rendelkező egyén a többet preferálja a kevesebbel szemben és kockázatkerülő is, de az egyén több pénzt kíván befektetni a második piacon kereskedve a második részvénybe, mint az első piacon kereskedve az első részvénybe (optimális portfóliója kialakításakor) annak ellenére, hogy az első részvény elsőrendben sztochasztikusan dominálja a második részvényt. (Idézzük itt fel, hogy ebben a helyzetben egyúttal az is igaz az előző részekben leírtak alaján, hogy az első és a második részvénybe való ugyanakkora értékű befektetés esetén már az első részvénybe való befektetést preferálná az egyén, bármely pénzösszegről is legyen szó, hiszen a hasznosságfüggvénye monoton növekvő.) △

4.3.2. Megjegyzés. Tegyük fel ismét, hogy adott két értékpapírpiac, mindegyiken ugyanazon kockázatmentes kötvénnyel és e mellett egy-egy kockázatos részvénnyel. Legyen a kötvény hozamának a jelölése ismét $r_0 > 0$, és legyen a 4.3.1. Példában használt jelölésnek megfelelően az egyes piacokon a részvények hozamrátájának a jelölése r_1 illetve r_2. Tegyük fel, hogy $\mathbb{E}\, r_1 > r_0$ és $\mathbb{E}\, r_2 > r_0$.

Azt fogjuk most feltételezni, hogy az első részvény másodrendben sztochasztikusan dominálja a második részvényt, amit más szavakkal korábban úgy is kifejeztünk, hogy a második részvény kockázatosabb az elsőnél.

Most tekintsük ezen a két piacon az optimális portfólió választásának a problémáját egy olyan $U \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ hasznosságfüggvénnyel rendelkező egyén esetén, aki szigorúan kockázatkerülő és akinek a rendelkezésre álló tőkéje X_0. Továbbá azt is feltételezzük természetesen, hogy U alakja megfelelő ahhoz, hogy az optimális portfólió létezése és egyértelműsége a két piacon biztosított legyen. (Az ehhez szükséges feltételeket tartalmazza a 3.4.2. Tétel.)

Ha $(X_0 - \beta^*, \beta^*)$ az optimális portfólió az első piacon (ekkor tudjuk, hogy β^* szükségképpen pozitív), akkor a (3.16) elsőrendű feltételek alapján azt kapjuk, hogy

$$\mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0) + \beta^*(r_1 - r_0)\big)(r_1 - r_0) = 0.$$

Tekintsük ekkor az alábbi függvényt:

$$f(x) = U'\big(X_0(1+r_0) + \beta^*(x - r_0)\big)(x - r_0), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

A 4.2.2. Tétel alapján a következő állítást fogalmazhatjuk meg a részvények keresletével kapcsolatban.

Ha az f függvény –amelyről érdemes hangsúlyozni, hogy az egyén preferenciái határozzák meg– konkáv a valós számegyenes felett, akkor az első részvénynek a másik részvénnyel szembeni másodrendű sztochasztikus dominanciájából következik, hogy az egyén a portfóliója optimalizálásakor több pénzt fog fektetni a kevésbé kockázatos részvénybe (azaz az első részvénybe), mint a kockázatosabb részvénybe (a másodikba).

Tehát meghatároztunk valóban egy olyan elégséges feltételt, amely mellett részvények sztochasztikus dominanciája és a keresletük alakulása között kapcsolatot találhatunk, s amiről már ezen rész elején említést tettünk. Ám jegyezzük meg, hogy a fenti módon értelmezett f függvény a hasznosságfüggvények jelentős részénél nem konkáv, így akkor a megállapításunk sem alkalmazható. $\triangle$

4.3.3. Példa. A fenti példában megvizsgáltuk, hogy milyen feltételek szükségesek ahhoz, hogy egy egyén több pénzt fektessen a kevésbé kockázatos értékpapírba, mint a kockázatosabba. Azt is leírtuk, hogy az ott talált szükséges feltételek nem teljesülnek több hasznosságfüggvény esetén. Ebben a példában mutatunk egy olyan hasznosságfüggvényt, amely esetén nem teljesül a kereslet és a dominancia megfogalmazott kapcsolata.

Ehhez a 4.3.2. Megjegyzésben megadott piacokat tekintjük az ottani jelölésekkel. Megadunk egy hasznosságfüggvényt, illetve megadjuk a részvények hozamának is az eloszlását.

Tehát tegyük fel, hogy

$$\mathbb{P}(r_1 = a_0) = \mathbb{P}(r_1 = b) = \frac{1}{2},$$

ahol $a_0 = -0.5 + r_0$ és $b = 1 + r_0$. A másik részvény esetén pedig legyen

$$\mathbb{P}(r_2 = a_1) = \mathbb{P}(r_2 = a_2) = \frac{1}{4} \qquad \text{és} \qquad \mathbb{P}(r_2 = b) = \frac{1}{2},$$

ahol $a_1 = -0.6 + r_0$ és $a_2 = -0.4 + r_0$.

Megmutatjuk ekkor, hogy az első részvény sztochasztikusan dominálja a második részvényt. Ehhez vegyük észre, hogy

$$\mathbb{E}\, r_1 = r_0 + \frac{1}{4} = \mathbb{E}\, r_2, \tag{4.5}$$

és azt, hogy

$$sgn\big(S(x)\big) = sgn\left(\int_{[-1,1+r_0]} F_1(x) - F_2(x)dx\right) = \mathbb{1}_{(a_1+r_0,a_2+r_0)}. \tag{4.6}$$

Ekkor a (4.5) és (4.6) összefüggésekből a 4.2.2. Tétel alapján következik, hogy $r_1 \succcurlyeq_{SSD} r_2$.

Egy $X_0 > 0$ mennyiségű kezdeti tőke esetén tekintsük ismét a 4.3.1. Példában definiált g függvényt. Ekkor egy $\beta^* > 0$ és egy U hasznosságfüggvény megválaszthatóak úgy, hogy azokra teljesülnek az alábbiak:

$$0 < U'\big(g(a_0)\big) = 2U'\big(g(b)\big)$$

és

$$U'\big(g(a_1)\big) = U'\big(g(a_0)\big) + \varepsilon, \qquad U'\big(g(a_2)\big) = U'\big(g(b)\big) + \varepsilon,$$

ahol $0 < \varepsilon < U'\big(g(a_0)\big)/5$, továbbá U monoton növekvő és a $\lim_{x\to\infty} U'(x) = 0$ vagy a $\lim_{x\to-\infty} U'(x) = \infty$ feltételek egyikét is teljesíti. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0)+\beta^*(r_1-r_0)\big)(r_1-r_0) \\ &\qquad = \frac{1}{2}\, U'\big(g(a_0)\big)(a_0-r_0) + \frac{1}{2}\, U'\big(g(b)\big)(b-r_0) = 0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

és

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}\, U'\big(X_0(1+r_0)+\beta^*(r_2-r_0)\big)(r_2-r_0) \\ &= \frac{1}{4}\, U'\big(g(a_1)\big)(a_1-r_0) + \frac{1}{4}\, U'\big(g(a_2)\big)(a_2-r_0) + \frac{1}{2}\, U'\big(g(b)\big)(b-r_0) \\ &= \frac{1}{4}\, \Big(U'\big(g(a_0)\big)+\varepsilon\Big)(-0.6) + \frac{1}{4}\, \left(\frac{1}{2}\, U'\big(g(a_0)\big)+\varepsilon\right)(-0.4) + \frac{1}{2}\, U'\big(g(b)\big)(b-r_0) \\ &= \frac{U'\big(g(a_0)\big)}{20} + \frac{\varepsilon}{4} > 0. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Az 4.3.1 Példában használt gondolatmenet analógiájára azt kapjuk a (4.7) és (4.8) egyenletekből, hogy ebben az esetben $\beta^* < \beta^{**}$, ahol $(X_0-\beta^*, \beta^*)$ és $(X_0-\beta^{**}, \beta^{**})$ jelöli az első illetve a második piacon az optimális portfóliót.

Megmutattuk tehát, hogy egy kockázatkerülő egyén, aki a többet preferálja a kevesebbel szemben, akár több pénzt is befektethet a kockázatosabb részvénybe (másodrendű sztochasztikus dominancia értelmében értve a kockázatosabb szót), mint a kevésbé kockázatos részvénybe. $\triangle$

A 4.3.1. és 4.3.3. Példákban két értékpapírpiacot tekintettünk. Mindkettő piacon egy kockázatmentes kötvény és egy kockázatos részvény volt vásárolható, továbbá a kötvény a piacokon azonos volt. Ekkor a két részvényt összevetettük, s megállapítottuk, hogy sztochasztikus dominancia jellemző a viszonyukra. Ennek ellenére azt tapasztaltuk, hogy egyes döntéshozók a sztochasztikus dominancia szerinti kockázatosabb értékpapírt preferálnák még akkor is, ha kockázatkerülő és a többet a kevesebbel szemben preferáló egyének közé tartoznak.

Ezt a megfigyelést különbözőképpen magyarázhatjuk. Egyrészt elképzelhetjük ezt a szituációt úgy, hogy valóban egyidejűleg adott két különböző piac a példákban leírt tulajdonságokkal, és az egyén mindkét piacon kialakít egy-egy optimális portfóliót. De ez az eset nem túl realisztikus valójában. Másrészt azonban úgy is elképzelhetjük a két piacot, hogy azok ugyanazon valós piac két különböző időpontra vonatkozó állapotait jelölik. Legyen mondjuk ez a két időpont t_1 és t_2, ahol $t_1 < t_2$. Ekkor a két piacon a portfólió optimalizálását úgy interpretálhatjuk, hogy az egyén a t_1 időpontban kialakította az optimális portfólióját, majd ezután a részvény kockázatosabb lett (például valamilyen további információhoz jutott az egyén és ezért megváltoztatta a hozam eloszlásáról alkotott elképzelését) és ezen változásoknak megfelelően átstrukturálta a portfólióját a t_2 időpontban. A korábbi megfigyeléseink alapján ekkor azt mondhatjuk, hogy a részvény kockázatosabbá válása ellenére sem lehetünk abban biztosak, hogy az egyén eladott valamennyi részvényt és cserébe a biztonságosabb kötvényből vett volna. Sőt, a példák mutatták, hogy akár még növelheti is az optimális portfólióban a részvény relatív arányát.

Végül azt is fontos megjegyezni, hogy a példában használt két piac modellje nem azonos azzal az esettel, amikor adott egy olyan értékpapírpiac, amely a korábbi két piac három értékpapírját tartalmazza, azaz a piacon a közös kötvény és bármelyik korábbi részvény megvásárolható. Ekkor egyetlen optimális portfólió lenne, amiről azonban már nem állíthatnánk még a 4.3.1. és 4.3.3. Példákban választott hasznosságfüggvény esetén sem, hogy az egyén az optimális portfólióban többet fektetne a kockázatosabb értékpapírba.

5. fejezet

Mean-variance portfólió analízis

A korábbiakban a portfóliókat várható hasznosság értelmében optimalizáltuk. Ebben a fejezetben egy másik megközelítést alkalmazunk, amelyet mean-variance portfólió analízisnek szokás nevezni a szakirodalomban. Ennek az az oka, hogy a portfólióknak, illetve azok hozamának első két momentumát vizsgáljuk: a várható értékét, azaz a várható (elvárt) hozamot, és a varianciáját vagy szórását, azaz a portfólió kockázatosságának egyfajta mértékét. Természetes, hogy a minél nagyobb várható hozam, illetve a minél kisebb szórást tartjuk kedvezőbbnek. Ebben az esetben nem fogunk hasznosságfüggvényt használni közvetlenül a szélsőérték feladat megfogalmazásánál. Azonban ez nem jelenti azt, hogy a leírtaknak nincs kapcsolódása a hasznosságalapú megközelítéshez. Ezen utóbbi gondolatra a későbbiekben röviden visszatérünk.

5.1. Jelölések és az alapfeladat

Ebben a fejezetben mindvégig egy, a 3.3.1. Definícióban megadott $n+1$ értékpapírt tartalmazó $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n)$ piacot vizsgálunk.

Az $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ kockázatos értékpapírok hozamvektorára vonatkozóan két feltételezést teszünk. Legyen

$$e_i := \mathbb{E}r_i, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$\mathbf{e} := (e_1, e_2, \ldots, e_n)^\top.$$

Feltesszük, hogy az összes részvény elvárt hozama nem egyezik meg, azaz $\mathbf{e} \neq x\mathbf{1}$, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$. Másrészt feltesszük, hogy a hozamvektor V kovariancia-mátrixa ($V := (v_{i,j})_{n\times n}$, $v_{i,j} = \mathrm{cov}(r_i, r_j)$) létezik és pozitív definit. Ezek a feltételezések nem erős megszorítások. Az első momentumra vonatkozó feltétel nélkül csak egyetlen várható hozam kombinálható ki az értékpapírokból tetszőleges portfólióval, így a hamarosan ismertetendő az (5.3) feladat is csak egy $y \in \mathbb{R}$ esetén lenne érdekes. A szórásokra vonatkozó feltétel pedig biztosított, ha az $r_1 - e_1, r_2 - e_2, \ldots, r_n - e_n$ valószínűségi változók lineárisan függetlenek, azaz belőlük egy valószínűséggel az azonosan nulla változó nem kombinálható ki lineárisan. Hiszen ekkor nulla varianciájú nem triviális kombináció nem lenne, s mivel a kombinációk varianciáját a V által meghatározott kvadratikus forma adja, így az pozitív definit ekkor. Jegyezzük meg, hogy ekkor létezik V^{-1} és az is pozitív definit. Azt is megjegyezzük, hogy a 3.3.1. Definícióban a hozamok -1-nél nagyobbak, amely egy ésszerű feltevés, de látni fogjuk, hogy valójában ezt nem használjuk ebben a fejezetben.

A kockázatos értékpapírokat az egyszerűség kedvéért részvényeknek (is) fogjuk nevezni, a kockázatmentest pedig kötvénynek (is) ebben a fejezetben.

A fentiekben megadott piacon az alábbi jelöléseket vezetjük be. Egy $\pi \in \mathbb{R}^n$ vektort portfóliónak nevezzük, s ebben a fejezetben kényelmi okokból oszlopvektornak fogunk tekinteni minden portfóliót, azaz $\pi = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^\top$, ahol $\top$ transzponáltat jelöl. Ekkor β_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jelöli az i-edik értékpapírba fektetett pénzmennyiséget. Legyen $X_0 \in \mathbb{R}$ és

$$C^*_{X_0} = \left\{ \pi \;\middle|\; \pi = (\beta_1, \ldots, \beta_n)^\top \in \mathbb{R}^n, \quad \sum_{i=1}^n \beta_i = X_0 \right\},$$

azaz $C^*_{X_0}$ az összes olyan portfólió halmaza, amelyet az X_0 kezdőtőkéből meg lehet valósítani úgy, hogy a kockázatmentes értékpapírból nem vásárolunk. A többi értékpapír esetén nincs korlátozás a kereskedésre, így például negatív mennyiség is megengedett, amelyet részvények esetén short sellingnek felel meg. A 3.3.2. Jelölésben bevezetett C_{X_0} halmaz az összes olyan portfólió halmaza volt, amelyet az X_0 kezdőtőkéből meg lehet valósítani. Itt sincs korlátozás az értékpapírok kereskedésére, short selling itt is lehetséges, mint ahogy kötvénykölcsön is, azaz negatív mennyiség a kockázatmentes értékpapírból. A C_{X_0} jelölést továbbra is fenntartjuk, de jegyezzük meg, hogy az esetünkben egy portfólió nem $(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ alakban, azaz $\mathbb{R}^{n+1}$-beli vektorként van ábrázolva, hanem csak $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$-t jelöljük, hiszen minden $\pi \in \mathbb{R}^n$ vektor esetén létezik olyan $\beta_0 \in \mathbb{R}$, hogy $\sum_{i=0}^n \beta_i = X_0$. Így most $C_{X_0} = \mathbb{R}^n$, korábban C_{X_0} egy $\mathbb{R}^{n+1}$-beli hipersík volt.

Legyen $\pi \in C^*_{X_0}$ portfólió és legyen $\pi' = (\beta'_1, \beta'_2, \ldots, \beta'_n) \in C^*_1$ az a portfólió, amelyre $X_0\pi' = \pi$, azaz $\beta'_i = \beta_i / X_0$. Ekkor tehát π'-ben a részvényekbe fektetett pénz aránya megegyezik a π-ben a megfelelő arányokkal, de π' esetén a kezdőtőke 1, így itt β'_i, az i-edik részvénybe fektetett összeg, egyben megegyezik az i-edik részvénybe fektetett relatív összeggel, azaz tőkénk részvénybe fektetett (%-os) arányával. Ekkor π lejáratkori értékére azt kapjuk, hogy

$$X_T^\pi = \sum_{i=1}^n \beta_i(1 + r_i) = X_0 \sum_{i=1}^n \beta'_i(1 + r_i),$$

a portfólió hozama

$$r_\pi := X_T^\pi - X_0 = \sum_{i=1}^n \beta_i r_i = X_0 \sum_{i=1}^n \beta'_i r_i.$$

Ennélfogva a portfólió (jövőbeli értékének) várható értéke

$$\mathbb{E}X_T^\pi = \sum_{i=1}^n \beta_i(1 + e_i) = X_0 \sum_{i=1}^n \beta'_i(1 + e_i) = X_0 \left(1 + \mathbf{e}^\top \pi'\right),$$

azaz várható hozama $X_0 \mathbf{e}^\top \pi'$, várható hozamrátája $\mathbf{e}^\top \pi'$.

Ha $\pi \in C_{X_0}$, és $X_0\pi' = \pi$ továbbra is, akkor π lejáratkori értéke

$$\begin{aligned} X_T^\pi = \sum_{i=0}^n \beta_i(1 + r_i) &= \left(X_0 - \sum_{i=1}^n \beta_i\right)(1 + r_0) + \sum_{i=1}^n \beta_i(1 + e_i) \\ &= X_0 \left[\left(1 - \sum_{i=1}^n \beta'_i\right)(1 + r_0) + \sum_{i=1}^n \beta'_i(1 + e_i)\right], \end{aligned}$$

a portfólió hozama

$$r_\pi := X_T^\pi - X_0 = \sum_{i=0}^n \beta_i r_i = X_0 \sum_{i=1}^n \beta_i' r_i = X_0 \left[\left(1 - \sum_{i=1}^n \beta_i'\right) r_0 + \sum_{i=1}^n \beta_i' e_i\right].$$

Így a portfólió várható értéke

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_T^\pi &= X_0 \left[\left(1 - \sum_{i=1}^n \beta_i'\right)(1+r_0) + \sum_{i=1}^n \beta_i'(1+e_i)\right] \\ &= X_0 \left[\left(1 - \pi'^\top \mathbf{1}\right)(1+r_0) + \left(1 + \mathbf{e}^\top \pi'\right)\right],\end{aligned}$$

azaz várható hozama $X_0 \left[\left(1 - \pi'^\top \mathbf{1}\right) r_0 + \mathbf{e}^\top \pi'\right]$, várható hozamrátája pedig $\left(1 - \pi'^\top \mathbf{1}\right) r_0 + \mathbf{e}^\top \pi'$.

Mindkét fenti esetben, azaz akár $\pi \in C_{X_0}^*$, akár $\pi \in C_{X_0}$ esetében a π portfólió jövőbeli értékének szórásnégyzete (varianciája)

$$\begin{aligned}\mathrm{var} X_T^\pi &= \mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i(1+r_i)\right) = X_0^2 \,\mathrm{var}\left(\sum_{i=1}^n \beta_i'(1+r_i)\right) \\ &= X_0^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i'\beta_j' \,\mathrm{cov}(r_i, r_j) = X_0^2 \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \beta_i'\beta_j' v_{i,j} = \pi^\top V \pi.\end{aligned}$$

A bevezetőben említett célok alapján ebben a fejezetben a következő problémát vizsgáljuk: ha rögzítjük a portfóliónkkal szemben támasztott elvárt hozamot, akkor melyik az a portfólió, amely ezt a legkisebb szórás (kockázat) mellett biztosítja. Ennek alapján tehát a vizsgálandó szélsőérték feladatok az alábbi módon adhatóak meg. Keressük azt a π^{opt} portfóliót egy $z \in \mathbb{R}$ elvárt hozam esetén, melyre

$$\mathrm{var} X_T^{\pi^{opt}} = \min_{\pi \in C_{X_0}^*,\, \mathbb{E}X_T^\pi = z} \mathrm{var} X_T^\pi, \tag{5.1}$$

illetve

$$\mathrm{var} X_T^{\pi^{opt}} = \min_{\pi \in C_{X_0},\, \mathbb{E}X_T^\pi = z} \mathrm{var} X_T^\pi. \tag{5.2}$$

Tehát az (5.1) feladatban csak a részvényekbe fektetve keressük a legkisebb kockázatú portfóliót adott hozam mellett, míg az (5.2) feladatban pedig megengedett a kockázatmentes értékpapírba való befektetés is. Itt fontos hangsúlyozni, hogy a fentiekben a portfólió kockázatát —másképpen a benne rejlő bizonytalanságot— szórásban (szórásnégyzetben) mérjük. Ez nem az egyetlen mód a kockázat mérésére, sőt, a következő fejezetben látni fogjuk, hogy más célokra más mérőszámok alkalmasabbak. Jegyezzük meg továbbá, hogy akár $\pi \in C_{X_0}$, akár $\pi \in C^*_{X_0}$ esetén $\mathrm{var} X_T^\pi = \mathrm{var}\ r_\pi$, így a portfólió értéke szórásának a minimalizálása helyett mondhatnánk, hogy a portfólió hozamának a szórását minimalizáljuk a fenti feladatokban. A fenti feladatok természetesen egy más értelemben vett optimumot adnak, mint a korábbi fejezetekben tárgyalt várható hasznosság értelmében vett optimumok.

Vegyük észre, hogy a fentiekben a portfólió jövőbeli értékére megadott várható érték és variancia esetén a kezdőtőke egyaránt kiemelhető ezen két momentumból, így a fenti feladatokat elég egységnyi kezdőtőke (X_0) esetén megoldanunk. Az optimális megoldás ugyanis tetszőleges kezdőtőke esetén az egységnyi kezdőtőkénél kapott optimális portfólió konstansszorosa lesz. Másképpen megfogalmazva, az egységnyi kezdőtőke esetén megkapjuk az optimális portfólióban a részvények részarányát (β_i'). Ennélfogva a fenti (5.1) és (5.2) feladatok helyett az alábbi két feladattal foglalkozunk az elkövetkezőek során. Keressük azt a π^{opt} portfóliót egy $y \in \mathbb{R}$ elvárt hozamráta esetén, melyre

$$\frac{1}{2}\,\pi^{opt\top} V \pi^{opt} = \min_{\pi^\top \mathbf{1} = 1,\ \mathbf{e}^\top \pi = y} \frac{1}{2}\,\pi^\top V \pi, \tag{5.3}$$

illetve

$$\frac{1}{2}\,\pi^{opt\top} V \pi^{opt} = \min_{\pi \in \mathbb{R},\ (1-\pi'^\top \mathbf{1}) r_0 + \mathbf{e}^\top \pi = y} \frac{1}{2}\,\pi^\top V \pi, \tag{5.4}$$

ahol a feladatokba az 1/2 szorzóként pusztán kényelmi szempontok miatt került, az az optimum helyét nem változtatja.

További kényelmi szempontok miatt a portfóliók hozamának első két momentumára is bevezetünk egyszerűsítő jelöléseket:

$$e_\pi := \mathbb{E} X_T^\pi - X_0$$

$$\sigma_\pi := \sqrt{\mathrm{var}\,(X_T^\pi - X_0)} = \sqrt{\mathrm{var} X_T^\pi}.$$

Ebben a fejezetben optimális portfólió alatt mindig a fenti feladatok megoldásait értjük, azaz az optimális minimális szórást jelent valamely elvárt hozam mellett.

5.2. Hatékony portfóliók görbéje

Ebben a részben az (5.3) feladat megoldásával foglalkozunk.

5.2.1. Tétel. *Legyen* $A := \mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{e}$, $B := \mathbf{e}^\top V^{-1}\mathbf{e}$, $C := \mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{1}$, *továbbá* $D := BC - A^2$. *Ekkor az (5.3) feladatnak a* $\pi \in C_1^*$ *portfólió valamely* $y = \mathbb{E}r_\pi$ *várható hozamhoz tartozó megoldása akkor és csak akkor, ha felírható* $\pi = g + yh$ *alakban, ahol a* $g, h \in \mathbb{R}^n$ *az alábbi alakúak:*

$$g := \frac{BV^{-1}\mathbf{1} - AV^{-1}\mathbf{e}}{D} \qquad h := \frac{CV^{-1}\mathbf{e} - AV^{-1}\mathbf{1}}{D}.$$

Bizonyítás. Az (5.3) szélsőérték feladatot a Lagrange féle multiplikátor módszerrel oldjuk meg. A Lagrange függvény ekkor $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^\top V\pi + \lambda\left(y - \mathbf{e}^\top\pi\right) + \gamma\left(1 - \pi^\top\mathbf{1}\right)$. Innen kapjuk a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\beta_j - \lambda e_i - \gamma = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y = \mathbf{e}^\top\pi$$

egyenletrendszert, vagy másképpen felírva

$$V\pi - \lambda\mathbf{e} - \gamma\mathbf{1} = 0 \quad \text{és} \quad y = \mathbf{e}^\top\pi. \tag{5.5}$$

Az első egyenletből π kifejezhető, és azt kapjuk, hogy $\pi = V^{-1}(\lambda\mathbf{e} + \gamma\mathbf{1})$, így ezt az (5.5) egyenletekbe visszahelyettesítve adódik, hogy

$$\lambda\mathbf{e}^\top V^{-1}\mathbf{1} + \gamma\mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{1} = 1$$

$$\lambda\mathbf{e}^\top V^{-1}\mathbf{e} + \gamma\mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{e} = 1,$$

azaz a tételben bevezetett jelölések mellett

$$\lambda A + \gamma C = 1 \quad \text{és} \quad \lambda B + \gamma A = 1.$$

Ennek az egyenletrendszernek pedig

$$\lambda = \frac{\begin{vmatrix} y & A \\ 1 & C \end{vmatrix}}{D} = \frac{Cy - A}{D} \quad \text{és} \quad \gamma = \frac{\begin{vmatrix} B & y \\ A & 1 \end{vmatrix}}{D} = \frac{B - Ay}{D}.$$

a megoldása.

Vegyük észre, hogy B, C és D pozitív, amely abból adódik, hogy V^{-1} pozitív definit. Valóban, $B = \mathbf{e}^\top V^{-1}\mathbf{e} > 0$ és $C = \mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{1} > 0$, hiszen $\mathbf{e}$ és $\mathbf{1}$ nem nullvektorok. Míg D esetén tudjuk, hogy $\mathbf{e} \neq x\mathbf{1}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ezért

$$0 < (\mathbf{e} - x\mathbf{1})^\top V^{-1} (\mathbf{e} - x\mathbf{1}) = \mathbf{e}^\top V^{-1}\mathbf{e} - 2x\mathbf{e}^\top V^{-1}\mathbf{1} + x^2\mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{1} = B - 2Ax + Cx^2.$$

A $B-2Ax+Cx^2$ parabola diszkriminánsa, amely esetünkben $-4D$, negatív kell, hogy legyen, így $D > 0$.

Továbbá vegyük észre, hogy a fenti megoldás megoldása az (5.3) feladatnak, azaz minimumot kaptunk, hiszen V pozitív definitségéből adódóan az $x \mapsto xVx$, $x \in \mathbb{R}^n$, függvény szigorúan konvex.

Ezzel beláttuk, hogy ha π egy optimális portfólió, méghozzá az y várható hozamhoz tartozó, akkor az teljesíti a $\pi = g + yh$ egyenletet. Fordítva, ha π teljesíti a $\pi = g + yh$ egyenletet, akkor a fentiekből adódóan π szükségképpen az y várható hozamhoz tartozó megoldása az (5.3) feladatnak. □

5.2.2. Definíció. *A*

$$PF := \{\pi \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ úgy, hogy } \pi \text{ megoldása az (5.3) feladatnak és } e_\pi = y\}$$

halmazt, amely tehát (5.3) megoldásainak halmaza, portfólió határnak (portfolio frontier) nevezzük.

5.2.3. Következmény. *Ha $\pi_j \in PF$ és $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, akkor $\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j \pi_j \in PF$ és $e_\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$.*

Bizonyítás. Léteznek olyan $y_j \in \mathbb{R}$ elvárt hozamok, hogy $e_{\pi_j} = y_j$, ezért

$$\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j (g + hy_j) = g \sum_{j=1}^m \alpha_j + h \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j = g + h \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j.$$

Azaz π is előáll $\pi = g + yh$ alakban, ahol $e_\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j$. □

Tehát megoldások affin lineáris kombinációja is megoldás, méghozzá úgy, hogy a megoldások elvárt hozamainak affin lineáris kombinációja adja a kombináció elvárt hozamát. A következő tétel a mean-variance analízis egyik alaperedményét adja.

5.2.4. Tétel. *Ha $\pi_1, \pi_2 \in PF$, akkor*

$$\operatorname{cov}(r_{\pi_1}, r_{\pi_2}) = \frac{C}{D}\left(e_{\pi_1} - \frac{A}{C}\right)\left(e_{\pi_2} - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C}.$$

Speciálisan

$$\sigma_\pi^2 = \frac{C}{D}\left(e_\pi - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C}, \tag{5.6}$$

ha $\pi \in PF$.

Bizonyítás. Felidézve a g és h vektorok alakját azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}(r_{\pi_1}, r_{\pi_2}) &= \pi_1^\top V \pi_2 = (g + he_{\pi_1})^\top V (g + he_{\pi_2}) \\
&= (g + he_{\pi_1})^\top \left(\frac{B\mathbf{1} - A\mathbf{e}}{D} + e_{\pi_2}\frac{C\mathbf{e} - A\mathbf{1}}{D}\right) \\
&= \left(\frac{BV^{-1}\mathbf{1} - AV^{-1}\mathbf{e}}{D} + e_{\pi_1}\frac{CV^{-1}\mathbf{e} - AV^{-1}\mathbf{1}}{D}\right)^\top \left(\frac{B\mathbf{1} - A\mathbf{e}}{D} + e_{\pi_2}\frac{C\mathbf{e} - A\mathbf{1}}{D}\right) \\
&= ae_{\pi_1}e_{\pi_2} + be_{\pi_1} + ce_{\pi_2} + d
\end{aligned}$$

alkalmas $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ konstansok mellett. Határozzuk most meg ezen konstasok értékét, melyek egyszerű számolással adódnak.

$$\begin{aligned} a &= \frac{C^2\mathbf{e}^\top V^{-1}\mathbf{e} - AC\mathbf{e}^\top V^{-1}\mathbf{1} - AC\mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{e} + A^2\mathbf{1}^\top V^{-1}\mathbf{1}}{D^2} \\ &= \frac{C^2B - A^2C - A^2C + A^2C}{D^2} = \frac{C\left(BC - A^2\right)}{D^2} = \frac{C}{D}. \end{aligned}$$

Hasonlóan kapjuk, hogy

$$b = \frac{BCA - CBA - ABC + A^3}{D^2} = \frac{A\left(A^2 - BC\right)}{D^2} = \frac{-A}{D},$$

továbbá c esetén ugyanaz a levezetés, mint b esetén, így $c = b$, végül

$$d = \frac{B^2C - A^2B - A^2B + A^2B}{D^2} = \frac{B\left(BC - A^2\right)}{D^2} = \frac{B}{D}.$$

Innen pedig

$$\begin{aligned} \operatorname{cov}\left(r_{\pi_1}, r_{\pi_2}\right) &= \frac{C}{D}e_{\pi_1}e_{\pi_2} - \frac{A}{D}e_{\pi_1} - \frac{A}{D}e_{\pi_2} + \frac{A^2}{CD} + \frac{1}{D} \\ &= \frac{C}{D}\left(e_{\pi_1} - \frac{A}{C}\right)\left(e_{\pi_2} - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C}, \end{aligned}$$

ahol felhasználtuk, hogy

$$\frac{A^2}{CD} + \frac{1}{D} = \frac{A^2 + D}{CD} = \frac{BC}{CD} = \frac{B}{D}.$$

□

5.2.5. Megjegyzés. Minden $\pi \in C_1 = \mathbb{R}^n$ portfólió esetén tekintsük az első két momentumot jellemző $(\sigma_\pi^2, e_\pi) \in \mathbb{R}^2$ pontot a síkon. Másképpen fogalmazva legyen az x tengelyen a portfóliók kockázata —szórásnégyzete—, míg az y tengelyen az elvárt hozama ábrázolva. Ekkor az 5.2.4. Tételből az adódik, hogy az (5.3) feladat megoldásainak, azaz a PF halmaz elemeinek megfeleltetett (szórásnégyzet, várható érték) pontok a síkon egy parabola mentén helyezkednek el. Ezért szokták a PF halmazt portfólió határnak említeni, hiszen ezen görbétől jobbra helyezkednek az (5.3) feladat értelmében nem optimális portfólióknak megfelelő pontok, míg balra nincs olyan pont, amihez tartozna portfólió. Tehát a lehetséges portfóliókhoz tartozó pontok halmazának a határát adja a szóban forgó parabola, s az egyben az optimális portfóliók halmaza. Ennek a parabolának a csúcsa, azaz az ún. minimális varianciájú (vagy szórású) optimális portfóliónak megfelelő pont, ez a $(1/C, A/C)$ pont, s a portfólió pedig $\pi_0 = g + hA/C$. Jegyezzük meg, hogy minden $y \in \mathbb{R}$ (várható hozam) esetén van megoldása az (5.3) feladatnak, azaz a teljes parabola adja a PF-nek megfelelő halmazt. Vegyük azt is észre, hogy a szóban forgó parabolának csak az egyik ága tartozik olyan optimális portfóliókhoz, melyekbe érdemes befektetnünk: ez pedig a parabola felső ága, azaz a legalább A/C várható hozamot ígérő optimális portfólióknak megfelelő ág. Hiszen, ha $e_\pi < A/C$, $\pi \in PF$ esetén van a parabolának egy másik pontja a felső ágon, ez éppen a parabola 'szemben levő' pontja, mely ugyanazon kockázat (szórás) mellett nagyobb várható hozamot ígér. Ez motiválja az alábbi definíciót.

Hangsúlyozzuk, hogy (5.6) esetén az y tengelyen a portfólió elvárt hozama van, amennyiben a portfólió elvárt értékét akarnánk az y tengelyen megjeleníteni, akkor értelemszerűen

$$\sigma_\pi^2 = \frac{C}{D}\left(\mathbb{E}X_T^\pi - 1 - \frac{A}{C}\right)^2 + \frac{1}{C},$$

lenne a görbe egyenlete. A szórás esetén nincs ilyen gondunk, hiszen a portfólió jövőbeli értékének és a hozamának megegyezik a szórása. Azt is megjegyezzük, hogy nem egységnyi alaptőkénél is megmutattuk a korábbiakban, hogy hogyan lehet az optimumot felírni, ha ismerjük egységnyi alaptőkére a feladat megoldását.

Végül megjegyezzük, hogy szokás a portfólióknak a fenti $(\sigma_\pi^2, e_\pi) \in \mathbb{R}^2$ (variancia, várható hozam) pontok helyett a $(\sigma_\pi, e_\pi) \in \mathbb{R}^2$ (szórás, várható hozam) pontokkal is megfeleltetni, és ezeket ábrázolni a koordináta rendszerben, amely egyszerűen a fentiekhez képest az x tengely áttranszformálását jelenti. A következő fejezetben élünk is ezzel a lehetőséggel, az (5.4) feladat megoldásait ábrázoljuk analóg módon az itteniekhez, s ott szerencsésebb lesz a (szórás, várható hozam) pontokat ábrázolni. Jegyezzük meg, hogy a PF-nek megfelelő pontok ebben az esetben egy hiperbolát adnak. $\triangle$

5.2.6. Definíció. *Az*

$$EPF := \left\{ \pi \in PF \mid e_\pi \geq \frac{A}{C} \right\}$$

halmazt hatékony portfóliók határának (efficient portfolio frontier) nevezzük.

5.2.7. Tétel. *Ha $\pi \in PF$ és π nem a minimális varianciájú optimális portfólió (azaz $\pi \neq g + hA/C$, másképpen $e_\pi \neq A/C$), akkor létezik egy olyan $\pi_{zc} \in PF$ portfólió, amellyel hozama korrelálatlan, azaz melyre* $\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi_{zc}}) = 0$. *Továbbá*

$$e_{\pi_{zc}} = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{e_\pi - A/C}. \tag{5.7}$$

Bizonyítás. Az 5.2.4. Tétel szerint olyan π_{zc} portfóliót keresünk, melyre

$$\frac{C}{D}\left(e_\pi - \frac{A}{C}\right)\left(e_{\pi_{zc}} - \frac{A}{C}\right) + \frac{1}{C} = 0.$$

Mivel $e_\pi \neq A/C$, hiszen π nem a minimális varianciájú optimális portfólió, így a fenti egyenletetből könnyen kifejezhető $e_{\pi_{zc}}$, melyre éppen (5.7) adódik. □

5.2.8. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy ha $e_\pi > A/C$ akkor $e_{\pi_{zc}} < A/C$, és ha $e_\pi < A/C$ akkor $e_{\pi_{zc}} > A/C$, azaz egy optimális portfólió és a 'zéró kovarianciájú megfelelője' (innen adódik a 'zc' jelölés) a PF-et megjelenítő parabola különböző ágain vannak. △

5.2.9. Lemma. *Legyen $\pi_1 \in PF$ és π egy, nem a minimális varianciájú optimális portfólió (azaz $\pi \neq g + hA/C$) és $\pi_2 \in PF$. Ekkor*

$$\operatorname{cov}(r_{\pi_1}, r_{\pi_2}) = \lambda_1 e_{\pi_2} + \gamma_1,$$

ahol λ_1 és γ_1 a π_1 portfólióhoz tartozó Lagrange feladat multiplikátorai (ld. 5.2.1. Tétel bizonyítása), azaz

$$\lambda_1 = \frac{Ce_{\pi_1} - A}{D}, \qquad \gamma_1 = \frac{B - Ae_{\pi_1}}{D}.$$

Bizonyítás. Az 5.2.1. Tétel bizonyításában láttuk, hogy

$$\pi_1 = \lambda_1 V^{-1}\mathrm{e} + \gamma_1 V^{-1}1,$$

amelyet felhasználva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(r_{\pi_1}, r_{\pi_2}) &= \pi_1^\top V \pi_2 = \left(\lambda_1 V^{-1}\mathrm{e} + \gamma_1 V^{-1}1\right)^\top V\pi_2 \\ &= \lambda_1 \mathrm{e}^\top \pi_2 + \gamma_1 1^\top \pi_2 = \lambda_1 e_{\pi_2} + \gamma_1.\end{aligned}$$

□

5.2.10. Tétel. *Legyen $\pi \in PF$ úgy, hogy π nem a minimális varianciájú optimális portfólió (azaz $\pi \neq g + hA/C$) és $\pi' \in C_1^*$ egy tetszőleges portfólió. Legyen*

$$\beta_{\pi',\pi} := \frac{\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'})}{\sigma_\pi^2}. \tag{5.8}$$

Ekkor

(a) $e_{\pi'} = \beta_{\pi',\pi} e_\pi + (1 - \beta_{\pi',\pi})\, e_{\pi_{zc}}$,

(b) $r_{\pi'} = \beta_{\pi',\pi} r_\pi + (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_{\pi_{zc}} + \varepsilon_{\pi',\pi}$, *ahol* $\varepsilon_{\pi',\pi}$ *egy valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}\varepsilon_{\pi',\pi} = \operatorname{cov}(r_\pi, \varepsilon_{\pi',\pi}) = \operatorname{cov}(r_{\pi_{zc}}, \varepsilon_{\pi',\pi}) = 0$,

(c) $r_{\pi'} = \beta_{\pi',\pi} r_\pi + (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_{\pi_{zc}}$, *ha speciálisan* $\pi' \in PF$.

Bizonyítás.

(a) A 5.2.9 Tétel alapján

$$\begin{aligned}e_{\pi'} &= \frac{\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'}) - \gamma_\pi}{\lambda_\pi} = \frac{Ae_\pi - B}{Ce_\pi - A} + \frac{\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'})}{\lambda_\pi} \\ &= \frac{Ae_\pi - B}{Ce_\pi - A} + \frac{\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'})}{\sigma_\pi^2} \frac{D\sigma_\pi^2}{Ce_\pi - A}.\end{aligned} \tag{5.9}$$

Ekkor

$$\frac{Ae_\pi - B}{Ce_\pi - A} = \frac{A\,(e_\pi - A/C) + A^2/C - B}{C\,(e_\pi - A/C)} = \frac{A}{C} - \frac{D/C^2}{e_\pi - A/C} = e_{\pi_{zc}},$$

másrészt

$$\frac{D\sigma_\pi^2}{Ce_\pi - A} = \frac{D}{C\,(e_\pi - A/C)}\left[\frac{1}{C} + \frac{(e_\pi - A/C)^2}{D/C}\right] = e_\pi - A/C + \frac{D/C^2}{e_\pi - A/C} = e_\pi - e_{\pi_{zc}}.$$

Az utóbb két egyenletet felhasználva (5.9) azt adja, hogy

$$e_{\pi'} = e_{\pi_{zc}} + \beta_{\pi',\pi}\left(e_\pi - e_{\pi_{zc}}\right) = \beta_{\pi',\pi} e_\pi + \left(1 - \beta_{\pi',\pi}\right) e_{\pi_{zc}}.$$

(b) Legyen

$$\varepsilon_{\pi',\pi} := r_{\pi'} - \beta_{\pi',\pi} r_\pi - \left(1 - \beta_{\pi',\pi}\right) r_{\pi_{zc}}.$$

Ekkor **(a)** alapján rögtön adódik, hogy $\mathbb{E}\varepsilon_{\pi',\pi} = 0$. Továbbá $\varepsilon_{\pi',\pi}$ és $\beta_{\pi',\pi}$ definíciói alapján, és felhasználva, hogy $\operatorname{cov}(r_{\pi_{zc}}, r_\pi) = 0$ azt kapjuk, hogy

$$\operatorname{cov}(r_\pi, \varepsilon_{\pi',\pi}) = \operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'}) \; - \beta_{\pi',\pi}\sigma_\pi^2 - \left(1 - \beta_{\pi',\pi}\right) \operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi_{zc}}) \tag{5.10}$$

$$= \operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'}) - \beta_{\pi',\pi}\sigma_\pi^2 = 0. \tag{5.11}$$

Végezetül a $\operatorname{cov}(r_{\pi_{zc}}, \varepsilon_{\pi',\pi}) = 0$ igazolásához alkalmazzuk az **(a)** pontban igazoltakat π'-re ismét. Mivel $\pi_{zczc} = \pi$, azaz π_{zc}-nek a zéró kovarianciájú portfólió párja π, így **(a)** alapján

$$e_{\pi'} = \beta_{\pi',\pi_{zc}} e_{\pi_{zc}} + \left(1 - \beta_{\pi',\pi_{zc}}\right) e_\pi. \tag{5.12}$$

Mivel $e_{\pi'}$-t egyértelműen lehet e_π és $e_{\pi_{zc}}$ affin kombinációjaként előállítani, hiszen $e_\pi \neq e_{\pi_{zc}}$, így (5.12) és **(a)** együtt azt adja, hogy $\beta_{\pi',\pi_{zc}} = 1 - \beta_{\pi',\pi}$. Ennélfogva

$$\varepsilon_{\pi',\pi} = r_{\pi'} - \left(1 - \beta_{\pi',\pi_{zc}}\right) r_\pi - \beta_{\pi',\pi_{zc}} r_{\pi_{zc}}.$$

ezért (5.10) gondolatmenete megismételhető, s adódik belőle, hogy $\operatorname{cov}(r_{\pi_{zc}}, \varepsilon_{\pi',\pi}) = 0$.

