Feladatok:

1a.) Legyen η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsa be, hogy $Ee^{t\eta} = e^{t^2/2}$.

1b) Legyen $W(t)$, $t \geq 0$, Wiener folyamat, a valós szám. Mutassa meg, hogy

$$\exp\left\{aW(t) - \frac{a^2}{2}t\right\}, \quad t \geq 0,$$

martingál.

1c.) Legyen adva egy $\mathcal{F}$ σ-algebra, és két ξ és η valószínűségi változó, amelyek közül ξ $\mathcal{F}$ mérhető, η független az $\mathcal{F}$ σ-algebrától és standard normális eloszlású. Legyen a valós szám. Mutassa meg, hogy $E\left(e^{a\xi\eta - a^2\xi^2/2}\middle|\mathcal{F}\right) = 1$.

1d.) Legyen $X(t)$ egyszerű (sztochasztikus) folyamat. (Ezt a fogalmat az Itô integrál definiciója során vezettük be.) Mutassa meg, hogy

$$\exp\left\{\int_0^t aX(u)\,dW_u - \frac{a^2}{2}\int_0^t X^2(u)\,du\right\}, \quad t \geq 0,$$

martingál. (Az exponensben szereplő első tag egy egyszerű folyamat Itô integrálja.)

Megjegyzés: Az 1c. feladat megoldásában felhasználhatjuk az alábbi a Kevei jegyzet 12. feladatában is megfogalmazott állítást. Ha X, Y olyan véletlen változók, amelyekre X mérhető a $\mathcal{G}$ σ-algebrára, Y pedig független tőle, akkor

$$E(h(X,Y)|\mathcal{G}) = \int h(X,y)\,dF(y),$$

ahol F az Y eloszlásfüggvénye. (Ez a feladat úgy értendő, hogy feltesszük azt, hogy vagy $E|h(X,Y)| < \infty$ vagy azt, hogy $h(x,y) \geq 0$ minden x és y számra, annak érdekében, hogy a tekintett $E(h(X,Y)|\mathcal{G})$ feltételes várható érték létezzen.)

2.) Oldja meg a Kevei jegyzet 12. feladatát.

Megoldásvázlat: $\int h(X,y)\,dF(y)$ $\mathcal{G}$ mérhető. Ezért elegendő azt belátni, hogy minden $G \in \mathcal{G}$ halmazra $\int_G \int h(X(\omega),y)\,dF(y)\,dP(\omega) = \int_G h(X(\omega),Y(\omega))\,dP(\omega)$. Lássuk be ezt az állítást abban az esetben, ha $h(x,y)$ egy C halmaz indikátor függvénye az R^2 térben. Tekintsük először azt a speciális esetet, amikor $C = A \times B$ egy $A \in R^1$ és $B \in R^1$ halmazzal. Ekkor

$$\begin{aligned}\int_G h(X(\omega),Y(\omega))\,dP(\omega) &= \int I_{\{\omega\colon\, \omega\in G\}} I_{\{\omega\colon\, X(\omega)\in A\}} I_{\{\omega\colon\, Y(\omega)\in B\}})\,dP(\omega) \\ &= P(G \cap \{X \in A\})P(Y \in B),\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}\int_G \int h(X(\omega),y)\,dF(y)\,dP(\omega) &= \int_G I_{\{\omega\colon\, X(\omega)\in A\}} \left(\int I_{\{y\colon\, y\in B\}}(y)\,dF(y)\right)\,dP(\omega) \\ = \int_G I_{\{\omega\colon\, X(\omega)\in A\}} P(Y \in B)\,dP(\omega) &= P(G \cap \{X \in A\})P(Y \in B),\end{aligned}$$

tehát a kívánt azonosság ekkor érvényes.

Az általános esetben definiáljuk egy rögzített $G \in \mathcal{G}$ halmazra a

$$\mu_{1,G}(C) = P(G \cap \{\omega\colon (X(\omega), Y(\omega)) \in C\}), \quad C \subset R^2,$$

és

$$\mu_{2,G}(C) = \int_G \mu_F(\{y\colon (X(\omega), y) \in C\})\, dP(\omega), \quad C \subset R^2,$$

mértékeket az R^2 tér mérhető részhalmazain, ahol μ_F az F eloszlásfüggvény által generált Stieltjes mérték. Azt kell belátni, hogy $\mu_{1,G}(C) = \mu_{2,G}(C)$ minden $C \subset R^2$ mérhető halmazra. Viszont láttuk, hogy ez igaz a $C = A \times B$ alakú halmazokra. Ezért az állítás következik a mérték kiterjesztésének az egyértelműségéből, ha annak értéke az ilyen alakú halmazokon rögzített.

