Az iterált logaritmus tétel Wiener folyamatokra

Ismertetem röviden az iterált logaritmus tételt Wiener-folyamatokra. Megadom a bizonyításban felhasznált fő állításokat, de több állítás bizonyításának a kidolgozását az olvasóra bízom. Először megfogalmazom az iterált logartimus tételt.

Iterált logaritmus tétel Wiener folyamatokra. *Legyen adva a számegyenesen egy $W(t) = W(t, \omega)$, $t \geq 0$, Wiener folyamat. Ekkor*

$$\limsup_{t \to \infty} \frac{|W(t)|}{\sqrt{2t \log \log t}} = 1 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

Megjegyzés. A bizonyításból az is kiderül, hogy minden $-1 \leq s \leq 1$ számra létezik 1 valószínűséggel olyan $t_n = t_n(\omega) \to \infty$ ha $n \to \infty$, sorozat, amelyre $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{W(t_n, \omega)}{\sqrt{2t_n(\omega) \log \log t_n(\omega)}} = s$.

Az iterált logaritmus tétel vizsgálatában szükségünk van egy olyan eredményre, amely arról szól, hogy adva megszámlálhatóan végtelen sok $A_1, A_2, \dots$ esemény mikor mondhatjuk, hogy ezek közül csak véges sok illetve hogy végtelen sok következik be. Erről szól az alábbi Borel–Cantelli lemma.

Borel–Cantelli lemma. *Legyen adva egy $(\Omega, \mathscr{A}, \mathscr{P})$ valószínűségi mezőn végtelen sok $A_1, A_2, \dots$ esemény. A következő két állítás igaz:*
a.) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, akkor

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0,$$

azaz ebben az esetben egy valószínűséggel csak véges sok A_n esemény következik be.
b.) Ha $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, és az A_n, $n = 1, 2, \dots$, események függetlenek, akkor

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1,$$

azaz ebben az esetben egy valószínűséggel végtelen sok A_n esemény következik be.

Megjegyzem, hogy a lemma b) részében a végtelen sok A_n esemény bekövetkezéséhez nem elegendő az, hogy a megfelelő összeg divergáljon, az is kell, hogy ezek az A_n események függetlenek legyenek egymástól. Ez utóbbi feltételt lehet gyengíteni, de nem lehet teljesen elhagyni.

Szükségünk van jó becslésekre a $P(W(T)>x)$ és $P\left(\sup_{0\le t\le T} W(t)>x\right)$ valószínűségekre, ahol $W(t)$, $t\ge 0$, Wiener folyamat, $x>0$.

Tudjuk, hogy $(W(T)>x)=P\left(\frac{W(T)}{\sqrt{T}}>\frac{x}{\sqrt{T}}\right)=1-\Phi\left(\frac{x}{\sqrt{T}}\right)$, ahol $\Phi(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény. Viszont a Borel–Cantelli lemma alkalmazásakor szeretnénk tudni, hogy a $\sum(1-\Phi(x_n))$ összeg milyen x_n, $n=1,2,\dots$ sorozatokra konvergens, és milyen x_n, $n=1,2,\dots$ sorozatokra divergens. Ezért hasznos számunkra a következő becslés.

Becslés a normális eloszlásfüggvény viselkedéséről. Minden $x>0$ számra

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\varphi(x)<1-\Phi(x)<\frac{1}{x}\varphi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ és $\varphi(x)$ a standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény.

Bizonyítás: Parciális integrálással kapjuk, hogy minden $x>0$ számra

$$\begin{aligned}
\sqrt{2\pi}(1-\Phi(x)) &= \int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du=\int_x^\infty \frac{1}{u}\left(ue^{-u^2/2}\right)du \\
&= \int_x^\infty \frac{1}{u}\frac{d}{du}\left(-e^{-u^2/2}\right)du=\frac{1}{x}e^{-x^2/2}-\int_x^\infty \frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}\,du \\
&= \frac{1}{x}e^{-x^2/2}-\int_x^\infty \frac{1}{u^3}\left(ue^{-u^2/2}\right)du \\
&= \frac{1}{x}e^{-x^2/2}-\frac{1}{x^3}e^{-x^2/2}+\int_x^\infty \frac{3}{u^4}e^{-u^2/2}\,du.
\end{aligned}$$

Az $1-\Phi(x)$ kifejezésre a második sorban kapott kifejezésből azt kapjuk, hogy $\frac{1}{x}\varphi(x)>1-\Phi(x)$, a negyedik sorban kapott kifejezésből pedig azt, hogy $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\varphi(x)<1-\Phi(x)$.

Szükségünk van jó felső becslésre a $P\left(\sup_{0\le t\le T} W(t)>x\right)$ valószínűségre. Valójában a Wiener folyamatokra érvényes még nem tanult erős Markov tulajdonság segítségével meg lehet mutatni, hogy

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} W(t)>x\right)=2P(W(T)>x),\qquad \text{ha } x>0.$$

Ehelyett a martingálokról tanult eredmények alapján adunk jó felső becslést. Azt fogjuk felhasználni, hogy $Z(t)=e^{\alpha W(t)-\alpha^2 t/2}$, $t\ge 0$, martingál minden $\alpha>0$

számra. Ezután a martingálokról tanultak alapján tudunk jó becslést adni a vizsgálandó valószínűségre.

Vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
&\left\{\omega\colon \sup_{0\le t\le T} W(t,\omega)>x\right\}\\
&\quad=\{\omega\colon\ \alpha W(t,\omega)-\alpha^2 t/2>\alpha x-\alpha^2 t/2 \text{ valamely } 0\le t\le T \text{ számra}\}\\
&\quad\subset\{\omega\colon\ \alpha W(t,\omega)-\alpha^2 t/2>\alpha x-\alpha^2 T/2 \text{ valamely } 0\le t\le T \text{ számra}\}\\
&\quad=\left\{\omega\colon \sup_{0\le t\le T} e^{\alpha W(t,\omega)-\alpha^2 t/2}>e^{\alpha x-\alpha^2 T/2}\right\},
\end{aligned}$$

ezért

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} W(t)>x\right)\le P\left(\sup_{0\le t\le T} e^{\alpha W(t)-\alpha^2 t/2}>e^{\alpha x-\alpha^2 T/2}\right),$$

és mivel $Z(t)=e^{\alpha W(t)-\alpha^2 t/2}$, $0\le t\le T$ egy folytonos trajektóriájú, pozitív értékű martingál, amelyikre $EZ(T)=EZ(0)=1$ innen következik, hogy

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} W(t)>x\right)\le P\left(\sup_{0\le t\le T} Z(t)>e^{\alpha x-\alpha^2 T/2}\right)\le\frac{EZ(T)}{e^{\alpha x-\alpha^2 T/2}}=e^{\alpha^2 T/2-\alpha x}$$

minden $\alpha>0$ számra.

Az optimális $\alpha=\frac{x}{T}$ választással azt kapjuk, hogy

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} W(t)>x\right)\le\exp\left\{-\frac{x^2}{2T}\right\} \text{ minden } T>0 \text{ és } x>0 \text{ számra.}$$

Először a következő egyenlőtlenséget látjuk be.

$$\limsup_{t\to\infty}\frac{|W(t)|}{\sqrt{2t\log\log t}}\le 1 \quad 1 \text{ valószínűséggel.} \tag{1}$$

Minden $T>0$ számra igaz a következő egyenlőtlenség:

$$P\left(\sup_{0\le t\le T} W(t)\ge(1+\varepsilon)\sqrt{2T\log\log T}\right)\le(\log T)^{-(1+\varepsilon)^2}.$$

Válasszunk valamilyen $D > 1$ számot, és alkalmazzuk ezt az egyenlőtlenséget minden $T_n = D^n$, $n = 1,2,\dots$, számra. Mivel $\log D^n = n \log D$ azt kapjuk, hogy

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sup_{0\le t\le T_n} W(t) \ge (1+\varepsilon)\sqrt{2T_n \log\log T_n}\right) \le \text{const.} \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(1+\varepsilon)^2} < \infty.$$

Ezért a Borel–Cantelli lemma alapján majdnem minden ω elemi eseményre létezik olyan $N(D,\varepsilon,\omega)$ küszöbindex amelyre

$$\sup_{0\le t\le T_n} W(t,\omega) \le (1+\varepsilon)\sqrt{2T_n \log\log T_n}, \qquad \text{ha } n \ge N(D,\varepsilon,\omega).$$

Legyen $D = 1+\delta$ egy elég kis $\delta > 0$ számmal. Ekkor $\sqrt{2T_n \log\log T_n} \le (1+\frac{\varepsilon}{2})\sqrt{2t \log\log t}$, ha $T_{n-1} \le t \le T_n$, és majdnem minden ω elemi eseményre létezik olyan $T = T_0(\varepsilon,\omega)$ küszöbindex, amelyre

$$\sup_{0\le t\le T} W(t,\omega) \le (1+2\varepsilon)\sqrt{2T \log\log T} \text{ ha } T \ge T_0(\varepsilon,\omega).$$

Ugyanez az egyenlőtlenség akkor is érvényes, ha a $W(t,\omega)$ Wiener folyamatot a $-W(t,\omega)$ Wiener folyamattal helyettesítjük. Mivel ezek a relációk minden $\varepsilon > 0$ számra igazak, innen következik a (1) reláció.

Belátjuk a

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W(t)}{\sqrt{2t\log\log t}} \ge 1 \quad \text{1 valószínűséggel.} \tag{2}$$

relációt is. Az (1) és (2) relációból következik az iterált logaritmus tétel.