(c) Legyen $\pi' \in PF$. Ekkor **(b)** alapján

$$r_{\pi'} = \beta_{\pi',\pi} r_\pi + \left(1 - \beta_{\pi',\pi}\right) r_{\pi_{zc}} + \varepsilon_{\pi',\pi}. \tag{5.13}$$

Másrészt az 5.2.3. Következmény alapján a

$$\pi'' := \beta_{\pi',\pi}\pi + \left(1 - \beta_{\pi',\pi}\right) \pi_{zc} \tag{5.14}$$

portfólió PF-beli (optimális) melyre

$$e_{\pi''} = \beta_{\pi',\pi} e_\pi + \left(1 - \beta_{\pi',\pi}\right) e_{\pi_{zc}}.$$

Ezt összevetve **(a)**-val azt kapjuk, hogy π' és π'' ugyanazon elvárt hozamhoz tartozó optimális portfólió, s mivel ez egyértelmű, hiszen az $\pi' = g + he_{\pi'} = g + he_{\pi''} = \pi''$ alakban áll elő, így (5.14) alapján

$$r_{\pi'} = r_{\pi''} = \beta_{\pi',\pi} r_\pi + (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_{\pi_{zc}},$$

ami az (5.13) egyenlettel együtt azt adja, hogy $\varepsilon_{\pi',\pi} \equiv 0$. □

5.2.11. Definíció. *A $\pi' \in C_1^*$ portfólióhoz tartozó* (5.8) *képletben megadott értéket nevezzük a portfólió π-re vonatkozó bétájának.*

5.2.12. Megjegyzés. Először kiemeljük, hogy bizonyításból kiderült, hogy $\beta_{\pi',\pi_{zc}} = 1 - \beta_{\pi',\pi}$.

Az 5.2.10. Tétel alapján elég tekintenünk egy PF-beli portfóliót, s belőle illetve a zéró kovarianciájú párjából (mint 'magyarázó tényezőkből') minden más portfólió előállítható egy nulla várható értékű, tőlük korrelálatlan zajtól eltekintve, s ez az előállítás optimális portfólió esetén zajmentes. Azt is megmutattuk, hogy az előállításhoz szinte csak (zajtól eltekintve) az adott portfólió 'bétája' ($\beta_{\pi',\pi}$) szükséges.

Tekintsük azt az egyszerű portfóliót, amely esetén csak az i-edik részvénybe fektetünk pénzt ($X_0 = 1$), azaz $\pi_i := (\beta_{i,1}, \beta_{i,2}, \ldots, \beta_{i,n})$, ahol $\beta_{i,j} = \delta_{i,j} = \mathbb{1}_{\{i=j\}}$. Ekkor ezen egyszerű portfóliók esetén

$$\beta_{\pi_j, r_\pi} = \frac{\operatorname{cov}(r_\pi, \pi_j)}{\sigma^2_{r_\pi}},$$

amely mennyiségeket nevezhetjük a részvények bétájának. Továbbá $\pi' = \sum_{j=1}^n \beta'_j \pi_j$, ezért

$$\beta_{\pi',\pi} = \frac{\operatorname{cov}\left(r_\pi, \sum_{j=1}^n \beta'_j \pi_j\right)}{\sigma^2_{r_\pi}} = \sum_{j=1}^n \beta'_j \beta_{\pi_j,\pi}.$$

Tehát egy portfólió bétáját lineárisan ki tudjuk kombinálni a részvények bétájából. △

5.3. Tőkepiaci egyenes, CAPM

Ebben az alfejezetben rátérünk a kockázatmentes értékpapírral kiegészített (5.4) feladat megoldására. Valójában látni fogjuk, hogy számos lépés analóg a korábban elvégzetthez. Azt könnyű látni, hogy $C_1^* \subset C_1 = \mathbb{R}^n$, így világos, hogy rögzített $y \in \mathbb{R}$ elvárt hozam esetén az (5.4) feladat optimumának szórása (kockázatossága) legfeljebb annyi, mint az (5.3) feladat optimumának szórása (kockázatossága).

5.3.1. Tétel. *Az (5.4) feladatnak a $\pi \in C_1 = \mathbb{R}^n$ portfólió valamely $y = e_\pi$ várható hozamhoz tartozó megoldása akkor és csak akkor, ha felírható*

$$\pi = (e_\pi - r_0) \frac{V^{-1} (\mathbf{e} - r_0 \mathbf{1})}{K} \tag{5.15}$$

alakban, ahol $K := (\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})^\top V^{-1} (\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})$.

Bizonyítás. Az (5.4) szélsőérték feladatot is a Lagrange féle multiplikátor módszerrel oldjuk meg. Esetünkben a Lagrange függvény $\mathcal{L} = \frac{1}{2}\pi^\top V\pi + \lambda \left[y - \pi^\top \mathbf{e} - \left(1 - \pi^\top \mathbf{1}\right) r_0\right]$. Innen kapjuk a

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^{n} v_{i,j}\beta_j + \lambda (r_0 - e_i) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

$$y = \pi^\top \mathbf{e} + \left(1 - \pi^\top \mathbf{1}\right) r_0$$

egyenletrendszert, vagy másképpen felírva

$$V\pi + \lambda (r_0 \mathbf{1} - \mathbf{e}) = 0 \quad \text{és} \quad y = \pi^\top \mathbf{e} + \left(1 - \pi^\top \mathbf{1}\right) r_0. \tag{5.16}$$

Az (5.16) első egyenletéből π-t kifejezve azt kapjuk, hogy $\pi = \lambda V^{-1} (\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})$, amelyet a második egyenletbe írva kapjuk, hogy

$$e_\pi - r_0 = \pi^\top (\mathbf{e} - r_0\mathbf{1}) = \lambda (\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})^\top V^{-1} (\mathbf{e} - r_0\mathbf{1}) = \lambda K.$$

Innen pedig $\lambda = \frac{e_\pi - r_0}{K}$. Itt jegyezzük meg, hogy $K > 0$. Ennek megmutatásához felidézve A, B, C és D az 5.2.1. Tételben megadott alakjait, továbbá a tétel bizonyításában $D > 0$

igazolásának menetét, akkor azt kapjuk, hogy $K = B - 2Ar_0 + Cr_0^2 > 0$, hiszen erre a parabolára beláttuk, hogy az pozitív $\mathbb{R}$ felett. Innen pedig

$$\pi = \lambda V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1}) = \frac{e_\pi - r_0}{K} V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1}).$$

Fordítva, ha π-re teljesül (5.15), akkor az a fentiek miatt nyilván az $y = e_\pi$-hez tartozó megoldása az (5.4) feladatnak. □

5.3.2. Definíció. *A*

$$PF^+ := \{\pi \in \mathbb{R}^n \mid \exists y \in \mathbb{R} \text{ úgy, hogy } \pi \text{ megoldása az (5.4) feladatnak és } e_\pi = y\}$$

halmazt, amely tehát (5.4) megoldásainak halmaza, az (5.4) feladathoz tartozó portfólió határnak (portfolio frontier) nevezzük.

5.3.3. Következmény. *Ha $\pi_j \in PF^+$ és $\sum_{j=1}^m \alpha_j = 1$, $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \ldots, m$, akkor $\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j \pi_j \in PF^+$ és $e_\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j e_j$.*

Bizonyítás. Léteznek olyan $y_j \in \mathbb{R}$ elvárt hozamok, hogy $e_{\pi_j} = y_j$, ezért

$$\pi = \sum_{j=1}^m \alpha_j \left[(y_j - r_0)\frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})}{K}\right] = \left[\sum_{j=1}^m \alpha_j y_j - r_0 \sum_{j=1}^m \alpha_j\right] \frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})}{K}$$
$$= \left[\sum_{j=1}^m \alpha_j y_j - r_0\right] \frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})}{K}.$$

Azaz π is előáll (5.15) alakban, ahol π az $y = \sum_{j=1}^m \alpha_j y_j$ elvárt hozamhoz tartozó megoldás. □

5.3.4. Tétel. *Ha $\pi \in PF^+$ akkor*

$$\sigma_\pi = \begin{cases} \frac{e_\pi - r_0}{\sqrt{K}}, & \text{ha } e_\pi > r_0, \\ -\frac{e_\pi - r_0}{\sqrt{K}}, & \text{ha } e_\pi \le r_0. \end{cases}$$

ahol K az 5.3.1. Tételben definiált.

Bizonyítás. Az 5.3.1. Tétel alapján

$$\sigma_\pi^2 = \pi^\top V \pi = \left(\frac{e_\pi - r_0}{K}\right)^2 (\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})^\top V^{-1} V V^{-1} (\mathbf{e} - r_0\mathbf{1}) = \left(\frac{e_\pi - r_0}{K}\right)^2 K,$$

amiből közvetlenül adódik az állítás. □

5.3.5. Definíció. *Az*

$$EPF^+ := \left\{\pi \in PF^+ \mid e_\pi \geq r_0\right\}$$

halmazt az (5.4) feladathoz tartozó hatékony portfóliók határának (efficient portfolio frontier) nevezzük.

5.3.6. Megjegyzés. Ahogy említettük az alfejezet elején, ez az eset analóg módon kezelhető a korábbi esettel, ahol még nem volt kockázatmentes értékpapír. Ha ismét $\mathbb{R}^2$-ben ábrázoljuk a portfólióknak megfeleltetett (szórás, elvárt hozam) pontokat, akkor itt PF^+ két félegyenesből áll, ahogy azt az 5.3.4. Tétel mutatja. A félegyenesek az y tengelytől indulnak, a tengelyt a $(0, r_0)$ pontban metszik, amely annak az optimális portfóliónak felel meg, amelyben az összes kezdőtőkét a kockázatmentes értékpapírba fektettük. Ez a portfólió egyben az ehhez a feladathoz tartozó minimális varianciájú portfólió. Vegyük észre, hogy az (5.4) feladatnak is van minden $y \in \mathbb{R}$ várható hozam esetén megoldása.

A két félegyenes közül a felső adja a EPF^+ halmaznak megfeleltetett pontokat. A másik ág ugyan valamely elvárt hozamhoz tartozó megoldása az (5.4) feladatnak, de azt racionális befektető nem választaná, hiszen a felső félegyenesen található egy vele azonos szórást (kockázatot), de magasabb elvárt hozamot biztosító optimális portfóliónak megfelelő pont. Ezért nevezzük a EPF^+-beli portfóliókat hatékonynak.

Mivel ennek a feladatnak az optimuma ugyanazon elvárt hozam mellett nem adhat nagyobb szórású megoldást, mint a kockázatmentes értékpapír nélküli feladat megoldása, így az már látszik, hogy a PF-nek megfelelő korábbiakban tárgyalt görbe (hiperbola, ld. 5.2.5. Megjegyzés) a két félegyenes között helyezkedik el.

Felvetődik a kérdés, hogy van-e közös pontja PF-nek és PF^{+}-nak. Ezt a következő tétel tárgyalja. $\triangle$

5.3.7. Tétel. *Ha $A/C \neq r_0$, akkor egyértelműen létezik $\pi \in PF \cap PF^{+}$, melyre*

$$\pi \in EPF^{+} \Longleftrightarrow e_\pi \geq r_0 \Longleftrightarrow \frac{A}{C} \geq r_0,$$

$$\pi \in PF^{+} \backslash EPF^{+} \Longleftrightarrow e_\pi < r_0 \Longleftrightarrow \frac{A}{C} < r_0.$$

Ha $A/C = r_0$, akkor nem létezik olyan π portfólió, melyre $\pi \in PF \cap PF^{+}$.

Bizonyítás. Egy $\pi \in PF^{+}$ portfólió pontosan akkor eleme egyben a PF halmaznak is, ha abban nincs a kockázatmentes értékpapírból, azaz, ha $\pi \in C_1^{*}$, másképpen, ha $\mathbf{1}^{\top}\pi = 1$. Ezt felírva egy $\pi \in PF^{+}$ portfólióra azt kapjuk, hogy

$$1 = \pi^{\top}\mathbf{1} = (e_\pi - r_0)\,\frac{\mathbf{1}^{\top}V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})}{K} = (e_\pi - r_0)\,\frac{A - r_0 C}{K} = (e_\pi - r_0)\,\frac{C\left(\frac{A}{C} - r_0\right)}{K}.$$

Innen kell kifejeznünk e_π-t, hiszen az egyértelműen meghatározza π-t. Ha $A/C = r_0$, akkor a fenti egyenletet egyetlen portfólió sem teljesíti. Ha $A/C \neq r_0$, akkor az egyetlen megoldás

$$e_\pi = r_0 + \frac{K}{C\left(\frac{A}{C} - r_0\right)},$$

mely teljesíti az állításban leírtakat. $\square$

5.3.8. Lemma. *Ha $\pi \in PF^{+}$ és $\pi' \in C_1$, akkor*

$$\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'}) = \frac{1}{K}(e_\pi - r_0)(e_{\pi'} - r_0).$$

Bizonyítás. A π' portfólióra a költségvetési korlát azt adja, hogy

$$e_{\pi'} = \mathbf{e}^{\top}\pi' + r_0\left(1 - \pi'^{\top}\mathbf{1}\right) = \mathbf{e}^{\top}\pi' - r_0\pi'^{\top}\mathbf{1} + r_0,$$

ezért

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'}) = \pi^\top V\pi' &= (e_\pi - r_0)\left(\frac{V^{-1}(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})}{K}\right)^\top V\pi' \\ &= \frac{(e_\pi - r_0)}{K}\left(\mathbf{e}^\top\pi' - r_0\mathbf{1}^\top\pi'\right) \\ &= \frac{1}{K}(e_\pi - r_0)(e_{\pi'} - r_0).\end{aligned}$$

□

5.3.9. Tétel. *Legyen $\pi \in PF^+$ úgy, hogy π nem a minimális varianciájú optimális portfólió (azaz $e_\pi \neq r_0$) és $\pi' \in C_1$ egy tetszőleges portfólió. Tekintsük az (5.8)-ben megadott $\beta_{\pi',\pi}$ bétáját a π' portfóliónak. Ekkor*

(a) $e_{\pi'} = (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_0 + \beta_{\pi',\pi} e_\pi$,

(b) $r_{\pi'} = (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_0 + \beta_{\pi',\pi} r_\pi + \varepsilon_{\pi',\pi}$, *ahol* $\varepsilon_{\pi',\pi}$ *egy valószínűségi változó, melyre* $\mathbb{E}\varepsilon_{\pi',\pi} = \operatorname{cov}(r_\pi, \varepsilon_{\pi',\pi}) = 0$,

(c) $r_{\pi'} = (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_0 + \beta_{\pi',\pi} r_\pi$, *ha speciálisan* $\pi' \in PF$.

Bizonyítás.

(a) Az 5.3.8. Lemma alapján

$$\begin{aligned}e_{\pi'} - r_0 &= \frac{K\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'})}{e_\pi - r_0} = \frac{\operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'})}{\sigma_\pi^2}\frac{K\sigma_\pi^2}{e_\pi - r_0} \\ &= \beta_{\pi',\pi}\frac{K}{e_\pi - r_0}\frac{(e_\pi - r_0)^2}{K} = \beta_{\pi',\pi}(e_\pi - r_0),\end{aligned}$$

amiből átrendezés után az állítás adódik.

(b) Legyen

$$\varepsilon_{\pi',\pi} := r_{\pi'} - (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_0 - \beta_{\pi',\pi} r_\pi.$$

Ekkor **(a)** alapján rögtön adódik, hogy $\mathbb{E}\varepsilon_{\pi',\pi} = 0$. Továbbá $\varepsilon_{\pi',\pi}$ és $\beta_{\pi',\pi}$ definíciói alapján azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(r_\pi, \varepsilon_{\pi',\pi}) &= \operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'}) - (1 - \beta_{\pi',\pi}) \operatorname{cov}(r_\pi, r_0) - \beta_{\pi',\pi}\sigma_\pi^2 \\ &= \operatorname{cov}(r_\pi, r_{\pi'}) - \beta_{\pi',\pi}\sigma_\pi^2 = 0.\end{aligned}$$

(c) Legyen $\pi' \in PF^+$. Ekkor **(b)** alapján

$$r_{\pi'} = (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_0 + \beta_{\pi',\pi} r_\pi + \varepsilon_{\pi',\pi}. \tag{5.17}$$

Másrészt az 5.3.3. Következmény alapján a

$$\pi'' := (1 - \beta_{\pi',\pi})\, \pi_0 + \beta_{\pi',\pi}\pi \tag{5.18}$$

portfólió PF^+-beli (optimális), melyre

$$e_{\pi''} = (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_0 + \beta_{\pi',\pi} e_\pi.$$

Ezt összevetve **(a)**-val azt kapjuk, hogy π' és π'' ugyanazon elvárt hozamhoz tartozó optimális portfólió, s mivel ez egyértelmű, hiszen az

$$\pi' = (e_{\pi'} - r_0)\, \frac{V^{-1}\,(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})}{K} = (e_{\pi''} - r_0)\, \frac{V^{-1}\,(\mathbf{e} - r_0\mathbf{1})}{K} = \pi''$$

alakban áll elő, így (5.18) alapján

$$r_{\pi'} = r_{\pi''} = (1 - \beta_{\pi',\pi})\, r_0 + \beta_{\pi',\pi} r_\pi,$$

ami az (5.17) egyenlettel együtt azt adja, hogy $\varepsilon_{\pi',\pi} \equiv 0$. □

5.3.10. Megjegyzés. (CAPM, tőkepiaci egyenes) Az 5.3.9. Tételből láthatjuk, hogy minden hatékony, sőt, valójában minden PF^+-beli portfóliót elő tudunk állítani alkalmas affin kombinációval egy rögzített PF^+-beli (referencia)-portfólióból és a kockázatmentes értékpapírból. A kombinációhoz szükséges együtthatót pedig az előállítandó portfólió bétája adja.

Legyen például a rögzített referencia-portfólió a PF és PF^+ érintési pontja, s vizsgáljuk például a $A/C > r_0$ esetet. Ekkor az érintési ponthoz tartozó portfólió EPF^+-beli, jelöljük π_m-mel. Ezt szokás piaci portfóliónak is nevezni.

Ekkor tehát a fentiek és az 5.3.9. Tétel értelmében minden PF^+-beli portfólió úgy áll elő, hogy konstansszorosát vásároljuk a π_m portfóliónak és a maradék összeget (mely lehet negatív is) a kockázatmentes értékpapírba rakjuk. Így az EPF^+-nak megfelelő félegyenes két szakaszra bontható. A $(0, r_0)$ és $(\sigma^2_{\pi_m}, e_{\pi_m})$ pontok közötti szakasz konvex lineáris kombinációval áll elő, azaz itt pozitív a kockázatmentes értékpapírba befektetett rész. Így a létrehozandó portfólió bétája nemnegatív és legfeljebb 1. Ezen a szakaszon az elvárt hozam nyilván r_0 és e_{π_m} között van. A félegyenes maradék része magasabb elvárt hozamot ígér, mint amennyit a piaci portfólió ígér, ám ez magasabb kockázattal (szórás) is párosul. Ezeket a portfóliókat úgy lehet megvalósítani, hogy az affin kombinációban π_m együtthatója, azaz a létrehozandó portfólió bétája 1-nél nagyobb, de ennek az az ára, hogy azt csak a kockázatmentes értékpapírban felvett kölcsönből tudjuk csak finanszírozni. Harmadrészt, a $PF^+ \setminus EPF^+$-beli portfóliók bétája negatív.

A fentiekből az adódik, hogy bármelyik hatékony portfólióban a részvényekbe fektetett pénzmennyiségek arányai mindig azonosak, hiszen azok a π_m-beli arányok.

Az 5.3.9. Tétel **(a)** pontja megadja, hogy a portfólió elvárt hozama hogyan kapható meg a bétája segítségével. Ezt az összefüggést leíró egyenest tőkepiaci egyenesnek is szokás nevezni. Ez alapján a portfólió kockázati prémiuma vagy másképpen kockázati díja

$$e_{\pi'} - r_0 = \beta_{\pi',\pi} \left(e_\pi - r_0 \right).$$

Tehát egy portfólió $e_{\pi'} - r_0$ kockázati prémiumát a piaci portfólió $e_\pi - r_0$ kockázati prémiuma és a portfólió bétája határozza meg. Másképpen, egy portfólió bétája és kockázati felára között lineáris összefüggés van, azt az $x \mapsto (e_\pi - r_0)\, x$ összefüggés adja $\mathbb{R}^2$-ben, amelyben a portfóliókat ábrázoltuk (a kockázatuk és várható hozamuk alapján).

Ezzel eljutottunk a Capital Asset Pricing Model (CAPM, tőkepiaci árfolyamok modellje) alapjaihoz, melyet W. Sharp, J. Lintner és J. Treynor dolgozott ki egymástól függetlenül az 1960-as években. Az elmélet, mely egy egyensúlyi piaci modellt kíván nyújtani, egy egyszerű magyarázatot adott a kockázati díjra a bétán keresztül. A modellben a befektetőkről feltételezzük, hogy ugyanazon információk állnak rendelkezésre számukra a piaci hozamok és kockázat (szórás, kovariancia) tekintetében, s ezek alapján a fejezetben leírtak szerint optimalizálnak. Az elmélet részletes leírásával és további feltételezéseinek (pl. trazakciós költségek hiánya) részletezésével nem foglalkozunk. Az érdeklődő olvasó az elmélettel, eredményeinek pénzügyi értelmezésével és empirikus tesztelésével kapcsolatban számos megjegyzést találhat többek között a [8], [27] és [11] monográfiákban. $\triangle$

5.3.11. Megjegyzés. Végezetül azt is megjegyezzük, hogy bár más az ebben a fejezetben tárgyalt optimalizálási feladat, mint a korábbiakban tárgyalt várható hasznosság értelemben vett optimalizálás, kapcsolatot a kettő között lehet teremteni. Egyrészt vegyük észre, hogy például a másodrendű sztochasztikus dominanciának is van kapcsolata a momentumokkal, amelyet (4.3) mutat, melynek értelmében a másodrendű sztochasztikus dominanciából adódik a mean-variance értelemben vett dominancia. De érdekes kérdés az is, hogy lehet-e megfelelő hasznosságfüggvénnyel a várható hasznosság értelmében vett optimalizálással visszakapni az ebben a fejezetben tárgyalt optimális portfóliókat. Erre a kérdésre itt nem térünk ki. Az érdeklődő olvasó néhány megjegyzést találhat erre vonatkozóan például Barucci [8] könyvében. $\triangle$

6. fejezet

Kockázati mértékek

A pénzügy egyik központi kérdése, hogy olyan eszközöket biztosítson, amelyek lehetővé teszik pénzügyi eszközök és kiváltképp portfóliók összehasonlítását, értékelését és kockázatosságuk jellemzését. Az előző fejezetekben már láttuk, hogy az összehasonlításra számos eszközt adnak a különböző sztochasztikus dominancia fogalmak és tudjuk, hogy a klasszikus tőkepiaci elméletek is lehetőséget adnak mind portfóliók egyfajta összehasonlítására, mind azok kockázatának egyfajta jellemzésére.

Azonban ezeken túl természtes kívánalom az is, hogy egyszerű pénzügyi mutatókkal jellemezzük az eszközöket, és különösen azok kockázatosságát. A pénzügyi eszközökhöz és portfóliókhoz rendelt, a kockázatot jellemző mutatószámokat fogjuk a továbbiakban kockázati mértékeknek nevezni. Jegyezzük itt meg, hogy számos mutatót már sok évtizeddel ezelőtt használtak és használnak ma is. Gondoljunk csak a népszerű P/E (price/earning) mutatóra, mely némi információt ad a befektetőnek az adott értékpapírról. Azonban a klasszikus mutatók nem igazán adnak információt az eszköz kockázatosságáról.

Számos kockázati mérték jelent meg az irodalomban. Ezek közül minden kétséget kizáróan a Value at Risk terjedt el a leginkább, mind elméletben, mind gyakorlatban. Számos pénzpiaci, pénzintézeti törvény megköveteli a pénzintézetektől és esetleg egyéb piaci szereplőktől ennek számítását és ezzel kapcsolatos szabályok betartását. Az érdeklődő olvasónak megemlítjük, hogy a Bázeli Bizottság (Basel Committee on Banking Supervision) részletesen foglalkozott kockázati mértékekkel és azokhoz kapcsolódó problémákkal és egyben javaslatot tett számos standard bevezetésére (ld. International Convergence of Capital Measurement and Capital Standards). Ezen standardok egyszerűen 'Basel I és Basel II' néven ismertek a szakmában, amely standardokban többek között a VaR és azzal kapcsolatos területek fontos szerepet kaptak és azok bevezetését és alkalmazását javasolják az egyes országoknak.

Azt is érdemes megjegyeznünk már most, hogy nem állíthatjuk, hogy a VaR lenne a legmegfelelőbb mérték azon célra, amelyeket a fentiekben említettünk, továbbá, hogy az alkalmasság kérdéséhez pontosan meg kell fogalmaznunk igényeinket is egy ilyen mutatóval szemben. A 6.1. alfejezetben éppen ezen felmerülő igényekkel foglalkozunk, míg azt követően a VaR és tulajdonságai kerülnek elemzésre a 6.2. alfejezetben. Végül a 6.3. alfejezetben rátérünk egy másik kockázati mérték, az expected shortfall tárgyalására, mely számos szerző által ajánlott a VaR alternatívájaként éppen a VaR egyes nem megfelelő tulajdonságai miatt.

Ennek a fejezetnek a megírása során nagy segítséget jelentettek számunkra az alábbi munkák: [1], [2], ahol a VaR és az expected shortfall tárgyalása igen részletes; [17], ahol a koherencia fogalmának egy rendkívül hasznos tárgyalását találhatjuk; [18], amelyben egy nagy áttekintését olvashatjuk a VaR fogalmának, közgazdasági hasznosításának és becslésének. Megjegyezzük, hogy a kvantilisek tárgyalásához nagyszerű forrásnak bizonyult [2] és [36]. Végezetül kiemeljük Paul Embrechts munkáit (szakcikkek, előadás fóliák, stb.), amelyekben számos gyakorlati és elméleti kérdés tárgyalását találhatjuk kockázati mértékekkel kapcsolatban (ld. http://www.math.ethz.ch/~embrechts/).

6.1. Koherens mértékek

Ahogy már említettük, számos igényt fogalmazhatunk meg egy kockázati mutatóval szemben. Természetesen ez szubjektív is egyben, nem állíthatjuk, hogy ugyanazon tulajdonságokat találja mindenki fontosnak. Az irodalomban is számos tulajdonság merül fel igényként. A leginkább előforduló, leggyakrabban megkövetelt tulajdonságokat tömöríti a koherencia fogalma, melyet az alábbiakban ismertetünk. Ezt követően pedig alternatív tulajdonságokat is tárgyalunk.

A kockázati mértékeket valószínűségi változók egy halmazán értelmezhetjük. Hiszen ha adott egy portfólió, befektetés vagy értékpapír, akkor egy valószínűségi változó reprezentálja az abból származó jövőbeli profitot. Ám hasonlóan, magát a jövőbeli értéket is jelölheti a valószínűségi változó, amelyhez a kockázatot meghatározzuk.

6.1.1. Definíció. *Legyen V (pénzügyi eszközök, portfóliók profitját reprezentáló) valószínűségi változók egy halmaza egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőn.*

Ekkor egy $\varrho : V \to \mathbb{R}$ függvényt kockázati mértéknek nevezünk.

Egy V kockázati mérték

(1) *monoton, ha $X, Y \in V$ és $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, akkor $\varrho(X) \geq \varrho(Y)$;*

(2) *pozitív homogén, ha $h > 0$, $X, hX \in V$, akkor $\varrho(hX) = h\varrho(X)$;*

(3) *szubadditív, ha $X, Y, X + Y \in V$, akkor $\varrho(X + Y) \leq \varrho(X) + \varrho(Y)$;*

(4) *eltolás invariáns, ha $a \in \mathbb{R}$, $X, X + a \in V$, akkor $\varrho(X + a) = \varrho(X) - a$.*

Egy V kockázati mértéket koherensnek nevezünk, ha teljesíti az **(1)-(4)** *tulajdonságokat.*

6.1.2. Feltétel. *Az egész fejezetben az egyszerűség kedvéért feltételezzük, hogy V zárt az összeadásra, pozitív skalárral való szorzásra és eltolásra, azaz $V + V$, $h \cdot V$, $a + V \subset V$ minden*

$h > 0$, $a \in \mathbb{R}$ esetén. Feltesszük továbbá, hogy V tartalmazza az $X \equiv 0$ ($\mathbb{P}(X = 0) = 1$) elemet.

A kozkázati mértékek nevezetes tulajdonságait (monotonitás, szubadditivitás, stb.) néha axiómáknak is fogjuk nevezni.

A fenti tulajdonságokat az alábbi módon értelmezhetjük, az alábbi pénzügyi motivációt fedezhetjük fel bennük. Ha egy portfólió minden esetben többet ígér, mint egy másik, akkor annak ne legyen nagyobb a kockázata (monotonitás). Két portfóliót egybetéve ne növekedhessen a kockázat, azaz a portfóliók kocázatának összegét nem haladhatjuk meg (szubadditivitás). Megtöbbszörözve a portfóliót, ám megtartva annak összetételét, a kozkázatosság a nagysággal arányosan változzon (pozitív homogenitás). Ha biztosan realizálunk egy pótlólagos adott összegű pénzáramlást, akkor a portfólió kockázatossága éppen ennek a pénzáramlásnak a nagyságával csökkenjen (eltolás invariancia).

Azonban fontosnak tartjuk hangsúlyozni, hogy számos egyéb, a fentiekhez hasonlóan pénzügyi szempontból indokoltnak látszó tulajdonságot is lehetne még említenünk, mint ahogy a fentiek szükségességét is megkérdőjelezhetjük. Kettő a sok felmerülő tulajdonságok közül a következő.

6.1.3. Definíció. *Egy $\varrho : V \to \mathbb{R}$ kockázati mérték*

(5) pozitív, *ha $X \in V$, $\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$ esetén $\varrho(X) \leq 0$;*

(6) konvex, *ha $\lambda \in [0, 1]$ és $X, Y, \lambda X + (1 - \lambda)Y \in V$ esetén $\varrho(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\varrho(X) + (1 - \lambda)\varrho(Y)$.*

6.1.4. Tétel. *Legyen ϱ egy kockázati mérték.*

(a) *Ha ϱ pozitív homogén és $X \equiv 0$, akkor $\varrho(X) = 0$.*

(b) *Ha ϱ pozitív homogén és eltolás invariáns, akkor $\varrho(a) = -a$ minden $a \in \mathbb{R}$ esetén.*

(c) *Egy monoton és pozitív homogén kockázati méstέk teljesíti a pozitivitást.*

(d) *Tegyük fel, hogy V zárt a különbségképzésre, azaz $V - V \subset V$. Ekkor a ϱ kockázati mérték pontosan akkor koherens, ha teljesülnek rá a* **(2)-(5)** *axiómák.*

(e) *Ha ϱ szubadditív és pozitív homogén akkor konvex.*

Bizonyítás. (a) Legyen $X \equiv 0$. Ekkor $X \in V$, így az első állítás rögtön adódik a pozitív homogenitásból, hiszen $\varrho(X) = \varrho(2X) = 2\varrho(X)$.

(b) Ha $a \in \mathbb{R}$, akkor az eltolás invariancia és az **(a)** állítás miatt $\varrho(a) = \varrho(0 + a) = \varrho(0) - a = -a$.

(c) Egy nemnegatív X változó ($\mathbb{P}(X \geq 0) = 1$) esetén a monotonitásból és az első állításból adódik, hogy $\varrho(X) \leq \varrho(0) = 0$, azaz beláttuk a pozitivitást.

(d) Az **(1)-(4)** $\Longrightarrow$ **(2)-(5)** irány igazolásához a pozitivitást kell megmutatni, ami **(c)** alapján adódik.

A **(2)-(5)** $\Longrightarrow$ **(1)-(4)** irány igazolásához a monotonitást kell megmutatnunk. Ehhez legyen $X, Y \in V$ olyan, hogy $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$. Ekkor a pozitivitás alapján, mivel $\mathbb{P}(Y - X \geq 0) = 1$, így $\varrho(Y - X) \leq 0$, továbbá a szubadditivitást használva $\varrho(Y) \leq \varrho(Y - X) + \varrho(X) \leq \varrho(X)$.

(e) Először a szubadditivitást, majd a pozitív homogenitást használva azonnal adódik az állítás. □

A **(b)** állítás azt jelenti, hogy egy biztos pénzáramlás kockázati mértéke éppen -1-szerese önmagának. Tehát egy biztos veszteség kockázata pozitív és éppen a veszteség nagyságával egyenlő, miközben, ha egy befektetés biztos (fix) nyereséget hoz, annak kockázata negatív, 'nagysága' a nyereség nagysága. A **(d)** állításból láthatjuk, hogy alkalmas V esetén a kockázati mértékeknél a monotonitást felcseréljük a koherencia definíciójában a pozitivitással (úgy, hogy ezzel egy ekvivalens axiómarendszert kapunk). Végül megemlítjük, hogy számos szerző egy gyengébb axiómarendszert javasol a koherencia helyett, nevezetesen a koherencia 4 axiómájában a szubadditivitást és a pozitív homogenitást a gyengébb konvexitás tulajdonságával javasolják kicserélni (ld. **(f)**).

A pénzügyben a portfóliók és pénzügyi eszközök kockázatosságát szokás és korábban különösen elterjedt volt az eszköz jövőbeli értékének szórásával vagy szórásnégyzetével jellemezni. Fontos azonban kiemelni, hogy a mi céljainkra ezen fogalmak nem alkalmasak, hiszen azok számos kívánatos tulajdonságot nem teljesítenek. Nyilvánvaló például, hogy egyik sem monoton, mint ahogy azt is könnyű látni, hogy a pozitivitást sem elégítik ki.

6.2. Value at Risk – A kockáztatott érték

Jelölés. Egy X valószínűségi változó esetén F_X fogja jelölni annak eloszlásfüggvényét, azaz $F_X(z) = \mathbb{P}(X < z)$. Az eloszlásfüggvény jobbról folytonos verzióját pedig $\tilde{F}_X$ fogja jelölni, azaz $\tilde{F}_X(z) = \mathbb{P}(X \leq z)$. Ennek azért van jelentősége, mert számos szerző $\tilde{F}_X$-t definiálja X eloszlásfüggvényének. Ennéfogva a későbbiek során számos helyen felhívjuk az olvasó figyelmét azon kölünbségekre, amelyeket ezen különbségtétel okoz.

6.2.1. Definíció. *Legyen X egy valószínűségi változó, $\alpha \in (0,1)$. Ekkor az X alsó α-kvantilise*

$$q_\alpha(X) = \sup\{y \mid F_X(y) < \alpha\},$$

ahol F_X az X eloszlásfüggvényét jelöli, valamint

$$q^\alpha(X) = \inf\{y \mid F_X(y) > \alpha\}$$

az X felső α-kvantilise.

Ha X egy (portfólió, pénzügyi eszköz) profitját leíró valószínűségi változó egy valószínűségi mezőn és $\alpha \in (0,1)$, akkor X alsó α-Value at Risk értéke alatt a

$$\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -q_\alpha(X)$$

mennyiséget értjük. Hasonlóan, X felső α-Value at Risk értékének definíciója:

$$\mathrm{VaR}^{\alpha}(X) = -q^{\alpha}(X).$$

Az X α-kvantilisét leegyszerűsítve úgy értelmezhetjük, hogy az X jövőbeli lehetséges kimeneteit (profitértékeit) két részre osztja: az esetek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékában ennél az értéknél kisebb lesz a profit, $1 - \alpha * 100$ százalékában pedig nagyobb. Másképpen, $(1 - \alpha)$ valószínűséggel legalább a kvantilis által mutatott érték lesz a profit (kimenet). Ennélfogva, az α-VaR azt a veszteségértéket mutatja, aminél $(1 - \alpha)$ valószínűséggel nem fogunk nagyobb veszteséget realizálni. Tehát $\alpha * 100$ százaléknyi legrosszabb lehetséges veszteségértékek legjobbikát mutatja a VaR, másképpen, az $(1 - \alpha) * 100$ százaléknyi legjobb lehetséges kimenetek legrosszabbikát mutatja a VaR. Azonban fontos hangsúlyozni, hogy ezek nem pontos állítások, ráadásul az alsó és felső VaR nem feltétlenül egyezik meg. A későbbiekben erre részletesen visszatérünk.

Az alábbiakban néhány kvantilisekkel kapcsolatos hasznos tulajdonságot foglalunk össze, majd áttekintjük az ezek következményeként adódó VaR tulajdonságokat.

6.2.2. Megjegyzés. Könnyű látni, hogy a kvantilisek más alakban is megadhatóak, hiszen

$$q_{\alpha}(X) = \inf\left\{y \mid F_X(y) \geq \alpha\right\}, \quad \text{ill.} \quad q^{\alpha}(X) = \sup\left\{y \mid F_X(y) \leq \alpha\right\}.$$

Továbbá jegyezzük meg, hogy ha a 6.2.1. Definícióban, vagy annak fenti átírásában az $y \mapsto F_X(y) = \mathbb{P}(X < y)$ eloszlásfüggvényt helyettesítenénk az $y \mapsto \tilde{F}_X(y) = \mathbb{P}(X \leq y)$ (jobbról folytonos) függvénnyel, az $q_{\alpha}(X)$ és $q^{\alpha}(X)$ értékét nem változtatná.

Vegyük észre, hogy $q^{\alpha}(X) = -q_{1-\alpha}(-X)$ és $q_{\alpha}(X) = -q^{1-\alpha}(-X)$. Ez azonnal adódik az előző megjegyzésünket is figyelmebe véve, hiszen például az első esetben:

$$\begin{aligned} q^{\alpha}(X) &= \inf\left\{y \mid F_X(y) > \alpha\right\} = \inf\left\{y \mid \mathbb{P}(-X \leq -y) < 1 - \alpha\right\} \\ &= -\sup\left\{-y \mid \mathbb{P}(-X \leq -y) < 1 - \alpha\right\} = -\sup\left\{y \mid \tilde{F}_{-X}(y) < 1 - \alpha\right\} \\ &= -q_{1-\alpha}(-X). \end{aligned}$$

Mivel $\{y \mid F_X(y) > \alpha\} \subset \{y \mid F_X(y) \geq \alpha\}$, így ezek alsó korlátjára teljesül, hogy

$$q_\alpha(X) \leq q^\alpha(X).$$

Ebből azt is láthatjuk, hogy az alsó és felső kvantilisek nem feltétlenül azonosak, nevezetesen, figyelembe véve az eloszlásfüggvény monotonitását, adódik, hogy

$$q_\alpha(X) = q^\alpha(X) \iff \text{ ha az } \{y \in \mathbb{R} \mid F_X(y) = \alpha\} \text{ halmaz legfeljebb egyelemű}$$

(hiszen az eloszlásfüggvény monotonitása miatt $\{y \mid F_X(y) > \alpha\}$ és $\{y \mid F_X(y) \geq \alpha\}$ intervallumok, melyeknek jobb végpontja ∞). Az is nyilvánvaló, hogy az $\{y \in \mathbb{R} \mid F_X(y) = \alpha\}$ halmaz pontosan akkor legfeljebb egyelemű, ha a $\{y \in \mathbb{R} \mid \tilde{F}_X(y) = \alpha\}$ halmaz legfeljebb egyelemű.

Ez tehát azt jelenti, hogy ha az eloszlásfüggvény egy szakaszon konstans és értéke éppen α, akkor az azon α-hoz tartozó alsó és felső kvantilisek nem azonosak. Folytonos eloszlásoknál például ilyen esetet nem tapasztalhatunk, diszkrét eloszlásoknál viszont minden olyan $\alpha \in (0,1)$ érték esetén eltérnek az alsó és felső kvantilisek, ahol α eleme az eloszlásfüggvény értékkészletének. Azt is mondhatjuk, hogy a két kvantilis ,,kifeszíti" azt az intervallumot, ahol az eloszlásfüggvény az α értéket veszi fel, pontosabban: ha $q_\alpha(X) < q^\alpha(X)$, akkor

$$\{x \in \mathbb{R} \mid F_X(x) = \alpha\} = \begin{cases} (q_\alpha(X), q^\alpha(X)], & \text{ha } \mathbb{P}(X = q_\alpha(X)) > 0 \\ [q_\alpha(X), q^\alpha(X)], & \text{ha } \mathbb{P}(X = q_\alpha(X)) = 0, \end{cases}$$

vagy másképpen

$$\{x \in \mathbb{R} \mid \tilde{F}_X(x) = \alpha\} = \begin{cases} [q_\alpha(X), q^\alpha(X)), & \text{ha } \mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) > 0 \\ [q_\alpha(X), q^\alpha(X)], & \text{ha } \mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) = 0. \end{cases}$$

$\triangle$

6.2.3. Tétel. *Legyen U egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon és X egy tetszőleges valószínűségi változó. Ekkor $\eta_1 = q_U(X)$, $\eta_2 = q^U(X)$ és X azonos eloszlásúak.*

Szokás egy X valószínűségi változó esetén az eloszlásfüggvényének F_X^{-1} általánosított inverzét

$$F_X^{-1}(y) := q_y(X), \qquad y \in (0,1),$$

módon definiálni, amely nyilvánvalóan megegyezik az eloszlásfüggvény inverzével, amennyiben az invertálható. Így a fenti tétel értelmében $F_X^{-1}(U)$ eloszlásfüggvénye F_X, ha U egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon.

A 6.2.3. Tétel bizonyítása. Mivel U eloszlása folytonos, így $\eta_1 = q_U(X)$, $\eta_2 = q^U(X)$ azonos eloszlásúak (hiszen csak egy nulla valószínűségű halmazon különböznek). Azt fogjuk belátni, hogy

$$A_y := \{\omega \in \Omega \mid U(\omega) < F_X(y)\} \subset B_y := \left\{\omega \in \Omega \mid F_X^{-1}(U(\omega)) < y\right\} \tag{6.1}$$

és

$$B_y \subset C_y := \{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leq F_X(y)\} \tag{6.2}$$

minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Ezekből ugyanis adódik az állítás, hiszen vegyük észre, hogy U eloszlása folytonos és $F_X(y) = F_U(F_X(y)) = \mathbb{P}(A_y) = \mathbb{P}(C_y)$, továbbá nyilván $F_{\eta_1}(y) = \mathbb{P}(B_y)$.

Tekintsük (6.1) bizonyítását. Legyen $\omega \in A_y$, azaz $U(\omega) < F_X(y)$ és legyen $H := \{z \mid F_X(z) < U(\omega)\}$. Ekkor $F_X^{-1}(U(\omega)) = \sup H$ és F_X balról való folytonossága miatt $F_X\left(F_X^{-1}(U(\omega))\right) \leq U(\omega) < F_X(y)$. Ha $y = F_X^{-1}(U(\omega))$ teljesülne, akkor ebből $F_X(y) \leq U(\omega)$ következne. Ha $y < F_X^{-1}(U(\omega))$ teljesülne, akkor pedig $y \in H$ is teljesülne, ami azt jelentené, hogy $F_X(y) < U(\omega)$. Másképpen fogalmazva, $y \leq F_X^{-1}(U(\omega))$ esetén F_X monotonitása alapján $F_X(y) \leq F_X\left(F_X^{-1}(U(\omega))\right) \leq U(\omega)$ lenne, ezért $F_X^{-1}(U(\omega)) < y$, így beláttuk a (6.1) állítást.