3a.) Legyen adva egy $\mathcal{F}_t$, $0 \le t \le T$, filtráció. Legyen X_t, $0 \le t \le T$, olyan sztochasztikus folyamat, amelyre $(X_t, \mathcal{F}_t)$ martingál, és $EX_t^2 < \infty$ minden $0 \le t \le T$ számra, és legyen Y_T, $0 \le t \le T$, olyan az $\mathcal{F}_t$ filtrációhoz adaptált sztochasztikus folyamat, amelyre $E|Y_t| < \infty$ minden $0 \le t \le T$ számra. Lássa be, hogy a következő két állítás ekvivalens.

a) $X_t^2 - Y_t$ martingál.

b) $E((X_t - X_s)^2 | \mathcal{F}_s) = E((Y_t - Y_s) | \mathcal{F}_s)$ minden $0 \le s \le t \le T$ számpárra.

3b.) Legyen $\mathcal{F}_t$, $0 \le t \le T$, filtráció, W_t, $0 \le t \le T$ olyan Wiener folyamat, amelyre $(W_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \le t \le T$, teljesíti az Itô integrál definiciójában megfogalmazott feltételeket. Legyen $e(t)$, $0 \le t \le T$, olyan az $\mathcal{F}_t$ filtrációra adaptált sztochasztikus folyamat, amelyre $E\int_0^T e^2(t)\, dt < \infty$. Tekintsük az $I_t(e) = \int_0^t e(u)\, dW_u$, $0 \le t \le T$, Itô integrált. Bizonyítsa be, hogy $(I_t(e), \mathcal{F}_t)$, $0 \le t \le T$, martingál, és $EI_t^2(e) = E\int_0^t e(u)^2\, du$. A bizonyításban felhasználhatja, hogy ezt az eredményt tudjuk egyszerű folyamatokra, és igaz a Kevei jegyzet 20. oldalán megfogalmazott 3. lemma, amelyiket felhasználunk az $e \in \mathcal{H}$ sztochasztikus folyamatok Itô integráljának a definiciójában.

3c.) Legyen $X(t) = I_t(e)$ és $Y(t) = \int_0^t e_u^2\, du$ a 3b.) feladatban bevezetett mennyiségekkel. Lássa be, hogy a 3a.) feladat állítása szerint, ha a következő két állítás valamelyikét bebizonyítjuk, akkor abból következik a másik állítás is. 1. állítás: $(I_t(e)^2 - Y_t, \mathcal{F}_t)$, $0 \le t \le T$, martingál. 2. állítás : $E((I_t(e) - I_s(e))^2 | \mathcal{F}_s) = E((Y_t) - Y(s)) | \mathcal{F}_s)$, ha $0 \le s \le t \le T$. (A 2. állítás megegyezik a Kevei jegyzet 4. Tételének (ii) pontjával.)

4.) Legyen adva egy $\mathcal{F}_t$, $t \ge 0$, filtráció és egy ehhez a filtrációhoz adaptált $X_t = X_t(\omega)$ folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat. Rögzítsünk egy a valós számot, és definiáljuk a $\tau(\omega) = \tau_a(\omega) = \inf\{u\colon X(u, \omega) \ge a\}$ valószínűségi változót. Mutassa meg, hogy $\{\omega\colon \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \ge 0$ számra, azaz τ megállási szabály, (amely felveheti a végtelen értéket is).

Megoldás: Azt állítom, hogy $\{\omega\colon \tau_a(\omega) \le t\} = \{\omega\colon \sup\limits_{0 \le u \le t} X_u(\omega) \ge a\}$. Valóban, ha $\sup\limits_{0 \le u \le t} X_u(\omega) \le a$, akkor létezik olyan $0 \le u \le t$ szám, amelyre $X_u(\omega) \ge a$, ezért

$\tau_a(\omega) \le t$. Ha $\tau_a(\omega) \le t$, akkor léteznek olyan u_n számok, amelyekre $X(u_n) \ge a$, és $u_n \to u$ egy $0 \le u \le t$ számmal, ha $n \to \infty$. Az $X_u(\omega)$ függvény folytonossága miatt létezik egy $\lim_{n\to\infty} X_{u_n}(\omega) = b \ge a$ határérték. Ekkor $X_u(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{u_n}(\omega) \ge a$, és $0 \le u \le T$.