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot, válasszunk egy tőle függő elég nagy $D = D(\varepsilon)$ számot, és definiáluk a $Z_n(\omega) = W(D^n,\omega) - W(D^{n-1},\omega)$, $n = 1,2,\dots$, valószínűségi változókat. Azt állítom, hogy 1 valószínűséggel végtelen sok olyan $n_k = n_k(\omega)$ index van, amelyekre

$$Z_{n_k}(\omega) \ge (1-\varepsilon)\sqrt{2D^{n_k} \log\log D^{n_k}}.$$

Valóban, elég nagy n indexre

$$P\left(Z_n(\omega) \ge \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2(D^n - D^{n-1})\log\log(D^n - D^{n-1})}\right) \ge n^{-(1-\varepsilon/3)},$$

ezért

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(Z_n(\omega) \geq \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2(D^n-D^{n-1})\log\log(D^n-D^{n-1})}\right) = \infty,$$

és mivel a Z_n valószínűségi változók függetlenek, innen következik, hogy az ω elemi események 1 valószínűségű halmazára létezik végtelen sok $n_k = n_k(\omega)$ index úgy, hogy

$$Z_{n_k}(\omega) \geq \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2(D^{n_k}-D^{n_k-1})\log\log(D^{n_k}-D^{n_k-1})}.$$

Ha a D számot elég nagynak választjuk, akkor

$$\left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt{2(D^{n_k}-D^{n_k-1})\log\log(D^{n_k}-D^{n_k-1})} \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2D^{n_k}\log\log D^{n_k}}$$

minden elég nagy n_k indexre, ezért 1 valószínűséggel

$$Z_{n_k}(\omega) \geq (1-\varepsilon)\sqrt{2D^{n_k}\log\log D^{n_k}}$$

végtelen sok $n_k = n_k(\omega)$ indexre. Továbbá az (1) reláció alapján majdnem minden ω-ra létezik olyan $N_0 = N_0(\omega)$ index, hogy

$$|W(D^{n-1},\omega)| \leq 2\sqrt{D^{n-1}\log\log D^{n-1}} \leq \varepsilon\sqrt{2D^n\log\log D^n},$$

ha $n \geq N_0$. Ezért 1 valószínűséggel

$$W(D^{n_k},\omega) = Z_{n_k}(\omega) + W(D^{n_k-1},\omega) \geq (1-2\varepsilon)\sqrt{2D^{n_k}\log\log D^{n_k}}$$

végtelen sok $n_k = n_k(\omega)$ indexre, ahonnan

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{W(t,\omega)}{\sqrt{2t\log\log t}} \geq (1-2\varepsilon) \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

Mivel ez az állítás minden $\varepsilon > 0$ számra igaz, innen következik a (2) reláció.

A bizonyítás kis módosításával be lehet látni az iterált logaritmus tétel következő változatát is.

Iterált logaritmus tétel független standard normális eloszlású valószínűségi változók részletösszegeire. *Legyenek $X_1, X_2, \ldots,$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$, $n = 1, 2, \ldots$. Ekkor*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{2n\log\log n}} = 1 \quad \text{1 \textit{valószínűséggel.}} \tag{3}$$

Természetes módon felmerül a következő kérdés. Legyenek $X_1, X_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, és definiáljuk e változók $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeit. Független egyforma eloszlású valószínűségi változók milyen $X_1, X_2, \dots$ sorozatára igaz az iterált logaritmus tétel, azaz e valószínűségi változók részletösszegei mikor teljesitik a (3) relációt. Be lehet látni, hogy ha $EX_1^2 < \infty$, és $EX_1 = 0$, akkor az $X_1, X_2, \dots$ sorozatra igaz az iterált logaritmus tétel. Másrészt, ha $EX_1^2 = \infty$, akkor az $X_1, X_2, \dots$ sorozatra nem igaz az iterált logaritmus tétel. Ez következik az alábbi feladatok eredményeiből is.

Feladatok:

(a) $E|X| < \infty$ az X valószínűségi változóra akkor és csak akkor, ha $\sum_{n=1}^\infty P(|X_1| > n) < \infty$.

(b) $E|X|^r < \infty$ az X valószínűségi változóra valamely $r > 0$ számmal akkor és csak akkkor, ha $\sum_{n=1}^\infty P(|X_1| > n^{1/r}) < \infty$.

(c) Legyen $EX^2 = \infty$, és legyenek $X_1, X_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek eloszlása megegyezik az X valószínűségi változó eloszlásával. Mutassa meg, hogy egy valószínűséggel végtelen sok olyan $n_k = n_k(\omega)$ index van, amelyekre $|X_{n_k}(\omega)| > \sqrt{n_k}$. Sőt, tetszőleges $C > 0$ számra egy valószínűséggel végtelen sok olyan $n_k = n_k(\omega)$ index van, amelyekre $|X_{n_k}(\omega)| > C\sqrt{n_k}$.

(d) Legyenek $X_1, X_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, és legyen $EX_1^2 = \infty$. Definiáljuk az $S_n = \sum_{k=1}^n X_k$ részletösszegeket. Mutassa meg, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n|}{\sqrt{n}} = \infty \quad \text{1 valószínűséggel.}$$