Most nézzük (6.2) igazolását. Legyen most $\omega \in B_y$, azaz $F_X^{-1}(U(\omega)) < y$ és H jelölje ugyanazt a halmazt, amelyet a fentiekben. Ekkor $y \notin H$, ennélfogva $F_X(y) \geq U(\omega)$, így adódik (6.2). $\square$

6.2.4. Megjegyzés. Természetesen F_X helyett az $\tilde{F}_X$ függvényt is használhatjuk a 6.2.3. Tétel bizonyításához. Ekkor például az alábbiakat könnyű belátni:

$$\tilde{A}_y := \left\{\omega \in \Omega \mid U(\omega) < \tilde{F}_X(y)\right\} \subset \tilde{B}_y := \left\{\omega \in \Omega \mid F_X^{-1}(U(\omega)) \leq y\right\} \tag{6.3}$$

és

$$\tilde{B}_y \subset \tilde{C}_y := \left\{\omega \in \Omega \mid U(\omega) \leq \tilde{F}_X(y)\right\} \tag{6.4}$$

minden $y \in \mathbb{R}$ esetén.

Ekkor a (6.2) tartalmazáshoz hasonlóan látható be (6.3). Tekintsük F_X^{-1} egy alkalmas felírását: legyen $\bar{H} := \left\{z \mid \tilde{F}_X(z) \geq U(\omega)\right\}$, hiszen ekkor $F_X^{-1}(U(\omega)) = \inf \bar{H}$. Továbbá, $\tilde{F}_X$ jobbról való folytonossága miatt $\tilde{F}\left(F_X^{-1}(U(\omega))\right) \geq U(\omega)$. Tegyük fel, hogy $y < F_X^{-1}(U(\omega))$. Ekkor $y < \inf \bar{H}$ miatt $y \notin \bar{H}$, ezért azt kapjuk, hogy $\tilde{F}(y) < U(\omega)$, ami ellentmondás.

Az (6.4) tartalmazás pedig a (6.1) tartalmazáshoz hasonlóan adódik. Hiszen $\tilde{F}_X$ monotonitása alapján $y \geq F_X^{-1}(U(\omega))$ esetén $\tilde{F}_X(y) \geq \tilde{F}_X(F_X^{-1}(U(\omega))) \geq U(\omega)$. $\triangle$

6.2.5. Tétel. *Az alsó és felső VaR egyaránt monoton, pozitív homogén és eltolás invariáns (egy valószínűségi mező összes valószínűségi változóinak halmazán).*

A Value at Risk felírható $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = q^{1-\alpha}(-X)$ *és* $\mathrm{VaR}^\alpha(X) = q_{1-\alpha}(-X)$ *alakokban is.*

Továbbá egy X valószínűségi változó esetén az $\alpha \mapsto \mathrm{VaR}_\alpha(X)$ *és* $\alpha \mapsto \mathrm{VaR}^\alpha(X)$ *függvények ($\alpha \in (0,1)$) monoton csökkenőek.*

Bizonyítás. Az alsó VaR esetére ismertetjük a bizonyítást, a felső VaR esetére hasonlóan egyszerűen adódnak az állítások.

Monotonitás. Ha $\mathbb{P}(X \leq Y) = 1$, akkor $F_X(y) \geq F_Y(y)$ minden $y \in \mathbb{R}$ esetén. Ezért $\{y \mid F_X(y) < \alpha\} \subset \{y \mid F_Y(y) < \alpha\}$, azaz

$$-\mathrm{VaR}_\alpha(X) = \sup\{y \mid F_X(y) < \alpha\} \leq \sup\{y \mid F_Y(y) < \alpha\} = -\mathrm{VaR}_\alpha(Y).$$

Pozitív homogenitás. Ha $h > 0$, akkor $F_{hX}(y) = F_X(y/h)$, $y \in \mathbb{R}$, ezért $-\mathrm{VaR}_\alpha(hX) = \sup\{y \mid F_{hX}(y) < \alpha\} = \sup\{y \mid F_X(y/h) < \alpha\} = h\sup\{z \mid F_X(z) < \alpha\} = -h\mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

Eltolás invariancia. Egy tetszőleges $a \in \mathbb{R}$ esetén $F_{X+a}(y) = F_X(y-a)$, $y \in \mathbb{R}$, ezért $-\mathrm{VaR}_\alpha(X+a) = \sup\{y \mid F_{X+a}(y) < \alpha\} = \sup\{y \mid F_X(y-a) < \alpha\} = a+\sup\{z \mid F_X(z) < \alpha\} = a - \mathrm{VaR}_\alpha(X)$.

A VaR ekvivalens átírásai adódnak a 6.2.2. Megjegyzésben leírtakból.

Végül, $\alpha < \beta$ esetén $\{z \mid F_X(z) < \alpha\} \subset \{z \mid F_X(z) < \beta\}$, ezért $q_\alpha(X) < q_\beta(X)$, amiből pedig adódik a VaR_α függvény monotonitása α-ban.

A bizonyítás az eloszlásfüggvény jobbról folytonos változatát ($\tilde{F}$) használva a balról folytonos (F) helyett lényegében teljesen azonos. □

6.2.6. Megjegyzés. A 6.2.5. Tétel bizonyításában láthattuk, hogy az alsó és felső kvantilisek egyaránt pozitív homogén mutatók, továbbá $\mathbb{P}(X \le Y) = 1$ esetén $q_\alpha(X) \le q_\alpha(Y)$, $q^\alpha(X) \le q^\alpha(Y)$, végül bármely $a \in \mathbb{R}$ esetén $q_\alpha(X+a) = q_\alpha(X)+a$, $q^\alpha(X+a) = q^\alpha(X)+a$. △

A fentiekben a szubadditivitás kivételével bizonyítottuk, hogy a VaR teljesíti a koherenciához szükséges 3 axiómát. Azonban a VaR nem szubadditív, így nem is koherens. A VaR szubadditivitásának cáfolására könnyű példát konstruálni, ilyeneket ismertetünk most.

6.2.7. Példa. Tekintsünk egy egyszerű $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezőt, ahol legyen $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$, és legyen $\mathbb{P}(\omega_1) = 0,01$, $\mathbb{P}(\omega_2) = \mathbb{P}(\omega_3) = 0,03$. Legyen X és Y egy-egy portfólióból származó nyereség, ahol

$$X(\omega_1) = -30, \quad X(\omega_2) = -20, \quad X(\omega_3) = -5, \quad X(\omega_4) = 20, \tag{6.5}$$

$$Y(\omega_1) = -30, \quad Y(\omega_2) = -5, \quad Y(\omega_3) = -20, \quad Y(\omega_4) = 20. \tag{6.6}$$

Ekkor $\mathrm{VaR}_{0,05}(X) = \mathrm{VaR}^{0,05}(X) = \mathrm{VaR}_{0,05}(Y) = \mathrm{VaR}^{0,05}(X) = 5$, viszont

$$\mathbb{P}(X+Y=-60) = 0,01, \quad \mathbb{P}(X+Y=-25) = 0,06, \quad \mathbb{P}(X+Y=40) = 0,93,$$

azaz $\mathrm{VaR}_{0,05}(X+Y) = \mathrm{VaR}^{0,05}(X+Y) = 25$. △

A következő példa ötlete Paul Embrechtstől származik.

6.2.8. Példa. Legyenek az Y_i valószínűségi változók ($i = 1, \ldots, 100$) függetlenek és azonos eloszlásúak az alábbi eloszlással:

$$\mathbb{P}(Y_i = 2) = 0,99 \quad \text{és} \quad \mathbb{P}(Y_i = -100) = 0,01.$$

Képzeljük például azt, hogy egy pénzintézet hiteleket ad, 1 évre, 2%-os kamatra, 100 ezer dollár értékben. Ekkor Y_i a pénzintézet egy ilyen szerződésből származó nyereségét írja le: egy év alatt keres 2 ezer dollárt a szerződésen nagy valószínűséggel, ám 1 % esélye van annak, hogy a hitel nem kerül visszafizetésre, mert például fizetésképtelenné válik az ügyfél. (Az egyszerűség kedvéért eltekintünk jelenértékek kalkulálásától az esetlegesen különböző időben érkező pénzforgalom miatt.)

Ekkor nyilvánvaló, hogy $\mathrm{VaR}_{0,05}(Y_i) = -2$. Tekintsük most annak az L_1 portfóliónak a VaR értékét, amely tartalmazza a fenti 100 hitelszerződést, azaz $L_1 = \sum_{i=1}^{100} Y_i$. Ekkor a portfóliót másképpen is felírhatjuk, nevezetesen

$$L_1 = \sum_{i=1}^{100} Y_i = \sum_{i=1}^{100} (102\xi_i - 100) = -100^2 + 102 \sum_{i=1}^{100} \xi_i,$$

ahol a ξ_i, $i = 1, 2, \ldots, 100$, változók alkalmas Bernoulli eloszlású változók, paraméterük 0,99, függetlenek. Másképpen, $\sum_{i=1}^{100} \xi_i = \eta$, ahol η binomiális eloszlású $(100;\ 0,99)$ paraméterértékekkel. Az eltolásinvarianciát és a pozitív homogenitást használva

$$\mathrm{VaR}_{0,05}(L_1) = 102\mathrm{VaR}_{0,05}(\eta) + 100^2.$$

Továbbá vegyük észre, hogy

$$\mathrm{VaR}_{0,05}(\eta) = -q_{0,05}(\eta) > -100,$$

hiszen η legnagyobb lehetséges értéke 100.

Azt kaptuk tehát, hogy

$$\mathrm{VaR}_{0,05}\left(\sum_{i=1}^{100} Y_i\right) > \sum_{i=1}^{100} \mathrm{VaR}_{0,05}(Y_i),$$

tehát ezen esetben sem teljesül a szubadditivitás.

Ezen példa több szempontból is meglepő, sőt, a szakemberek és a pénzintézetek számára valósággal rémisztő. Egyrészt azért, mert a szubadditivitás egy független és azonos eloszlású esetben nem teljesül, szemben az előző példával.

Másrészt azért, mert másképpen is értelmezhetjük az eredményt. Legyen L_2 egy olyan portfólió, amely egyetlen hitelszerződésből áll, ennek feltételei megegyeznek a fenti Y_1 szerződéssel, ám annak értéke legyen 10000 dollár, azaz $L_2 = 100Y_1$. Mivel a pozitív homogenitás miatt $\mathrm{VaR}_{0,05}(L_2) = 100\mathrm{VaR}_{0,05}(Y_1)$, így a fentieket úgy is interpretálhatjuk, hogy

$$\mathrm{VaR}_{0,05}(L_1) > \mathrm{VaR}_{0,05}(L_2).$$

Azaz a példánk éppen az ellenkezőjét mondja annak, amit hittünk és hiszünk portfóliók diverzifikálásáról. Kisebb a VaR-ban kifejezett kockázata egy egyösszegű nagy kölcsönnek, mint annak a portfóliónak, ahol ugyanilyen kölcsönöket diverzifikálnak független ügyfelek között azonos teljes összegben! Ráadásul jegyezzük meg azt is, hogy $\mathrm{VaR}_\alpha(Y_1) = -2$ minden olyan esetben, amikor $0,01 < \alpha < 1$. Miközben ugyanezen tartományban $\mathrm{VaR}_\alpha(L_2)$ értéke érzékenyen változik α változtatásával. $\triangle$

Mint láthatjuk, a VaR a fentiek miatt nem koherens kockázati mérték. Ráadásul éppen a sokak által legfontosabbnak tartott szubadditivitást nem teljesíti. Azaz, ezen mutatóval két portfólió kockázatosságát külön mérve, majd összeadava kevesebbet kaphatunk, mint a portfóliók egyesítésével létrehozott mutató esetén. Pedig azt várnánk, hogy az egyesítés során a kockázat egy részét elimináltuk. A fentiek miatt újabb kockázati mutatókat hoztak létre és vizsgáltak a szakirodalomban. Ezek közül az expected shortfall vált –tulajdonságai miatt– a legelfogadottabbá.

6.3. Az expected shortfall – A nagy veszteségek átlaga

Az expected shortfall egy egyszerű ötleten alapszik: tekintsük a portfólió jövőbeli lehetséges kimeneteleinek legrosszabb $\alpha * 100$ százalékát, akárcsak a VaR esetén. Ám most ezek felső határa (legjobbika) helyett vegyük ezek átlagát. Azaz, az expected shortfall a legrosszabb $\alpha * 100$ százalék esetén mutatja a profit (veszteség) várhatóértékét. A pontos definíció az alábbi.

6.3.1. Definíció. *Legyen X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ és legyen $\alpha \in (0,1)$, ahol $(X)^-$ az X negatív részét jelöli*[1]*. Ekkor az X α-expected shortfall értéke*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\le q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X \le q_\alpha(X))\right]\right).$$

6.3.2. Megjegyzés. Az $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ feltétel természetesen azért szükséges, hogy a definícióbeli $\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\le q_\alpha(X)\}}\right]$ mennyiség létezzen. Ezzel kapcsolatban a [6] példatár tartalmaz további részleteket. △

Az expected shortfall megértésében segít a következő állítás, amely egy ekvivalens átírását adja a fogalomnak.

6.3.3. Tétel. *Legyen X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ és legyen $\alpha \in (0,1)$. Ekkor*

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q_u(X)du = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha F_X^{-1}(u)du.$$

[1] Ha $x \in \mathbb{R}$, akkor x pozitív része:

$$(x)^- = \begin{cases} x & \text{ha } x > 0 \\ 0 & \text{egyébként.} \end{cases}$$

Az x negatív része pedig $(x)^- = (-x)^+$.

Bizonyítás. Legyen U egyenletes eloszlású a $(0,1)$ intervallumon és legyen $\eta := F_X^{-1}(U)$. Tudjuk, hogy ekkor X és η eloszlása megegyezik. Tekintve, hogy az F_X^{-1} függvény monoton növekvő, a következő egyszerű állítások adódnak:

$$\{U \leq \alpha\} \subset \{\eta \leq q_\alpha(X)\},$$

továbbá, $U(\omega) > \alpha$, $\omega \in \Omega$, (és ezért $\eta(\omega) \geq q_\alpha(X)$) és $\eta(\omega) \leq q_\alpha(X)$ csak úgy teljesülhet egyszerre, ha $\eta(\omega) = q_\alpha(X)$. Ezek alapján

$$\begin{aligned}
\int_0^\alpha q_u(X)du &= \mathbb{E}\left(\eta \mathbb{1}_{\{U\leq\alpha\}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\eta \mathbb{1}_{\{\eta\leq q_\alpha(X)\}}\right) - \mathbb{E}\left(\eta \mathbb{1}_{\{U>\alpha\}\cap\{\eta\leq q_\alpha(X)\}}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right) - q_\alpha(X)\mathbb{P}\left(\{U>\alpha\}\cap\{\eta\leq q_\alpha(X)\}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(X \mathbb{1}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right) - q_\alpha(X)\left(\mathbb{P}(X\leq q_\alpha(X)) - \alpha\right).
\end{aligned}$$

Innen pedig $-\alpha$-val osztva adódik az állítás. □

A 6.3.3. Tétel állítását átírhatnánk felső kvantilisekre is. Könnyen látható, hogy $\int_0^\alpha q_u(X)du = \int_0^\alpha q^u(X)du$, így $\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\int_0^\alpha q^u(X)du$. Hasonlóan, a 6.3.1. Definícióban is kicserélhetnénk az alsó kvantiliseket a megfelelő felső kvantilisekre, ettől az expected shortfall értéke nem változna. Ennek megmutatásához először jegyezzük meg, hogy $q^\alpha(X) = q_\alpha(X)$ esetén az állítás triviális. Ha pedig $q^\alpha(X) > q_\alpha(X)$, akkor $\mathbb{P}(X \leq q_\alpha(X)) = \alpha$ és ezért azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\leq q^\alpha(X)\}}\right] + q^\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X\leq q^\alpha(X))\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] + q^\alpha(X)\mathbb{P}(X = q^\alpha(X)) + q^\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X\leq q_\alpha(X)) - \mathbb{P}(X = q^\alpha(X))\right] \\
&\quad = \mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\leq q_\alpha(X)\}}\right] = -\alpha\mathrm{ES}_\alpha(X).
\end{aligned}$$

Tehát, a VaR-ral ellentétben itt nincs megkülönböztetve alsó és felső expected shortfall. Sőt, azt is láthatjuk, hogy egyéb formában is felírhatjuk az expected shortfallt, nevezetesen:

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X<q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(X)\left[\alpha - \mathbb{P}(X<q_\alpha(X))\right]\right),$$

vagy

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\frac{1}{\alpha}\left(\mathbb{E}\left[X\mathbb{1}_{\{X\le s\}}\right] + s\left[\alpha - \mathbb{P}(X \le s)\right]\right), \quad \forall s \in [q_\alpha(X), q^\alpha(X)].$$

6.3.4. Megjegyzés. Az expected shortfall legfontosabb tulajdonságainak tárgyalása előtt néhány technikai jellegű megjegyzést teszünk. Legyen X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$ és legyen $\alpha \in (0,1)$. Vezessük be az alábbi függvényt minden $y \in \mathbb{R}$ és $\omega \in \Omega$ esetére:

$$\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega)\le y\}} := \begin{cases} \mathbb{1}_{\{X(\omega)\le y\}}, & \text{ha } \mathbb{P}(X=y)=0 \\ \mathbb{1}_{\{X(\omega)\le y\}} + \frac{\alpha - \mathbb{P}(X\le y)}{\mathbb{P}(X=y)}\mathbb{1}_{\{X(\omega)=y\}}, & \text{ha } \mathbb{P}(X=y)>0. \end{cases} \tag{6.7}$$

Most ennek néhány egyszerű tulajdonságát foglaljuk össze. Ha $X(\omega) > y$, akkor $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega)\le y\}} = 0$, ha pedig $X(\omega) < y$, akkor $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega)\le y\}} = 1$. Továbbá az $X(\omega) = q_\alpha(X)$ esetben, ha $\mathbb{P}(X=y) > 0$, akkor $0 \le \mathbb{P}(X \le q_\alpha(X)) - \alpha < \mathbb{P}(X = q_\alpha(X))$. A fentiek miatt

$$\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\le q_\alpha(X)\}} \in [0,1]. \tag{6.8}$$

A definícióból közvetlenül adódnak még az alábbiak:

$$\mathbb{E}\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\le q_\alpha(X)\}} = \alpha, \tag{6.9}$$

$$\mathrm{ES}_\alpha(X) = -\alpha^{-1}\mathbb{E}X\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X\le q_\alpha(X)\}}. \tag{6.10}$$

A (6.7) jelölés bevezetésének jelentősége, hogy a korrekciós tagot kényelmesen lehet segítségével kezelni, ahogy az a (6.10) egyenlőségből is látszik. △

6.3.5. Tétel. *Legyen $V = \{X \text{ valószínűségi változó} \mid \mathbb{E}(X)^- < \infty\}$ egy valószínűségi mezőn. Ekkor az expected shortfall koherens a V halmazon.*

Bizonyítás. A kvantilisek 6.2.6. Megjegyzésben ismertetett tulajdonságai a 6.3.3. Tétellel együtt azt eredményezik, hogy az expected shortfall kielégíti a monotonitást, pozitív homogenitást és az eltolás invarianciát.

Így a szubadditivitást kell csak belátnunk. Legyen X, Y két valószínűségi változó, melyekre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$, $\mathbb{E}(Y)^- < \infty$, és legyen $Z = X + Y$. Ekkor (6.8) miatt

$$(X - q_\alpha(X))\left(\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X \le q_\alpha(X)\}}\right) \ge 0. \tag{6.11}$$

Hiszen $X(\omega) > q_\alpha(X)$ esetén $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega) \le q_\alpha(X)\}} = 0$ és $X(\omega) < q_\alpha(X)$ esetén $\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X(\omega) \le q_\alpha(X)\}} = 1$. Továbbá

$$\begin{aligned}
&\alpha[\mathrm{ES}_\alpha(X) + \mathrm{ES}_\alpha(Y) - \mathrm{ES}_\alpha(Z)]\\
&\quad = \mathbb{E}\left(Z\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - X\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X \le q_\alpha(X)\}} - Y\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y \le q_\alpha(Y)\}}\right)\\
&\quad = \mathbb{E}\left(X\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X \le q_\alpha(X)\}}\right] + Y\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y \le q_\alpha(Y)\}}\right]\right)\\
&\quad = \mathbb{E}\left([X - q_\alpha(X)]\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X \le q_\alpha(X)\}}\right] + [Y - q_\alpha(Y)]\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y \le q_\alpha(Y)\}}\right]\right)\\
&\qquad + \mathbb{E}\left(q_\alpha(X)\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X \le q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(Y)\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y \le q_\alpha(Y)\}}\right]\right)\\
&\quad \ge q_\alpha(X)\mathbb{E}\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{X \le q_\alpha(X)\}}\right] + q_\alpha(Y)\mathbb{E}\left[\mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Z \le q_\alpha(Z)\}} - \mathbf{1}^{(\alpha)}_{\{Y \le q_\alpha(Y)\}}\right]\\
&\quad = q_\alpha(X)(\alpha - \alpha) + q_\alpha(Y)(\alpha - \alpha) = 0,
\end{aligned}$$

ahol az első egyenlőséget (6.10) alapján, az egyenlőtlenséget (6.11) alapján kaptuk, majd 6.9 felhasználásával adódott az utolsó sor. □

6.3.6. Tétel. *Ha X egy valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(X)^- < \infty$, akkor az*

$$\alpha \mapsto \mathrm{ES}_\alpha(X), \qquad \alpha \in (0,1)$$

függvény folytonos és monoton csökkenő.

Bizonyítás. A 6.3.3. Tételből látszik, hogy az expected shortfall folytonos függvénye az α biztonsági szintnek, hiszen a tételbeli integrál folytonos függvénye az α felső határnak. Mivel $-q_\alpha(X)$ csökkenő α-ban, ezért

$$\frac{\int_0^\alpha -q_u(X)du}{\alpha}$$

is az, amiből adódik, hogy az expected shortfall monoton α-ban. Ennek részletesebb bizonyításához legyen $0 < \alpha_1 < \alpha_2 < 1$. A kvantilis monotonitásából adódóan létezik egy olyan $m \in \mathbb{R}$, amelyre teljesül, hogy $\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -q_u(X)\, du = m\,(\alpha_2 - \alpha_1)$ és $m \leq -q_{\alpha_1}(X)$. Ezért az is teljesül, hogy $m \leq \mathrm{ES}_{\alpha_1}(X)$. Ennélfogva

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_{\alpha_2}(X) &= \frac{1}{\alpha_2}\int_0^{\alpha_2} -q_u(X)\, du + \frac{1}{\alpha_2}\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} -q_u(X)\, du \\
&= \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\mathrm{ES}_{\alpha_1}(X) + \left(1 - \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right) m \leq \mathrm{ES}_{\alpha_1}(X).
\end{aligned}$$

$\square$

III. rész

Opcióelmélet

7. fejezet

Értékpapírpiacok

Az elmúlt évtizedekben a pénzügyi matematika és azon belül is elsősorban a sztochasztikus kalkulus eszközei fontos szerepet játszottak a modern pénzügy, és különösen az opcióelmélet nagyívű fejlődésében.

Az opciós szerződések a származtatott értékpapírok egy típusát képezik, hiszen azok értéke más értékpapírok értékétől függ. Például ilyen egy adott részvényre vonatkozó európai vételi opció, mely a tulajdonosát azzal a joggal ruházza fel, hogy egy jövőbeli rögzített időpontban egy rögzített áron vásárolhat egy részvényt. Az opcióelmélet alapvető feladata az opció ésszerű árának a meghatározása, azaz az alábbi kérdésre keressük a választ: *,,Mennyit lennénk hajlandóak fizetni egy ilyen szerződésért?”* Erre a kérdésre először Black és Scholes majd Cox, Ross és Rubinstein adtak választ híres munkáikban (ld. [10] és [15]), amelyek a gyakorlatban is alkalmazásra kerültek megjelenésük után röviddel.

A legfőbb célunk ebben a részben az, hogy ismertessük az alapvető opciós ügyleteket és bemutassuk az azokkal kapcsolatos opcióárazási problémákat egy általános matematikai modellben, mindezt egy egységes terminológiában, amelyhez felépítésben, tárgyalásmódban elsősorban a [26], [50], [51] és [52] munkák szolgáltattak.

Ezt a célt kitűzve, tárgyaljuk a diszkrét idejű (B, S) piacok fogalmát, melyeken két alapértékpapírral kereskednek: az egyik rizikómentes, melyet kötvénynek fogunk nevezni, míg a másik már véletlentől függő, azaz rizikós, melyet pedig részvénynek fogunk nevezni. Számos, ilyen piacokkal kapcsolatos fogalmat kívánunk ismertetni, például: önfinanszírozó stratégiák, fedezeti stratégiák, piaci arbitrázs. Szükséges és elégséges feltételeket fogalmazunk meg két fontos piaci jellemzőre: az egyik a piaci arbitrázs (9. Fejezet), a másik a piac teljessége (10. Fejezet). Az opciós ügyletek több típusával ismertetjük meg az olvasót (8. Fejezet): elsősorban európai típusú ügyleteket vizsgálunk, de kitérünk röviden amerikai típusúakra is, más szempontból vételi és eladási opciókkal foglalkozunk. Az megértéshez szükséges közgazdasági fogalmakat ismertetjük, továbbá példákon át azokat bemutatjuk.

Látni fogjuk, hogy az opcióárazás problémáját általánosabban is kezelhetjük, mint feltételes követelések árazási problémáját. Ezért a feltételes követelésekre kapott árformulákból kapjuk majd az egyes ismert opcióárazási formulákat (11. Fejezet).

A módszerek alapját martingálelmélet, és különösen a folytonos idejű piacok esetén sztochasztikus kalkulus jelenti. Az egyszerűbb diszkrét idejű modellben használt módszerek és eredmények megértése azért is fontos, mert számos helyen alkalmazhatóak analóg ötletek és módszerek a folytonos idejű modellben is, melyek technikailag nagyobb eszközrendzsert (sztochasztikus kalkulus) igényelnek. A könyv végén, a 11. Fejezetben röviden utalunk a legnevezetesebb folytonos idejű modellre és az általunk tárgyalt diszkrét idejű modellek kapcsolatára a folytomos idejű modellekkel.

Igaz, azt is meg kell itt említenünk, hogy az alapvető diszkrét idejű eredményekhez nem feltétlenül szükséges a valószínűségszámítási megközelítés (ld. [16]).

7.1. Alapértékpapírok és kereskedés a piacon

Általános feltételek

Mindenekelőtt ismertetjük azokat a piactípusokat, amelyeket a továbbiakban vizsgálni kívánunk. Olyan pénzügyi piacokkal fogunk foglalkozni, amelyeken a piaci szereplők (vagy résztvevő) (például kereskedők, spekulánsok, befektetők) számára adott két pénzügyi eszköz —alapértékpapír—, melyekkel kereskedés folyik minden időpillanatban. Ezen alapértékpapírok egyikét *részvény*nek, míg a másikat *kötvény*nek fogjuk nevezni. Feltesszük, hogy a piaci szereplőknek a részvényekkel illetve kötvényekkel való kereskedés során nem kell *tranzakciós költség*et fizetni. Természetesen ezek mellett származtatott értékpapírok is elérhetőek a piacon. Ezek szerepével, árazásával foglalkozunk a későbbiekben.

A piacot egy véges $[0, T]$ $(T \in \mathbb{R}^+)$ időintervallumon fogjuk vizsgálni, ahol a 0 felel meg a *jelenlegi időpont*nak, a T pedig az ún. *lejárati idő*t jelöli. Az idő szempontjából megkülönböztetünk diszkrét és folytonos idejű modelleket. Az első fejezetekben diszkrét idejű modellekkel fogunk foglalkozni. Ebben az esetben feltesszük azt, hogy adott az időpillanatoknak egy $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_{N-1} < t_N = T$ véges sorozata. Ezeket az időpontokat *kereskedési idő*nek fogjuk nevezni, ezek jelölik azon időpontokat, amikor az új árak a piacon életbe lépnek, ismertté válnak.

A kötvény egy *kockázatmentes* eszköz, hiszen a B-vel jelölendő ára az időnek és a kamatlábnak egy determinisztikus függvénye lesz, ahol a kamatlábról feltesszük, hogy ismert és nem véletlen (de nem szükségképpen konstans) a $[0, T]$ időintervallumban. Közgazdasági megközelítésben a kötvények olyan követelések, amelyeket általában az állam, a vállalatok, a bankok és egyéb pénzügyi intézmények bocsátanak ki annak érdekében, hogy forrásaikat növeljék. Ilyenek például az államkötvények, kincstárjegyek, vállalati kötvények.

A kötvénnyel ellentétben a részvény egy *kockázatos* eszköz, amelynek S-sel jelölt árát véletlentől függőnek tekintjük, azaz sztochasztikus folyamatnak, mely a $[0, T]$ intervallumon van definiálva. Részvényeket általában bizonyos vállalatok (pl. részvénytársaságok) bocsátanak ki a működésükhöz szükséges tőke biztosításához.

Fontos azonban hangsúlyozni, hogy a következőkben leírt matematikai modellekben mindössze annyit szükséges feltennünk, hogy az egyik piaci eszköz ára véletlenül változzon, míg a másiké ne legyen véletlentől függő. Ezért elméletünkben nem csak a hagyományos közgazdasági értelemben vett részvények tehetnek eleget a részvény definíciójának, hanem (külföldi) devizák és egyéb (pénzügyi) eszközök is, amelyek árfolyamata a fentiekben leírt módon modellezhető. A hagyományos értelemben vett részvények esetén elsősorban a piac aktuális állapotának váltakozása illetve a vállalat termelési tevékenysége és annak változásai okozzák a részvény árának véletlen mozgását. Hasonlóan, az elméletünk kötvényfogalma sem egyezik meg a közgazdasági kötvényfogalommal. Tekinthetünk kötvénynek az elméletünkben minden olyan eszközt, amelynek a vizsgált időszakra vonatkozó árfolyamata ismert. Ilyen eszköz lehet a nemzeti valuta, amelyben a részvények árait kifejezzük, s amelynek kamatlába az a kamatláb, amely pénzkölcsön esetén a fizetendő kamatot meghatározza.

A továbbiakban a kötvény illetve a részvény t_n $(n = 0, \ldots, N)$ időpillanatbeli árát rendre B_n illetve S_n fogja jelölni. A fentiek alapján B_n egy valós konstans, míg S_n egy valószínűségi változó lesz. Megjegyezzük azonban, hogy a szakirodalomban több szerző általánosabban azzal a feltételezéssel él, hogy a kötvény árfolyamata is változhat véletlenül, ám az árfolyamat prediktálható, azaz B_n értéke ismertté válik (legkésőbb) a t_{n-1} időpontban. Ekkor a könyvünkben tárgyalt eredmények egy része vagy annak analógja levezethető lenne, de ezzel az általános esettel nem foglalkozunk.

Feltesszük azt is, hogy a *kockázatmentes kamatláb*ra kölcsön felvétele és kölcsön adása egyaránt lehetséges. Itt megjegyezzük, hogy általában a kötvény árfolyamatát a kamatlábbal határozzuk meg (adjuk meg), vagy éppen fordítva. Nevezetesen, az esetek többségében a kötvény árát a t_n időpontban $(n = 1, \ldots, N)$ $B_n = (1+r_n)B_{n-1}$ alakban adjuk meg, ahol r_n a

$[t_{n-1}, t_n]$ időszakhoz tartozó kamatláb, azaz a t_n-ben kapott hozam a $[t_{n-1}, t_n]$ időszak után. Ha azonban adott a kötvény árfolyamata, akkor az $r_n := B_n/B_{n-1} - 1$ $(n = 1, \ldots, N - 1)$ formulával definiálhatjuk a kamatlábat. Úgy is megfogalmazhatjuk feltételünket, hogy kötvényeket lehet kölcsönbe adni és venni egyaránt. Fontos hangsúlyozni, hogy a kötvény ára csak a kereskedési időpontokban változik, azaz az ár konstans B_n a $[t_n, t_{n+1})$ időintervallum alatt (ahol $(n = 0, \ldots, N - 1)$) és a B_{n+1} ár $(n = 1, \ldots, N - 1)$ a t_{n+1} időpontban lép érvénybe.

Hasonló feltételt fogalmazunk meg a részvényekre is. Feltesszük, hogy részvények fedezetlen eladása megengedett. Ez azt jelenti, hogy eladhatunk részvényeket egy $[0, T]$-beli időpontban úgy, hogy a részvényeket csak a lejárati időpontban (T) kell átadni. Úgy is fogalmazhatunk, hogy S_t összegben pénzkölcsönt kapunk a $t \in [0, T]$ időpontban (amely megfelel egy részvény értékének), de ez esetben a kölcsön értéke részvényegységben van kifejezve, azaz a T időpontban egy részvény árát kell visszafizetni, amely megfelel az S_T pénzösszegnek. Tehát a fedezetlen részvényeladást részvénykölcsönként is értelmezhetjük.

Kereskedés a piacon

A piac szereplői azok, akik részvényeket vagy kötvényeket adnak el vagy vásárolnak meg. Amennyiben egy piaci szereplő β egységnyi $(\beta \in \mathbb{R})$ kötvényt és γ egységnyi $(\gamma \in \mathbb{R})$ részvényt birtokol, akkor másszóval azt mondjuk, hogy a (β, γ) párral definiált π *portfólió*t birtokolja.

Tegyük fel, hogy egy befektető a $t_0 = 0$ időpontban már rendelkezik egy $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ portfólióval, amelyben β_0 jelöli a birtokolt kötvények számát és γ_0 a birtokolt részvények számát. Ezek alapján a kezdeti időpontban $X_0 \geq 0$ kezdőtőkével rendelkezik az egyén, melyre $X_0 = \beta_0 B_0 + \gamma_0 S_0$, ahol S_0 és B_0 a részvény és a kötvény kiindulási árai. Ebben a kiindulási időpontban, az új piaci információk (pl. árak) ismeretében az egyén dönthet a portfóliója átrendezéséről, kötvények eladásával és részvények vásárlásával, vagy éppen fordítva, s ezzel létrehozhat egy új $\pi_1 = (\beta_1, \gamma_1)$ portfóliót. A portfólió átrendezésére vonatkozóan kettő megszorítást teszünk:

- egyrészt feltételezzük, hogy az átrendezést csak a t_1 időpont előtt rendelkezésre álló információk alapján, azaz a B_0 és S_0 árak alapján végezte el a befektető,
- másrészt feltesszük, hogy nem lehetséges sem a tőkéből való pénzelvonás (pl. adók vagy tranzakciós költségek miatt), sem a tőkéhez pénz hozzátétele (pl. részvények után kapott osztalék miatt).

Tehát adhatunk el értékpapírt, vehetünk fel kölcsönt (kötvényben) vagy akár short selling segítségével csökkenthetjük a részvénymennyiséget, de a felszabaduló teljes összeget a másik értékpapírba kell fektetni. A fentiek alapján az átrendezett portfólió ki kell, hogy elégítse az

$$X_0 = \beta_1 B_0 + \gamma_1 S_0$$

egyenletet. A fenti feltételek esetén a befektetési stratégiát *önfinanszírozó*nak nevezzük.

Jegyezzük meg, hogy az önfinanszírozás szempontjából valójában nem lényeges a kezdeti $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ portfólió ismerete, elég az X_0 kezdeti tőkét ismernünk.

A t_1 időpontban az új árakat bejelentik és azok életbe lépnek a piacon, ezért az ekkor π_1 portfóliót birtokló befektető által realizált új portfólióérték

$$X_1 = \beta_1 B_1 + \gamma_1 S_1.$$

Látható, hogy a részvényár véletlen változásának következtében tőkeveszteség jelentkezhet (ha $X_0 > X_1$), de ugyanakkor nyereséget is realizálhat a befektető (ha $X_0 < X_1$).

Ha a fentiekhez hasonlóan a befektető folytatja a *stratégiáját*, akkor egy tetszőleges t_{n-1} kereskedési időpontban a $\pi_{n-1} = (\beta_{n-1}, \gamma_{n-1})$ portfólió birtokosa lesz, amelynek értéke a t_{n-1}-beli B_{n-1} és S_{n-1} árak ismeretében $X_{n-1} = \beta_{n-1}B_{n-1} + \gamma_{n-1}S_{n-1}$. A t_n kereskedési időpont előtt az addig elérhető piaci információk (például spot árak és korábbi árak) birtokában a befektető ismét átrendezheti a portfólióját, kialakítva ezzel egy új $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ portfóliót úgy, hogy az eleget tesz az *önfinanszírozás feltételének*, tehát $X_{n-1} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$. A t_n időpontban az új árak bejelentésekor ez azt jelenti, hogy a befektető az $X_n = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ tőkeértéket fogja realizálni. Egy ilyen stratégia esetén az $\{X_n\}_{n=0}^N$ sorozatot a stratégiához tartozó értékfolyamatnak fogjuk nevezni.

Fontos kiemelnünk, hogy a részvények és a kötvények árai nem vehetnek fel negatív értéket, ám a portfólióban lehetnek negatív értékek. Egy negatív β érték egy kölcsönnek felel meg. Ez azt jelenti, hogy egy t időpontban kapott x összegű kölcsön esetén ($t \in [t_n, t_{n+1})$, $0 \leq n \leq N-1$) a kölcsönt felvevőnek xB_m/B_n összeget kell visszafizetnie, ha kötelezettségének a t_m időpontban tesz eleget (ahol $n < m \leq N$). A γ negatív értékei pedig fedezetlen részvényeladásoknak felelnek meg. Végül megjegyezzük, hogy további feltétel lehetne az, hogy az $\{X_n\}_{n=0}^N$ értékfolyamat ne vehessen fel negatív értékeket, hiszen ez valós gazdasági helyzetben igen természetes feltételnek tűnik ($X_n < 0$ ugyanis a befektető csődjének felelne meg). Azonban látni fogjuk a 9. és 10. Fejezetekben, hogy ezt nem szükséges külön megkövetelni a későbbiekben definiált modelljeinkben.

A matematikai modellben az információ áramlását σ-algebráknak egy monoton növekvő rendszere, még pontosabban fogalmazva egy filtráció fogja reprezentálni (ld. 8.1.1. Definíció). Egy t_n időponthoz tartozó σ-algebra azon eseményekből áll, amelyekről az adott időpontig történő megfigyelések alapján el tudjuk dönteni, hogy bekövetkeztek-e vagy sem. Így minél több idő telik el (azaz minél nagyobb az n index értéke t_n-ben), annál több információhoz juthatunk és ezért annál gazdagabb lesz az adott időponthoz tartozó σ-algebra.

Példa: bináris piacok

A *bináris piac* egy egyszerű típusa a diszkrét idejű piacoknak. A bináris piacon a $B_0, B_1, \ldots, B_N$ kötvényárakat

$$B_n = (1 + r_1)(1 + r_2) \ldots (1 + r_n)B_0 \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

formulával adjuk meg, azaz

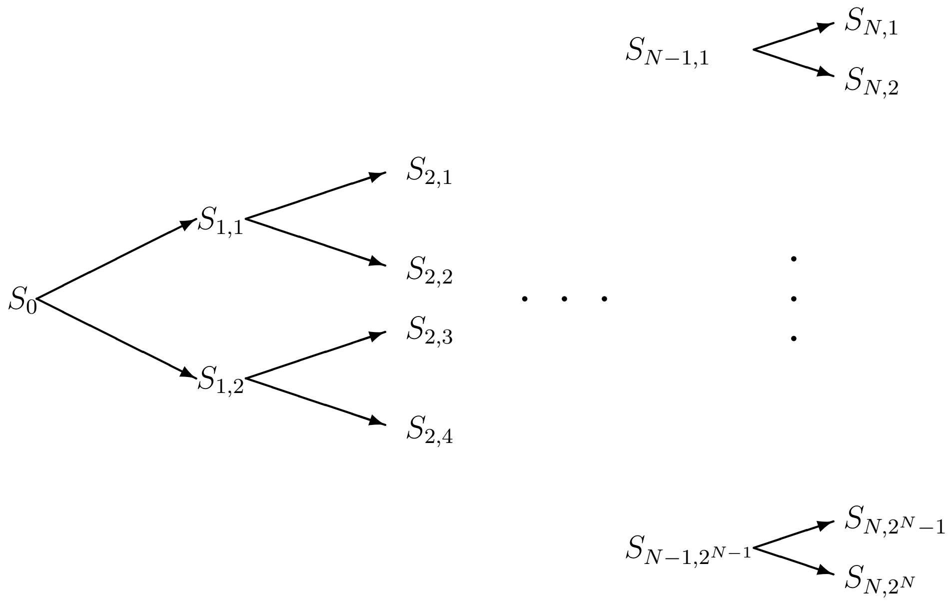
$$B_n = (1 + r_n)B_{n-1} \qquad (n = 1, \ldots, N)$$

ahol N a kereskedési idők száma, r_n pedig $[t_{n-1}, t_n]$ időintervallumhoz tartozó kamatlábat jelöli.

A részvény árfolyamatának induló értéke S_0, majd minden kereskedési időpontban két lehetséges érték közül veszi fel az egyiket véletlenül. A két lehetséges érték egyike rendszerint az ár növekedéséhez vezet, míg a másik árcsökkenést eredményez. A részvény árának fejlődését egy irányított bináris fával szemléltethetjük (ld. 7.1. Ábra), amelynek gyökere S_0 és az n-ik réteg minden csúcsa ($n = 0, \ldots, N$) a t_n időpontbeli lehetséges árak egyikének felel meg. A fa minden csúcsából –a fa levelei kivételével– két irányított él indul ki, amelyek az árnak a következő kereskedési időponthoz tartozó két lehetséges ugrását szemléltetik. Tehát a t_n időpontban a lehetséges 2^n ár egyike fog bekövetkezni; a 2^N levél pedig az árfolyamat 2^N trajektóriájának feleltethető meg, amelyek az ár $[0, T]$ időintervallum alatti fejlődését írják le.

Ezt a modellt általánosan nemhomogén bináris modellnek is szokták nevezni, hangsúlyozva, hogy ennek speciális eseteként áll elő az ún. homogén modell. A homogén modellben a kamatláb konstans a vizsgált időintervallumon, a részvények hozamai (azaz $S_n/S_{n-1} - 1$, $n = 1, \ldots, N$) –amelyek mindegyike valószínűségi változó– pedig függetlenek és azonos eloszlásúak. Ezeket a feltételeket a következőképpen írhatjuk le. Adott egy $r \geq 0$ konstans és a $-1 < a < b$ együtthatók úgy, hogy

$$r = r_1 = r_2 = \ldots = r_N$$



7.1. ábra. *A részvény árfolyamata bináris piacon*

Minden n $(0 \leq n \leq N)$ esetén $\{S_{n,k} \,|\, k = 1, \ldots, 2^n\}$ a fa n-edik *rétege*.