Másrészt

$$\begin{aligned}
\{\omega\colon \sup_{0\le u\le t} X_u(\omega) \ge a\} &= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\omega\colon \sup_{0\le u\le t} X_u(\omega) > a - \frac{1}{n}\right\} \\
&= \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{\omega\colon \sup_{\substack{0\le u\le t \\ u \text{ racionális szám}}} X_u(\omega) > a - \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{F}_t.
\end{aligned}$$

5.) Legyen adva egy $\mathcal{F}_t$ $t \ge 0$, filtráció és olyan $(X_t^{(n)}, \mathcal{F}_t)$, $t \ge 0$, martingálok sorozata minden $n = 1, 2, \dots$ számra, amelyekre $X_t^{(n)}(\omega) > 0$ minden $t \ge 0$ számra, $\omega \in \Omega$ pontra és $n = 1, 2, \dots$ paraméterre, továbbá létezik egy olyan $X_t^{(0)}(\omega)$ sztochasztikus folyamat, amelyre $P(\lim_{n\to\infty} X_t^{(n)} = X_t^{(0)}) = 1$ minden $t \ge 0$ számra, és $X_t^{(0)}(\omega) > 0$ minden $t \ge 0$ számra és $\omega \in \Omega$ pontra. Mutassa meg, hogy $X_t^{(0)}$ szupermartingál. Ez az eredmény akkor is érvényben marad, ha az $X_t^{(n)}$ sztochasztikus folyamatok nem feltétlenül martingálok, hanem csak szupermartingálok.

5a.) Mutassa meg az 5. feladat eredménye segítségével, hogy ha e_t $\mathcal{F}_t$ adaptált folyamat, $P(\int_0^\infty e_t^2(\omega)\,dt < \infty) = 1$ akkor $\exp\left\{\int_0^t e_u\,dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t e_u^2\,du\right\}$, $t \ge 0$, szupermartingál.

Megoldás: Mivel $X_t^{(n)}(\omega) > 0$, e folyamat martingál tulajdonságát úgy is felírhatjuk, hogy $E\left(\frac{X_t^{(n)}}{X_s^{(n)}}\middle|\mathcal{F}_s\right) = 1$ 1 valószínűséggel, ha $t \ge s$, vagy $\int_A \frac{X_t^{(n)}}{X_s^{(n)}}\,dP = P(A)$ minden $A \in \mathcal{F}_s$ halmazra, ha $t \ge s$. Mivel $X_t^{(n)} \to X_t^{(0)}$, és csupa pozitív függvénnyel dolgozunk a Fatou lemma adja, hogy $\int_A \frac{X_t^{(0)}}{X_s^{(0)}}\,dP \le P(A)$ minden $A \in \mathcal{F}_s$ halmazra, és ez azt jelenti, hogy igaz a kívánt szupermartingál tulajdonság. Ez az érvelés akkor is működik, ha $X_t^{(n)}$ csak szupermartingál.

Láttuk, hogy $\exp\left\{\int_0^t e_u\,dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t e_u^2\,du\right\}$, $t \ge 0$, martingál, ha e_t egyszerű folyamat. Másrészt minden $e \in \mathcal{H}'$ sztochsztikus folyamathoz létezik egyszerű folyamatok olyan $e^{(n)}$, $n = 1, 2, \dots$ sorozata, amelyre

$$\int_0^t (e_u^{(n)})^2\,du \to \int_0^t e_u^2\,du \quad \text{és} \quad \int_0^t e_u^{(n)}\,dW_u \to \int_0^t e_u\,dW_u,$$

ha $n \to \infty$ minden $t \ge 0$ számra. Ezért

$$\exp\left\{\int_0^t e_u\,dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t e_u^2\,du\right\} = \lim_{n\to\infty} \exp\left\{\int_0^t e_u^{(n)}\,dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t (e_u^{(n)})^2\,du\right\},$$

minden $t \geq 0$ számra, Ezért a 5. feladat feltételei teljesülnek az esetünkben, és az 5a.) feladat állítása következik az 5. feladat eredményéből.

Megjegyzem, hogy az 5a.) feladat úgy is bizonyítható az 5. feladat segítségével, hogy belátjuk, $\exp\left\{\int_0^t e_u \, dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t e_u^2 \, du\right\}$ lokális martingál, mert előáll, mint egy Wiener folyamat szerinti Itô integrál plusz egy konstans.

6. Legyen $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, egy filtráció, és legyen $(X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$, lokális martingál. Vezessük be a következő jelölést:

$$T_c = \{\tau\colon \tau \text{ megállási szabály az } \mathcal{F}_t \text{ filtrációra, és } P(\tau \leq c) = 1\},$$

minden $c \geq 0$ számra. Ha az $\{X_\tau, \ \tau \in T_c\}$, valószínűségi változók halmaza egyenletesen integrálható tetszőleges $c > 0$ számra, akkor $(X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$, martingál.

Megjegyzés: Mivel az Itô integrálok, lokális martingálok a 6. feladat eredménye hasznos elégséges feltételt ad arra, hogy egy Itô integrál martingál legyen.