és

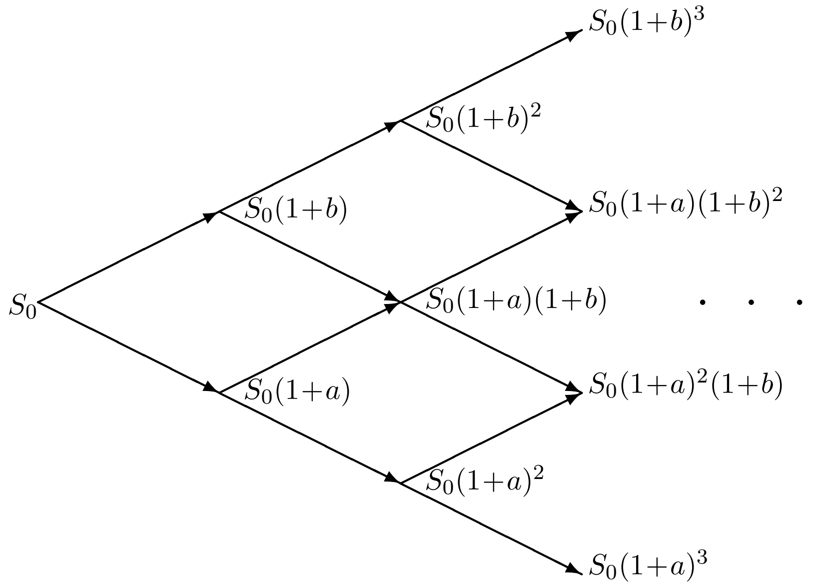
$$S_n = S_{n-1}(1 + \rho_n) \quad n = 1, \ldots, N,$$

ahol a ρ_n-ek független azonos eloszlású valószínűségi változók, amelyek csak az a vagy a b értékeket vehetik fel. Egy ilyen árfolyamatot leíró fát mutat be a 7.2. Ábra.

A piacok további jellemzői

A piacok tárgyalása során felmerül egy újabb lényeges fogalom, nevezetesen az *arbitrázs* (arbitrage) fogalma.

Az arbitrázs lehetőség fogalmát precízen fogjuk tárgyalni (definiálni, jellemezni). Itt most csak 'pongyolán', általánosságban a következő leírást adjuk: egy olyan lehetőség ügyletek kötésére, azaz pozíciók felvételére a piacon, mely a piaci tökéletlenségeket kihasználva biztosít kockázatvállalás nélkül profitot. Másképpen fogalmazva az arbitrázs —vagy ingyen-



7.2. ábra. *A részvény árfolyamata homogén bináris piacon*

Itt a fa n-edik rétege (ld. 7.1. Ábra): $\{S_0(1+a)^k(1+b)^{n-k} \mid k = 0, \ldots, n\}$.

ebéd— egy olyan ingyen lottó lesz, melyen már csak nyerhetünk.

Az arbitrázs egyik klasszikus példája az, amikor egy piaci szereplő felismeri, hogy két piacon bizonyos jószágnak, valutának vagy éppen részvénynek különbözőek az árai és ezt kihasználva mindkét piacon párhuzamosan tranzakciókat kezdeményez. Például megvásárol egy bizonyos mennyiséget egy eszközből az egyik piacon és azt szinte azonnal eladja a másik piacon magasabb áron. Az ún. kamat-arbitrázs (interest arbitrage) egy másik típusa az arbitrázsnak. Ebben az esetben az egyes országokban a különböző nagyságú kamatlábak jelentik a rizikómentes profitszerzés lehetőségét.

Bár a mindennapi életben a piaci tökéletlenségek miatt előfordulhat, hogy arbitrázs lehetőségekkel találkozunk, elméleti szempontból mégis azok a piacok lesznek az érdekesek, ahol nincs arbitrázs lehetőség. Ezért a fentiek mellett további feltételekre lesz szükségünk a diszkrét idejű piacokon az arbitrázsmentesség biztosítására.

Ezen probléma vizsgálata során felmerül egy újabb fogalom, a *piaci teljesség*, amely egy igen kedvező tulajdonsága egyes piacoknak főleg a matematikai kezelhetőség szempontjából. A teljességre szükséges és elégséges feltételeket fogunk megfogalmazni. Egy piac teljessége azt jelenti, hogy bármely előzetesen célként rögzített tervezett vagyonérték pontosan elérhető, kigazdálkodható a T lejárati időre akkor, ha egy bizonyos mennyiségű kezdeti tőke a rendelkezésünkre áll. A tervezett vagyonérték azonban nem szükségképpen egy konstans összeg, hanem megadható például a részvényárnak a lejárati időpontig történő mozgásának függvényében is, azaz az lehet az $S_0, S_1, \dots, S_N$ árak egy függvénye is, azaz egy véletlen kifizetés. Hiszen az világos, hogy bármely konstans vagyonérték kigazdálkodható úgy, hogy annak T-ről a jelenlegi időpontra diszkontált értékének (azaz a jelenértékének) megfelelő összeget lekötnénk, tehát kötvényt vásárolnánk az adott összegért.

7.2. Opciók

Opciók, mint származtatott értékpapírok

Tekintsünk egy, a 7.1. Fejezetben leírt értékpapírpiacot. Ott leírtuk azokat az alapvető értékpapírokat, amelyekkel egy ilyen piacon kereskednek. Ezen alapvető értékpapírok segítségével azonban tudunk újabb, összetettebb pénzügyi szerződéseket is létrehozni. Így újabb értékpapírokat kaphatunk, amelyeket *származtatott értékpapír*oknak nevezünk, hangsúlyozva ezzel azt, hogy ezek más (már létező) értékpapíroktól függnek. A származtatott értékpapír-szerződések a szerződő felek bizonyos jogait tartalmazzák az ,,alapvető” pénzügyi eszközökre vonatkozóan, ezért értékük is függ ezen ,,alapvető” pénzügyi eszközök értékétől. Ez az oka annak, hogy gyakran *feltételes követelés*ekként is hivatkoznak a származtatott értékpapírokra az irodalomban. A forward és futures szerződések egyaránt említhetőek példaként, mint ahogy az opciós szerződések is származtatott értékpapírok, s ez utóbbi típus a tárgya elsősorban ennek a résznek.

Elsősorban az ún. európai illetve amerikai opciókra fordítjuk a figyelmünket, amelyek a legismertebb és legelterjedtebb típusú opciók. Mindkét esetben két alapvető osztályát különböztethetjük meg ezen típusoknak, az egyiket vételi, míg a másikat eladási opciónak (vagy opciós ügyletnek) nevezzük.

Egy adott részvényre megkötött *vételi opciós szerződés* azt a jogot biztosítja a papír tulajdonosának (vagy vásárlónak, birtokosnak), hogy a szóbanforgó részvényt az opció eladójától (vagyis kibocsátójától) megvásárolhassa egy, a szerződésben rögzített áron egy jövőbeli időpillanatban vagy időpillanatig (dátumig). Ezzel szemben az *eladási opció* esetén a vevő joga az adott részvény eladása a rögzített áron a meghatározott időben. A szerződésbeli rögzített árat *érvényesítési ár*nak nevezzük és K-val fogjuk jelölni ebben a részben. Azt a végső dátumot, ameddig az opciós jogot érvényesíteni lehet (azaz a vevő az opciós szerződés típusától függően vásárolhat vagy eladhat egy részvényt) *lejárati idő*nek (dátumnak) nevezik az irodalomban és T-vel fogjuk a továbbiakban jelölni, hiszen ez az az utolsó időpont, ameddig a piacot meg kívánjuk figyelni, mint az értékpapír tulajdonosai.

Az *amerikai és az európai típusú opciós ügyletek* a lejárati idővel kapcsolatban tartalmaznak különböző szerződési feltételeket. Az európai opciót csak a lejárati T időben lehet érvényesíteni ellenben az amerikaival, amely a lejáratig bármely időpontban érvényesíthető.

Lényeges kiemelnünk, hogy a fenti joga az opció tulajdonosának természetesen nem kötelessége egyben; az ő döntésén múlik, hogy él-e ezzel a joggal és lehívja az opciót, vagy nem.

Az opció lehívása

Most tekintsünk egy részvényre vonatkozó európai vételi opciót egy értékpapírpiacon. Jelöljük most ezen részvény $t \in [0, T]$ időpontbeli értékét S_t-vel. Megjegyezzük ugyanis, hogy az elkövetkezendő opciókról megfogalmazott általános megállapításaink nem csak a diszkrét idejű esetre teljesülnek. Így B_t, S_t helyett a későbbi 8.1.1. Definícióbeli $S_1, \ldots, S_N, B_1, \ldots, B_N$ jelöléseket csak akkor fogjuk használni, ha megjegyzéseink speciálisan csak a diszkrét idejű piacokra érvényesek.

Ha a lejárati T időpillanatban a részvény S_T piaci ára nagyobb, mint az érvényesítési ár, akkor a tulajdonos vásárolhat egy részvényt K áron és eladhatja azt azonnal a piacon S_T áron, hogy ezzel az $S_T - K$ nagyságú profitot realizálja. Ám előfordulhat, hogy S_T kisebb vagy egyenlő, mint K, s ezzel az opciós szerződés értéktelenné válik, hiszen semmi értelme nem lenne az opciós jogot érvényesítve részvényt vásárolni, ha a piacon az olcsóbban megszerezhető. Így azt mondhatjuk, hogy az opciós szerződés lényegében felruházza annak tulajdonosát a lejáratkor az

$$(S_T - K)^+ := \max(0, S_T - K)$$

jövedelem megszerzésére, amely nyílvánvalóan egyben az opciót kibocsátó veszteségének felel meg. Másszóval az opció értéke a T időpontban $(S_T - K)^+$.

Ennélfogva könnyen találhatunk korlátokat a K értékére. A K értékét az S_T lehetséges értékeinek tartományából ésszerű venni, igaz, ez az állítás csak akkor használható, ha ezen tartomány valahogy előrejelezhető. Például egy a és b együtthatókkal ellátott d.i.h.b.-$(B, S)_N$ piacon a

$$\min_{\omega \in \Omega}(S_N(\omega)) = S_0(1+a)^N < K < S_0(1+b)^N = \max_{\omega \in \Omega}(S_N(\omega))$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülni, feltéve, hogy a szerződő felek racionális döntéseket hoznak.

Bizonyos módosításokkal a fentiekkel analóg megjegyzéseket tehetünk európai eladási opciók és amerikai opciók esetén is. Mindössze kettőt említünk közülük. A vételi opció tulajdonosával ellentétben az eladási opció tulajdonosa azt szeretné, hogy a részvény ára menjen az érvenyesítési ár alá, hiszen ekkor a piaci árnál magasabbért vásároltathatná meg az opció kibocsátójával a részvényét. Nyílvánvaló, hogy amerikai opciók esetén a fentiekben tett megállapításokban T és S_T szerepét tetszőleges $t \in [0, T]$ és hozzá tartozó S_t játsza.

Pozíciók

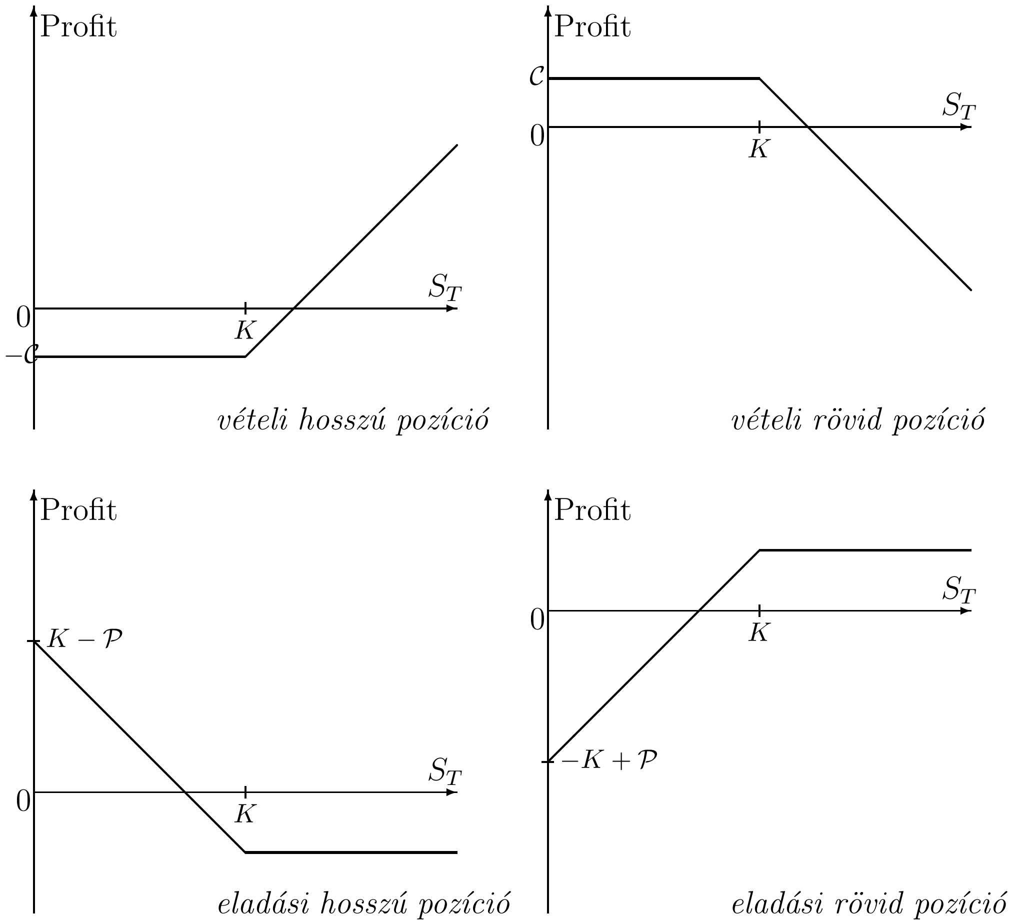
A különböző értékpapírok esetén az egyes felek szerződésben játszott szerepe alapján különböző pozíciókat tudunk értelmezni. Azt mondjuk, hogy egy (vételi vagy eladási) opció vásárlója a (vételi vagy eladási) *hossz-spekulációs pozíció*ban (hossz-pozícióban) van, míg az opciót eladó fél a (vételi vagy eladási) *bessz-spekulációs pozíció*t (bessz-pozíciót) birtokolja, melyek megfelelő kötelezettségekkel járnak együtt.

Hasonlóan, a részvény birtoklása egy *részvény hossz-pozíció*t jelent, ellentétben a *részvény bessz-pozíció*val, mely egy fedezet nélküli részvényeladás következményeként azt a kötelezettséget jelenti, hogy egy meghatározott lejárati dátumig kell a részvényt átadni.

Az opciók ismertetésének és besorolásának egy hasznos eszköze az, ha meghatározzuk az egyes pozíciókban a kifizetés értékét arra az időpontra vonatkozóan, amikor az opciós jog érvényesítésre kerül. Sőt, ez az egyedüli információ, amely a továbbiakban a matematikai modellünkhöz szükséges az opciókról. Azt a függvényt, amely megmutatja az opció tulajdonosa által kapott pénzösszeget (az opció érvényesítésének időpontjában), az opcióhoz tartozó *kifizetési függvény*nek nevezzük. Könnyen látható, hogy a kifizetési függvény

- $(S_T - K)^+ := \max(S_T - K, 0)\ (\geq 0)$ európai vételi hossz-pozíciónál, s ennélfogva
- $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)\ (\leq 0)$ európai vételi bessz-pozíció esetén,
- $(K - S_T)^+ := \max(K - S_T, 0)\ (\geq 0)$ európai eladási hossz-pozíciónál, s így
- $-\max(S_T - K, 0) = \min(K - S_T, 0)\ (\leq 0)$ európai eladási bessz-pozíciónál.

A fenti képletekben T-t $t \in [0, T]$-vel helyettesítve megkapjuk az amerikai opciók különböző pozícióinak megfelelő kifizetési fügvényeit a t időpontra vonatkozóan (ha azok



7.3. ábra. *A teljes profit vagy veszteség európai opcióknál a lejáratkor*

A $\mathcal{C}$ illetve $\mathcal{P}$ a vételi illetve eladási opciókért fizetett összeg. Minden esetben a nyereség vagy veszteség (függőleges tengelyen) az S_T részvényár (vízszintes tengely) függvényeként van ábrázolva.

a t-ben lennének érvényesítve).

Ahhoz, hogy a teljes nyereséget vagy veszteséget megkapjuk az egyes pozíciók esetén, módosítanunk kell a fenti formulákat azzal a pénzösszeggel, amit az opcióért fizetett a vásárló az eladónak (kibocsátónak) a 0 időpillanatban, azaz az opció árával. Ezt mutatja a 7.3. Ábra, ahol az egyszerű kifizetési függvények miatt az ott szereplő egyenesszakaszok meredeksége rendre 0 vagy 1 vagy -1.

Egy európai vételi opció kibocsátója létrehozhat egy ún. fedezett vételi pozíciót úgy, hogy az opció eladásával egy időben egy részvényt vásárol. Így a kibocsátó esetleges vesztesége ($(S_T - K)^+$) már fedezve lenne, ha az opciós jogot vele szemben érvényesítenék. Hasonlóan beszélhetünk fedezett eladási pozícióról, amely azt jelenti, hogy egyszerre van a birtokunkban egy részvény és egy eladási opció. Könnyen ellenőrizhető a 7.3. Ábrára pillantva, hogy az alábbi pozíciók két ekvivalenciája (a teljes nyereségekre vonatkozóan) érvényben van:

$$\text{fedezett vételi pozíció (részvény hossz + vételi bessz)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{eladási bessz,} \tag{7.1}$$

$$\text{fedezett eladási pozíció (részvény hossz + eladási hossz)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{vételi hossz.} \tag{7.2}$$

Ezek az egyszerű összefüggések különösen az opciókkal való kereskedések első éveiben játszottak fontos szerepet, ugyanis akkor még az eladási opciók nem voltak engedélyezve, ám (7.1) és (7.2) segítségével ezek a pozíciók ,,mesterségesen" létrehozhatók voltak.

Az alapfeladat: az opció árazása

A későbbiekben, ha hangsúlyozandó a különbség, $\mathcal{C}$ illetve $\mathcal{P}$ fogja jelölni az éppen vizsgált vételi illetve eladási opció árát, annak Eu és Am indexe pedig rendre arra fog utalni, hogy az adott opció európai-e vagy éppen amerikai.

Az opciókkal kapcsolatos alapvető kérdés tehát a következő. *Mennyi az opció fair vagy ésszerű ára a kezdeti* 0 *időpontban?* Természetesen a kérdés egyben felveti a 'fair' szó értelmezését is? Egyelőre annyit mondunk, hogy fairnek olyan árat képzelünk el, melyet a szerződés mindkét fele elfogadhatónak tart a piaci információk alapján. Ám felvetődik természetesen az a módosított kérdés is, hogy (legfeljebb) mennyit lennénk hajlandóak fizetni a kezdeti 0 időpontban egy opciós szerződésért, amely feljogosít egy véletlentől függő, azaz bizonytalan összeg realizálására a lejáratkor. A későbbiekben erre a kérdésre 'vevői feladatként' hivatkozunk. Továbbá ennek mintájára azt is kérdezhetnénk, hogy (legalább) mennyiért lennénk hajlandóak egy ilyen kötelezettséget vállalni az opció kiadásával. A későbbiekben erre a kérdésre 'eladói feladatként' hivatkozunk.

Látni fogjuk a könyvünkben illetve a [7] példatárban, hogy ezek a nem teljesen azonos kérdések mind érdekes feladathoz vezetnek, melyek egyes egyszerű piacokon akár azonos válaszokat is adnak, más esetben viszont különböző árakhoz vezetnek. Mégis lesz bennük egy fontos közös elem: mindegyik konzisztens lesz a piaccal, a piac többi értékpapírjával abban az értelemben, hogy nem biztosít arbitrázslehetőséget a piacon senki számára. Ezzel meg is foglamaztuk a 'fairség' vagy 'ésszerűség' értelmezését: azok az árak lesznek ilyenek, melyen mellett a piac arbitrázsmentes marad.

A korábbiakban ismertettük az opciók legfontosabb típusait és meghatároztuk azoknak a lejárati időhöz tartozó kifizetési függvényét. Másképpen úgy is fogalmazhatnánk, hogy a kifizetési függvény megmutatja az opció lejáratkori értékét a piac állapotától függően (így pl. az alaptermék árától függően), s a feladat az, hogy az opció korábbi időpontokhoz tartozó (lehetséges) értékeit, különösen a kezdeti 0 időponthoz tartozó értékét —azaz jelenlegi árát— meghatározzuk.

Tekintsünk például egy európai vételi opciót K lehívási (érvényesítési) árral és legyen T a lejáratának ideje. Láttuk, hogy egy ilyen értékpapír azt a jogot biztosítja a vásárlójának, hogy egy részvényt vásárolhasson a lejáratkor K áron. Ezzel a vásárló egy jövőbeli (lejáratkori, T-beli) bizonytalan $(S_T - K)^+$ összeget vásárolt meg. A szerződés eladója számára ugyanez a kifizetés egy bizonytalan kötelezettséget jelent, amelyet a lejáratkor kell kifizetnie, akkorára kell kitermelnie.

A fentiekben kifejtett feladatok közül most tekintsük az eladói feladatot. Ekkor olyan árat keresünk, amely biztosítja a lehetőséget a kibocsátó számára, hogy a felmerülő esetleges veszteségeit (amely éppen $(S_T - K)^+$) képes legyen fedezni a lejáratkor. Tehát keressük meg az ehhez szükséges minimális kezdőtőkét, s adjuk ezt az eladónak, mint opciós díjat a szerződés megkötésekor. Ezt a mennyiséget a későbbiekben (ld. a 8.2.12 Definíció) $\mathbb{C}_{N,f_N}$ fogja jelölni, ahol az esetünkben $f_N(S_N) = (S_N - K)^+$.

Ekkor az alábbiakat fogjuk belátni a feladat megoldásáról, $\mathbb{C}_{N,f_N}$-ről, amely alapján azt az opció fair árának tekinthetjük.

- Ez egy olyan tőkemennyiség, mely lehetővé teszi a kibocsátó számára, hogy a tervezett $(S_N - K)^+$ tőkére egy fedezeti stratégiát szervezzen, amely kitermeli a fenti kifizetési kötelezettségét.
- Továbbá ez a minimális ilyen tulajdonságú kezdeti tőke (ld. 8.2.14 Megjegyzés), amely azt jelenti, hogy semmilyen ennél alacsonyabb ár esetén nem tudná biztosan teljesíteni a szerződési kötelezettségeit a kibocsátó. (Azaz ez az eladói feladat megoldása.)
- Bármely ennél magasabb ár arbitrázs lehetőséget teremtene a kibocsátó számára, ugyanis ez egy $\mathcal{C}^{Eu} - \mathbb{C}_{N,f_N}$ nagyságú profit azonnali realizálását biztosítaná a kibocsátónak, hiszen $\mathbb{C}_{N,f_N}$ nagyságú tőke elég lenne a szerződésbeli kötelezettségei kielégítésére úgy, ahogy azt már fent leírtuk (azaz $\mathbb{C}_{N,f_N}$ kezdeti tőkével indulva egy fedezeti stratégiát $(S_N - K)^+$-re végrehajtva).

A fentieknél még többet is beláthatunk majd egyes esetekben. Nevezetesen, bizonyos esetekben —így például a későbbiekben részletesen tárgyalandó teljes piacokon— a fenti $\mathbb{C}_{N,f_N}$ kezdőtőkével esetén létezik majd egy olyan fedezeti stratégia, mely pontosan annyit termel ki, amennyi a kötelezettség. Ezt fogjuk minimális vagy tökéletes fedezeti stratégiának nevezni. Ekkor látni fogjuk, hogy minden ennél alapcsonyabb ár is arbitrázst eredményez, ez esetben a vevő számára. Ezt a későbbiekben és a [7] példatárban is részletesen fogjuk tárgyalni, így most csak egyszerűen azt mondjuk, hogy ehhez a vevőnek a fentiekben ismertetett eladói arbitrázs stratégia ellenkezőjét (fordítottját) kell megvalósítania (azaz minden ottani pozíció -1-szeresét kell felvennie). Ilyen esetekben tehát teljes a megoldásunk, mert egyetlen arbitrázsmentes árat találhatunk. Látni fogjuk, hogy a bináris piacok például ilyenek lesznek.

Egyben a példákban (ld. [7] példatár) azt is meg fogjuk mutatni, hogy ilyen esetekben a vevői és az eladói feladat megoldása megegyezik, s egyben megegyezik a tökéletes fedezetet kereső feladat megoldásával. A bonyolultabb esetekben tökéletes fedezet nem feltétlenül létezik, míg a vevői és az eladói árak pedig eltérnek, így ilyenkor nem lesz egyértelmű ár, mert egy intervallumot lehet megadni, melynek minden eleme egy lehetséges arbitrázsmentes ár. Erre is adunk példákat a [7] példatárban.

Hasonló módon kaphatjuk bármely európai opció árát is, ha f_N helyébe az adott opció kifizetési függvényét írjuk. Most pedig tekintsünk általánosan egy olyan feltételes követelést, amelynek kifizetése az $f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ alakban írható fel. Ez azt jelenti, hogy a kifizetés a részvény árfolyamatának egész múltjától függ. Ekkor ugyancsak alkalmas a fenti módszer egy ilyen feltételes követelés árazására.

A fenti árazási elvek elfogadása után további fontos kérdések jelentenek majd kihívást az opcióárazással kapcsolatban az általunk tárgyalt modellekben. Egyrészt ki kell számolni az ésszerű árat, a gyakorlatban is alkalmazható formulákat kell levezetnünk. Másrészt keresnünk kell tökéletes fedezeti stratégiát is, ha egyáltalán van. Ennek nem csak azért van jelentősége, mert teljessé teszi a kijelölt feladat megoldását. Ezen stratégia meghatározása fontos eszközt ad a piaci szereplők kezébe a kockázatkezelési feladatokhoz. Ehhez vegyük észre, hogy a fentiek alapján általánosan a fedezeti stratégia nem más, mint egy pozícióból eredő piaci (azaz árfolyam-) kockázat fedezése, ha úgy tetszik, kiiktatása.

Természetesen a racionális árra levezetett formulák több változó függvényei, melyek akár a szerződéstől függnek vagy a piaci modell bizonyos paraméterei. Így függhet az opció ára például: az érvényesítési K ártól, a lejárati T dátumtól, a kezdeti S_0 és B_0 részvény- illetve kötvényártól, a részvény árfolyamatát leíró sztochasztikus folyamat paramétereitől és a kötvény kamatlábától (amely leírja a kötvény árfolyamatát vagy vice versa).

Amerikai opciók esetén is a fenti kihívásokra kereshetünk választ, de ebben az esetben egyben egy újabb kérdés is egyidejűleg merül fel, melyre szintén kereshetünk megoldást

megoldást, mely a következő. *Mikor optimális az amerikai opciót lehíni?* Mikor érdemes még várni a lehívással, s milyen piaci szituációban nem?

Vételi versus eladási opciók

Tegyük fel, hogy a piac arbitrázsmentes és azon az opciókkal történő kereskedés azok racionális (arbitrázsmentes) árain folyik. Ekkor a vételi és az eladási opciók árai között közvetlen összefüggést találhatunk. Néhányat közülük megemlítünk.

Európai opciók esetén —amelyeknek azonosak a szerződésbeli paramétereik: az érvényesítési (vagy kötési) ár és a lejárat— a

$$\mathcal{C}^{Eu} + K\frac{B_0}{B_T} - S_0 = \mathcal{P}^{Eu}$$

egyenlet írja le a kapcsolatot, amelyet put-call (vételi-eladási) paritásként ismer az irodalom. Ennek ellenőrzéséhez vegyünk két portfóliót. Az I. portfólió tartalmazzon egy európai vételi opciót és KB_0/B_T pénzmennyiséget kötvénybe fektetve (azaz K/B_T darab kötvényt), míg a II. portfólió egy európai eladási opcióból és egy részvényből álljon. (Megjegyezzük, hogy a két alapértékpapírt tartalmazó portfóliók mintájára (ld. 7.1. Fejezet) értelmezhető általánosan n különböző értékpapírból álló portfólió fogalma is természetesen.) Ekkor az I. portfólió értéke

$$(S_T - K)^+ + K \ = \ \max(S_T, K)$$

a T időpillanatban, ahogy ennyi az értéke a II. portfóliónak is ekkor, hiszen

$$(K - S_T)^+ + S_T = \max(K, S_T).$$

Azaz minden piaci kimenet esetén a két portfólió pontosan ugyanannyit ér. Ezért ezen portfóliók értéke bármely $[0, T]$-beli időpontban is meg kell, hogy egyezzen, mert egyébként arbitrázs lehetőség lenne a piacon. Így speciálisan a

$$\mathcal{C}^{Eu} + K\frac{B_0}{B_T} = \mathcal{P}^{Eu} + S_0$$

összefüggésnek is érvényben kell lenni.

Amerikai opciók esetén az árak különbségére lehet hasonló módszerrel bizonyos korlátokat találni. Ezzel nem kívánunk foglalkozni. (Az érdeklődő olvasó például a [28] monográfiában találhatja meg ezen korlátokat.) Azt is megjegyezzük, hogy a put-call paritás osztalékot fizető részvény melletti alakját is tárgyaljuk a [7] példatárban.

Opciók a valóságban

Az opciós ügyletek fogalma igazán 1973-tól vált elterjedtté az egész világon, amikor először kezdtek kereskedni opciókkal szervezett értékpapírpiacon. Ez volt egyben az opcióárazás problémájában is a nagy áttörés éve, hiszen F. Black és M. Scholes ekkor közölték a híres és széleskörűen alkalmazott eredményüket, mely Black-Scholes formulaként vált ismertté az irodalomban (ld. [10]). Azonban érdemes itt megemlíteni, hogy ez a formula a folytonos idejű piacokra vonatkozik (ld. 11.1.20. Megjegyzés).

Ma már számos tőzsdén kereskednek opciós értékpapírokkal, a leghíresebbek talán a Chicago Board Options Exchange (CBOE) vagy a Philadelphia Exchange (PHLX) és számos típusú opciós ügyeletek léteznek már, amelyek vagy az érvényesítés feltételeiben, vagy az érvényesítési ár meghatározásában vagy éppen abban különböznek, hogy milyen (alapvető) értékpapírra vonatkozik az opciós jog. Most csak néhány további típust említünk meg, hogy érzékeltessük ezek gazdagságát. Egyúttal ismét kiemeljük, hogy elméleti modellünkben is opciós szerződést lehet létrehozni bármely rizikós jószágra vagy aktívára vonatkozóan, amely eleget tesz a modellbeli részvény definíciójának, továbbá azt is érdemes kiemelni, hogy a következő részekben ismertetett árazási formulákat a feltételes követelések egy széles skálájára lehet alkalmazni.

Attól függően, hogy mire vonatkozik az opciós jog, beszélhetünk részvényre, forward szerződésre, külföldi valutára vonatkozó opciós ügyletekről, melyek igen elterjedtek, ám az opciós jog akár egy másik opcióra is vonatkozhat.

A következő példákat diszkrét idejű piacokra adjuk meg, így ismét a B_n és S_n jelölést alkalmazzuk, ahol $n = 1, \dots, N$ (ld. 8.1.6. Definíció).

Az ún. look-back opció, mely szintén egy származtatott értékpapír, esetén az európai opció analógiájára történik az ügylet megkötése azzal a különbséggel, hogy az érvényesítési ár itt a részvény lejáratig való teljes múltjától függ, nevezetesen a kifizetési függvény az alábbi formában definiált:

$$(S_N - K_N)^+, \qquad \text{ahol} \quad K_N := \min(S_0, S_1, \dots, S_N)$$

vételi opció esetén és

$$(K_N^* - S_N)^+, \qquad \text{ahol} \quad K_N^* := \max(S_0, S_1, \dots, S_N)$$

eladási opció esetén.

Egy további típus az ázsiai opció, melynek érvényesítési ára és így a kifizetési függvénye a részvényár $[0, T]$ intervallum alatt felvett értékeinek átlagával van kifejezve. Pontosabban, a vételi és eladási kifizetési függvények alakja ekkor is $(S_N - \overline{K})^+$ illetve $(\overline{K} - S_N)^+$, azonban ebben az esetben

$$\overline{K} := \frac{1}{N+1} \sum_{i=0}^{N} S_i.$$

Tehát ebben az esetben $\overline{K}$ adott időszakok záróárainak átlaga.

Végül megemlítjük még a Bermuda opciót, melyet az érvényességének $[0, T]$ intervalluma alatt csak bizonyos (a szerződésben meghatározott) napokon lehet érvényesíteni.

Az érdeklődő olvasó további érdekességeket és hasznos közgazdasági ismereteket találhat Hull nagyszerű könyvében (ld. [28]) az opciókról és egyéb értékpapírokról.

8. fejezet

Diszkrét idejű piacok

8.1. A piacok definíciója

8.1.1. Definíció. (Diszkrét idejű $(\mathbf{B}, \mathbf{S})_{\mathbf{N}}$ piac)

Egy $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), B = (B_n), S = (S_n), N\}$ halmazt diszkrét idejű $(B, S)_N$ piacnak nevezünk ($N \in \mathbb{N}$) ha

- $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *egy valószínűségi mező az* $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ *filtrációval ellátva, ahol* $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$,
- $B = (B_n)_{n=0}^N$ *a kötvény árfolyamata, melyre* $B_n \in \mathbb{R}$, $B_n > 0$, $n = 0, 1, \ldots, N$,
- $S = (S_n)_{n=0}^N$ *a részvény árfolyamata úgy, hogy az* S_n*-ek pozitív* $\mathcal{F}_n$*–mérhető valószínűségi változók* $n = 0, 1, \ldots, N$ *esetén (így speciálisan* $S_0 > 0$, $S_0 \in \mathbb{R}$*).*

8.1.2. Megjegyzés. Hangsúlyozzuk, hogy ebben az elméletben kötvény alatt egy determinisztikus árfolyamattal rendelkező pénzügyi eszközt értünk (ez akár 'bankszámla' is lehet). Ilyen eszközből egy van a piacon, hiszen ha több lenne, akkor arbitrázsmentességet feltételezve a determinisztikus eszközök hozama meg kell, hogy egyezzen, ennélfogva azok így ekvivalensnek tekinthetőek. Ezzel szemben részvény alatt egy véletlen árfolyamattal rendelkező alapterméket értünk (amely így nem feltétlenül részvény, még akár egy piacon kereskedett kötvény is lehet, ha az nem determinisztikus árfolyamú).

A definícióban egyetlen részvény adott a piacon, mert ezen részvényre kiírt opciót akarjuk vizsgálni, árazni. A definíciót természetesen tetszőleges számú részvényre lehetne általánosítani. $\triangle$

8.1.3. Jelölés. *Az egyszerűség kedvéért a továbbiakban egy diszkrét idejű* $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), B = (B_n), S = (S_n), N\}$ *piacot d.i.-*$(B,S)_N$*-nel fogunk jelölni és nem írjuk ki a hozzá tartozó valószínűségi mezőt és filtrációt, ha az nem okoz félreértést. Sőt, még egyszerűbben* $(B,S)_N$ *lesz a jelölés, s feltételezzük, hogy diszkrét idejű a piac, ha mást nem mondunk.*

8.1.4. Jelölés. *A fenti definícióban* N *a kereskedési idők számát jelöli. Általában adott egy* $[0,T]$ *időintervallum és időpontok egy* $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_N = T$ *sorozata. Ezen időintervallumban vizsgáljuk a piacot és az opciós szerződések is ezen intervallumon lesznek érvényesek, továbbá a fenti definícióban az* $n \in \{1, \ldots, N\}$ *index rendre az* n*-dik kereskedési időpontra, azaz* t_n*-re vonatkoztatja az egyes mennyiségek értékét. A* T *időpontot végső időpontnak vagy különösen opciós szerződések esetén lejárati időnek (dátumnak) fogjuk nevezni.*

8.1.5. Feltétel. *Egy fontos egyszerűsítő* **feltételezést** *teszünk a könyv ezen részében (ha mást nem mondunk). A továbbiakban a diszkrét idejű piacok esetén feltesszük, hogy csak véges sok esemény következhet be a piacon, azaz*

$$|\Omega| < \infty,$$

vagy másképpen fogalmazva csak véges sok jövőbeli állapota van a piacnak. Továbbá feltesszük, hogy[1]

$$\mathbb{P}(\{\omega\}) > 0 \text{ minden } \omega \in \Omega \text{ esetén }.$$

[1] A továbbiakban, ha $\omega \in \Omega$, akkor $\mathbb{P}(\{\omega\})$ helyett egyszerűen $\mathbb{P}(\omega)$-t fogunk írni.

Ez nem lényegi megszorítás azokban a modellekben, amelyeket tárgyalunk, valójában kényelmi okokból hasznos a feltételezés. A lényeges állítások ezen feltételezések nélkül is szinte azonosan kimondhatóak, a bizonyítások sem változnának érdemben, ám számos mértékelméleti megjegyzést, 'finomságot' kellene ekkor figyelembe vennünk. Könyvünket minél szélesebb olvasótábornak szánjuk, ezért is kívánunk ezzel a feltételezéssel élni, hogy így mértélelméleti tudás nélkül is könnyen feldolgozható legyen a könyv ezen része. A bibliográfiai megjegyzéseinkben számos munkát hivatkozunk, ahol mind diszkrét, mind folytonos idejű modelleknél az általánosabb feltételek mellett is megtalálhatóak az állítások.

8.1.6. Definíció. (Diszkrét idejű $(\mathbf{B},\mathbf{S})_{\mathbf{N}}$ bináris piac) *Egy $\{\Omega,\mathcal{F},\mathbb{P},\mathbb{F}=(\mathcal{F}_n),B=(B_n),S=(S_n),N\}$ diszkrét idejű piacot bináris $(\mathbf{B},\mathbf{S})_{\mathbf{N}}$ piacnak nevezünk $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakkal és $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókkal ha*

- $r_n > -1$, $-1 < a_n < b_n$ *minden $n = 1,\dots,N$ esetén,*
- *a kötvény $B = (B_n)_{n=0}^N$ árfolyamatára teljesül a*
$$B_n = (1 + r_n)B_{n-1}, \qquad n = 1,\dots,N,$$
egyenlőség,
- *a részvény $S = (S_n)_{n=0}^N$ árfolyamata kielégíti az*
$$S_n = (1 + \rho_n)S_{n-1}, \qquad n = 1,\dots,N,$$
egyenlőséget, ahol ρ_n olyan valószínűségi változó, melyre teljesül $\{\rho_n \in \{a_n, b_n\}\} = \Omega$ és $p_n := \mathbb{P}(\rho_n = b_n) \in (0,1)$ minden $n = 1,\dots,N$ esetén és végül
- $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)$ *a $\rho_1,\dots,\rho_N$ valószínűségi változók által generált filtráció, azaz $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset,\Omega\}$ és $\mathcal{F}_n = \sigma(\rho_1,\dots,\rho_n)$, ahol $n = 1,\dots,N$.*

8.1.7. Definíció. (Diszkrét idejű homogén $(\mathbf{B},\mathbf{S})_{\mathbf{N}}$ bináris piac)
Az $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakkal és $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókkal rendelkező $(B,S)_N$ diszkrét

idejű bináris piacot homogén piacnak nevezzük r kamatlábbal és a, b együtthatókkal, ha az

$$r = r_n, \quad a = a_n, \quad b = b_n, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

feltételek teljesülnek és a $\rho_1, \ldots, \rho_N$ valószínűségi változók független azonos eloszlásúak (azaz $p = p_n$, $n = 1, \ldots, N$).

8.1.8. Megjegyzés. Valójában a $\rho_1, \ldots, \rho_N$ valószínűségi változók függetlensége nem lényeges a későbbiek szepontjából, mint látni fogjuk, a valódi piaci mértéknek kevés szerepe van ugyanis az árazásban. Egyrészt történeti okok miatt azonban beírtuk ezen feltételezést, másrészt azért, mert ez egy fontos feltételezés a piacokról, amely más problémákban (például statisztika, diszkrét és folytonos piacok kapcsolata) fontos lehet. $\triangle$

8.1.9. Jelölés. *Egy $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakkal és $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókkal ellátott $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n), B = (B_n), S = (S_n), N\}$ diszkrét idejű piac esetén a d.i.b.-$(B, S)_N$ jelölést fogjuk használni az egyszerűség kedvéért, vagy még egyszerűbben azt bináris $(B, S)_N$ piacnak vagy bináris piacnak fogjuk nevezni.*

Továbbá a d.i.h.b.-$(B, S)_N$ jelölést használjuk majd, ha a szóbanforgó piac homogén. A piacok definíciójában szereplő valószínűségi teret, filtrációt, kamatlábakat és együtthatókat viszont nem írjuk ki, ha az nem okoz értelmezési problémákat. Egy d.i.h.b.-$(B, S)_N$ piacot még egyszerűbben binomiális piacnak fogjuk nevezni.

A 8.1.5. Feltételt figyelembe véve az elemi események Ω tere úgy is elképzelhető, mint a $(\rho_1, \ldots, \rho_N)$ valószínűségi változósorozat realizációinak egy bijektív képe egy bináris piac esetén. Ez tehát azt jelenti, hogy Ω bijektív módon megfeleltethető az

$$\{(x_1, \ldots, x_N) \mid x_i \in \{a_i, b_i\},\ i = 1, \ldots, N\}$$

halmazzal: minden $\omega \in \Omega$ megfelel a részvény árfolyamatát leíró bináris fa egy trajektóriájának (ld. a 7.1. és a 7.2. Ábrákat).

8.2. Stratégiák és fedezet

8.2.1. Definíció. *Legyenek* β_n *és* γ_n $(n = 1, \ldots, N)$ $\mathcal{F}_{n-1}$*-mérhető valószínűségi változók egy d.i.-*$(B,S)_N$ *piacon és legyen* $\beta_0, \gamma_0 \in \mathbb{R}$*. Ekkor a* $\pi := \{\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^N$ *sorozatot stratégiának nevezzük.*

Az $X_n^\pi := \beta_n B_n + \gamma_n S_n$ *sorozatot* π *értékfolyamatának nevezzük és* $\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)$ *pedig a stratégia* t_n *kereskedési időponthoz tartozó portfóliója. A* π *stratégia* t_n*-beli értéke alatt a* π_n *portfólió* X_n^π *értékét értjük.*

8.2.2. Megjegyzés. Ha egy befektető egy π stratégiát valósít meg, akkor a β_n és γ_n számok azt mutatják, hogy mennyi kötvény illetve részvény van a tulajdonában a t_n időpontban. Azonban szükséges hangsúlyozni, hogy a stratégia fogalmának ezen általános értelmezése nem szükségképpen felel meg egy valós életben megvalósítható (realisztikus) fogalomnak. Ugyanis a 8.2.1. Definíció ,,gyenge feltételei” miatt nem tekinthetjük egy valós közgazdasági fogalomnak, további megszorítások, feltételek (pl. önfinanszírozás) szükségesek ahhoz, hogy például egy befektető által megvalósított stratégiaként interpretálhassuk azt.

Fontos továbbá hangsúlyoznunk, hogy a könyv korábbi részeiben (ld. 3.3.1. Definíció) egy $\pi = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_n)$ portfólió esetén β_i az i-edik értékpapírba fektetett *pénzösszeget jelölte egylépéses piacokon.* Ebben a részben csak két értékpapírt tekintünk, de *a piac többlépéses*, továbbá β_n és γ_n a birtokolt *kötvények és részvények számát* jelöli a t_n kereskedési időpontban. $\triangle$

8.2.3. Jelölés. *Egy* $a_n \in \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ *sorozat esetén legyen*

$$\Delta a_n := a_n - a_{n-1}, \qquad n \in \mathbb{N},\ n \geq 1.$$

Ekkor azt mondjuk, hogy $\{\Delta a_n\}_{n=1}^\infty$ *a* $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ *sorozat differencia sorozata.*

8.2.4. Definíció. *Egy d.i.-*$(B,S)_N$ *piacon egy* $\pi = \{\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^N$ *stratégiát önfi-*

nanszírozónak nevezzük, ha kielégíti az

$$X_{n-1}^{\pi} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

egyenletet.

8.2.5. Megjegyzés. A stratégiák definíciójában sarkalatos β_n és γ_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhetősége, hiszen ez fejezi azt ki, hogy a π_n portfóliót a t_{n-1} időpontban, az akkor elérhető piaci információk (árak) alapján alakítja ki az egyén.

Ennélfogva a tárgyalandó problémáink szempontjából nem lényeges a $\pi_0 = (\beta_0, \gamma_0)$ portfólió pontos összetételének ismerete, a későbbiekben elég lesz a hozzá tartozó kezdeti tőke, azaz $X_0^{\pi_0}$ ismerete. Így számos esetben, egy adott stratégia konstruálásakor π_0-t összetételét tetszőlegesen válaszhatjuk, amennyiben az a megkívánt kezdőtőkét adja vissza. $\triangle$

8.2.6. Megjegyzés. Egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon

- általában egy stratégiára teljesül $n = 1, \ldots, N$ esetén, hogy

$$\begin{aligned}
\Delta X_n^{\pi} = X_n^{\pi} - X_{n-1}^{\pi} &= \beta_n B_n + \gamma_n S_n - (\beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_{n-1} S_{n-1}) \\
&= \beta_n B_n - \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_n - \gamma_n S_{n-1} \\
&\quad + \beta_n B_{n-1} - \beta_{n-1} B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} - \gamma_{n-1} S_{n-1} \\
&= (\beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n) + (B_{n-1} \Delta\beta_n + S_{n-1} \Delta\gamma_n),
\end{aligned}$$

- önfinanszírozó stratégia esetén így

$$\begin{aligned}
\Delta X_n^{\pi} &= \beta_n B_n + \gamma_n S_n - (\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}) \\
&= \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n, \qquad\qquad n = 1, \ldots, N,
\end{aligned}$$

  is teljesül.

△

E fentieket összefoglaljuk az alábbi lemmában.

8.2.7. Lemma. *Egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon az alábbi megállapítások ekvivalensek egy π stratégia esetén:*

(1) *π önfinanszírozó, azaz* $X_{n-1}^{\pi} = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1} \qquad (n = 1, \ldots, N)$,

(2) $\Delta X_n^{\pi} = \beta_n \Delta B_n + \gamma_n \Delta S_n \qquad (n = 1, \ldots, N)$,

(3) $B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N)$.

A 8.2.7. Lemma az önfinanszírozás feltételét világítja meg több nézőpontból. Miután az új árak a t_{n-1} időpontban ismertté váltak, megváltoztathatjuk a portfóliónkat (azaz meghatározhatjuk π_n-t) azzal a feltétellel, hogy X_{n-1}^{π} mennyiségű tőke áll rendelkezésre a befektetési (vásárlási és eladási) terveinkhez (ld. (a)). Ezeket a változtatásokat a portfólióban nevezhetjük belsőnek vagy interiornak, kiemelve ezzel azt, hogy a protfólióból sem tőkekivétel (pl. adófizetés, működési költségek, tranzakciós költségek, stb.) sem ahhoz tőke hozzáadása (pl. részvény után osztalék, más jövedelmeknek vagy tőkének a stratégiába való befektetése, stb.) nem lehetséges a modellünk feltételei szerint, ahogy ezt az (a) és (c) pontokban hangsúlyoztuk. Ezért profitot csak az árváltozások hatására realizálhatunk a piacon (ld. (b)).

8.2.8. Megjegyzés. A $\rho_n(\omega)$, $S_n(\omega)$, $\beta_n(\omega)$, $\gamma_n(\omega)$, $X_n(\omega)$ valószínűségi változókban és a $\pi_n(\omega) = (\beta_n(\omega), \gamma_n(\omega))$ valószínűségi vektorváltozóban az ω változót nem mindig fogjuk kiírni a könnyebbség kedvéért. △

8.2.9. Megjegyzés. A $(B,S)_N$ értékpapírpiac 8.1.1. Definíciójában a kockázatmentes kötvény mellett csak egy részvény, azaz egy kockázatos értékpapír szerepel. De természetesen lehetne több részvényes értékpapírpiacot általánosan definiálni. Ekkor az i-edik részvény $S_n^{(i)}$ árfolyamatáról ugyanúgy feltételeznünk kellene az adaptáltságot, mint a 8.1.1. Definícióban.

Ekkor a 8.2.1. Definíció mintájára egy $\pi := \{\pi_n = (\beta_n, \gamma_n^{(1)}, \gamma_n^{(2)}, \ldots, \gamma_n^{(K)})\}_{n=0}^N$ portfólió sorozatot stratégiának nevezzük, ahol $\beta_n, \gamma_n^{(i)}$ $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhetőek, $\gamma_n^{(i)}$ mutatja az i-edik részvényből birtokolt mennyiséget (melyet az t_{n-1} időpontban alakítunk ki), K a részvények száma. Így a stratégia értékfolymata ekkor

$$X_n^\pi := \beta_n B_n + \sum_{i=1}^K \gamma_n^{(i)} S_n^{(i)}. \tag{8.1}$$

Az önfinanszírozás is értelemszerűen a 8.2.4. Definíció mintájára úgy értelmezhető, hogy

$$X_{n-1}^\pi = \beta_n B_{n-1} + \sum_{i=1}^K \gamma_n^{(i)} S_{n-1}^{(i)}, \qquad n = 1, \ldots, N. \tag{8.2}$$

Ekkor a 8.2.7. Lemma mintájára az önfinanszírozás ekvivalens egyrészt azzal, hogy

$$\Delta X_n^\pi = \beta_n \Delta B_n + \sum_{i=1}^K \gamma_n^{(i)} \Delta S_n^{(i)} \qquad (n = 1, \ldots, N),$$

másrészt azzal, hogy

$$B_{n-1}\Delta\beta_n + \sum_{i=1}^K S_{n-1}^{(i)} \Delta\gamma_n^{(i)} = 0 \qquad (n = 1, \ldots, N).$$

Megjegyezzük azt is, hogy a fentiek mintájára olyan stratégiákat is definiálhatunk általánosabban, amelyek akár származtatott értékpapírokat is tartalmaznak. Ekkor a fenti (8.1) és (8.2) sorokban, illetve annak ekvivalens alakjaiban az $S^{(i)}$-k mintájára a származtatott értékpapírok árfolyamatait is szerepeltetni kell. Erre pédául akkor lesz szükségünk, amikor az opciók árainak arbitrázsmentességét kívánjuk bemutatni. $\triangle$

8.2.10. Definíció. *Legyen adott egy d.i.-$(B, S)_N$ piac, $x \in \mathbb{R}$ és tegyük fel, hogy $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ egy függvény. Egy $\pi = \{\pi_n\}_{n=0}^N$ stratégiát (x, f_N)-fedezetnek (vagy fedezeti stratégiának) nevezünk, ha*

$$X_0^\pi = x, \tag{8.3}$$

és

$$X_N^\pi(\omega) \geq f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega)), \quad \forall \omega \in \Omega. \tag{8.4}$$

Ha $X_N^\pi(\omega) = f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega))$, $\forall \omega \in \Omega$, *akkor azt mondjuk, hogy* π *minimális* (x, f_N)*-fedezet vagy másképpen ún. tökéletes fedezeti stratégia.*

Az összes önfinanszírozó (x, f_N)*-fedezeti stratégiák halmazát* $\Pi(x, f_N)$*-el fogjuk jelölni.*

8.2.11. Megjegyzés. A 8.2.10. Definícióban szereplő f_N függvény szerepét a problémáinkban elsősorban az opciós szerződések kifizetési függvényei fogják játszani. Az opció kifizetése ugyanis nyílvánvalóan a részvény jövőbeli értékeitől függ. Általánosabban az f_N-t egy véletlen (vagy feltételes) követelésnek, másképpen fogalmazva bizonytalan jövőbeli pénzáramlásnak is tekinthetjük (ezt szokás a szakirodalomban 'contingent claim'-nek is nevezni).

Speciálisan, számos példában az f_N előáll $f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega)) = g(S_N(\omega))$ alakban, ahol $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$, azaz a követelés csak a részvény lejáratkori értékétől függ ilyenkor. Ilyen esettel állunk szemben Európai call és put opcióknál, ahol a korábban tárgyaltaknak megfelelően $f_N(x) = (x - K)^+$, illetve $f_N(x) = (K - x)^+$, és K a kötési ár.

Ha egy befektető egy (x, f_N)-fedezeti stratégiát hajt végre azzal a céllal, hogy legalább $f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega))$ legyen portfóliójának az értéke a lejáratkor, akkor azt fogjuk mondani, hogy a befektető az $f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega))$ kifizetésre (vagy kötelezettségre) fedezeti stratégiát szervez (vagy hajt végre). Tökéletes fedezet esetén szokás ezt a kifizetés vagy kötelezettség replikálásának is nevezni. $\triangle$

8.2.12. Definíció. *Legyen* $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ *egy függvény. Ekkor egy d.i.-*$(B, S)_N$ *piacon a*

$$\mathbb{C}_{N,f_N} := \inf\{x \in \mathbb{R} \mid \Pi(x, f_N) \neq \emptyset\}$$

értéket a t_N *időre legalább* $f_N(S_0, S_1(\omega), \dots, S_N(\omega))$ $(\forall \omega \in \Omega)$ *tőkét biztosító tőkének (befektetési költségnek) nevezzük.*

8.2.13. Lemma. *Minden d.i.-$(B,S)_N$ piac és $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ függvény esetén létezik $x \in \mathbb{R}$ úgy, hogy $\Pi(x, f_N) \neq \emptyset$.*

Bizonyítás. Legyen például

$$x := \frac{B_0}{B_N} \max_{\omega\in\Omega} \left| f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)) \right|$$

és a $\pi = \{\pi_n\}_{n=0}^N$ stratégia pedig olyan, hogy

$$\pi_n := (\beta_n, \gamma_n) \equiv (x/B_0, 0), \qquad n = 0, \ldots, N.$$

Ekkor $\pi \in \Pi(x, f_N)$, ezért $\mathbb{C}_{N,f_N} < \infty$. □

8.2.14. Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy $\mathbb{C}_{N,f_N}$ azt a minimális kezdeti tőkemennyiséget hivatott megmutatni, amely biztosítja a befektető számára azt a lehetőséget, hogy a T időpontban egy π stratégia eredményeként azon X_N^π tőkét realizálja, melyre $X_N^\pi(\omega) = f_N(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega))$ teljesül. Megjegyezzük továbbá, hogy még nem mutattuk meg egy ilyen tulajdonságú stratégia létezését (ld. 11.1.11. Megjegyzés és 11.1.12. Tétel). △

8.2.15. Megjegyzés. A szakirodalomban általában az $X_n^\pi \geq 0 \quad (0 \leq n \leq N)$ feltétel is szerepel a fedezeti stratégia fogalmában, amely egy nyílvánvalóan racionális követelmény. A későbbiek során meg fogjuk mutatni, hogy ha létezik egy tökéletes fedezeti stratégia az x kezdeti tőkéhez és egy nemnegatív f_N ,,megcélzott" függvényhez, akkor ebből már következik a létezése egy nemnegatív értékfolyamattal rendelkező stratégiának is ugyanezen tulajdonságokkal (ld. 11.1.11. Megjegyzés). △

8.2.16. Definíció. *Legyen π egy stratégia egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon. Ekkor a*

$$V_n^\pi := \frac{X_n^\pi}{B_n} \qquad (0 \leq n \leq N) \tag{8.5}$$

folyamatot a π stratégia diszkontált (leszámítolt) értékfolyamatának nevezzük.

A pénzügyben az X_n^π tőke megszokott 'leszámítolása' vagy diszkontálás (a kötvény hozamával, azaz az ismert kamatlábbal) a $t = 0$ időpontra $\frac{B_0}{B_n} X_n^\pi$ módon számolandó. A fenti definícióban lényegében $\{V_n^\pi\}_{n=0}^N$ ez a folyamat, igaz egy B_0 konstanstól eltekintve. Ennek nincs jelentősége a későbbi állításokra nézve, másrészt **az elkövetkezendőek során (az általánosság megszorítása nélkül) feltételezni fogjuk, ha mást nem mondunk, hogy** $B_0 = 1$, azaz kezdetben egy egység a kötvény ára. Ez azért is célszerű, mert említettük, hogy a kötvény szerepébe egyszerűen egy 'bankszámlát' is képzelhetünk adott determinisztikus kamatozás mellett. Így a fenti definíció valóban egybeesik a pénzügyben megszokott diszkontálással. A diszkontálás szerepéről, általánosabban a pénz időértékének tárgyalásáról az érdeklődő olvasó számos bevezető pénzügy tankönyvben olvashat, mi Brealey és Myers [11] munkáját említjük és javasoljuk.

9. fejezet

Arbitrázs

9.1. Arbitrázs-stratégiák és ekvivalens martingál-mértékek

A közgazdaságtanban tágabb értelemben minden kockázatmentes profitszerzési módot arbitrázs-lehetőségnek tekinthetünk. A mi modellünkben az arbitrázs-stratégia fogalmát a következő természetes módon lehet értelmezni.

9.1.1. Definíció. *Egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon a π önfinanszírozó stratégiát arbitrázsnak, vagy arbitrázs-stratégiának nevezzük, ha*

- $X_0^\pi \equiv 0$,
- $X_n^\pi \geq 0 \quad 1 \leq n \leq N$ *(azaz* $\mathbb{P}(X_n^\pi \geq 0) \geq 0$*),*
- $\exists\, \omega \in \Omega : X_N^\pi(\omega) > 0$ *(azaz* $\mathbb{P}(X_N^\pi > 0) > 0$*).*

Azt mondjuk, hogy a piac kizárja az arbitrázst (más szóval az arbitrázs lehetőségét), ha nincs önfinanszírozó arbitrázs stratégia a piacon.

9.1.2. Lemma. *Tegyük fel, hogy egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon a π önfinanszírozó stratégiára teljesül $X_0^\pi \equiv 0$, $\mathbb{P}(X_N^\pi \geq 0) = 1$, $\mathbb{P}(X_N^\pi > 0) > 0$.*

Ekkor létezik arbitrázs-stratégia a piacon.

Bizonyítás. Ha $X_n^\pi \geq 0$ $(0 \leq n \leq N)$, akkor π egy arbitrázs-stratégia.

Egyébként $\exists\, m < N$ és $\omega_0 \in \Omega$ úgy, hogy $X_m^\pi(\omega_0) < 0$ és $X_n^\pi(\omega) \geq 0$ teljesül $\forall \omega \in \Omega$ és $n > m$ esetén. Ekkor a következő módon lehet egy $\{\overline{\pi}_n = (\overline{\beta}_n, \overline{\gamma}_n)\}_{n=0}^N$ arbitrázs-stratégiát konstruálni:

$$\begin{aligned} \overline{\beta}_n(\omega) &:= \mathbb{1}_{\{\omega_0=\omega\}} \mathbb{1}_{\{n>m\}} \left(\beta_n(\omega) - \frac{X_m^\pi(\omega_0)}{B_m} \right) \\ \overline{\gamma}_n(\omega) &:= \mathbb{1}_{\{\omega_0=\omega\}} \mathbb{1}_{\{n>m\}} \gamma_n(\omega) \end{aligned} \tag{9.1}$$

ahol, $n = 0, \ldots, N$.

Először azt ellenőrizzük, hogy $\overline{\pi}$ valóban önfinanszírozó. Ha $n \leq m$ vagy $\omega \neq \omega_0$, akkor $\Delta\overline{\beta}_n(\omega) = \Delta\overline{\gamma}_n(\omega) = 0$.

Ha $n = m + 1$, akkor

$$\Delta\overline{\beta}_n(\omega_0) = \overline{\beta}_{m+1}(\omega_0) = \beta_{m+1}(\omega_0) - \frac{X_m^\pi(\omega_0)}{B_m}$$

és

$$\Delta\overline{\gamma}_n(\omega_0) = \gamma_{m+1}(\omega_0),$$

ezért

$$\begin{aligned} B_{n-1}\Delta\overline{\beta}_n(\omega_0) + S_{n-1}\Delta\overline{\gamma}_n(\omega_0) &= \left(\beta_{m+1}(\omega_0) - \frac{X_m^\pi(\omega_0)}{B_m} \right) B_m + \gamma_{m+1}(\omega_0) S_m \\ &= X_m^\pi(\omega_0) - X_m^\pi(\omega_0) = 0. \end{aligned}$$

Ha $n > m+1$, akkor $\Delta\overline{\beta}_n(\omega_0) = \Delta\beta_n(\omega_0)$ és $\Delta\overline{\gamma}_n(\omega_0) = \Delta\gamma_n(\omega_0)$ alapján $B_{n-1}\Delta\overline{\beta}_n(\omega_0) + S_{n-1}\Delta\overline{\gamma}_n(\omega_0) = 0$, mivel π önfinanszírozó, tehát végülis megállapíthatjuk, hogy $\overline{\pi}$ is önfinanszírozó.

Másodszor, $X_n^{\overline{\pi}} \geq 0 \quad (0 \leq n \leq N)$, mivel ha $n > m$, akkor

$$\begin{aligned} X_n^{\overline{\pi}}(\omega) &= \overline{\beta}_n(\omega)B_n + \overline{\gamma}_n(\omega)S_n \\ &= \mathbb{1}_{\{\omega=\omega_0\}}\left(\beta_n(\omega)B_n + \gamma_n(\omega)S_n - \frac{X_m^\pi(\omega_0)B_n}{B_m}\right) \geq 0, \end{aligned}$$

és nyilván $X_n^{\overline{\pi}}(\omega) \equiv 0$ ha $n \leq m$. Továbbá, $\exists\ \omega \in \Omega$ úgy, hogy $X_N^{\overline{\pi}}(\omega) > 0$, mégpedig ω_0, hiszen

$$\begin{aligned} X_N^{\overline{\pi}}(\omega_0) &= \beta_N(\omega_0)B_N - \frac{X_m^\pi(\omega_0)B_N}{B_m} + \gamma_N(\omega_0)S_N \\ &= X_N^\pi(\omega_0) - \frac{X_m^\pi(\omega_0)B_N}{B_m} > 0. \end{aligned}$$

□

9.1.3. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy az előző bizonyításban azt mutattuk meg, hogy ha egy ω_0-hoz tartozó trajektórián a lemmabeli π a stratégia negatív értéket vesz fel valahol, de a végén az értéke nemnegatív (mint minden más piaci kimenet/trajektória esetén), akkor a stratégiát és így a trajektóriát lehet úgy módosítani ('javítani'), hogy nemnegatív legyen végig a folyamat a trajektória mentén és pozitív a végére. A javítást (9.1) írja le, mely az eredeti trajektóriát eltolja, kihasználva az utolsó olyan ugrást, ahol negatív tartományból nemnegatívba kerül a folyamat.

Valójában az egyszerűség kedvéért ezt egyetlen trajektórián végeztük el a bizonyításban, míg a többi kimenet esetén azonosan nulla lett az új stratégia, de bármely más ilyen (negatív tartományba is kitérő) trajektóriát 'ki lehetett volna hasonlóan javítani'.

Ugyan közgazdasági szempontból logikus (életszerűbb) az arbitrázs-stratégia definíciójában végig (minden időpontban) megkövetelni a nemnegativitást, mégis azt kaptuk tehát, hogy az elhagyható a feltételekből. △

9.1.4. Definíció. *Azt mondjuk, hogy $\mathbb{P}^*$ egy ekvivalens martingál-mérték az $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F}=(\mathcal{F}_n), B=(B_n), S=(S_n), N\}$ diszkrét idejű piacon, ha*

- $\mathbb{P}^*$ *valószínűségi mérték* $(\Omega, \mathcal{F})$*-en,*

- $\mathbb{P}^*$ *és* $\mathbb{P}$ *ekvivalensek, és*
- *az* $(S_n/B_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ *sorozat martingált alkot.*

9.1.5. Jelölés. *Egy* $\mathbb{P}^*$ *valószínűségi mérték esetén* $\mathbb{E}^*$ *a* $\mathbb{P}^*$ *mértékre vonatkozó várható érték képzését jelöli.*

9.1.6. Megjegyzés. Ha több részvényt tartalmazó értékpapírpiacokat vizsgálnánk, akkor értelmeszerűen a 9.1.4 Definíciót úgy általánosítanánk, hogy minden részvényre megkövetelnénk azt, hogy a diszkontált árfolyamata legyen martingál. △

9.1.7. Lemma. *A d.i.-*$(B, S)_N$ *piacon az* $(S_n/B_n, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ *sorozat akkor és csak akkor alkot martingált, ha tetszőleges* π *önfinanszírozó stratégia esetén az* $(X_n^\pi/B_n, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ *sorozat martingált alkot.*

Bizonyítás. Ha π önfinanszírozó, akkor $X_n^\pi/B_n = \beta_n + \gamma_n S_n/B_n$ és

$$\mathbb{E}^*(X_n^\pi/B_n|\mathcal{F}_{n-1}) = \beta_n + \gamma_n \mathbb{E}^*(S_n/B_n|\mathcal{F}_{n-1}) = X_{n-1}^\pi/B_{n-1},$$

mivel β_n és γ_n $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhetőek, így $(X_n^\pi/B_n, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ martingál.

Fordítva, triviálisan a $\beta_n = 0$, $\gamma_n = 1$, $n = 0, 1, \ldots, N$, egy önfinanszírozó stratégia (hiszen mindössze egy részvényt tartunk állandóan), így $(S_n/B_n, \mathcal{F}, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ martingál. □

9.1.8. Tétel. *Tekintsünk egy olyan d.i.b.-*$(B, S)_N$ *piacot, ahol az* $\{r_n\}_{n=1}^N$ *kamatlábakra és az* $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ *együtthatókra teljesülnek az* $a_n < r_n < b_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ *egyenlőtlenségek. Felidézve, hogy* Ω *elemei tekinthetők a* $\rho_1, \ldots, \rho_N$ *valószínűségi változók realizációiból álló halmaznak (ld. 164. oldal):*

$$\{(x_1, \ldots, x_N) \mid x_i \in \{a_i, b_i\},\ i = 1, \ldots, N\},$$

legyen

$$\mathbb{P}^*(\{(x_1, \ldots, x_N)\}) = \prod_{\substack{1\le n\le N\\ x_n = b_n}} p^* \prod_{\substack{1\le n\le N\\ x_n = a_n}} (1 - p^*)\,, \tag{9.2}$$

ahol $p_n^* := \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}$, $n = 1, \ldots, N$.

Ekkor a $\mathbb{P}^*$ *az egyetlen ekvivalens martingál-mérték a piacon. Speciálisan*

$$\mathbb{P}^*(\rho_n = b_n) = p_n^*, \qquad n = 1, \ldots, N \tag{9.3}$$

és a $\rho_1, \ldots, \rho_N$ *hozamok* $\mathbb{P}^*$*-függetlenek.*

9.1.9. Megjegyzés. Speciálisan, egy homogén bináris piacon

$$\mathbb{P}^*(\omega) = p^{*k} \left(1 - p^*\right)^{N-k}, \tag{9.4}$$

ahol k a részvényár felfelé történő ugrásainak száma a $[0, T]$ intervallumon, mialatt az ár az ω elemi eseménynek megfelelő trajektória szerint alakul. Így a (9.4) egyenletben leírt $\mathbb{P}^*$ esetén

$$\mathbb{P}^*\left(S_N = S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}\right) = \binom{N}{k} p^{*k} \left(1 - p^*\right)^{N-k} =: w_k.$$

Ekkor a $\{w_0, w_1, \ldots, w_N\}$ nyilván egy binomiális eloszlást ad. Ezért nevezik a homogén bináris piacot binomiális (értékpapír-) piacnak is a szakirodalomban. △

A 9.1.8. Tétel bizonyítása. Mivel a részvényár folyamata adaptált az $\mathbb{F} = \{\mathcal{F}_n\}_{n=0}^N$ filtrációhoz, így egy $\mathbb{P}^*$ ekvivalens martingál mérték esetén

$$\mathbb{E}^*\left(\frac{S_n}{B_n} \,\Big|\, \mathcal{F}_{n-1}\right) = \frac{S_{n-1}}{B_n}\, \mathbb{E}^*\big((\rho_n + 1) \mid \mathcal{F}_{n-1}\big) = \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\,, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

pontosan akkor teljesül, ha $\mathbb{E}^*\left(\rho_n \mid \mathcal{F}_{n-1}\right) = r_n$, $n = 1, \ldots, N$. Ennélfogva

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^*\left(\rho_n \mid A\right) &= b_n \mathbb{P}^*\left(\rho_n = b_n \mid A\right) + a_n \mathbb{P}^*\left(\rho_n = a_n \mid A\right) \\ &= b_n \mathbb{P}^*\left(\rho_n = b_n \mid A\right) + a_n \left(1 - \mathbb{P}^*\left(\rho_n = b_n \mid A\right)\right) = r_n \end{aligned} \tag{9.5}$$

minden $A = \{\rho_1 = x_1, \rho_2 = x_2, \ldots, \rho_{n-1} = x_{n-1}\}$ $(x_i \in \{a_i, b_i\},\ 1 \le i < n \le N)$ esetén. Mivel

$$a_n(1 - p_n^*) + b_n p_n^* = (b_n - a_n)p_n^* + a_n = r_n, \qquad \text{ha} \quad n = 1, \ldots, N,$$

így (9.5) pontosan akkor teljesül, ha $\mathbb{P}^*(\rho_n = a_n \mid A) = p^*$ (hiszen $a_n \neq b_n$ esetén a (9.5)-beli affin kombináció egyértelmű). Innen

$$\mathbb{P}^*(\rho_1 = x_1, \rho_2 = x_2, \ldots, \rho_n = x_n) = \mathbb{P}^*(\rho_n = x_n \mid A)\,\mathbb{P}^*(A),$$

minden ($\mathcal{F}_{n-1}$-beli) a fenti alakú A esemény esetén, amelyből adódik, hogy $\mathbb{P}^*$ valóban (9.2) alakú és a hozamok $\mathbb{P}^*$-függetlenek. □

9.1.10. Megjegyzés. A [7] példatár külön részben foglalkozik ekvivalens martingál-mértékek konstrukciójával, azokkal kapcsolatos problémákkal. △

9.2. Az arbitrázsmentességre vonatkozó főtételek

9.2.1. Tétel. *Egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *létezik ekvivalens martingál-mérték,*

(2) *a piac kizárja az arbitrázs lehetőségét.*

Bizonyítás. (1) $\Rightarrow$ (2). Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}^*$ egy ekvivalens martingál-mérték. Tegyük fel, hogy π egy önfinanszírozó stratégia $X_0^\pi = 0$ kezdeti tőkével. Ekkor a 9.1.7. Lemma szerint

$$\mathbb{E}^* X_N^\pi = \frac{B_N}{B_0}\, X_0^\pi = 0,$$

ezért π nem lehet arbitrázs-stratégia, mivel $X_N^\pi \geq 0$ és $\mathbb{P}^*(X_N^\pi > 0) > 0$ azt vonná maga után, hogy $\mathbb{E}^* X_N^\pi > 0$.

(2) $\Rightarrow$ (1). Tegyük fel, hogy nincs arbitrázs-stratégia a piacon, és legyen

$$\mathcal{V}_0 := \{\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ v.v.} \mid \exists \text{ olyan } \pi \text{ önfinanszírozó stratégia,}$$
$$\text{melyre } X_0^\pi = 0 \text{ és } X_N^\pi = \xi\}$$

és

$$\mathcal{V}_1 := \{\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ v.v.} \mid \xi \geq 0 \text{ és } \mathbb{E}\,\xi \geq 1\}.$$

A könnyebb megértés kedvéért 5 lépésre bontjuk a bizonyítást.

1. lépés. Megmutatjuk, hogy $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1 = \emptyset$.

Tegyük fel, hogy $\exists \xi \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1$. Ekkor létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, melyre $X_0^\pi = 0$ és $X_N^\pi = \xi$, amiből a 9.1.2. Lemma alapján következik egy $\overline{\pi}$ arbitrázs stratégia létezése, ami ellentmond **(2)**-nek.

2. lépés. Jelölje $f : \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1 \mapsto \mathbb{R}^k$ az $f(\xi) = (\xi(\omega_1), \ldots, \xi(\omega_k))$, $\xi \in \mathcal{V}_0 \cup \mathcal{V}_1$, injektív leképezést, ahol $k = |\Omega|$, $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_k\}$.

Az $f(\mathcal{V}_0)$ halmaz lineáris altér $\mathbb{R}^k$-ban, mivel $\xi, \eta \in \mathcal{V}_0$ esetén $\lambda_1\xi + \lambda_2\eta \in \mathcal{V}_0$ ($\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$), hiszen a $\pi = \lambda_1\pi_\xi + \lambda_2\pi_\eta = (\lambda_1\beta_\xi + \lambda_2\beta_\eta, \lambda_1\gamma_\xi + \lambda_2\gamma_\eta)$ startégia a t_N időpontban $X_N^\pi = \lambda_1\xi + \lambda_2\eta$ tőkét eredményez, ahol π_ξ és π_η a $\mathcal{V}_0$ definíciója alapján a ξ-hez, illetve η-hoz rendelt stratégiák.

Az $f(\mathcal{V}_1)$ halmaz konvex $\mathbb{R}^k$-ban, mivel adott $\xi, \eta \in \mathcal{V}_1$ és $\lambda \in [0,1]$ esetén nyilván $\lambda\xi + (1-\lambda)\eta \geq 0$ és $\mathbb{E}(\lambda\xi + (1-\lambda)\eta) \geq \lambda + (1-\lambda) = 1$.

3. lépés. A $\mathbb{P}^*$ konstrukciója.

A Kreps-Yan tételből[1] adódik, hogy $\mathbb{R}^k$-ban adott diszjunkt $f(\mathcal{V}_0)$ lineáris altér és $f(\mathcal{V}_1)$ konvex halmaz esetén létezik olyan $l : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ lineáris függvény, hogy

$$l(v) = 0 \quad \text{ha } v \in f(\mathcal{V}_0),$$

$$l(v) > 0 \quad \text{ha } v \in f(\mathcal{V}_1).$$

[1]Ennek a tételnek az igazolásával nem foglalkozunk a könyvünkben. A tétel megtalálható többek között Elliott és Kopp [21] könyvében (ld. 3.1 alfejezet)

Továbbá, az l lineáris függvényhez létezik egy $q \in \mathbb{R}^k$ vektor úgy, hogy l írható $l(v) = \langle v, q \rangle = \sum_{i=1}^k v_i q_i$ alakban, ahol $v = (v_1, \ldots, v_k) \in \mathbb{R}^k$, $q = (q_1, \ldots, q_k) \in \mathbb{R}^k$.

Legyenek $\xi_1, \ldots, \xi_k$ a következő módon definiált valószínűségi változók:

$$\xi_i(\omega_j) := \begin{cases} \dfrac{1}{\mathbb{P}(\{\omega_j\})} & \text{ha } i = j, \\ \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

ahol $i, j = 1, \ldots, k$. Ekkor $\xi_i \geq 0$ és $\mathbb{E}\,\xi_i = 1$, ezért $\xi_i \in \mathcal{V}_1 \quad (1 \leq i \leq k)$, és azt kapjuk, hogy $l(f(\xi_i)) = q_i/\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$, amiből az következik, hogy $q_i > 0 \quad (1 \leq i \leq k)$. Definiáljuk a $\mathbb{P}^*$ valószínűségi mértéket a következő módon:

$$\mathbb{P}^*(\{\omega_i\}) := \frac{q_i}{\sum_{j=1}^k q_j} \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

4. lépés. Vegyük észre, hogy *egy $X_0^\pi = 0$ kezdeti tőkéjű π önfinanszírozó stratégia esetén* $\mathbb{E}^* X_N^\pi = 0$. Ez könnyen belátható, hiszen $X_N^\pi \in \mathcal{V}_0$, és így $0 = l(f(X_N^\pi)) = \sum_{i=1}^k X_N^\pi(\omega_i) q_i = \mathbb{E}^* X_N^\pi \sum_{i=1}^k q_i$.

5. lépés. Ellenőrizzük, hogy $\mathbb{P}^*$ valóban ekvivalens martingál-mérték.

Mivel az Ω halmaz véges és $\mathbb{P}(\{\omega_i\}) > 0$, $\mathbb{P}^*(\{\omega_i\}) > 0$ ha $i = 1, \ldots, k$, így $\mathbb{P}^*$ és $\mathbb{P}$ ekvivalenciája triviális. Az A.2.30. Állítás szerint elegendő azt megmutatni, hogy az $\mathbb{F}$-re vonatkozó tetszőleges $\tau : \Omega \mapsto \{0, \ldots, N\}$ megállítási idő esetén teljesül

$$\mathbb{E}^* \left(\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0} \right) = 0, \tag{9.6}$$

mert ekkor ebből már következik, hogy $(S_n/B_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ martingál. Legyen τ egy megállítási idő és legyen

$$\beta_n := \frac{S_\tau}{B_\tau}\mathbb{1}_{\{n>\tau\}} - \frac{S_0}{B_0},$$

$$\gamma_n := \mathbb{1}_{\{n\le\tau\}},$$

valamint

$$\pi_n := (\beta_n, \gamma_n) \qquad \text{ha } n = 0, \dots, N.$$

Ekkor a $\pi = (\pi_n)_{n=0}^N$ stratégia a t_0 időpontban 0 kezdeti tőkével indul, hiszen

$$X_0^\pi = -\frac{S_0}{B_0}B_0 + S_0 = 0.$$

Ehhez jegyezzük meg, hogy $\mathbb{1}_{\{n>\tau\}} = \mathbb{1}_{\{n-1\ge\tau\}} \in \mathcal{F}_{n-1}$, tehát a mérhetőség teljesül, π valóban stratégia. Az önfinanszírozó tulajdonság ellenőrzése:

$$\begin{aligned}
B_{n-1}\Delta\beta_n &+ S_{n-1}\Delta\gamma_n \\
&= \frac{S_\tau}{B_\tau}(\mathbb{1}_{\{n>\tau\}} - \mathbb{1}_{\{n-1>\tau\}})B_{n-1} + (\mathbb{1}_{\{\tau\ge n\}} - \mathbb{1}_{\{\tau\ge n-1\}})S_{n-1} \\
&= \frac{S_\tau}{B_\tau}\mathbb{1}_{\{\tau=n-1\}}B_{n-1} - \mathbb{1}_{\{\tau=n-1\}}S_{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

A 4. lépés alkalmazásával

$$\begin{aligned}
0 &= \mathbb{E}^* X_N^\pi = \mathbb{E}^*(\beta_N B_N + \gamma_N S_N) \\
&= \mathbb{E}^*\left(\left(\frac{S_\tau}{B_\tau}\mathbb{1}_{\{\tau<N\}} - \frac{S_0}{B_0}\right)B_N + \frac{S_\tau}{B_\tau}\mathbb{1}_{\{\tau=N\}}B_N\right) \\
&= B_N\mathbb{E}^*\left(\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0}\right),
\end{aligned}$$

így fennáll a (9.6) egyenlet, amivel kész a bizonyítás. □

A 9.2.1. Tétel fontos szerepet játszik az opcióelméletben, és általában a közgazdaságtanban, pénzügyben. Ez a tétel matematikai és közgazdaságtani fogalmak szerencsés egybeesését állítja. Egyrészt közgazdaságtani szempontból alapvető fontosságú az arbitrázslehetőségek, illetve az arbitrázst kizáró piacok vizsgálata, másrészt látni fogjuk, hogy egy ekvivalens martingál-mérték létezése kiváló eszközt biztosít bizonyos számítások egyszerű végrehajtásához.

Azt is fontos megjegyezni, hogy a piac tényleges $\mathbb{P}$ valószínűségi mértéke ismeretlen, ami teljesen megszokott jelenség a valószínűségelméletben és a matematikai statisztikában, viszont az opcióárazási problémánk meglehetősen szokatlan jellegű. Ugyanis azokra a $\mathbb{C}_{N,f_N}$ mennyiségekre szeretnénk bizonyos feltételek mellett formulákat kapni, melyek definíciója (lásd a 8.2.12. Definíciót) a fedezeti stratégia fogalmán alapul, mely a piac valószínűségi mértékétől független, továbbá a (8.3) és a (8.4) fedezeti feltételnek a piac összes lehetséges eseményére teljesülnie kell (lásd a 8.2.10. Definíciót). Ezért lehet néhány problémát valószínűségelmélet nélkül kezelni (ld. [16]), ahogy ezt már említettük.

9.2.2. Megjegyzés. A 8.2.9. Megjegyzésben említettük a több részvényt tartalmazó piacokat. A 9.2.1. Tétel teljesen analóg módon kimondható ilyen piacokra is, de ennek tárgyalása céljainkhoz nem szükséges, így eltekintünk könyvünkben ezen általános eset ismertetésétől. Az érdeklődő olvasónak ajánljuk Harrison és Kreps [25] munkáját, illetve Föllmer [24] monográfiáját (ld. 1. fejezet, elsősorban 1.6. Tétel). $\triangle$

9.2.3. Következmény. *Tekintsünk egy d.i.b.-$(B,S)_N$ piacot. Jelölje $\{r_n\}_{n=1}^N$ a kamatlábakat és $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ az együtthatókat. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *létezik ekvivalens martingál-mérték,*

(2) *a piac kizárja az arbitrázs lehetőségét,*

(3) *$a_n < r_n < b_n$ teljesül minden $n = 1,\ldots,N$ esetén.*

Bizonyítás. A 9.1.8 és 9.2.1 Tételek alapján csak a **(2)** $\Rightarrow$ **(3)** irányt kell megmutatnunk, amit indirekt módon bizonyítunk.

Tegyük fel, hogy van olyan $1 \leq n^* \leq N$ egész, melyre $r_{n^*} \notin (a_{n^*}, b_{n^*})$.

Például tekintsük az $r_{n^*} \le a_{n^*}$ esetet. Ekkor válasszuk a következő π stratégiát:

$$\beta_k := \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \le k \le n^* - 1, \\ -\dfrac{S_{n^*-1}}{B_{n^*-1}} & \text{ha } k = n^*, \\ \dfrac{S_{n^*-1}(\rho_{n^*} - r_{n^*})}{B_{n^*}} & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\gamma_k := \begin{cases} 0 & \text{ha } 0 \le k \le n^* - 1, \\ 1 & \text{ha } k = n^*, \\ 0 & \text{egyébként,} \end{cases}$$

$$\pi := \{(\beta_k, \gamma_k)\}_{k=0}^{N}$$

Megjegyezzük, hogy a π stratégia önfinanszírozó. Hiszen egyszerűen az n^*-ik lépésben a piac a részvény esetén legalább akkora hozamot ígér (a_{n^*}), vagy nagyobbat (b_{n^*}), mint a kötvény, így az $n^* - 1$-hez tartozó időpontban veszünk egy részvényt, amit kötvényhitelből fedezünk. Egy lépés múlva biztosan nem veszítünk, de lehet, hogy nyerünk (ha $\rho_{n^*} = b_{n^*}$). Továbbá,

$$X_{n^*}^{\pi} = -\frac{S_{n^*-1}}{B_{n^*-1}} B_{n^*} + S_{n^*} = \big(-(1 + r_{n^*}) + (1 + \rho_{n^*})\big) S_{n^*-1}$$

$$\ge \big(-(1 + r_{n^*}) + (1 + a_{n^*})\big) S_{n^*-1} \ge 0$$

és $X_{n^*}^{\pi} > 0$ ha $\rho_{n^*} = b_{n^*}$, valamint

$$X_N^{\pi} = \beta_N B_N = \frac{B_N}{B_{n^*}} X_{n^*}^{\pi} \ge 0,$$

és $X_N^{\pi} > 0$, ha $\rho_{n^*} = b_{n^*}$. Tehát π egy arbitrázs stratégia, amely ellentmond **(2)**-nek.

Hasonló érvelés használható $r_{n^*} \ge b_{n^*}$ esetén, amikor $-\pi$ lesz egy arbitrázs stratégia.

□

A fenti következmény bizonyításának részletezését megtalálhatja az olvasó a [7] példatárban.

10. fejezet

A piac teljessége

Tekintsünk most jövőbeli kifizetéseket, amelyek értéke véletlen (contingent claim), mert például a részvény (és így a piac) jövőbeli alakulásától függ értéke. Tehát lényegében jövőbeli bizonytalan pénzáramlásokról van szó. Ilyen például az opciók kifizetése. Ahogy azt már említettük, a piac teljessége azt jelenti, hogy bármely előzetesen célként rögzített tervezett kifizetéshez létezik olyan önfinanszírozó stratégia, mellyel ez a kifizetés pontosan elérhető (fedezhető), azaz a célként kitűzött kifizetést a stratégia kitermeli a kifizetést. Ezt replikálásnak is szokás nevezni. Modellünkben ezt a fogalmat a következőképpen definiáljuk.

10.1.4. Definíció. *A d.i.-$(B,S)_N$ piacot teljesnek nevezzük, ha tetszőleges ξ valószínűségi változóhoz létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, hogy*

$$X_N^{\pi}(\omega) = \xi(\omega) \qquad \forall \omega \in \Omega \quad \textit{esetén.}$$

10.1.5. Tétel. *Tegyük fel, hogy a d.i.-$(B,S)_N$ piacon létezik $\mathbb{P}^*$ ekvivalens martingál-mérték. Ekkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) *a piac teljes,*

(2) $\mathbb{P}^*$ *az egyetlen ekvivalens martingál-mérték a piacon,*

(3) *tetszőleges* $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ *martingál előállítható*

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta m_k, \qquad n = 1, \ldots, N$$

alakban, ahol a γ_n*-ek* $\mathcal{F}_{n-1}$*-mérhető valószínűségi változók* $(n = 1, \ldots, N)$*, és*

$$m_n := \frac{S_n}{B_n} \qquad ha \quad n = 1, \ldots, N.$$

Bizonyítás. (1) ⇒ (2). Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}^{**}$ is egy ekvivalens martingál-mérték. Megmutatjuk, hogy $\mathbb{P}^{**} = \mathbb{P}^*$.

Legyen $A \in \mathcal{F}$ és $\xi(\omega) := \mathbb{1}_A(\omega)$. Ekkor a piac teljessége miatt létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, melyre $X_N^\pi = \xi$. A π diszkontált értékfolyamata martingált alkot tetszőleges ekvivalens martingál-mértékre vonatkozóan. Speciálisan,

$$\mathbb{E}^* \frac{X_N^\pi}{B_N} = \frac{X_0^\pi}{B_0} = \mathbb{E}^{**} \frac{X_N^\pi}{B_N},$$

ahol $\mathbb{E}^*$ és $\mathbb{E}^{**}$ a $\mathbb{P}^*$, illetve $\mathbb{P}^{**}$ mértékekre vonatkozó várható értéket jelöli, ezért

$$\mathbb{P}^*(A) = \mathbb{E}^* \mathbb{1}_A = \mathbb{E}^{**} \mathbb{1}_A = \mathbb{P}^{**}(A),$$

amivel kész (1) ⇒ (2) bizonyítása.

(2) ⇒ (1). Megjegyezzük, hogy a $\mathbb{P}^*$ ekvivalens martingál-mérték egyértelműségéből az következik, hogy $\mathbb{P}^*$ csak az a mérték lehet, melyet a 9.2.1. Tétel bizonyításában konstruáltunk.

Ugyanazt a jelölést fogjuk használni, amit (2) ⇒ (1) bizonyításánál használtunk a 9.2.1. Tételnél.

Emlékeztetünk arra, hogy

$$\mathcal{V}_0 := \{\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ v.v.} \mid \exists \text{ olyan } \pi \text{ önfinanszírozó stratégia, melyre } X_0^\pi = 0 \text{ és } X_N^\pi = \xi\}.$$

Legyen

$$\mathcal{V}_2 := \{\xi : \Omega \mapsto \mathbb{R} \text{ v.v.} \mid \mathbb{E}^* \xi = 0\}.$$

Az $f(\mathcal{V}_2)$ halmaz (f definícióját lásd a 179. oldalon) nyilván lineáris altér $\mathbb{R}^k$-ban, hiszen $\mathbb{E}^*$ lineáris funkcionál a piachoz tartozó valószínűségi mezőn definiált valószínűségi változók halmazán. A 180. oldalon található 4. lépés szerint $\mathcal{V}_0 \subseteq \mathcal{V}_2$. Először az (a), (b) és (c) lépésekben megmutatjuk, hogy ez a két altér egybeesik, azaz $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_2$.

(a) lépés. Tegyük fel, hogy $\mathcal{V}_0 \neq \mathcal{V}_2$. Ekkor létezik olyan $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_k) \in f(\mathcal{V}_2)$ nullvektortól különböző vektor, mely ortogonális az $f(\mathcal{V}_2)$ lineáris tér $f(\mathcal{V}_0)$ alterére, azaz

$$\langle \tilde{x}, x \rangle = 0 \qquad \text{ha} \quad x \in f(\mathcal{V}_0).$$

Mivel $\mathbb{P}^*$ konstrukciójában $q_i > 0$ ha $i = 1, \ldots, k$, így választhatunk olyan kicsi $\varepsilon > 0$ számot, hogy

$$\tilde{q}_i := q_i - \varepsilon \tilde{x}_i > 0$$

minden $i = 1, \ldots, k$ esetén. Legyen $\tilde{q} = (\tilde{q}_1, \ldots, \tilde{q}_k)$ és vegyük észre, hogy

$$\langle \tilde{q}, x \rangle = \langle q, x \rangle - \varepsilon \langle \tilde{x}, x \rangle = 0 \qquad \text{ha} \quad x \in f(\mathcal{V}_0). \tag{10.1}$$

(b) lépés. Legyen

$$\tilde{\mathbb{P}}(\{\omega_i\}) = \frac{\tilde{q}_i}{\sum_{j=1}^k \tilde{q}_j} \qquad \text{ha} \quad i = 1, \ldots, k.$$

Ekkor $\tilde{\mathbb{P}}$ egy ekvivalens martingál-mérték a piacon, amit ugyanúgy mutatunk meg, ahogy azt $\mathbb{P}^*$ esetén tettük az 5. lépésben a 180. oldalon. Ehhez tekintsünk egy tetszőleges τ megállítási pillanatot, és idézzük fel az 5. lépésben a 181. oldalon definiált π önfinanszírozó stratégiát. Jelöljük a $\tilde{\mathbb{P}}$-re vonatkozó várható értéket $\tilde{\mathbb{E}}$-vel. Ekkor a (10.1) állítás alapján az $\tilde{\mathbb{E}}$ funkcionál eltűnik a $\mathcal{V}_0$ halmazon, hiszen $\xi \in \mathcal{V}_0$, $x = f(\xi)$ esetén

$$\tilde{\mathbb{E}}\xi = \langle \tilde{q}, x \rangle / \sum_{j=1}^k \tilde{q}_j = 0.$$

Így

$$\begin{aligned}
0 = \tilde{\mathbb{E}} X_N^\pi &= \tilde{\mathbb{E}}(\beta_N B_N + \gamma_N S_N) \\
&= \tilde{\mathbb{E}}\left(\left(\frac{S_\tau}{B_\tau} \mathbb{1}_{\{\tau<N\}} - \frac{S_0}{B_0} \right) B_N + \frac{S_\tau}{B_\tau} \mathbb{1}_{\{\tau=N\}} B_N \right) \\
&= B_N \tilde{\mathbb{E}} \left(\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0} \right),
\end{aligned}$$

ami az A.2.30. Állítással együtt azt eredményezi, hogy $\tilde{\mathbb{P}}$ valóban egy ekvivalens martingálmérték.

(c) lépés. A $\mathbb{P}^*$ egyértelműsége alapján azt kapjuk, hogy $\mathbb{P}^* = \tilde{\mathbb{P}}$, ami azzal ekvivalens, hogy

$$q = \alpha \tilde{q} = \alpha q - \alpha \varepsilon \tilde{x}, \tag{10.2}$$

ahol $\alpha = \sum_{j=1}^k q_j / \sum_{j=1}^k \tilde{q}_j$. Tehát

$$(1-\alpha) q = -\alpha \varepsilon \tilde{x}. \tag{10.3}$$

Viszont $\tilde{x} \in f(\mathcal{V}_2)$, ezért abból, hogy $\mathbb{E}^*$ eltűnik a $\mathcal{V}_2$ halmazon, azt kapjuk, hogy

$$\langle (1-\alpha) q, q \rangle = -\alpha \varepsilon \langle \tilde{x}, q \rangle = 0.$$

Azaz a (10.3) egyenlet csak akkor teljesülhet, ha $\alpha = 1$, és így (10.2) miatt $\tilde{x}$ nullvektor. Ez viszont nem lehetséges, így ellentmondásra jutottunk, ezért valóban $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_2$.

(d) lépés. Végül megmutatjuk, hogy $\mathcal{V}_0$ és $\mathcal{V}_2$ egybeeséséből következik a piac teljessége. Legyen ξ tetszőleges ($\mathcal{F}$-mérhető) valószínűségi változó. Ekkor a $\xi - \mathbb{E}^* \xi$ valószínűségi változó eleme a $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_0$ halmaznak. Ezért létezik olyan $\check{\pi} = \{(\check{\beta}_n, \check{\gamma}_n)\}_{n=0}^N$ önfinanszírozó stratégia, melyre

$$X_0^{\check{\pi}} = 0 \quad \text{és} \quad X_N^{\check{\pi}} = \xi - \mathbb{E}^* \xi.$$

Legyen

$$\check{\beta}_n' := \check{\beta}_n + \frac{B_0}{B_N} \mathbb{E}^* \xi \qquad \text{ha} \quad n = 0, \ldots, N.$$

Ekkor a $\check{\pi}' := \{(\check{\beta}_n', \check{\gamma}_n)\}_{n=0}^N$ stratégia nyilván önfinanszírozó, és

$$X_N^{\check{\pi}'} = \xi,$$

amivel beláttuk a piac teljességét.

(1) $\Rightarrow$ (3). Tegyük fel, hogy a piac teljes, és legyen $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \le n \le N}$ egy martingál.

Ekkor a teljességből következik, hogy létezik olyan $\pi = \{(\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^N$ önfinanszírozó stratégia, melyre

$$X_N^\pi(\omega) = B_N M_N(\omega).$$

Az alapján, hogy $\mathbb{P}^*$ egy ekvivalens martingál-mérték, azt kapjuk, hogy a $(V_n^\pi, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \le n \le N}$ sorozat martingál, és így

$$M_n = \mathbb{E}^*(M_N \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}^*\left(\frac{X_N^\pi}{B_N} \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right) = \mathbb{E}^*(V_N^\pi \mid \mathcal{F}_n) = V_n^\pi.$$

Tehát végülis azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} M_n - M_{n-1} = V_n^\pi - V_{n-1}^\pi = {} & \frac{\beta_n B_n + \gamma_n S_n}{B_n} \\ & - \frac{\beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}}{B_{n-1}} = \gamma_n \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\right) \end{aligned}$$

minden $n = 1, \dots, N$ esetén, ami azt jelenti, hogy M valóban előáll

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k \Delta m_k, \qquad n = 1, \dots, N,$$

alakban.

(3) $\Rightarrow$ (1). Legyen ξ egy ($\mathcal{F}$-mérhető) valószínűségi változó, és legyen

$$M_n = \mathbb{E}^*\left(\frac{\xi}{B_N} \;\middle|\; \mathcal{F}_n\right) \qquad \text{ha} \quad n = 0, \dots, N.$$

Nyilván $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \le n \le N}$ martingál, ezért léteznek olyan $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető γ_n, $n = 1, \dots, N$, valószínűségi változók, hogy

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\right), \qquad n = 1, \dots, N.$$

Legyen $\beta_0 := X_0^\pi = M_0$, $\gamma_0 := 0$, továbbá

$$\beta_n := M_n - \gamma_n \frac{S_n}{B_n}, \qquad n = 1, \dots, N,$$

valamint

$$\pi := \{(\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^N.$$

A β_n-ek definíciója alapján teljesülnek az $V_n^\pi = M_n$, $n = 0, \dots, N$ összefüggések, ezért $X_N^\pi = B_N V_N^\pi = B_N M_N = \xi$ is teljesül. Végül megmutatjuk, hogy π önfinanszírozó. Valóban,

$$\begin{aligned} B_{n-1}\Delta\beta_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n &= B_{n-1}\left(\Delta M_n - \Delta\left(\gamma_n \frac{S_n}{B_n}\right)\right) + S_{n-1}\Delta\gamma_n \\ &= B_{n-1}\left(\gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) - \Delta\left(\gamma_n \frac{S_n}{B_n}\right)\right) + S_{n-1}\Delta\gamma_n \\ &= -B_{n-1}\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\Delta\gamma_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0. \end{aligned}$$

□

10.1.6. Megjegyzés. A 9.2.2. Megjegyzéshez hasonlóan itt is megemlítjük, hogy több részvényt tartalmazó piacokra —melyeket a 8.2.9. Megjegyzésben tárgyaltunk— is teljesen analóg módon kimondható a 10.1.5. Tétel. Az érdeklődő olvasónak ismét Harrison és Kreps [25] munkáját, illetve Föllmer [24] monográfiáját (ld. 1. fejezet, elsősorban 1.40. Tétel) ajánljuk. △

10.1.7. Tétel. *Ha a d.i.b.-$(B, S)_N$ piac kamatlábaira és együtthatóira teljesülnek az*

$$a_n < r_n < b_n, \qquad n = 1, \dots, N,$$

egyenlőtlenségek, akkor a piac teljes.

Bizonyítás. Legyen $\mathbb{P}^*$ a 9.1.8. Tételben definiált ekvivalens martingál-mérték. Mivel $\mathbb{P}^*$ az egyetlen ekvivalens martingál-mérték a piacon, így a 10.1.5. Tételből adódik a teljesség. □

10.1.8. Megjegyzés. A 10.1.5 Tételben leírt martingál reprezentáció szerint tetszőleges $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ martingál előállítható az $m_n := S_n/B_n$, $n = 1, \ldots, N$, diszkontált részvényárfolyamat martingál-differenciáiból, azaz

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \Delta m_k, \qquad n = 1, \ldots, N, \tag{10.4}$$

ahol a γ_n-ek prediktálhatóak ($\mathcal{F}_{n-1}$-mérhetőek, $n = 1, \ldots, N$). Úgy is fogalmazhatnánk, hogy minden időpontban az 'új' véletlen a részvényárból származik csak. Ilyenkor hasonlóan megadható egy martingál reprezentáció úgy, hogy annak alapját a hozamok adják.

Nevezetesen, a (10.4) egyenletben megadott martingál reprezentáció pontosan akkor teljesül minden martingál esetén, ha minden $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ martingál előállítható

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Delta m_n^*, \qquad n = 1, \ldots, N, \tag{10.5}$$

alakban, ahol a α_n-ek prediktálhatóak ($\mathcal{F}_{n-1}$-mérhetőek, $n = 1, \ldots, N$) és

$$m_n^* = \sum_{k=1}^{n} (\rho_k - r_k), \qquad n = 1, \ldots, N.$$

A két felbontás tehát pusztán abban különbözik, hogy az martingálokat az egyik esetben az $(m_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ martingálból, a másik esetben pedig az $(m_n^*, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0\le n\le N}$ martingálból állítjuk elő.

Az állítás könnyen belátható, hiszen legyen

$$\alpha_n := \frac{\gamma_n S_{n-1}}{B_n} \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Ekkor

$$\alpha_k \Delta m_k^* = \gamma_k \frac{S_{k-1}}{B_k}(\rho_k - r_k) = \gamma_k \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}} \left(\frac{\rho_k + 1}{r_k + 1} - 1 \right) = \gamma_k \Delta m_k.$$

Megjegyezzük továbbá, hogy a fenti (10.5) felbontásban szereplő α_n ($n = 1, 2, \ldots, N$) valószínűségi változókat az alábbi módon kaphatjuk meg egy arbitrázsmentes ($a_n < r_n < b_n$, $n = 1, 2, \ldots, N$) bináris (d.i.b.-$(B, S)_N$) piacon az egyetlen ekvivalens martingál-mérték segítségével. Legyen $(M_n, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{1\leq n\leq N}$ martingál. Mivel az M_n $(n = 1, \ldots, N)$ adaptált, így léteznek olyan $h_n : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$ $(n = 1, \ldots, N)$ függvények, hogy

$$M_n(\omega) = h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_n(\omega)), \quad \omega \in \Omega.$$

Ezért M_n martingál-tulajdonsága alapján

$$\mathbb{E}^*\big(h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_n(\omega)) - h_{n-1}(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)) \mid \mathcal{F}_{n-1}\big) = 0 \qquad \omega \in \Omega.$$

Ezt ekvivalens alakban írva

$$p_n^*\, h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b_n) + (1 - p_n^*)\, h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a_n)$$
$$= h_{n-1}(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega)) \quad \omega \in \Omega. \tag{10.6}$$

Legyen

$$\alpha_n(\omega) := \frac{h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b_n) - h_{n-1}(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega))}{b_n - r_n}\,, \tag{10.7}$$

$1 \leq n \leq N$ esetén. A (10.6) egyenlet alapján könnyen levezethető, hogy

$$\alpha_n(\omega) = \frac{h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a_n) - h_{n-1}(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega))}{a_n - r_n}\,, \tag{10.8}$$

$1 \leq n \leq N$. Megszorozva a (10.7) és a (10.8) egyenletet $(b_n - r_n)$-nel illetve $(a_n - r_n)$-nel észrevehetjük, hogy ez a két egyenlet azzal ekvivalens, hogy

$$\Delta M_n(\omega) = \alpha_n(\omega)\Delta m_n^*(\omega), \qquad n = 1, \ldots, N.$$

A (10.7) és (10.8) egyenletekből az alábbi ekvivalens alakot is kaphatjuk α_n megadására:

$$\alpha_n(\omega) = \frac{h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b_n) - h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a_n)}{b_n - a_n}\,, \tag{10.9}$$

$1 \leq n \leq N$, így ekkor a (10.4) egyenletben szereplő γ_n megadható a

$$\gamma_n(\omega) = \frac{B_n\left(h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), b_n) - h_n(\rho_1(\omega), \ldots, \rho_{n-1}(\omega), a_n)\right)}{S_{n-1}(\omega)\,(b_n - a_n)}\,, \tag{10.10}$$

$1 \leq n \leq N$, alakban.

Végezetül hangsúlyozzuk, hogy számos fenti egyenlet csak a 8.1.5. Feltétel miatt teljesül minden $\omega \in \Omega$ esetén, általánosabban a feltételes várható érték tulajdonságaiból adódóan csak $\mathbb{P}^*$-m.m. teljesülnének a fenti egyenletek. $\triangle$

11. fejezet

Opcióárazás

A következő lemma állítása meglehetősen triviális, de fontosnak tartjuk hangsúlyozni, mert megmagyarázza az ekvivalens martingál-mérték szerepét az opcióelméletben.

11.1.9. Lemma. *Legyen π egy önfinanszírozó (x, f_N)-fedezeti stratégia egy d.i.-$(B, S)_N$ piacon, ahol $x \in \mathbb{R}$ és $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$, és tegyük fel, hogy $\mathbb{P}^*$ egy ekvivalens martingál-mérték a piacon.*

Ekkor

$$x \geq \frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N),$$

és ha π ráadásul minimális (x, f_N)-fedezeti stratégia, akkor

$$x = \frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N).$$

Bizonyítás. Mivel $(V_n^\pi, \mathcal{F}_n, \mathbb{P}^*)_{0 \leq n \leq N}$ martingál, így

$$\begin{aligned}\frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N) &\leq \frac{B_0}{B_N}\, \mathbb{E}^* X_N^\pi = B_0\, \mathbb{E}^* \frac{X_N^\pi}{B_N} \\ &= B_0\, \mathbb{E}^* V_N^\pi = B_0 V_0^\pi = x.\end{aligned}$$

□

11.1.10. Tétel. (Feltételes követelések árazása.) *Tegyük fel, hogy $\mathbb{P}^*$ egy ekvivalens martingál-mérték egy d.i.-$(B,S)_N$ piacon, és legyen $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$ Borel-függvény.*

Ekkor

$$\mathbb{C}_{N,f_N} \geq \frac{B_0}{B_N}\,\mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N).$$

Ha az $f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ replikálható (azaz létezik hozzá tökéletes fedezet), akkor

$$\mathbb{C}_{N,f_N} = \frac{B_0}{B_N}\,\mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N). \tag{11.1}$$

Bizonyítás. A 8.2.13. Lemmából következik, hogy létezik olyan $x \in \mathbb{R}^+$, hogy $\Pi(x, f_N) \neq \emptyset$, ami azt jelenti, hogy $\mathbb{C}_{N,f_N} < \infty$. A 11.1.9. Lemma alapján nyilvánvaló, hogy

$$\mathbb{C}_{N,f_N} \geq \frac{B_0}{B_N}\,\mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N). \tag{11.2}$$

Továbbá a piac teljessége biztosítja, hogy létezik olyan π önfinanszírozó minimális (x, f_N)-fedezeti stratégia, melyre

$$X_0^\pi = \frac{B_0}{B_N}\,\mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N),$$

és így $X_0^\pi \geq \mathbb{C}_{N,f_N}$, azaz a (11.2) egyenlőtlenségben ekkor teljesül az egyenlőség is. □

11.1.11. Megjegyzés. Könnyen látható, hogy ha $f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ replikáható, akkor az $f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N) \geq 0$ egyenlőtlenségből közvetlenül következik, hogy a minimális $(\mathbb{C}_{N,f_N}, f_N)$-fedezeti stratégia értékfolyamata végig nemnegatív, hiszen

$$X_n^\pi = \frac{B_0}{B_N}\,\mathbb{E}^*\left(f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N) \mid \mathcal{F}_n\right) \geq 0, \qquad n = 0, \ldots, N.$$

Azt is érdemes megjegyeznünk, hogy replikáló stratégia t_n-beli értéke, azaz $X_n^\pi = \frac{B_0}{B_N}\,\mathbb{E}^*\left(f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N) \mid \mathcal{F}_n\right)$, egyben nem más, mint az opció értéke t_n-ben, melynek értéke véletlen, hiszen az függ attól, hogy mi történik addig a piacon. Azt kapjuk, hogy az ekvivalens martingál-mérték mellett az opció ára ugyanúgy viselkedik, mint az alapértékpapírok ára, nevezetesen: a opcióár diszkontált értékfolyamata is martingált alkot. Ebben az értelemben tehát 'konzisztens' módon egészítettük ki a piacot egy újabb értékpapírral.

Azt is vegyük észre, hogy ha az opció $f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ kifizetése replikálható, akkor több ekvivalens martingál-mérték létezése esetén is (azaz nem teljes piacon) bármelyik ekvivalens martingál-mértékkel meghatározhatnánk a (11.1) egyenletben megadott X_0^π kezdőtőkét és általában az

$$X_n^\pi = \frac{B_0}{B_N} \, \mathbb{E}^* \left(f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N) \mid \mathcal{F}_n \right)$$

feltételes értékeket, hiszen a replikáló stratégia nem függ az ekvivalens martingál-mérték választásától. Természetesen, ha a kifizetés nem lenne replikálható, akkor (11.1) különböző értékeket ('árakat') adhatna különböző ekvivalens martingál-mértékekkel számolva.

A fenti tétel az alapja az opciók árazásának. Ha a kifizetés replikálható —ilyen például teljes piacon minden európai opció kifizetése— akkor az opció ára szükségképpen $\mathbb{C}_{N,f_N}$, ugyanis minden más ár arbitrázshoz vezetne.

Ha ugyanis a piaci ár —jelöljük ezt C_{piaci}-val— ennél nagyobb lenne ($C_{piaci} > \mathbb{C}_{N,f_N}$), akkor az opció eladójának lenne arbitrázsra lehetősége: eladja az opciót, ezért kap C_{piaci} összeget, melyből $\mathbb{C}_{N,f_N}$ kezdőtőkével megvalósít egy π tökéletes fedezeti stratégiát, míg a fennmaradó $C_{piaci} - \mathbb{C}_{N,f_N} > 0$ összeget például kötvénybe rakja. Ekkor lejáratkor az opcióból származó kötelezettsége éppen annyi lesz, mint amennyi a tökéletes fedezeti stratégia lejáratkori értéke (hiszen ezt jelentette a tökéletes fedezet), azaz a fedezeti stratégia kitermeli a kötelezettséget. A kezdetben kötvénybe fektetett összeg így megmarad az eladónak, ráadásul 1 valószínűséggel. Vegyük észre, hogy itt már az arbitrázs létrehozásához természetesen olyan stratégiát kell megvalósítani, amelyben származtatott értékpapír is van.

Hasonló a helyzet akkor, ha $C_{piaci} < \mathbb{C}_{N,f_N}$, csak ekkor a vevőnek nyílik arbitrázsra lehetősége: ehhez lényegében a fentiekben leírt eladói arbitrázs -1-szeresét kell megvalósítania, nevezetesen: vesz egy opciót C_{piaci} áron és mellé a fenti π fedezeti stratégia -1-szeresét hajtja végre. Utóbbi részvények short sellingjét vagy kötvényben (bankszámla) kölcsönt feltételez, vagy akár mindkettőt, így ebből $\mathbb{C}_{N,f_N}$ összeget kap, hiszen $X_0^{-\pi} = -\mathbb{C}_{N,f_N}$. Összességében tehát kezdetben $\mathbb{C}_{N,f_N} - C_{piaci} > 0$ pénze marad, amelyet például kötvénybe fektethet. Lejáratkor a birtokolt opció éppen annyit ér, amennyit a $-\pi$ portfóliós pozíció, azaz most az opciós pozíció fedezi az esetlegesen keletkező $X_T^{-\pi} \leq 0$ veszteséget, méghozzá 1 valószínűséggel. A kezdetben keletkező $\mathbb{C}_{N,f_N} - C_{piaci} > 0$ összeg így itt is kockázat nélküli profitot ad 1 valószínűséggel.

Jegyezzük meg, hogy a fenti érvelésben olyan arbitrázs-stratégiákat konstruáltunk, amelyek alapértékpapírok mellett származtatott értékpapírokat is tartalmaznak. Ilyenkor a stratégia, az önfinanszírozás az alapértékpapírokból álló stratégiák mintájára definiálható, ahogy azt a 8.2.9. Megjegyzésben tárgyaltuk, s nyilván az arbitrázs-stratégia fogalma is értelemszerűen általánosítható erre az esetre.

Fontos hangsúlyoznunk, hogy a származtatott értékpapír ára a piachoz van árazva (a többi értékpapírhoz, arbitrázsmentesen), az a tökéletes fedezeten alapszik (ha az létetezik), amelyet 1 valószínűséggel biztosítunk. Ennek köszönhető az, hogy az árazásban (a mértékek ekvivalenciájától eltekintve) az eredeti $\mathbb{P}$ piaci mértéknek nincs szerepe. Így az ár például nem függ a részvény elvárt hozamától, vagy azt is mondhatjuk, hogy ugyanazon lehetséges részvényértékek esetén nincs jelentősége annak, hogy mekkora egy-egy érték bekövetkezésének valószínűsége a piaci mérték szerint, mely meglehetősen meglepő. Ez egy lényegi különbség más pénzügyi vagy biztosítása eszközök vagy szerződések árazásához képest, ahol szintén véletlen (bizonytalan) kifizetések értékelése a probléma. $\triangle$

Néhány széles körben használt árazási formula

11.1.12. Tétel. (Európai opció árazása) *Tekintsünk egy olyan d.i.b.-$(B,S)_N$ piacot, ahol az $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakra és az $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókra teljesülnek az $a_n < r_n < b_n$ $(n = 1,\ldots,N)$ egyenlőtlenségek. Legyen $f_N : \mathbb{R}^{N+1} \mapsto \mathbb{R}$.*

(1) *Az $f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N)$ kifizetési függvényű európai opció ésszerű ára*

$$\mathbb{C}_{N,f_N} = \frac{1}{\prod_{n=1}^N (1+r_n)} \mathbb{E}^* f_N(S_0, S_1, \ldots, S_N),$$

ahol $\mathbb{E}^*$ *a* $\mathbb{P}^*$*-ra vonatkozó várható értéket jelöli, és*

$$\mathbb{P}^*(\rho_n = b_n) = p_n^* := \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}, \qquad n = 1, \dots, N.$$

(2) *Létezik* π *önfinanszírozó stratégia, mely minimális* $(\mathbb{C}_{N,f_N}, f_N)$*-fedezeti stratégia.*

(3) *Egy ilyen stratégiát adnak meg a következő képletek:*

$$\begin{aligned}
\pi &:= \{\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)\}_{n=0}^N, \\
\beta_0 &:= \frac{\mathbb{C}_{N,f_N}}{B_0}, \qquad \gamma_0 := 0, \\
\gamma_n &:= \frac{\alpha_n B_n}{S_{n-1}}, \\
\beta_n &:= \frac{X_{n-1}^\pi - \gamma_n S_{n-1}}{B_{n-1}}, \qquad n = 1, \dots, N,
\end{aligned}$$

ahol

$$X_n^\pi := \frac{1}{\prod_{k=n+1}^N (1 + r_k)} \, \mathbb{E}^*\big(f_N(S_0, S_1, \dots, S_N) \mid \mathcal{F}_n\big),$$

és α_n $(n = 1, \dots, N)$ *az* X_n^π / B_n *folyamatnak a 10.1.8. Megjegyzésben megadott martingál-reprezentációjában szereplő* $\mathcal{F}_{n-1}$*-mérhető együtthatója.*

Bizonyítás. A 11.1.10. Tételből következik **(1)**, a 10.1.7. Tételből pedig **(2)**, valamint a 10.1.8. Megjegyzés adja a **(3)**-ban leírt alakot. □

11.1.13. Megjegyzés. A 10.1.8. Megjegyzés alapján α_n $(n = 1, \dots, N)$ felírható az alábbi ekvivalens alakban. Mivel X_n^π adaptált, így alkalmas $g_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ függvényekkel $X_n^\pi(\omega) = g_n(\rho_1(\omega), \rho_2(\omega), \dots, \rho_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$, ennélfogva

$$\begin{aligned}
\gamma_n(\omega) &= \frac{g_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), b_n) - g_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), a_n)}{S_{n-1}(\omega)\,(b_n - a_n)} \\
&= \frac{g_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), b_n) - g_n(\rho_1(\omega), \dots, \rho_{n-1}(\omega), a_n)}{S_{n-1}(\omega)\,(1 + b_n) - S_{n-1}(\omega)\,(1 + a_n)},
\end{aligned}$$

$1 \le n \le N$. (A fenti g_n függvény természetesen nem más, mint $g_n = B_n h_n$, ahol h_n-t a 10.1.8. Megjegyzésben adtuk meg.)

A fenti összefüggés tehát azt adja, hogy a bináris piacon a fedezeti stratégiához szükséges részvénymennyiség a következő időpontban lehetséges két opcióérték különbségének és a következő időponthoz tartozó két lehetséges részvényérték különbségének hányadosa. Ezt a mennyiséget nevezzük másképpen az opció deltájának. △

11.1.14. Megjegyzés. Tekintsünk egy európai opciót egy bináris arbitrázsmentes piacon. Vegyük észre, hogy ekkor az opció ára számolható egy visszafelé haladó rekurzióval, ahol minden lépés egy egylépéses bináris piacon való árazásnak felel meg. Valóban, a hozamok $\mathbb{P}^*$-függetlenségét is figyelembe véve könnyen látható, hogy

$$X^{\pi}_{n-1} = \frac{B_{n-1}}{B_n}\mathbb{E}^*\left(X^{\pi}_n \mid \mathcal{F}_n\right) \tag{11.3}$$

$$= \frac{1}{r_n}\left[g_n(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega),b_n)p^*_n + g_n(\rho_1(\omega),\ldots,\rho_{n-1}(\omega),a_n)\left(1-p^*_n\right)\right], \tag{11.4}$$

$n = 0,1,\ldots N$, ahol az utolsó sor egy egylépéses piacon való árazási formula. Mivel X^{π}_N ismert, hiszen az a kifizetés, így onnan visszafelé haladva kiszámolható a bináris fán minden korábbi X^{π}_n érték úgy, hogy a fát egylépéses részekre bontjuk.

Speciálisan, ha $X^{\pi}_N = g_N(S_N)$ alakú, akkor $X^{\pi}_n = g_n(S_n)$, $n = 0,1,\ldots N$, alkalmas g_n függvényekkel. Valóban, (11.3) alapján adódik, hogy ha $X^{\pi}_n = g_n(S_n) = g_n(S_{n-1}(1+\rho_n))$, akkor az $X^{\pi}_{n-1} = g_{n-1}(S_{n-1})$ alak is előáll. Ez egyben azt is jelenti, hogy ez esetben nem kell minden részvénytrajektóriára ($\omega \in \Omega$-ra) meghatározni az egylépéses formula alapján az árat, amikor X^{π}_n értékeiből számoljuk X^{π}_{n-1} értékeit, hanem elég azt S_{n-1} lehetséges értékeire meghatározni (melyek mind egy-egy pontnak —azaz csúcsnak— felelnek meg az opció árfáján).

Egy kétlépéses binomiális piac esetén a fentiek a következőt adják. Legyenek a lehetséges kifizetések $f_{2,1} := g_2\left(S_0(1+b)^2\right)$, $f_{2,2} := g_2\left(S_0(1+b)(1+a)\right)$, $f_{2,3} := g_2\left(S_0(1+a)^2\right)$, ahol g_2 egy kifizetési függvény. Ezek az értékek a lejárathoz tartoznak, azaz a $T = t_2$ időponthoz. A t_1 kereskedési időponthoz tarozó lehetséges opcióárak így

$$f_{1,1} = \frac{1}{1+r}\left[f_{2,1}p^* + f_{2,2}\left(1-p^*\right)\right],$$

$$f_{1,2} = \frac{1}{1+r}\left[f_{2,2}p^* + f_{2,3}\left(1-p^*\right)\right].$$

Végül a kezdőidőponthoz tartozó opcióár

$$\mathbb{C}_{2,g_2} = \frac{1}{1+r}\left[f_{1,1}p^* + f_{1,2}\left(1-p^*\right)\right].$$

Így ebben a pédában három egylépéses piacnak megfelelő árazással megkaptuk visszafelé haladó rekurzióval az opció $\mathbb{C}_{2,g_2}$ árát. $\triangle$

11.1.15. Következmény. *Tegyük fel, hogy teljesülnek a 11.1.12. Tétel feltételei. Tegyük fel, hogy f_N a következő alakban írható:*

$$g\big(S_N(\omega)\big) = f_N\big(S_0, S_1(\omega), \ldots, S_N(\omega)\big), \qquad \forall\, \omega \in \Omega,$$

ahol $g : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ Borel-függvény.

Ekkor

$$\mathbb{C}_{N,f_N} = d \sum_{H\in\Gamma} g\left(S_0 \prod_{\substack{1\le n\le N\\ n\in H}}(1+b_n) \prod_{\substack{1\le n\le N\\ n\notin H}}(1+a_n)\right) \prod_{\substack{1\le n\le N\\ n\in H}} p_n^* \prod_{\substack{1\le n\le N\\ n\notin H}}(1-p_n^*), \tag{11.5}$$

ahol d a diszkont faktor, azaz

$$d = \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)}$$

és a jelölések ugyanazok, mint a 11.1.12. Tételben, továbbá Γ az $\{1,2,\ldots,N\}$ halmaz hatványhalmaza.[1] *Speciálisan,*

$$\mathbb{C}_{N,f_N} = \frac{1}{(1+r)^N}\sum_{k=0}^{N} g\left(S_0(1+b)^k(1+a)^{N-k}\right)\binom{N}{k}(p^*)^k(1-p^*)^{N-k} \tag{11.6}$$

a homogén bináris piacon, ahol $p^* := (r-a)/(b-a)$.

Bizonyítás. Nyilvánvaló, hogy a (11.5) és (11.6) formulák értéke éppen

$$\frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)}\mathbb{E}^* g(S_N), \quad \text{illetve} \quad (1+r)^{-N}\mathbb{E}^* g(S_N).$$

$\square$

[1] Γ a $\{1,2,\ldots,N\}$ halmaz összes részhalmazainak rendszere.

11.1.16. Következmény. (Cox-Ross-Rubinstein árazási formula)

A d.i.h.b.-$(B,S)_N$ piacon az európai vételi opció ésszerű ára K $(K>0)$ lejárati ár és $(S_N-K)^+$ kifizetési függvény esetén

$$\mathcal{C}^{call}_{N,K} = S_0\,\mathbb{B}(k_0,N,\tilde{p}) - K(1+r)^{-N}\,\mathbb{B}(k_0,N,p^*),$$

ahol

$$k_0 := 1 + \left[\frac{\log \dfrac{K}{S_0(1+a)^N}}{\log \dfrac{1+b}{1+a}}\right]$$

és

$$\mathbb{B}(j,N,p) := \begin{cases} \sum_{k=j}^{N}\binom{N}{k}p^k(1-p)^{N-k} & \text{ha } 0\le j\le N,\ N\in\mathbb{N},\\[2ex] 0 & \text{egyébként,}\end{cases}$$

valamint

$$\tilde{p} = \left(\frac{1+b}{1+r}\right)p^*, \qquad p^* = \frac{r-a}{b-a},$$

ahol $[y]$ az $y\in\mathbb{R}$ szám egész részét jelöli.

Bizonyítás. Legyen $g(x)=\max(0,x-K)$, és alkalmazzuk a 11.1.15. Következményt.

Tegyük fel, hogy a piacon egy olyan $\tilde{\omega}\in\Omega$ elemi esemény következett be, melynek $(\rho_1(\tilde{\omega}),\ldots,\rho_N(\tilde{\omega}))$ realizációi k $(0\le k\le N)$ alkalommal veszik fel a b hozamértéket, azaz a megfigyelt időintervallumban a részvényár k-szor ugrott felfelé. Ekkor

$$g(S_N(\tilde{\omega})) = \max\left(0, S_0(1+a)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K\right),$$

továbbá

$$S_0(1+a)^N\left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k - K > 0$$

akkor és csak akkor teljesül ha

$$k > \frac{\log \dfrac{K}{S_0(1+a)^N}}{\log \dfrac{1+b}{1+a}},$$

azaz, ha $k \geq k_0$. Ezért azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}_{N,K}^{call} := \mathbb{C}_{N,f_N} &= S_0 \sum_{k=k_0}^{N} \binom{N}{k} p^{*k}(1-p^*)^{N-k} \left(\frac{1+a}{1+r}\right)^N \left(\frac{1+b}{1+a}\right)^k \\
&\quad - K(1+r)^{-N} \sum_{k=k_0}^{N} \binom{N}{k} p^{*k}(1-p^*)^{N-k} \\
&= S_0\, \mathbb{B}(k_0, N, \tilde{p}) - K(1+r)^{-N}\, \mathbb{B}(k_0, N, p^*),
\end{aligned}$$

mivel

$$\begin{aligned}
1 - \tilde{p} = 1 - p^* \frac{1+b}{1+r} &= \frac{(b-a)(1+r) - (r-a)(1+b)}{(b-a)(1+r)} \\
&= \frac{(b-r)(1+a)}{(b-a)(1+r)} = (1-p^*)\,\frac{1+a}{1+r}.
\end{aligned}$$

□

11.1.17. Következmény. (Put-Call paritás) *Tekintsünk egy d.i.b.-$(B,S)_N$ piacot, ahol az $\{r_n\}_{n=1}^N$ kamatlábakra és az $\{a_n\}_{n=1}^N$, $\{b_n\}_{n=1}^N$ együtthatókra teljesülnek az $a_n < r_n < b_n$ $(n = 1, \ldots, N)$ egyenlőtlenségek.*

Ekkor az európai eladási opció ésszerű ára K $(K > 0)$ lejárati ár és $(K - S_N)^+$ kifizetési függvény esetén

$$\mathcal{C}_{N,K}^{put} = \mathcal{C}_{N,K}^{call} - S_0 + \frac{K}{\prod_{n=1}^N (1+r_n)},$$

ahol $\mathcal{C}_{N,K}^{call}$ a megfelelő vételi opció ésszerű ára (ugyanolyan lejárati ár és kifizetési függvény esetén).

Bizonyítás.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{C}_{N,K}^{put} &:= \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)}\mathbb{E}^* \max(0, K - S_N) \\
&= \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)}\mathbb{E}^*\big(\max(S_N - K, 0) - S_N + K\big) \\
&= \mathcal{C}_{N,K}^{call} - \frac{1}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)}\mathbb{E}^* S_N + \frac{K}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)} \\
&= \mathcal{C}_{N,K}^{call} - S_0 + \frac{K}{\prod_{n=1}^{N}(1+r_n)} \,,
\end{aligned}
$$

mivel a $\rho_1, \dots, \rho_N$ valószínűségi változók függetlensége miatt nyílvánvaló, hogy $\mathbb{E}^* S_N = S_0 \prod_{n=1}^{N}(1+r_n)$, ahol $\mathbb{P}^*$ a piacon egyértelműen létező ekvivalens martingál-mérték. □

11.1.18. Megjegyzés. Vegyük észre, hogy a put-call paritás bizonyításában valójában csak azt használtuk, hogy a szóban forgó opciók kifizetése replikálható. Így a 11.1.10. Tételt és a 11.1.11. Megjegyzést is figyelembe véve általában egy piacon, ha teljesül a replikálhatósági feltétel, akkor a put-call paritás fenti bizonyítása –s így maga a paritás is– érvényben van. Sőt, még általánosabb feltételek mellett is érvényben marad a put-call paritás, hiszen egyszerű arbitrázsmentességi érveléssel látható, hogy egy call opció és $K/(B_0 \prod_{n=1}^{N}(1+r_n))$ mennyiségű kötvény ugyanannyit kell, hogy érjen, mint egy put opció és egy részvény. Ugyanis ezen két egyszerű portfólió értéke megegyezik a lejáratkor egy valószínűséggel.

11.1.19. Megjegyzés. (Amerikai opciók árazása bináris piacon) Amerikai opciók árazásával és hozzájuk kapcsolódó árazási feladatokkal, fedezeti stratégiákkal ebben a könyvben részletesen nem foglalkozunk. Itt mindössze egy egyszerű algoritmust ismertetünk arra vonatkozóan, hogy hogyan lehet arbitrázsmentes bináris piacokon amerikai opciókat árazni és eldönteni, hogy érdemes-e az opciót lehívni. Az így ismertetendő ár tulajdonságaival (pl. arbitrázsmentességével) itt nem foglalkozunk, az érdeklődő olvasónak ajánljuk Shiryaev [50] monográfiáját.

A 11.1.14. Megjegyzésben megmutattuk, hogy hogyan lehet a bináris piacon egy opciót visszafelé haladó rekurzióval árazni. Azt is láttuk, hogy ebben a rekurzióban minden lépés egy egylépéses piacon való opcióárazásnak felel meg. Amerikai opciók esetén bináris piacon szintén egy ilyen visszafelé haladó rekurziót tekintünk, mindössze ennek egy-egy lépése lesz a korábbiaktól eltérő.

Tekintsünk egy amerikai vételi vagy eladási opciót példaként. A rekurzió ugyanazon értékekből indul ki, mint az európai esetben, azaz a t_N időponthoz tartozó értékek —azaz kifizetések— azonosak, hiszen a lejáratkor már ugyanannyit ér egy európai és a neki megfelelő amerikai opció. Ezt követően minden lépés során egy egylépéses esetet oldunk meg valójában, de ez most különbözik az európai esettől, ezt mutatjuk most be.

Ehhez legyen $\mathbb{C}_{1,1}^{Am}$ és $\mathbb{C}_{1,0}^{Am}$ két lehetséges ára az amerikai opciónak a következő kereskedési időpontban, amelyet már a rekurzió során meghatároztunk. Itt a $\mathbb{C}_{1,1}^{Am}$ ár tartozik a részvény 'felfelé' való ugrásához, pontosabban a nagyobbik hozamértékhez, míg $\mathbb{C}_{1,0}^{Am}$ a kisebbikhez. Ekkor keressük a rekurzió jelenlegi $\mathbb{C}_0^{Am}$ értékét, melyet az alábbi módon határozunk meg:

$$\mathbb{C}_0^{Am} = \max\left(\mathbb{C}_0^{Eu}\ ,\ \mathbb{C}_0^L\right), \tag{11.7}$$

ahol

$$\mathbb{C}_0^{Eu} = \frac{1}{1+r}\left[\mathbb{C}_{1,1}^{Am} p^* + \mathbb{C}_{1,0}^{Am}\left(1-p^*\right)\right],$$

p^* az ekvivalens martingál-mérték szerinti valószínűsége a felfele ugrásnak, továbbá $\mathbb{C}_0^L$ jelöli azt a kifizetést, melyet akkor kapnánk, ha az opció lehívása mellett döntenénk. Heurisztikusan könnyen igazolható a fent leírt árazási módszer. Vegyük ugyanis észre, hogy a $\mathbb{C}_0^{Eu}$ mennyiséget a jövőbeli lehetséges (amerikai) opciós árakból úgy határoztuk meg, mint az európai esetben, azaz, ha nem a lehívás mellett döntünk, akkor ennyit ér az opciónk ebben a pontban. Így (11.7) szerint tekintjük a két lehetőségünket, a lehívást vagy az opció tartását, s az opció ára ebben a pontban annyi, amennyit a kettő lehetőség közül a jobb biztosít. Egyben választ kapunk arra a kérdésre is, hogy milyen esetben érdemes lehívni az opciót ebben a pontban: ha $\mathbb{C}_0^{Eu} < \mathbb{C}_0^L$.

A fentiekben ismertetett árazási algoritmussal kapcsolatban további részleteket tárgyal Hull [28], míg az elmélet precíz tárgyalását számos műben megtalálhatja az érdeklődő olvasó, mi Shiryaev [50] munkáját említjük. △

11.1.20. Megjegyzés. (A Black-Scholes piac és árazási formula) Könyvünk kizárólag diszkrét idejű piacokkal foglalkoztunk. Már a bevezetőben is említettük, hogy célunk olyan módon áttekinteni a pénzügyi matematika néhány klasszikus eredményét, hogy az egy bevezető matematikai analízis és valószínűségszámítás kurzusok ismeretében követhető legyen. Ugyanakkor az opcióárázás esetén említést kívánunk tenni a klasszikussá vált Black-Scholes-féle modellről, hiszen annak tudománytörténeti jelentősége is nagy: ez indította el vagy legalábbis adott nagy lökést az opcióárazás mellett a modern pénzügyi matematika számos területének. Ez igazolja az is, hogy az opcióárazás területen végzett mérföldkőnek tekinthető munkájáért vehette át a közgazdasági Nobel-emlékdíjat Robert C. Merton és Myron S. Scholes 1997-ben ("for a new method to determine the value of derivatives").

A Black-Scholes elmélethez, vagy általánosabban a folytonos idejű piacok tárgyalásához olvasásához a sztochasztikus kalkulus mélyebb ismerete szükséges. Célunk itt csak az, hogy röviden megemlítsük a híres elmélet alapjait és annak kapcsolatát a diszkrét idejű modelekkel. De már előzetesen megemlítjük, hogy az alapötletek, alapeszközök megegyeznek a diszkrét tárgyaltakkal, ám a problémák technikailag, matematikailag sokkal mélyebbek.

A Black-Scholes piac egy folytonos idejű piac, ami azt jelenti, hogy az árak tetszőleges időpontban változhatnak a jelenlegi 0 időponttól a lejárati T időpontig, és hogy a kereskedés szintén megengedett tetszőleges $t \in [0, T]$ időpontban. Tehát minden folyamat (mint például az ár, az érték vagy a portfólió folyamata) az egész $[0, T]$ intervallumon van definiálva.

Ekkor a Black-Scholes piaci modell az alábbi módon adható meg. Legyen $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)\}$ egy filtrált valószínűségi mező, melyen a kötvény és a részvény árfolyamatára azt tesszük fel, hogy

- $B_t = B_0 e^{rt}$ ha $t \in [0, T]$, ahol $B_0 > 0$ és $r \geq 0$,

- az $S = \{S_t | t \in [0,T]\}$ részvény árfolyamatot pedig az

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s, \quad t \in [0,T] \tag{11.8}$$

sztochasztikus integrálegyenlet határozza meg, ahol $W = \{W_t \mid t \in [0,T]\}$ standard Brown-mozgás (vagyis Wiener-folyamat) az $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F})$-en, és az $\mathbb{F}$ filtrációt a W generálja, azaz

$$\mathcal{F}_t = \sigma\big\{\sigma\{W_s \mid 0 \le s \le t\} \cup \{A \in \mathcal{F} \mid \mathbb{P}(A) = 0\}\big\},$$

- $\mu \in \mathbb{R}$, $\sigma > 0$, $S_0 > 0$ konstansok.

A (11.8) sztochasztikus integrálegyenlet formálisan írható differenciálegyenlet alakjában is:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad t \in [0,T], \tag{11.9}$$

de a (11.9) egyenlet precíz értelmezése a (11.8) egyenlettel történik. Ekkor az

$$S_t := S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) t + \sigma W_t\right), \quad t \in [0,T],$$

folyamat egyértelmű megoldása (11.8) egyenletnek, melyet az Itô-formula (ld. [45], VI.39) segítségével láthatunk, hiszen

$$\begin{aligned} S_t - S_0 &= \int_0^t \sigma S_s dW_s + \int_0^t \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) S_s ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 S_s d[W]_s \\ &= \int_0^t \mu S_s ds + \int_0^t \sigma S_s dW_s, \quad t \in [0,T], \end{aligned}$$

ahol $[W]$ a W kvadratikus variációs folyamatát jelöli. (A sztochasztikus calculusban jártas olvasónak megemlítjük, hogy az egyértelműség közvetlenül következik abból, hogy a (11.8) egyenletben szereplő együtthatófüggvények –vagyis az $f_1(x) = \mu x$ és $f_2(x) = \sigma x$ függvények– lineárisak, ezért nyilván teljesítik a Lipschitz-feltételt, lásd [13], 10.2 Fejezet).

A fentiekben látható, hogy a Black-Scholes piacon a részvény kettő paraméterrel jellemezhető. Az egyik μ, melyet várható (elvárt) hozamnak tekinthetünk, a másik σ, mely a hozam szórását adja egy évre vonatkozóan, s ezt szokás volatilitásnak nevezni. Ezen paraméterek értelmezésével és szerepével kapcsolatban az olvasó számos hasznos megjegyzést talál Hull [28] könyvében.

A folytonos idejű piacokon is hasonló módon történik a derivatívák árazása, mint diszkrét időben. Az arbitrázsmentesség, a teljesség esetén hasonló karakterizációs alaptételek ismertek, mint diszkrét időben, s az európai típusú opciók ára itt is megadható $\frac{B_0}{B_T}\mathbb{E}^*\xi$ alakban egy alkalmas ekvivalens martingálmérték mellett, ahol ξ az opció kifezetését jelöli. Továbbá megjegyzünk, hogy az ár pénzügyi, közgazdasági szempontból itt is hasonlóan értelmezhető és hasonló tulajdonságokkal bír, mint ahogy azt például diszkrét időben tárgyaltuk a 11.1.11. Megjegyzésben.

A fentiekben leírt piacon határozta meg Black és Scholes európai call opciók árát, amelyre adott árazási formulát szokás Black-Scholes formulának nevezni.

Ehhez megjegyezzük, hogy a Black-Scholes piacon létezik ekvivalens martingál-mérték, mely mellett a részvény (11.8) illetve (11.9) egyenletekben felírt árfolyamta az alábbi egyenletet teljesíti:

$$dS_t = rS_t dt + \sigma S_t dW_t^*, \quad t \in [0, T], \tag{11.10}$$

ahol W_t^* egy standard Wiener folyamat $\mathbb{P}^*$ mellett. Vegyük észre, hogy a drift tagban a hozamráta helyett a kockázatmentes kamatláb szerepel az új mérték mellett felírt egyenletben.

Ekkor egy K kötési árral rendelkező, T-ben lejáró európai vételi opció $c = \mathrm{e}^{-rT}\mathbb{E}^*(S_T - K)^+$ árára a Black és Scholes [10] által megadott ár a következő alakban írható fel:

$$c = S_0\phi(d_1) - \mathrm{e}^{-rT}K\phi(d_2), \tag{11.11}$$

ahol ϕ a standard normális eloszlás eloszlásfüggvénye, továbbá

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}},$$

$$d_2 = \frac{\ln(S_0/K) + (r - \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Az érdeklődő olvasó ezeket számos munkában, monográfiában megtalálhatja az elmélet és az árazás részleteit, mi az alábbiakat ajánljuk: [37], [50], [31], [52], ahol több módszert is találhatunk a formula igazolására. Utóbbi egy viszonylag rövid összefoglalását adja a főbb eredményeknek.

Végezetül megjegyezzük, hogy érdekes problémakör a diszkrét és folytonos idejű piacok közötti kapcsolat vizsgálata. Itt egyrészt arra kell gondolnunk, hogy a diszkrét idejű piaci modelleket szokás egyes folytonos modellek approximációjának tekinteni. Erre azon eredmények adnak alapot, amelyek szerint diszkrét idejű piacok sorozatának a határértékeként (gyenge konvergencia értelmében) megkaphatunk egyes folytonos idejű piacokat. A leginkább klasszikus példa erre az, hogy (alkalmasan paraméterezett) binomiális fák modelljeinek határátmenetével előállítható a Black-Scholes piac. Ilyen esetekben felvetődik további kérdésként az is, hogy a piacokon definiált mennyiségek –elsősorban az opcióárak– határátmenete is igazolható-e. Itt ismét említhetjük a binomiális piacokat, melyek esetén igazolható, hogy a Black-Scholes formula megkapható a Cox-Ross-Rubinstein formula határértékeként alkalmasan paraméterezett binomiális piaci sorozat esetén. A szóban forgó klasszikus eredmények kapcsán ajánljuk az érdeklődő olvasónak [15], [39] munkákat, míg egy átfogó vizsgálatát adja a problémakörnek Prigent [38] monográfiája. $\triangle$

A. Függelék

Függelék

A.1. Néhány nevezetes kalkulus alaptétel

Az alábbi tétel jól ismert a klasszikus analízis tárgykörében. Ennélfogva annak bizonyítása is megtalálható számos bevezető matematikai analízis könyvben vagy egyetemi jegyzetben (például a [34] monográfiában).

A.1.1. Tétel. (Az implicit függvény tétel) *Legyen $U \subset \mathbb{R}^{p+q}$ egy nemüres nyílt halmaz, p, q pozitív egészek, és tegyük fel, hogy $f : U \to \mathbb{R}^q$ egy n-szer folytonosan differenciálható függvény. Továbbá legyen $S = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$. Tegyük fel, hogy $a \in S$ úgy, hogy*

$$det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x_{p+1}} f_1(a) & \frac{\partial}{\partial x_{p+2}} f_1(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{p+q}} f_1(a) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial}{\partial x_{p+1}} f_q(a) & \frac{\partial}{\partial x_{p+2}} f_q(a) & \dots & \frac{\partial}{\partial x_{p+q}} f_q(a) \end{pmatrix} \neq 0.$$

Ekkor van olyan $U_0 \subset \mathbb{R}^{p+q}$ környezete az a pontnak és létezik egy olyan n-szer folyto-

nosan differenciálható $g : W \to \mathbb{R}^q$ függvény, ahol $W \subset \mathbb{R}^p$, úgy, hogy

$$S \cap U_0 = \Big\{ \big(w, g(w)\big) \;\Big|\; w \in W \Big\}.$$

Továbbá $a_I \in W$, $g(a_I) = a_{II}$, ahol az alábbi jelölésekkel élünk: $a = (a_1, \dots, a_{p+q})$, $a_I = (a_1, \dots, a_p)$, $a_{II} = (a_{p+1}, \dots, a_{p+q})$. Végül, $f(w, g(w)) = 0$ minden $w \in W$ esetén.

A fenti tételt nagyrészt $q = 1$ esetén alkalmazzuk. Ilyenkor az mondható, hogy a megfelelő feltételek mellett a tétel alapján lokálisan egy koordináta kifejezhető a többi segítségével az $f(x) = 0$ 'görbe' mentén.

Az alábbiakban a parciális integrálás tételének egyik alakját mondjuk ki. Több mértékelméleti könyvben megtalálható a bizonyítása, mi Cohn [14] könyvének az 5. fejezetére hivatkozunk itt.

A.1.2. Tétel. (Parciális integrálás) *Legyen F és G monoton növekvő, balról folytonos, korlátos, valós értékű függvény a valós intervallumon értelmezve, melyekre teljesül, hogy $\lim_{x \to -\infty} F(x) = \lim_{x \to -\infty} G(x) = 0$. Legyen továbbá $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$.*
Ekkor

$$\int_{[a,b]} G(x) dF(x) + \int_{[a,b]} F(x+) dG(x) = F(b+)G(b+) - F(a)G(a), \tag{A.1}$$

ahol $F(x+)$ és $G(x+)$ F illetve G jobboldali határértékeit jelölik az x pontban.

Az (A.1) egyenlőségből kapható az alábbi egyenlőség:

$$\int_{[a,b]} \frac{G(x) + G(x+)}{2} dF(x) + \int_{[a,b]} \frac{F(x) + F(x+)}{2} dG(x) = F(b+)G(b+) - F(a)G(a).$$

Jegyezzük meg továbbá, hogy abban az esetben, ha nincs olyan pont, ahol F és G sem folytonos, akkor egyszerűbb alakban is írhatjuk a parciális integrálás formuláját, nevezetesen:

$$\int_{[a,b]} G(x) dF(x) + \int_{[a,b]} F(x) dG(x) = F(b+)G(b+) - F(a)G(a).$$

A.2. Valószínűségszámítás és martingálok véges eseménytéren

Az opcióelméleti részben azt az egyszerűsítő (de az általánosságot nem csorbító) feltételezést tesszük, hogy a lehetséges kimenetelek, vagyis az elemi események száma *véges*, és csak a lehetetlen esemény valószínűsége nulla (8.1.5. Feltétel). Most összefoglaljuk ebben a speciális esetben azokat a valószínűségszámítási eszközöket, melyek szükségesek a jegyzet megértéséhez, de nem feltétlenül tartoznak bele egy egyetemi bevezető valószínűségszámítási kurzus anyagába. Elsősorban a feltételes várható érték koncepciója, és a martingálokkal kapcsolatos alapfogalmak tisztázása a célunk. Ehhez azonban először áttekintjük a legfontosabb valószínűségszámítási alapfogalmakat.

Eseményalgebrák

Az elemi eseményeket jelölje $\omega_1, \ldots, \omega_N$. Így az *eseménytér* $\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_N\}$.

Jelölje az Ω összes részhalmazából álló halmazt 2^Ω (mely 2^N elemből áll). Minden eseményt az Ω halmaz valamely $\{\omega_{i_1}, \ldots, \omega_{i_k}\}$ részhalmaza reprezentálja.

A.2.1. Definíció. *Ha az Ω halmaz bizonyos részhalmazaiból álló $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ rendszer olyan, hogy $\Omega \in \mathcal{F}$ (azaz tartalmazza a biztos eseményt), és $A, B \in \mathcal{F}$ esetén $\Omega \setminus A \in \mathcal{F}$ és $A \cup B \in \mathcal{F}$ (vagyis zárt a komplementerképzésre és az unióképzésre), akkor az $\mathcal{F}$ halmazrendszert* halmazalgebrának *nevezzük, az $(\Omega, \mathcal{F})$ párt pedig* mérthető térnek.

Ha $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ halmazalgebra, akkor $\emptyset \in \mathcal{F}$ (azaz tartalmazza a lehetetlen eseményt is), és $A, B \in \mathcal{F}$ esetén $A \cap B \in \mathcal{F}$ és $A \setminus B \in \mathcal{F}$ és is teljesül (vagyis zárt a metszetképzésre és a különbségképzésre is).

Természetes az a feltevés, hogy egy kísérlettel kapcsolatos eseményeket reprezentáló halmazrendszerből nem vezetnek ki a szokásos műveletek, azaz halmazalgebrát alkot.

A teljesség kedvéért felidézzük a σ-algebra fogalmát is:

A.2.2. Definíció. *Ha az* Ω *halmaz bizonyos részhalmazaiból álló* $\mathcal{B} \subset 2^\Omega$ *rendszer halmazalgebrát alkot, és* $B_1, B_2, \dots \in \mathcal{B}$ *esetén* $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i \in \mathcal{B}$ *(vagyis zárt a megszámlálható unióképzésre), akkor a* $\mathcal{B}$ *halmazrendszert* σ-algebrának *nevezzük.*

Nyilván véges Ω eseménytér esetén minden halmazalgebra egyúttal σ-algebra is. A halmazalgebrák szerkezetét egyszerűen le lehet írni partíciók segítségével.

A.2.3. Definíció. *Az* $A_1, \dots, A_\ell \in 2^\Omega$ *részhalmazok az* Ω partícióját *alkotják, ha nem üres halmazok, egymást páronként kizárják, és egyesítésük* Ω.

Ha az $\mathcal{F}$ halmazalgebra tartalmazza az $A_1, \dots, A_\ell$ halmazokat, melyek Ω partícióját alkotják, akkor tartalmazza az

$$A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}, \qquad k \in \{1, \dots, \ell\}, \quad 1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \ell \tag{A.2}$$

alakú halmazokat is, melyek nyilván halmazalgebrát alkotnak. Ezt a halmazalgebrát az $A_1, \dots, A_\ell$ *partíció által generált halmazalgebrának* nevezünk; jelölése: $\sigma(A_1, \dots, A_\ell)$. Tehát ha az $\mathcal{F}$ halmazalgebra tartalmazza az $A_1, \dots, A_\ell$ halmazokat, melyek Ω partícióját alkotják, akkor $\sigma(A_1, \dots, A_\ell) \subset \mathcal{F}$.

A.2.4. Állítás. *Minden* $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ *halmazalgebrához található* Ω*-nak pontosan egy olyan* $A_1, \dots, A_\ell \in 2^\Omega$ *partíciója, mely generálja, azaz* $\sigma(A_1, \dots, A_\ell) = \mathcal{F}$*, vagyis* $\mathcal{F}$ *elemei éppen az* (A.2) *alakú halmazok.*

Két *triviális* (azaz egyszerű) halmazalgebra van: az Ω egyelemű partíció által generált $\{\Omega, \emptyset\}$ halmazalgebra (azaz $\sigma(\Omega) = \{\Omega, \emptyset\}$), és az $\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_N\}$ N-elemű partíció által generált 2^Ω halmazalgebra (vagyis $\sigma(\{\omega_1\}, \dots, \{\omega_N\}) = 2^\Omega$).

A.2.5. Definíció. *Jelölje* $\mathcal{F} \subset \Omega$ *egy kísérlettel kapcsolatos eseményekből álló halmazalgebrát. Ekkor az* $\mathcal{F}$*-beli halmazokból álló partíciókat* teljes eseményrendszereknek *nevezünk.*

Ez azt jelenti, hogy egy teljes eseményrendszer eseményei közül a kísérlet végrehajtásakor mindig pontosan egy következik be. Felhívjuk a figyelmet arra, hogy egy teljes eseményrendszer eseményei között nem szerepelhet a lehetetlen esemény. Ha egy kísérlet során *nem kapunk teljes információt*, azaz nem tudjuk, hogy az $\omega_1, \dots, \omega_N$ elemei események közül melyik következett be, csak azt, hogy az $A_1, \dots, A_\ell$ teljes eseményrendszer eseményei közül melyik következett be, akkor pontosan az (A.2) alakú eseményekről tudjuk, hogy bekövetkeztek-e vagy sem. Ezek pedig éppen az $A_1, \dots, A_\ell$ teljes eseményrendszer által generált $\sigma(A_1, \dots, A_\ell)$ halmazalgebra eseményei.

Valószínűség

A.2.6. Definíció. Valószínűségi mező *alatt egy* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *hármast értünk, ahol* Ω *egy* nemüres véges *halmaz (az eseménytér),* $\mathcal{F} \subset 2^\Omega$ *halmazalgebra (mely az eseményeket tartalmazza),* $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ *pedig egy olyan leképezés (halmazfüggvény), hogy*

(1) $0 \le \mathbb{P}(A) \le 1$ *teljesül tetszőleges* $A \in \mathcal{F}$ *esetén,*

(2) $\mathbb{P}(\Omega) = 1$,

(3) $\mathbb{P}(A) = 0$ *csak* $A = \emptyset$ *esetén teljesül,*

(4) *ha* $A_1, A_2, \dots, A_m \in \mathcal{F}$ *páronként diszjunktak, akkor* $\mathbb{P}\Big(\bigcup_{j=1}^m A_j\Big) = \sum_{j=1}^m \mathbb{P}(A_j)$.

Az (i)–(iv) tulajdonságokkal rendelkező $\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$ halmazfüggvényt az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren adott *valószínűségi mértéknek* nevezzük. A (iv) tulajdonságot *additivitásnak* nevezzük.

A A.2.4 Állítás szerint az $\mathcal{F}$ halmazalgebrához van olyan $A_1, \dots, A_\ell$ teljes eseményrendszer, hogy $\mathcal{F} = \sigma(A_1, \dots, A_\ell)$, azaz tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esemény előáll

$$A = A_{i_1} \cup \dots \cup A_{i_k}$$

diszjunkt felbontás alakjában megfelelő $k \in \{1, \dots, \ell\}$ és $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq \ell$ esetén, ezért

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(A_{i_1}) + \dots + \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Ezért *elég megadni a teljes eseményrendszert alkotó események valószínűségeit*, a $p_i := \mathbb{P}(A_i)$, $i = 1, 2, \dots, \ell$ számokat ahhoz, hogy tetszőleges esemény valószínűségét ki tudjuk számolni. Nyilván szükséges az, hogy ezek a $\{p_1, p_2, \dots, p_\ell\}$ számok *pozitívak* legyenek és összegük 1 legyen, hiszen

$$1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{\ell} A_j\right) = \sum_{j=1}^{\ell} p_j.$$

A.2.7. Definíció. *Legyenek $\mathbb{P}$ és $\mathbb{P}^*$ valószínűségi mértékek az $(\Omega, \mathcal{F})$ mérhető téren. Azt mondjuk, hogy $\mathbb{P}$* abszolút folytonos *$\mathbb{P}^*$-re nézve (jelölése $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^*$), ha $\mathbb{P}(A) = 0$ teljesül minden olyan $A \in \mathcal{F}$ esemény esetén, melyre $\mathbb{P}^*(A) = 0$. Azt mondjuk, hogy $\mathbb{P}$ és $\mathbb{P}^*$* ekvivalensek *(jelölése $\mathbb{P} \sim \mathbb{P}^*$), ha $\mathbb{P} \ll \mathbb{P}^*$ és $\mathbb{P}^* \ll \mathbb{P}$.*

Mivel most a feltételezés szerint $\mathbb{P}(A) = 0$ vagy $\mathbb{P}^*(A) = 0$ csak $A = \emptyset$ esetén teljesül, így tetszőleges $\mathbb{P}$ és $\mathbb{P}^*$ valószínűségi mértékek ekvivalensek.

Feltételes valószínűség

A.2.8. Definíció. *Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező, $A, B \in \mathcal{F}$. Ekkor a B esemény* feltételes valószínűsége az A feltétel mellett

$$\mathbb{P}(B \mid A) := \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)},$$

hacsak $A \neq \emptyset$.

A.2.9. Tétel. (Teljes valószínűség tétele) *Ha az* $A_1, A_2, \ldots, A_\ell \in \mathcal{F}$ *események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor tetszőleges* $B \in \mathcal{F}$ *eseményre*

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{k=1}^{\ell} \mathbb{P}(B \mid A_k) \cdot \mathbb{P}(A_k).$$

Függetlenség

Akkor tartunk két eseményt függetleneknek egymástól, ha az egyik bekövetkezésével kapcsolatos információ nem változtatja meg a másik esemény bekövetkezésének esélyéről alkotott véleményünket. Mivel valamely $B \in \mathcal{F}$ esemény bekövetkezésekor az $A \in \mathcal{F}$ esemény bekövetkezési esélyét a $\mathbb{P}(A|B)$ feltételes valószínűség adja meg (hacsak $B \neq \emptyset$), és hasonlóan: az A esemény bekövetkezésekor a B bekövetkezési esélye $\mathbb{P}(B|A)$ (hacsak $A \neq \emptyset$), ezért pozitív valószínűségű A és B eseményeket akkor gondolunk függetleneknek, ha $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ teljesül. Mivel $\mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(B)}$ és $\mathbb{P}(B|A) = \frac{\mathbb{P}(A\cap B)}{\mathbb{P}(A)}$, ezért midkét feltétel azzal ekvivalens, hogy $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B)$ teljesül. Ennek az összefüggésnek akkor is van értelme, ha A vagy B a lehetetlen esemény. Ezért a definíció a következő:

A.2.10. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $A, B \in \mathcal{F}$ *események* függetlenek, *ha*

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \cdot \mathbb{P}(B).$$

Nyilván a lehetetlen esemény és a biztos esemény tetszőleges eseménytől független. Ha az $A, B \in \mathcal{F}$ független események egyike sem a lehetlen esemény, akkor $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A)$ és $\mathbb{P}(B|A) = \mathbb{P}(B)$ is teljesül.

Könnyen bizonyítható, hogy ha $A, B \in \mathcal{F}$ függetlenek, akkor $\overline{A}$ és B, A és $\overline{B}$, valamint $\overline{A}$ és $\overline{B}$ is függetlenek.

A.2.11. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *események* páronként függetlenek, *ha közülük bármely két esemény független.*

Azt mondjuk, hogy az $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *események* (teljesen) függetlenek, *ha bármely* $k \in \{1, 2, \ldots, m\}$ *és* $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leq m$ *esetén*

$$\mathbb{P}(A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \cdots \cap A_{i_k}) = \mathbb{P}(A_{i_1})\mathbb{P}(A_{i_2}) \cdots \mathbb{P}(A_{i_k}).$$

Azt mondjuk, hogy az $\mathcal{C}_1, \mathcal{C}_2, \ldots, \mathcal{C}_m \subset \mathcal{F}$ *eseménycsaládok* (teljesen) függetlenek, *ha tetszőleges* $A_1 \in \mathcal{C}_1$, $A_2 \in \mathcal{C}_2$, $\ldots$, $A_m \in \mathcal{C}_m$ *esetén az* $A_1, A_2, \ldots, A_m$ *események (teljesen) függetlenek.*

Lehetséges, hogy például három esemény páronként függetlenek, de nem (teljesen) függetlenek.

Valószínűségi változók

Egy $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mezővel leírt véletlen kísérlettel kapcsolatos véletlentől függő mennyiség reprezentálható valamely $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ függvénnyel. Mivel Ω véges halmaz, így ξ értékkészlete, vagyis ξ lehetséges értékeinek halmaz is véges; jelölje ezt $X = \{x_1, \ldots, x_m\}$. A ξ viselkedésének leírásához szükségünk van a $\mathbb{P}(\{\xi = x_i\})$, $i = 1, \ldots, m$ valószínűségekre, ahol

$$\{\xi = x_i\} := \xi^{-1}(\{x_i\}) := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) = x_i\}$$

azon elemi eseményekből álló részhalmaza az Ω eseménytérnek, ahol a ξ leképezés felveszi az x_i értéket. Ezekről a valószínűségekről akkor tudunk beszélni, ha a $\{\xi = x_i\}$, $i = 1, \ldots, m$ halmazok (melyek Ω partícióját alkotják) események, azaz benne vannak az $\mathcal{F}$ halmazalgebrában; ha ez a feltétel teljesül, akkor azt mondjuk, hogy a ξ függvény *mérhető* az $\mathcal{F}$ halmazalgebrára nézve, és a ξ függvényt *valószínűségi változóknak* nevezzük.

Az A.2.4 Állítás szerint az $\mathcal{F}$ halmazalgebrához található pontosan egy olyan $A_1, \ldots, A_\ell$ teljes eseményrendszer, hogy tetszőleges $A \in \mathcal{F}$ esemény előáll $A = A_{j_1} \cup \cdots \cup A_{j_k}$ diszjunkt felbontás alakjában megfelelő $k \in \{1, \ldots, \ell\}$ és $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq \ell$ esetén, ezért a ξ

függvény mérhetősége azzal egyenértékű, hogy a $A_1, \dots, A_\ell$ halmazokon *konstans* (állandó) értéket vesz fel.

A ξ függvény mérhetősége azzal is egyenértékű, hogy a $\{\xi = x_{i_1}\} \cup \dots \cup \{\xi = x_{i_k}\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$, alakú halmazok események. Ezek a halmazok éppen a $\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ partíció által generált halmazalgebrát alkotják, melyet a ξ *függvény által generált halmazalgebrának* nevezünk; jelölése: $\sigma(\xi)$. Tehát a ξ függvény mérhetősége azzal is egyenértékű, hogy $\sigma(\xi) \subset \mathcal{F}$.

Ha egy kísérlet során nem kapunk teljes információt, azaz nem tudjuk, hogy az $\omega_1, \dots, \omega_N$ elemi események közül melyik következett be, csak azt, hogy a ξ valószínűségi változó melyik értékét veszi fel, akkor pontosan a $\{\xi = x_{i_1}\} \cup \dots \cup \{\xi = x_{i_k}\}$, $k \in \{1, \dots, m\}$, $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$, alakú eseményekről tudjuk, hogy bekövetkeztek-e vagy sem, vagyis a $\sigma(\xi)$-beli eseményekről. Tehát a $\sigma(\xi)$ halmazalgebrát éppen a ξ valószínűségi változóval kapcsolatos események alkotják, vagyis azok az események, melyekről a ξ megfigyelésével el tudjuk dönteni, hogy bekövetkeztek-e vagy sem.

A $\{\xi = x_i\}$, $i = 1, 2, \dots, m$ események nyilván teljes eseményrendszert alkotnak. A $p_i := \mathbb{P}(\{\xi = x_i\})$, $i = 1, 2, \dots, m$ valószínűségeket ξ *eloszlásának* nevezzük. Nyilván

$$p_i \ge 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^m p_i = 1.$$

Tekintsük azt a $\mathbb{P}_\xi : 2^X \to \mathbb{R}$ halmazfüggvényt, melyre $\mathbb{P}_\xi(B) = \mathbb{P}(\{\xi \in B\})$ tetszőleges $B \in 2^X$ esetén, ahol $\{\xi \in B\} := \xi^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : \xi(\omega) \in B\}$. Tulajdonképpen $\mathbb{P}_\xi(\{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}) = p_{i_1} + \dots + p_{i_k}$ ha $k \in \{1, \dots, m\}$ és $1 \le i_1 < \dots < i_k \le m$. Ekkor $\mathbb{P}_\xi$ valószínűségi mérték a 2^X halmazalgebrán, melyet szintén szoktak ξ eloszlásának nevezni.

Valószínűségi vektorváltozók

Tekinthetünk egyszerre több valószínűségi változót is. Legyenek $\xi_j : \Omega \to \mathbb{R}$, $j \in \{1, \ldots, k\}$ valószínűségi változók. Ezeket összefoghatjuk egyetlen $\boldsymbol{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ függvénybe: $\boldsymbol{\xi}(\omega) := (\xi_1(\omega), \ldots, \xi_k(\omega))$, $\omega \in \Omega$. Ha $\boldsymbol{\xi}$ értékkészletét, vagyis $\boldsymbol{\xi}$ lehetséges értékeinek halmazát $\boldsymbol{X} = \{\boldsymbol{x}_1, \ldots, \boldsymbol{x}_n\}$ jelöli, akkor a $\{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}_i\} := \boldsymbol{\xi}^{-1}(\{\boldsymbol{x}_i\}) := \{\omega \in \Omega : \boldsymbol{\xi}(\omega) = \boldsymbol{x}_i\}$ halmazok is benne vannak az $\mathcal{F}$ halmazalgebrában, ugyanis $\boldsymbol{x}_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,k})$ jelöléssel $\{\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{x}_i\} = \cap_{j=1}^k \{\xi_j = x_{i,j}\}$. Tehát beszélhetünk ezek valószínűségéről. A $\boldsymbol{\xi} : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt *valószínűségi vektorváltozóknak* nevezzük.

Ha $\boldsymbol{\eta} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ valószínűségi vektorváltozó, akkor tetszőleges $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ függvény esetén tekinthetjük a $\boldsymbol{\zeta}(\omega) := g(\boldsymbol{\eta}(\omega))$, $\omega \in \Omega$ összetett függvényt. Ez is valószínűségi vektorváltozó, ugyanis mérhető, hiszen ha $\boldsymbol{\zeta}$ lehetséges értékeit $\boldsymbol{z}_1, \ldots, \boldsymbol{z}_m$ jelöli, akkor

$$\begin{aligned}\{\omega \in \Omega : \boldsymbol{\zeta}(\omega) = \boldsymbol{z}_i\} &= \{\omega \in \Omega : g(\boldsymbol{\eta}(\omega)) = \boldsymbol{z}_i\} \\ &= \{\omega \in \Omega : \boldsymbol{\eta}(\omega) \in g^{-1}(\{\boldsymbol{z}_i\})\} = \boldsymbol{\eta}^{-1}(g^{-1}(\{\boldsymbol{z}_i\}))\end{aligned}$$

az $\boldsymbol{\eta}$ mérhetősége miatt benne van az $\mathcal{F}$ halmazalgebrában. Sőt benne van a $\sigma(\boldsymbol{\eta})$ halmazalgebrában is, amit úgy is fogalmazhatunk, hogy az $\boldsymbol{\eta}$ valószínűségi változó megfigyelésével azt is el tudjuk dönteni, hogy bekövetkeztek-e vagy sem a $\boldsymbol{\zeta}$ valószínűségi változóval kapcsolatos események, vagyis a $\sigma(\boldsymbol{\zeta})$-beli események. Röviden: $\sigma(\boldsymbol{\zeta}) \subset \sigma(\boldsymbol{\eta})$. Ennek az állításnak a megfordítása is igaz:

A.2.12. Állítás. *Ha $\boldsymbol{\eta} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ és $\boldsymbol{\zeta} : \Omega \to \mathbb{R}^\ell$ valószínűségi vektorváltozók, és $\sigma(\boldsymbol{\zeta}) \subset \sigma(\boldsymbol{\eta})$, azaz az $\boldsymbol{\eta}$ valószínűségi vektorváltozó megfigyelésével el tudjuk dönteni, hogy bekövetkeztek-e vagy sem az $\boldsymbol{\zeta}$ valószínűségi vektorváltozóval kapcsolatos események, akkor található olyan $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^\ell$ függvény, melyre $\boldsymbol{\zeta}(\omega) := g(\boldsymbol{\eta}(\omega))$, $\omega \in \Omega$ teljesül, és g egyértelműen meghatározott a $\boldsymbol{\eta}(\Omega) := \{\boldsymbol{\eta}(\omega) : \omega \in \Omega\}$ halmazon, mely az $\boldsymbol{\eta}$ valószínűségi vektorváltozó értékkészlete.*

Bizonyítás. Jelölje $\boldsymbol{\eta}$ lehetséges értékeit $\boldsymbol{y}_1, \dots, \boldsymbol{y}_n$. A feltétel szerint minden $i \in \{1, \dots, m\}$ esetén $\{\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{z}_i\} \in \sigma(\boldsymbol{\zeta}) \subset \sigma(\boldsymbol{\eta})$, vagyis van olyan $k \in \{1, \dots, n\}$ és $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$, hogy $\{\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{z}_i\} = \cup_{j=1}^k \{\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y}_{i_j}\}$, és így pontosan olyan $g : \mathbb{R}^\ell \to \mathbb{R}^k$ függvény felel meg, melyre $g(\boldsymbol{y}_{i_j}) = \boldsymbol{z}_i$ minden $j \in \{1, \dots, k\}$ esetén. $\square$

Tekintsünk most két valószínűségi változót: $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$, $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$. A kettő együtt a $(\xi, \eta) : \Omega \to \mathbb{R}^2$ valószínűségi vektorváltozót alkotják. Jelölje ξ lehetséges értékeit $x_1, x_2, \dots, x_m$, az η lehetséges értékeit pedig $y_1, y_2, \dots, y_n$. Ekkor a (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó lehetséges értékei az (x_i, y_j), $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ párok lehetnek. A $\{\xi = x_i, \, \eta = y_j\} := \{\xi = x_i\} \cap \{\eta = y_j\}$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ események nyilván teljes eseményrendszert alkotnak. A $p_{i,j} := \mathbb{P}(\{\xi = x_i, \, \eta = y_j\})$, $i = 1, 2, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$ valószínűségeket a (ξ, η) *eloszlásának* nevezzük. Nyilván

$$p_{i,j} \geq 0, \quad i = 1, 2, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n, \qquad \text{és} \qquad \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n p_{i,j} = 1.$$

Ha ismerjük (ξ, η) eloszlását, akkor ki tudjuk számolni a koordináták, vagyis ξ és η eloszlását is:

$$\mathbb{P}(\{\xi = x_i\}) = \sum_{j=1}^n \mathbb{P}(\{\xi = x_i, \, \eta = y_j\}), \qquad \mathbb{P}(\{\eta = y_j\}) = \sum_{i=1}^m \mathbb{P}(\{\xi = x_i, \, \eta = y_j\}).$$

Ezeket (ξ, η) peremeloszlásainak vagy marginális eloszlásainak nevezzük.

Akkor mondjuk hogy ξ és η *függetlenek*, ha tetszőleges $i \in \{1, \dots, m\}$ és $j \in \{1, \dots, n\}$ esetén a $\{\xi = x_i\}$ és $\{\eta = y_j\}$ események függetlenek, azaz ha

$$\mathbb{P}(\{\xi = x_i, \eta = y_j\}) = \mathbb{P}(\{\xi = x_i\}) \mathbb{P}(\{\eta = y_j\}),$$

vagyis a $\big\{\{\xi = x_i\} : i \in \{1, \dots, m\}\big\}$ és $\big\{\{\xi = x_i\} : i \in \{1, \dots, m\}\big\}$ eseménycsaládok függetlenek. Ez azzal egyenértékű, hogy a $\sigma(\xi)$ és $\sigma(\eta)$ halmazalgebrák függetlenek.

Akkor mondjuk hogy ξ és a $\mathcal{C} \subset \mathcal{F}$ eseménycsalád *függetlenek*, ha tetszőleges $i \in \{1, \dots, m\}$ és $A \in \mathcal{C}$ esetén a $\{\xi = x_i\}$ és A események függetlenek. Ez azzal egyenértékű, hogy a $\sigma(\xi)$ és $\sigma(\mathcal{C})$ halmazalgebrák függetlenek, ahol $\sigma(\mathcal{C})$ az a legszűkebb hakmazalgebra, mely tartalmazza a $\mathcal{C}$-beli eseményelet..

Várható érték

Tekintsünk egy $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót $x_1, \dots, x_m$ lehetséges értékekkel és $p_i = \mathbb{P}(\{\xi = x_i\})$, $i = 1, \dots, m$ eloszlással. Ha elvégzünk n független kísérletet a ξ valószínűségi változóval kapcsolatban, akkor az x_i értéket körülbelül np_i esetben kapjuk, így a megfigyelt értékek átlaga körülbelül

$$\frac{1}{n}(np_1x_1 + \cdots + np_mx_m) = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i.$$

Ezért a várható érték természetes értelmezése:

$$\mathbb{E}(\xi) := \sum_{i=1}^{m} p_i x_i.$$

A várható érték rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

- *Lineáris:* ha ξ és η valószínűségi változók és $a, b \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{E}(a\xi + b\eta) = a\mathbb{E}(\xi) + b\mathbb{E}(\eta)$.
- *Monoton:* ha $\xi(\omega_j) \leq \eta(\omega_j)$, $j = 1, \dots, N$, akkor $\mathbb{E}(\xi) \leq \mathbb{E}(\eta)$.
- $|\mathbb{E}(\xi)| \leq \mathbb{E}(|\xi|)$.
- Ha $\xi(\omega_\ell) = c$, $\ell = 1, \dots, N$, ahol $c \in \mathbb{R}$, akkor $\mathbb{E}(\xi) = c$.
- Ha ξ és η függetlenek, akkor $\mathbb{E}(\xi\eta) = \mathbb{E}(\xi) \cdot \mathbb{E}(\eta)$.
- Cauchy-Schwartz egyenlőtlenség: $|\mathbb{E}(\xi\eta)| \leq \sqrt{\mathbb{E}(\xi^2)\mathbb{E}(\eta^2)}$.
- Legyen $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ha ξ valószínűségi változó $p_i = \mathbb{P}(\{\xi = x_i\})$, $i = 1, \dots, m$ eloszlással, akkor
$$\mathbb{E}(g(\xi)) = \sum_{i=1}^{m} p_i g(x_i).$$

- Legyen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ha (ξ, η) valószínűségi vektorváltozó $p_{i,j} = \mathbb{P}(\{\xi = x_i, \eta_j = y_j\})$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$ eloszlással, akkor
$$\mathbb{E}(g(\xi, \eta)) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} g(x_i, y_j).$$

Feltételes várható érték

A.2.13. Definíció. *Legyen* $A \in \mathcal{F}$ *egy pozitív valószínűségű (tehát nem a lehetetlen) esemény. Legyen* ξ *valószínűségi változó* $\mathbb{P}(\{\xi = x_i\})$, $i = 1, 2, \ldots, m$ *eloszlással. Ekkor* ξ*-nek az* A*-ra vonatkozó* feltételes eloszlása
$$\mathbb{P}(\{\xi = x_i\} \mid A), \qquad i = 1, 2, \ldots, m,$$
feltételes várható értéke *pedig*
$$\mathbb{E}(\xi | A) := \sum_{i=1}^{m} x_i \mathbb{P}(\{\xi = x_i\} \mid A).$$

A $\mathbb{P}(\{\xi = x_i\} \mid A)$, $i = 1, 2, \ldots, m$ számok eloszlást alkotnak, hiszen nemnegatívak, és összegük 1:
$$\sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(\{\xi = x_i\} \mid A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \sum_{i=1}^{m} \mathbb{P}(\{\xi = x_i\} \cap A) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{m} (\{\xi = x_i\} \cap A)\right)$$
$$= \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}\left(\left(\bigcup_{i=1} \{\xi = x_i\}\right) \cap A\right) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \mathbb{P}(\Omega \cap A) = 1.$$

A.2.14. Tétel. (Teljes várható érték tétele) *Ha az* $A_1, A_2, \ldots, A_\ell \in \mathcal{F}$ *események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor*
$$\mathbb{E}(\xi) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{E}(\xi \mid A_i) \cdot \mathbb{P}(A_i).$$

Feltételes valószínűség, feltételes várható érték általánosítása

A $\mathbb{P}(B \mid A)$ feltételes valószínűség ismerete még nem írja le az összes információt, melyet az A eseményre vonatkozó megfigyelés ad a B eseményre vonatkozóan; ehhez még a

$\mathbb{P}(B \mid \overline{A})$ feltételes valószínűség is hozzá tartozik. Általánosabban: ha az $A_1, A_2, \ldots, A_\ell \in \mathcal{F}$ események teljes eseményrendszert alkotnak, akkor a B eseményre vonatkozó teljes informácót a $\mathbb{P}(B \mid A_i)$, $i = 1, \ldots, \ell$ feltételes valószínűségek írják le. Hogyan lehetne ezt az információt *tömören* megadni? Tekintsük azt az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ függvényt, melynek értéke az A_i, $i = 1, \ldots, \ell$ halmazokon konstans, mégpedig $\mathbb{P}(B \mid A_i)$, $i = 1, \ldots, \ell$. Képlettel:

$$f(\omega_j) := \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{1}_{A_i}(\omega_j), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

ahol $\mathbb{1}_{A_i}$ az A_i halmaz indikátorfüggvénye, azaz $\mathbb{1}_{A_i}(\omega_j) = 1$ ha $\omega_j \in A_i$ és $\mathbb{1}_{A_i}(\omega_j) = 0$ ha $\omega_j \notin A_i$. Mivel az f függvény konstans értéket vesz fel az $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ teljes eseményrendszer eseményein, így mérhető az $\sigma(A_1, \ldots, A_\ell) \subset \mathcal{F}$ halmazalgebrára nézve, amiből az is következik, hogy az f függvény valószínűségi változó. Ezt az f valószínűségi változót nevezzük a B esemény *feltételes valószínűségének a* $\boldsymbol{\sigma(A_1, \ldots, A_\ell)}$ *feltételre nézve.*

Az f valószínűségi változót egyértelműen meghatározzák az $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ teljes eseményrendszer eseményein felvett értékei, hiszen ezeken az eseményeken konstans értéket vesz fel, és a felvett értékeket pedig egyértelműen meghatározzák az $\mathbb{E}(f \mathbb{1}_{A_i})$, $i \in \{1, \ldots, m\}$ várható értékek. Továbbá

$$\mathbb{E}(f \mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{P}(B \mid A_i) \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(B \cap A_i) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_{A_i}).$$

Tehát az $f : \Omega \to \mathbb{R}$ valószínűségi változót egyértelműen meghatározza a következő két tulajdonság: $\sigma(A_1, \ldots, A_\ell)$-mérhető, és minden $i \in \{1, \ldots, m\}$ esetén $\mathbb{E}(f \mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mathbb{1}_{A_i})$.

A fenti gondolatmenetet felhasználva definiáljuk a feltételes várható érték fogalmát tetszőleges $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ halmazalgebrára vonatkozóan (a feltételes valószínűség ennek speciális esete lesz: a szóban forgó esemény indikátorának feltételes várható értékeként definiáljuk).

A.2.15. Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező,* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó, és* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *halmazalgebra, melyet az* $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ *teljes eseményrendszer generál. Azt* *mondjuk, hogy a* $\xi_{\mathcal{G}} : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó a* ξ feltételes várható értéke az $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ feltételre nézve, *ha*

(1) $\xi_{\mathcal{G}}$ *$\mathcal{G}$–mérhető, vagyis az* $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ *eseményeken konstans értéket vesz fel,*

(2) *minden* $i \in \{1, \ldots, m\}$ *esetén* $\mathbb{E}(\xi_{\mathcal{G}} \mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{A_i})$.

A.2.16. Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező,* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó, és* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *halmazalgebra, melyet az* $A_1, A_2, \ldots, A_\ell$ *teljes eseményrendszer generál. Ekkor létezik* $\xi_{\mathcal{G}} : \Omega \to \mathbb{R}$ *feltételes várható érték, mely egyértelműen meghatározott, mégpedig az* A_i *eseményen a* $\mathbb{E}(\xi \mid A_i)$ *értéket veszi fel. Képlettel:*

$$\xi_{\mathcal{G}}(\omega_j) = \sum_{i=1}^{\ell} \mathbb{E}(\xi \mid A_i) \mathbb{1}_{A_i}(\omega_j), \qquad j = 1, \ldots, N.$$

Bizonyítás. Az (i) feltétel miatt $\xi_{\mathcal{G}}$ alakja

$$\xi_{\mathcal{G}}(\omega_j) = \sum_{i=1}^{\ell} c_i \mathbb{1}_{A_i}(\omega_j), \qquad j = 1, \ldots, N,$$

ahol $c_1, \ldots, c_\ell \in \mathbb{R}$ alkalmas valós számok. Ekkor

$$\mathbb{E}(\xi_{\mathcal{G}} \mathbb{1}_{A_i}) = \mathbb{E}(c_i \mathbb{1}_{A_i}) = c_i \mathbb{P}(A_i), \qquad i \in \{1, \ldots, m\},$$

ezért (ii) alapján a c_i szám

$$c_i = \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \mathbb{E}(\xi \mathbb{1}_{A_i}) = \frac{1}{\mathbb{P}(A_i)} \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbb{P}(\{\xi = x_j\} \cap A_i) = \sum_{j=1}^{m} x_j \mathbb{P}(\{\xi = x_j\} \mid A_i) = \mathbb{E}(\xi \mid A_i)$$

kell hogy legyen. □

Jelölés: a A.2.16 Tételben megadott $\xi_{\mathcal{G}}$ valószínűségi változót $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G})$ fogja jelölni.

A.2.17. Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező,* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *és* $\eta : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változók,* $\mathcal{H} \subset \mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *halmazalgebrák.*

(1) *Ha* $\xi \leq \eta$, *akkor* $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})$.

(2) $|\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|\xi| \mid \mathcal{G})$.

(3) $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}) = \xi$.

(4) *Ha* ξ $\mathcal{G}$*-mérhető, akkor* $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G}) = \xi$.

(5) $\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G})] = \mathbb{E}(\xi)$.

(6) *Ha* ξ *független* $\mathcal{G}$*-től, akkor* $\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G}) = \mathbb{E}(\xi)$.

(7) *Toronyszabály:* $\mathbb{E}[\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G}) \mid \mathcal{H}] = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{H})$.

(8) *Tetszőleges* $a, b \in \mathbb{R}$ *esetén* $\mathbb{E}(a\xi + b\eta \mid \mathcal{G}) = a\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G}) + b\mathbb{E}(\eta \mid \mathcal{G})$.

(9) *Ha* η $\mathcal{G}$*-mérhető, akkor* $\mathbb{E}(\xi\eta \mid \mathcal{G}) = \eta\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{G})$.

A.2.18. Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező,* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó,* $\boldsymbol{\eta} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *valószínűségi vektorváltozó. A* ξ feltételes várható értéke az $\boldsymbol{\eta}$-ra nézve: $\mathbb{E}(\xi \mid \boldsymbol{\eta}) := \mathbb{E}(\xi \mid \sigma(\boldsymbol{\eta}))$.

Mivel $\mathbb{E}(\xi \mid \sigma(\boldsymbol{\eta}))$ mérhető a $\sigma(\boldsymbol{\eta})$ halmazalgebrára, így a A.2.12 Állítás alapján található olyan $g : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ függvény, hogy $\mathbb{E}(\xi \mid \boldsymbol{\eta}) = \mathbb{E}(\xi \mid \sigma(\boldsymbol{\eta})) = g(\boldsymbol{\eta})$, és g egyértelműen meghatározott az $\boldsymbol{\eta}(\Omega) := \{\boldsymbol{\eta}(\omega) : \omega \in \Omega\}$ értékkészleten. Ha $\boldsymbol{\eta}(\Omega) = \{\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n\}$, akkor a $\sigma(\boldsymbol{\eta})$ halmazalgebrát az $\{\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y}_j\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ események generálják, ezért az A.2.16 Tétel alapján $g(\boldsymbol{y}_j) = \mathbb{E}(\xi \mid \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y}_j)$, $j \in \{1, \ldots, n\}$.

A.2.19. Tétel. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező,* $\xi : \Omega \to \mathbb{R}$ *valószínűségi változó,* $\boldsymbol{\eta} : \Omega \to \mathbb{R}^k$ *valószínűségi vektorváltozó.*

(1) *Ha* $h : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, *akkor* $\mathbb{E}(\xi\, h(\boldsymbol{\eta}) \mid \boldsymbol{\eta}) = h(\boldsymbol{\eta})\, \mathbb{E}(\xi \mid \boldsymbol{\eta})$ *és* $\mathbb{E}(\xi\, h(\boldsymbol{\eta}) \mid \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y}) = h(\boldsymbol{y})\, \mathbb{E}(\xi \mid \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\eta}(\Omega)$.

(2) *Ha* ξ *és* $\boldsymbol{\eta}$ *függetlenek és* $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, *akkor* $\mathbb{E}(h(\xi, \boldsymbol{\eta}) \mid \boldsymbol{\eta}) = \mathbb{E}(h(\xi, \boldsymbol{c}))|_{\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\eta}}$ *és* $\mathbb{E}(h(\xi, \boldsymbol{\eta}) \mid \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y}) = \mathbb{E}(h(\xi, \boldsymbol{y}))$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\eta}(\Omega)$.

(3) *Ha* $h : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, *akkor* $\mathbb{E}(h(\xi, \boldsymbol{\eta}) \mid \boldsymbol{\eta}) = \mathbb{E}(h(\xi, \boldsymbol{c}) \mid \boldsymbol{\eta})|_{\boldsymbol{c}=\boldsymbol{\eta}}$ *és* $\mathbb{E}(h(\xi, \boldsymbol{\eta}) \mid \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y}) = \mathbb{E}(h(\xi, \boldsymbol{c}) \mid \boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{y})|_{\boldsymbol{c}=\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{y} \in \boldsymbol{\eta}(\Omega)$.

A.2.20. Definíció. *Legyen* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *valószínűségi mező,* $\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ *halmazalgebra. A* $B \in \mathcal{F}$ *esemény* feltételes valószínűsége az $\boldsymbol{\mathcal{G}}$ feltételre nézve: $\mathbb{P}(B \mid \mathcal{G}) := \mathbb{E}(\mathbb{1}_B \mid \mathcal{G})$.

Diszkrét idejű sztochasztikus folyamatok, martingálok

Legyen $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ valószínűségi mező. Ezen egy *diszkrét idejű sztochasztikus folyamat* alatt valószínűségi változók $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N$ sorozatát értjük (röviden $(\xi_n)_{n=0}^N$), és azt mondjuk, hogy ξ_n a folyamat n *időpontbeli* értéke. Rögzítve egy $\omega \in \Omega$ elemi eseményt, az $\xi_0(\omega)$, $\xi_1(\omega), \ldots, \xi_N(\omega)$ sorozatot a $(\xi_n)_{n=0}^N$ *trajektóriájának* (pályájának) nevezzük. Jelölje $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ esetén $\mathcal{F}_n$ azoknak az eseményeknek a halmazát, melyekről az n időpontban már tudjuk, hogy bekövetkeztek-e, vagy sem, másszóval, az n időpontig megfigyelhető események halmazát. Ekkor nyilván $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ monoton növekvő halmazalgebra-sereg $\mathcal{F}$-ben (azaz $\mathcal{F}_k \subset \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}$ ha $k \leq n$), melyet *filtrációnak* (szűrésnek) nevezünk, az $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ négyest pedig *filtrált valószínűségi mezőnek.*

A.2.21. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ *filtrált valószínűségi mezőn értelmezett* $(\xi_n)_{n=0}^N$ *sztochasztikus folyamat* adaptált, *ha minden* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *esetén* ξ_n *mérhető az* $\mathcal{F}_n$ *halmazalgebrára nézve. Azt mondjuk, hogy* $(\xi_n)_{n=0}^N$ előrejelezhető *(prediktálható) az* $(\mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ *filtrációra nézve, ha minden* $n \in \{1, \ldots, N\}$ *esetén* ξ_n $\mathcal{F}_{n-1}$-*mérhető.*

Tehát egy sztochasztikus folyamat adaptáltsága azt jelenti, hogy az n időpontig megfigyelhető események alapján már ismertté válik ξ_n értéke, az előrejelezhetőség pedig azt, hogy ξ_n értéke már az előző, $n-1$ időpontban ismert.

Ha $(\xi_n)_{n=0}^N$ sztochasztikus folyamat, akkor tekinthetjük a $\mathcal{F}_n^\xi := \sigma(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$, $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ halmazalgebrákat (tehát $\mathcal{F}_n^\xi$ pontosan azokból az eseményekből áll, melyekről az $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n$ megfigyelésével el tudjuk dönteni, hogy bekövetkeztek-e vagy sem). Nyilván $\mathbb{F}^\xi = (\mathcal{F}_n^\xi)_{n=0}^N$ szűrés, melyet a $(\xi_n)_{n=0}^N$ folyamathoz tartozó *természetes szűrésnek* nevezünk. Ezek szerint tetszőleges sztochasztikus folyamat adaptált a hozzá tartozó természetes szűréshez. Sőt a természetes szűrés a legszűkebb szűrés, melyhez a folyamat még adaptált.

A.2.22. Definíció. *Tekintsünk az* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ *filtrált valószínűségi mezőn egy* $(\xi_n)_{n=0}^N$ *adaptált sztochasztikus folyamatot, melyre minden* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *esetén teljesül* $\mathbb{E}(|\xi_n|) < \infty$. *Azt mondjuk, hogy az* $(\xi_n)_{n=0}^N$ *folyamat, illetve az* $(\xi_n, \mathcal{F}_n)_{n=0}^N$ *sorozat*

(1) martingál, *ha* $\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \xi_n) = \xi_n$ *minden* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *esetén;*

(2) szubmartingál, *ha* $\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \xi_n) \geq \xi_n$ *minden* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *esetén;*

(3) szupermartingál, *ha* $\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \xi_n) \leq \xi_n$ *minden* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *esetén.*

Mivel most a feltételezés szerint Ω véges, így a $\mathbb{E}(|\xi_n|) < \infty$, $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ feltétel minden folyamatra teljesül.

Ha ξ_n egy játékos vagyona az n időpontban, akkor martingál esetén a játék igazságos, szubmartingál esetén előnyös, szupermartingál esetén pedig hátrányos a játékos számára.

Nyilván az $n \mapsto \mathbb{E}(\xi_n)$ várhatóérték sorozat $\begin{cases} \text{martingál esetén konstans,} \\ \text{szubmartingál esetén növekvő,} \\ \text{szupermartingál esetén csökkenő.} \end{cases}$

A.2.23. Állítás. *Tekintsünk az* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ *filtrált valószínűségi mezőn egy* $(\xi_n)_{n=0}^N$ *adaptált sztochasztikus folyamatot, melyre minden* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *esetén teljesül*

$\mathbb{E}(|\xi_n|) < \infty$. *Ekkor* $(\xi_n)_{n=0}^N$

$$\begin{cases} \textit{martingál} & \iff \quad \mathbb{E}(\xi_{n+k} \mid \xi_n) = \xi_n \quad \textit{minden} \quad n \geq 0, \quad k \geq 1 \quad \textit{esetén;} \\ \textit{szubmartingál} & \iff \quad \mathbb{E}(\xi_{n+k} \mid \xi_n) \geq \xi_n \quad \textit{minden} \quad n \geq 0, \quad k \geq 1 \quad \textit{esetén;} \\ \textit{szupermartingál} & \iff \quad \mathbb{E}(\xi_{n+k} \mid \xi_n) \leq \xi_n \quad \textit{minden} \quad n \geq 0, \quad k \geq 1 \quad \textit{esetén.} \end{cases}$$

Bizonyítás. Elegendő a második állítást bizonyítani. A feltétel nyilván szükséges. Az elégségességhez belátjuk k szerinti teljes indukcióval, hogy $\forall\, n \geq 0$ és $\forall\, k \geq 1$ esetén $\mathbb{E}(\xi_{n+k} \mid \mathcal{F}_n) \geq \xi_{n+1}$. A feltevés szerint ez teljesül $k = 1$ esetén. Ha igaz k-ra, akkor a toronyszabállyal

$$\mathbb{E}(\xi_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_{n+k+1} \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\big) \geq \mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) \geq \xi_n,$$

hiszen először alkalmazhatjuk az állítást k-ra, utána $k = 1$ esetén. □

A.2.24. Példa. Néhány egyszerű példát mutatunk martingálok konstrukciójára.

(1) Ha $(\eta_n)_{n=0}^N$ független valószínűségi változók és $\xi_n := \sum_{j=0}^{n} \eta_j$, akkor

$$(\xi_n, \mathcal{F}_n^\eta)_{n=0}^N \quad \begin{cases} \text{martingál} & \iff \forall\, n \geq 0 \ \text{ esetén } \ \mathbb{E}(\eta_n) = 0, \\ \text{szubmartingál} & \iff \forall\, n \geq 0 \ \text{ esetén } \ \mathbb{E}(\eta_n) \geq 0, \\ \text{szupermartingál} & \iff \forall\, n \geq 0 \ \text{ esetén } \ \mathbb{E}(\eta_n) \leq 0, \end{cases}$$

hiszen $\forall\, n \geq 0$ esetén

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1} - \xi_n \mid \mathcal{F}_n^\eta) = \mathbb{E}(\eta_{n+1} \mid \eta_1, \ldots, \eta_n) = \mathbb{E}(\eta_{n+1}).$$

Jegyezzük meg, hogy $\mathcal{F}_n^\eta = \mathcal{F}_n^\xi$ minden $n \geq 0$ esetén.

(2) Ha $(\eta_n)_{n=0}^N$ független nemnegatív valószínűségi változók és $\xi_n := \prod_{j=0}^{n} \eta_j$, akkor

$$(\xi_n, \mathcal{F}_n^\eta)_{n=0}^N \quad \begin{cases} \text{martingál} & \iff \forall\, n \geq 0 \ \text{ esetén } \ \mathbb{E}(\eta_n) = 1, \\ \text{szubmartingál} & \iff \forall\, n \geq 0 \ \text{ esetén } \ \mathbb{E}(\eta_n) \geq 1, \\ \text{szupermartingál} & \iff \forall\, n \geq 0 \ \text{ esetén } \ \mathbb{E}(\eta_n) \leq 1, \end{cases}$$

(3) Legyen az $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ filtrált valószínűségi mezőn ξ valószínűségi változó, melyre $\mathbb{E}(|\xi|) < \infty$ (ami most a feltételezés szerint tetszőleges valószínűségi változóra teljesül). Ekkor a $\xi_n := \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_n)$, $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ sorozat martingál, hiszen $\forall\, n \geq 0$ esetén

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1} - \xi_n \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_{n+1}) - \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_n) \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(\xi \mid \mathcal{F}_n) = 0$$

a toronyszabály alkalmazásával. △

A.2.25. Állítás. *Ha* $(\xi_n)_{n=0}^N$ *martingál az* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ *filtrált valószínűségi mezőn és* $\mathbb{E}(\xi_n^2) < \infty$ *minden* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *esetén, akkor a* $\xi_n - \xi_{n-1}$, $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *valószínűségi változók páronként korrelálatlanok, ahol* $\xi_{-1} := \mathbb{E}(\xi_0)$.

Bizonyítás. Nyilván $\mathbb{E}(\xi_k - \xi_{k-1}) = 0$ ha $k \geq 0$, továbbá tetszőleges $0 \leq j < k$ esetén

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big[(\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_k - \xi_{k-1})\big] &= \mathbb{E}\Big[\mathbb{E}\big[(\xi_j - \xi_{j-1})(\xi_k - \xi_{k-1}) \mid \mathcal{F}_{k-1}\big]\Big] \\ &= \mathbb{E}\big[(\xi_j - \xi_{j-1})\mathbb{E}(\xi_k - \xi_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1})\big] = 0,\end{aligned}$$

hiszen egyrészt $\sigma(\xi_j - \xi_{j-1}) \subset \mathcal{F}_j \subset \mathcal{F}_{k-1}$, másrészt $\mathbb{E}(\xi_k - \xi_{k-1} \mid \mathcal{F}_{k-1}) = 0$. □

A.2.26. Definíció. *Azt mondjuk, hogy az* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ *filtrált valószínűségi mezőn értelmezett* $\tau : \Omega \to \{0, 1, \ldots, N\}$ *valószínűségi változó* megállítási időpont, *ha minden* $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ *esetén* $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\} \in \mathcal{F}_n$.

Vagyis tetszőleges $n \in \{0, 1, \ldots, N\}$ időpontban a rendelkezésre álló információk alapján el lehet dönteni, hogy már elérkezett-e a τ véletlen időpont, vagy sem.

Tipikus példa megállítási időpontra: ha $(\xi_n)_{n=0}^N$ adaptált sztochasztikus folyamat, akkor tetszőleges $B \subset \mathbb{R}$ esetén a B halmaz *első elérési ideje*, azaz

$$\tau(\omega) := \begin{cases} \min\{n : \xi_n(\omega) \in B\} & \text{ha valamely } n \in \{0, 1, \ldots, N\} \text{ esetén } \xi_n(\omega) \in B, \\ N & \text{egyébként} \end{cases}$$

megállítási időpont.

A.2.27. Állítás. *Ha* $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, N\}$ *valószínűségi változó az* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ *filtrált valószínűségi mezőn, akkor a következő állítások ekvivalensek:*

(1) τ *megállítási időpont;*

(2) *minden* $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ *esetén* $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) > n\} \in \mathcal{F}_n$*;*

(3) *minden* $n \in \{0, 1, \dots, N\}$ *esetén* $\{\omega \in \Omega : \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$*.*

A.2.28. Állítás. *Ha* $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, N\}$ *megállítási időpont az* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ *filtrált valószínűségi mezőn, akkor*

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : \text{minden } n = 0, 1, \dots, N \text{ esetén } A \cap \{\omega \in \Omega : \tau(\omega) \leq n\}\}$$

halmazalgebra.

A $\mathcal{F}_\tau$ halmazalgebra azokat az eseményeket tartalmazza, melyekről a τ véletlen időpontig történő megfigyelések alapján már lehet tudni, hogy bekövetkeztek-e vagy sem.

A.2.29. Tétel. (Doob) *Legyenek* $\sigma : \Omega \to \{0, 1, \dots, N\}$ *és* $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, N\}$ *megállítási időpontok az* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ *filtrált valószínűségi mezőn úgy, hogy* $\sigma(\omega) \leq \tau(\omega)$ *minden* $\omega \in \Omega$ *esetén. Ha* $(\xi_n)_{n=0}^N$ *szupermartingál, akkor* $\mathbb{E}(\xi_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) \leq X_\sigma$*. Ha* $(\xi_n)_{n=0}^N$ *martingál, akkor* $\mathbb{E}(\xi_\tau \mid \mathcal{F}_\sigma) = X_\sigma$*.*

Tehát ha $(\xi_n)_{n=0}^N$ martingál az $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ filtrált valószínűségi mezőn, akkor minden $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, N\}$ megállítási időpont esetén $\mathbb{E}(\xi_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$. Ennek az állításnaka megfordítása is igaz:

A.2.30. Állítás. *Legyen* $(\xi_n)_{n=0}^N$ *adaptált sztochasztikus folyamat az* $\big(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_n)_{n=0}^N\big)$ *filtrált valószínűségi mezőn. Ha minden* $\tau : \Omega \to \{0, 1, \dots, N\}$ *megállítási időpont esetén* $\mathbb{E}(\xi_\tau) = \mathbb{E}(X_0)$*, akkor* $(\xi_n)_{n=0}^N$ *martingál.*

Bizonyítás. Tetszőleges $n \in \mathbb{N}$ és $A \in \mathcal{F}_n$ esetén

$$n_A(\omega) := \begin{cases} n & \text{ha } \ \omega \in A, \\ N & \text{egyébként} \end{cases}$$

megállítási időpont, hiszen tetszőleges $k \in \{0, 1, \ldots, N-1\}$ esetén

$$\{\omega \in \Omega : n_A(\omega) \leq k\} = \begin{cases} A \in \mathcal{F}_n \subset \mathcal{F}_k & \text{ha } \ k \geq n, \\ \emptyset \in \mathcal{F}_k & \text{egyébként,} \end{cases}$$

és $\{\omega \in \Omega : n_A(\omega) \leq N\} = \Omega \in \mathcal{F}_N$. Ezért

$$\mathbb{E}(\xi_0) = \mathbb{E}(\xi_{n_A}) = \mathbb{E}(\xi_{n_A} \mathbb{1}_A) + \mathbb{E}(\xi_{n_A} \mathbb{1}_{\Omega \setminus A}),$$

speciálisan

$$\mathbb{E}(\xi_0) = \mathbb{E}(\xi_N).$$

Ezért a két utolsó egyenlet alapján

$$\mathbb{E}(\xi_N \mathbb{1}_A) = \mathbb{E}(\xi_N) - \mathbb{E}(\xi_N \mathbb{1}_{\Omega \setminus A}) = \mathbb{E}(\xi_n \mathbb{1}_A),$$

amiből $\mathbb{E}(\xi_N \mid \mathcal{F}_n) = \xi_n$, így

$$\mathbb{E}(\xi_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(\xi_N \mid \mathcal{F}_{n+1}) \mid \mathcal{F}_n\big) = \mathbb{E}(\xi_N \mid \mathcal{F}_n) = \xi_n$$

a toronyszabály alapján. $\square$

Bibliográfiai megjegyzések

A könyvünk elsősorban oktatási céllal íródott, amint azt a bevezetőben leírtuk, célunk az volt, hogy bevezető valószínűségszámítási ismeretek birtokában a könyv feldolgozgató legyen az olvasó számára. Ez, illetve a tárgyalt elméletek egységes leírása, a sok helyen nem precíz szakirodalom matematikailag is precíz feldolgozása vezérelt bennünket az írás során. Ezen célok mentén az utóbbi bő 10 évben számos monográfiát és szakcikket, egyéb munkát dolgoztunk fel. Ezek alapján írtunk le már klasszikunak számító eredményeket könyvünkben.

Jelen részben egyrészt össze kívánjuk foglalni, hogy a megírás során leginkább mely művekre támaszkodtunk. Bár használtunk szövegközi hivatkozásokat is (különösen azon esetekben, ahol 1-1 munka nagy segítséget jelenett egyes kérdések, bizonyítások alkalmas leírásában), de sok helyen egyes részek, tételek nem egy műre épülnek, azok az utóbbi évek oktatási tapasztalatai alapján többször árírásra kerültek. Ezért is adunk inkább itt bibliográfiai megjegyzéseket szövegközi hivatkozások helyett, hogy kiemeljük mindazon forrásokat, amelyek alapján egységes keretbe foglalva leírtuk a szakirodalom néhány ma már klasszikusnak számító eredményét könyvünkben. Másrészt az is célunk, hogy kiemeljünk olyan munkákat is, melyek az érdeklődő olvasót segíthetik a tárgyalt témakörökben való további elmélyülésben. Továbbá az oktatási célokat is szem előtt tartva számos széles körben használt, 'jól bevált' tankönyvet és monográfiát is kiemelünk. Ezért természetesen a citált művek nem feltétlenül az elsődleges forrásai a tárgyalt eredményeknek.

A könyvben tárgyalt kérdések hasznosságelméleten alapuló pénzügyi modelleket igényelnek. Láthattuk, hogy különösen Neumann-Morgenstern típusú hasznosságfüggvényekre volt szükségünk. Ezen elmélet történeti áttekintésével és jelenlegi kutatási problémáival kapcsolatos kérdésekkel is foglalkoznak a Berde és Petró [9] és a Eső és Lóránd [23] cikkek, amelyek az egész könyv írása során nagyon hasznosnak bizonyultak. Nyilvánvaló, hogy hasznosságelméleti bevezetőnek a mikroökonómia könyvek nagy része használható, a munkánkat az alábbiak segítették: Kreps [33] és Nordhaus & Samuelson [40]. A hasznosság és a várható hasznosság modelljének precíz axiomatikus leírásában Jos Potters munkái ([42] és [43]) nagyon sokat segítettek, bár Ingersoll [29], továbbá Huand és Litzenberger [27] könyveiben is találhatunk egy-egy rövid bevezetőt erről a kérdésről. Az axiomatikus felépítés számos kérdését tárgyalja Schmidt [48] is, sokkal inkább a mikroökonómiai aspektusokra, mint a matematikai szempontból általános és bizonyításokat részletező tárgyalásmódra koncentrálva.

A második részben tárgyalt hasznosságalapú portfólióelmélettel és kockázatkerüléssel kapcsolatos témákban számos munkát találhatunk az irodalomban, amelyeket munkánkhoz is használtunk. Például: a bevezető jellegű, kevés matematikai hátteret feltételező Elton és Gruber [22]; a sokkal komolyabb matematikai hátteret igénylő Duffie [19] vagy Korn [32], ahol utóbbiban elsősorban a folytonos idejű portfólió-menedzsment problémáival találkozhatunk. A jegyzet írása során leginkább a Huang és Litzenberger [27] és az Ingersoll [29] könyvek nyújtottak segítséget, bár azt is meg kell jegyezni, hogy ezek matematikai szempontból nem mindig szolgáltatnak pontos, precíz levezetéseket, állításokat.

A mean-variance analízisben, azaz a Markowitz-féle portfólióelméletben az irodalom számtalan forrást biztosít. Ez az egyik legrégebben létező portfólió elmélet, több évtizede oktatják és kutatják. Ennélfogva mind pénzügyi, mind matematikai könyvek sora tartalmazza. A munkánk során, a fejezet és a megfelelő kurzusok kialakításához számos forrást használtunk, leginkább Barucci [8] által adott felépítést és jelölésrendszert találtuk szerencsésnek, ezért azt vettük alapul. Sokat segített továbbá Capinski és Zastawniak [12], Dupacova, Hurt és Stepán [20]. Az érdeklődő olvasónak egyben ajánljuk Brealey és Myers közismert pénzügyes tankönyvét (ld. [11]), mely bevezető szinten jó tárgyalását adja az elmélet alapjainak, gyakorlati aspektusának, s segít a fogalmak közgazdasági értelmezésében és a szükséges pénzügyi alapok elsajátításában is.

A kockázati mértékekről szóló 6. Fejezet írása során nagy segítséget jelentettek az alábbi művek: Acerbi [1] és [2] írásai, ahol a VaR és az expected shortfall sok kérdésre kiterjedő ismertetése található; Delbaen [17], ahol a kockázati mértékek koherenciájának részletes tárgyalása található; Dowd [18], amely egy nagyszerű áttekintést ad a VaR-ról, annak közgazdasági alkalmazásáról és becsléséről. A kvantilisek és tulajdonságaik leírásához nagy segítséget nyújtott Acerbi [2] és Major Péter [36] munkája. Végül megemlítjük Paul Embrechts nagyon hasznos munkáit[1] (szakcikkek, fóliák, stb.), amelyekben számos gyakorlati és elméleti kérdés kerül tárgyalásra a kockázati mértékek témakörében. Jó bevezetőt és a gyakorlati, közgazdasági kérdéseket is tárgyaló munka Jorion [30] könyve.

Az utóbbi évtizedekben a közgazdaságtan és a pénzügy egyik legfontosabb és legkedveltebb területét képezi az opcióelmélet. Így nem véletlen, hogy számtalan könyvben és tudományos cikkben találhatunk ezzel kapcsolatos eredményeket, melyek között mind matematikai, mind közgazdasági publikációkat is találhatunk.

Mindenekelőtt megemlítünk két munkát, melyek úttörőszerepet jelentettek az elmélet kifejlődésében. Az egyik Bachelier [4] cikke, amely sokáig nem kapott megfelelő figyelmet az irodalomban, a másik pedig Samuelson [47] írása.

Már korábban említettük, hogy az árazás tekintetében áttörést jelentett a híres Black és Scholes [10] munka, bár matematikailag még hagyott tisztázatlan kérdéseket. A diszkrét idejű megközelítés híres eredményeit tartalmazza Cox, Ross és Rubinstein [15], míg az ekvivalens martingálmérték ötletének precíz alkalmazása először [26]-ban található meg.

Ugyanezen árazási problémára ad egy nem valószínűségszámítási megközelítést és tárgyalást Dzhaparidze és van Zuijlen [16].

A könyv opcióelméletet taglaló részében a tárgyalásmód és a használt jelölések tekintetében leginkább a kiváló Shiryaev [50] monográfiára, továbbá ugyanezen szerző és szerzőtársai korábbi összefoglaló cikkeire (ld. [49], [51], [52]) és Harrison és Pliska [26] munkájára támaszkodtunk mind a tágyalásmód és felépítés, mind a jelölések tekintetében. Itt Shiryaev és szerzőtársai fent hivatkozott munkái, különösen összefoglaló céllal írt cikkei

[1] ld. http://www.math.ethz.ch/~embrechts/

olyan jó, céljainkhoz is nagyban illeszkedő alapot biztosítottak, hogy az alaperedmények leírásánál kevés más forrásra lett volna szükség, ezért is vettük át a felépítést és számos bizonyítást kevés módosítással. A pénzügyi szemléletmód kialakításában pedig nagyon hasznosnak találtuk Hull [28] monográfiáját, mely sok értelmezés, megjegyzés leírásában adott segítséget. Valójában Hull könyvét ajánljuk kiegészítésnek is pénzügyes, gyakorlati kérdések szempontjából tankönyvünkhöz. Egyetemi kurzusainkon is jó segítséget ad munkánkban.

Ugyanakkor megemlítünk még további nagyszerű írásokat, melyek szintén segítették munkánkat, s melyekben az érdeklődő olvasó számos további hasznos ismeretet szerezhet opcókról és rokon területek problémáiról. Az értékpapírpiacokról, arbitrázsról, portfólióval kapcsolatos kérdésekről találhat az olvasó hasznos ismereteket Duffie [19] könyvében. Míg ajánljuk Hull [28] fentiekben már említett nagyszerű könyvét azoknak, akik a származtatott értékpapírok, piacok, s árazási problémák közgazdasági jellegű megközelítését, aspektusait kívánják tanulmányozni. Számos nagyszerű monográfia született az opcióelméleti eredmények leírására, melyek közül kiemeljük a bevezető jellegű, szemléletes Baxter és Rennie [5] munkát, az opcióelmélet modern irodalmának számos jelentős eredményét precízen, átfogóan tárgyaló kiváló Musiela és Rutkowski [37] monográfiát, továbbá a diszkrét idejű modellek tárgyalásába jó bevezetőt adó Pliska [41] és Föllmer [24] monográfiákat.

Végül ismertetünk néhány olyan munkát is, melyek nagy segítséget nyújtanak különösen a folytonos idejű piaci modellek elsajátításához szükséges matematikai ismeretek megszerzéséhez leginkább a sztochasztikus folyamatok, martingálok és sztochasztikus integrálok témakörében: Liptser és Shiryaev [35], Roger és Williams [45], Chung és Williams [13]. Az előbbiek igen általánosan tárgyalják a sztochasztikus integrálok fogalmát, míg a harmadik könyvet ajánljuk a témakörrel még ismerkedők számára bevezetésként. Mindhárom munkában több alkalmazást is találhat az olvasó nemcsak a pénzügy területéről.

A könyvben tárgyalt problémák precíz ismertetéséhez és az állítások levezetéséhez szükséges matematikai háttér természetesen számos matematikai monográfiában megtalálható. A könyv elkészítésében nagyszerű segítséget nyújtottak az alábbi művek: Cohn [14] a mértékelméleti kérdésekben, Rockafellar [44] a konvex analízis problémáiban és végül Lang [34] az analízis tárgykörében.

Fontosabb jelölések

Általános jelölések:

$\mathbb{N}$:	a természetes számok halmaza
$\mathbb{R}$:	a valós számok halmaza
$\mathbb{R}^+$:	a pozitív valós számok halmaza
$\mathbb{Z}$:	az egész számok halmaza
$\mathbb{P}$:	valószínűség (valószínűségi mérték)
$\mathbb{E}\,\xi$:	a ξ valószínűségi változó várható értéke
$\mathrm{var}\,\xi$:	a ξ valószínűségi változó varianciája (szórásnégyzete)
$\mathcal{C}^n(\mathbb{R})$:	az n-szer folytonosan differenciálható valós függvények halmaza
$sgn(x)$:	előjelfüggvény ('signum' függvény) az $x \in \mathbb{R}$ helyen
$x^\top$:	az $x \in \mathbb{R}^n$ transzponáltja
$\mathbb{1}_A$:	az A halmaz indikátor függvénye
$\Delta a_n = a_n - a_{n-1}$:	az a_n sorozat 'hátrafelé vett' differenciája
$\square$:	a bizonyítás vége
$\triangle$:	a megjegyzés vagy példa vége

Hasznosságelmélet:

$\mathcal{B}$:	az összes jószágkosarak halmaza
$\mathbf{x} \prec \mathbf{y}$ vagy $\mathbf{y} \succ \mathbf{x}$:	az $\mathbf{y}$ kosár szigorúan preferált az $\mathbf{x}$ kosárral szemben
$\mathbf{x} \preceq \mathbf{y}$ vagy $\mathbf{y} \succeq \mathbf{x}$:	az $\mathbf{y}$ kosár preferált az $\mathbf{x}$ kosárral szemben
$\mathbf{x} \approx \mathbf{y}$:	az $\mathbf{y}$ és az $\mathbf{x}$ kosarak közömbös viszonyban állnak
U:	hasznosságfüggvény
$\mathcal{L}$:	lottó
$\mathbb{L}$:	az összes lottók halmaza
$\mathcal{L}_1 \prec \mathcal{L}_2$ vagy $\mathcal{L}_2 \succ \mathcal{L}_1$:	az $\mathcal{L}_2$ lottó szigorúan preferált az $\mathcal{L}_1$ lottóval szemben

$\mathcal{L}_1 \preceq \mathcal{L}_2$ vagy $\mathcal{L}_1 \succeq \mathcal{L}_2$: az $\mathcal{L}_2$ lottó preferált az $\mathcal{L}_1$ lottóval szemben

$\mathcal{L}_1 \approx \mathcal{L}_2$: az $\mathcal{L}_1$ és $\mathcal{L}_2$ lottók közömbös viszonyban állnak

$R(P)$: relatív kockázatkerülés a P jövedelemszinten

$R_A(P)$: abszolút kockázatkerülés a P jövedelemszinten

Egylépéses piacok:

$\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}, r, n\}$: értékpapírpiac $n+1$ értékpapírral

r_i: a piac i-edik értékpapírjának a hozama

e_i: a piac i-edik értékpapírjának a várható hozama

$\mathbf{e} = (e_1, e_2, \ldots, e_n)^\top$: a részvények várható hozamainak vektora

$\mathbf{1}$: az $(1, 1, \ldots, 1)^\top \in \mathbb{R}^n$ vektor

$\pi = (\beta_0, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_n)$: portfólió

β_i: az i-edik értékpapírba fektetett összeg β_i a portfólióban

$\varepsilon(X)$: keresletrugalmasság az X jövedelemszint mellett

$r_i \succcurlyeq_{FSD} r_j$: az i-edik részvény elsőrendben sztochasztikusan dominálja a j-edik részvényt

$r_i \succcurlyeq_{SSD} r_j$: az i-edik részvény másodrendben sztochasztikusan dominálja a j-edik részvényt

e_π: a π portfólió várható hozama

σ_π: a π portfólió jövőbeli értékének a szórása

C_{X_0}: az X_0 kezdőtőkéből megvalósítható portfóliók halmaza

$C^*_{X_0}$: az X_0 kezdőtőkéből megvalósítható csak részvényt tartalmazó portfóliók halmaza

$q_\alpha(X)$: X alsó α-kvantilise

$q^\alpha(X)$: X felső α-kvantilise

$\mathrm{VaR}_\alpha(X)$: X alsó α-Value at Risk értéke

$\mathrm{VaR}^\alpha(X)$: X felső α-Value at Risk értéke

$\mathrm{ES}_\alpha(X)$: X α-Expected shortfall értéke

Többlépéses piacok (opcióelméleti rész):

B_n:	a kötvény értéke a t_n időpontban
S_n:	a részvény értéke a t_n időpontban
$(B,S)_N$:	diszkrét idejű N lépéses piac
d.i.b.-$(B,S)_N$:	diszkrét idejű N lépéses bináris piac
d.i.h.b.-$(B,S)_N$:	diszkrét idejű N lépéses homogén bináris (binomiális) piac
$\pi = \{\pi_n = (\beta_n, \gamma_n)\}_{n=1}^N$:	portfólió stratégia
π_n:	a π stratégia t_n időponthoz tartozó portfóliója
β_n:	a kötvények száma a t_n időpontban a portfólió stratégiában
γ_n:	a részvények száma a t_n időpontban a portfólió stratégiában
X_n^π:	a portfólió stratégia értéke a t_n időpontban
V_n^π:	a portfólió stratégia diszkontált értéke a t_n időpontban
$\mathbb{P}^*$:	ekvivalens martingál mérték

Irodalomjegyzék

[1] Acerbi, C. (2004): „Coherent Representations of Subjective Risk Aversion”, in Giorgio Szegö (Ed): *Risk Measures for the 21st Century*, Wiley, New York.

[2] Acerbi, C. (2002): *„On the coherence of Expected Shortfall”*, http://www.gloriamundi.org/detailpopup.asp?ID=453054765.

[3] Arató, M. (2001): *„Nem-élet biztosítási matematika”*, ELTE Eötvös Kiadó, Budapest.

[4] Bachelier, L.: „Théorie de la spéculation”, *Ann. EcoleNorm. Sup.*, **17**, 1900, pp. 21-81. (Reprinted in „The random Character of Stock Market Prices”, ed. by Coothner, P. H., MIT Press, Cambridge, Massachusetts, 1967, pp. 17-78.).

[5] Baxter, M. and Rennie, A. (1996): *„Financial calculus”* An introduction to derivative pricing, Cambridge University Press.

[6] Barczy, M. (2009): *„Pénzügyi matematika példatár I. rész”*, Polygon Kiadó, Szeged.

[7] Barczy, M. és Gáll, J. (2009): *„Pénzügyi matematika példatár II. rész”*, Polygon Kiadó, Szeged.

[8] Barucci, E. (2003): *„Financial Markets Theory”*, Springer.

[9] Berde, É. és Petró, K. (1995): „A különféle hasznosságfogalmak szerepe a közgazdaságtanban”, *Közgazdasági Szemle*, **1995/5**, pp. 511-529.

[10] Black, F. and Scholes, M. (1973): „The pricing of options and corporate liabilities”, *J. Polit. Econ.*, **3**, pp. 637–659.

[11] Brealey, R. A. and Myers, S. C. (2003): *„Principles of Corporate Finance”*, 7th ed., McGraw-Hill.

[12] Capinski, M. and Zastawniak, T. (2003): *„Mathematics for Finance”*, Springer.

[13] Chung, K. L. and Williams, R. J. (1990): *„Introduction to Stochastic Integration”*, 2nd ed., Birkhäuser, Boston.

[14] Cohn, D. L. (1980): *„Measure Theory”*, Birkhäuser Boston.

[15] Cox, J. C., Ross, R. A., Rubinstein, M. (1979): „Option pricing: a simplified approach”, *J. Finan. Econ.*, **3**, pp. 229–263.

[16] Dzhaparidze, K., van Zuijlen, M. (1996): „Introduction to Option Pricing in a Securities Market I Binary Models”, *CWI Quaterly*, **Vol. 9, number 4**, pp. 319–356.

[17] Delbaen, F. (2000): *„Coherent risk measures on general probability spaces”*, Eidgenössische Technische Hochschule, Zürich.

[18] Dowd, K. (1999): *„Beyond Value at Risk”*, The New Science of Risk Management, John Wiley & Sons.

[19] Duffie, D. (1992): *„Dynamic Asset Pricing Theory”*, Princeton University Press, New Jersey.

[20] Dupacova, J., Hurt, J. and Stepán, J. (2002): *„Stochastic Modeling in Economics and Finance”*, Kluwer Academic Pub., London.

[21] Elliott, R. J. és Kopp, P. E. (2000): *„Pénzpiacok matematikája”*, Typotex.

[22] Elton, E. J. and Gruber M. J. (1995): *„Modern portfolio theory and investment analysis”*, John Wiley & Sons, Inc..

[23] Eső, P. és Lóránd, G. (1993): „A racionalitás közgazdasági értelmezéséről", *Közgazdasági Szemle*, **1993, 4**, pp. 311–324.

[24] Föllmer, H. and Scheid, A. (2004): *„Stochastic Finance, An Introduction in Discrete Time"*, Walter de Gruyter, Berlin, New York.

[25] Harrison, J. M. and Kreps, D. M. (1979): „Martingales and Arbitrage in Multiperiod Securities Markets", *J. Econ. Theory*, **20**, pp. 381–408.

[26] Harrison, J. M. and Pliska, S. R. (1981): „Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading", *Stoch. Proc. Appl.*, **11**, pp. 215–260.

[27] Huang, Chi-Fu and Litzenberger, R. H. (1988): *„Foundations for financial economics"*, Prentice Hall.

[28] Hull, J. C. (2006): *„Options, futures, and other derivative securities"*, 6th ed., Prentice-Hall International, Inc..

[29] Ingersoll, J. E. (1987): *„Theory of Financial Decision Making"*, Rowman & Littlefield.

[30] Jorion P. (1999): *„A kockáztatott érték"*, Panem.

[31] Kallianpur, G. and Karandikar, R. L. (2000): *„Introduction to Option Pricing Theory"*, Birkhäuser, Boston.

[32] Korn, R. (1998): *„Optimal portfolios"*, World Scientific.

[33] Kreps, D. M. (1990): *„A course in microeconomic theory"*, Princeton University Press, Princeton.

[34] Lang, S. (1968, 1969): *„Analysis"* I., II., Addison-Wesley Publishing Company.

[35] Liptser, R. Sh. and Shiryayev, A. N. (1989): *„Theory of Martingales"* (translation), Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

[36] Major, P. (2005): *„ The relation between the closeness of random variables and their distributions”*, http://www.renyi.hu/~major/probability/couple.html.

[37] Musiela, M. and Rutkowski, M. (2002): *„Martingale Methods in Financial Modelling”*, Springer.

[38] Prigent, J. (2003): *„Weak Convergence of Financial Markets”*, Springer.

[39] Rachev, S. T. and Rüschendorf, L. (1994): „Models for option prices”, *Theory Probab. Appl.* **39**, 120–152.

[40] Nordhaus, W. D. and Samuelson, P. A. (1992): *„Economics”*, McGraw-Hill.

[41] Pliska, S. R. (1997): *„Introduction to Mathematical Finance: Discrete Time Models”*, Wiley.

[42] Potters, J.A.M. (1996): *„Mathematische economie”*, kézirat, Universiteit Nijmegen.

[43] Potters, J.A.M. (1998): *„Preferences on stochastic outcomes”*, kézirat, Universiteit Nijmegen.

[44] Rockafellar, R. T. (1970): *„Convex Analysis”*, Princeton, New Jersey.

[45] Rogers, L.C.G. and Williams, D. (1990): *„Diffusions, Markov Processes, and Martingales”*, vol. 1-2., John Wiley & Sons.

[46] Rolski, T, Schmidli, H, Schmidt, V and Teugels, J (1999): *„Stochastic Processes for Insurance and Finance”*, John Wiley & Sons.

[47] Samuelson, P. A. (1965): „Rational theory of warrant pricing”, *Industrial Management Review*, **6, 1965**, pp. 13–31.

[48] Schmidt, U. (1998): *„Axiomatic Utility Theory under Risk”*, Springer, Berlin.

[49] Shiryaev, A. N. (1994): „On some basic concepts and some basic stochastic models used in finance I. *Discrete time”*, *Theory Probab. Appl.*, **39**, pp. 1–13.

[50] Shiryaev, A. N. (1999): *„Essentials of Stochastic Finance”*, World Scientific, Singapore.

[51] Shiryaev, A. N., Kabanov, Yu. M., Kramkov, D. O., Mel'nikov, A. V. (1994): „Towards the theory of pricing of options of both European and American types. I. *Discrete time”*, *Theory Probab. Appl.*, **39**, pp. 14–60.

[52] Shiryaev, A. N., Kabanov, Yu. M., Kramkov, D. O., Mel'nikov, A. V. (1994): „Towards the theory of pricing of options of both European and American types. II. *Continuous time”*, *Theory Probab. Appl.*, **39**, pp. 61–102.