Az Itô integrál definiciója.

Kevei Péter Pénzügyi folyamatok folytonos időben című jegyzetének Sztochasztikus integrál fejezetében bevezeti az Itô integrál fogalmát. Röviden, bizonyos részletek elhagyásával az e fogalom felépítséhez szükséges elméleti ismereteket is megadja. Azonban bizonyos helyeken állításait kissé leegyszerűsítve, nem teljesen pontosan fogalmazza meg. Ezen írásban ismertetem a Kevei jegyzetben bevezetett Itô integrál részletesebb, pontosabb definicióját, amelyben a felhasznált állításokat pontosabban fogalmazom meg. Ezt a tárgyalást H. P. McKean Stochastic Integrals című könyvének 2. fejezete alapján teszem. A felhasznált eredményeket megfogalmazom, de azok bizonyítását sokszor elhagyom. (Egyébként H. P. McKean is meglehetősen tömören, sok részlet elhagyásával adja meg a bizonyításait.)

Bizonyos, jó tulajdonságokkal rendelkező $X_t = X_t(\omega)$ sztochasztikus folyamatoknak definiáljuk az Itô integrálját. Először megadom, hogy milyen tulajdonságokkal rendelkező sztochasztikus folyamatoknak definiáljuk az Itô integrálját.

Legyen adva egy $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mező, azon egy $W_t = W_t(\omega)$ Wiener folyamat, ahol vagy $0 \le t \le T$ valamely $T > 0$ számmal vagy $0 \le t < \infty$, és egy $\mathscr{F}_t$, ($0 \le t \le T$ vagy $0 \le t < \infty$) filtráció, azaz $\mathscr{F}_t$ σ-algebrák olyan családja, amelyekre $\mathscr{F}_s \subset \mathscr{F}_t$, ha $s < t$, és $\mathscr{F}_t \subset \mathscr{A}$ minden t időpontra. Továbbá megköveteljük, hogy W_t $\mathscr{F}_t$-mérhető legyen minden t időpontra, és a $W_t - W_s$ valószínűségi változó legyen független az $\mathscr{F}_s$ σ-algebrától, ha $s < t$. Azt mondjuk, hogy egy X_t sztochasztikus folyamat adaptált erre az $\mathscr{F}_t$ filtrációra, ha X_t $\mathscr{F}_t$ mérhető minden t időpontra, és $X_t(\omega)$ mint az ω és t változók kétváltozós függvénye mérhető az $(\Omega \times [0,T], \mathscr{A} \times \mathscr{B}_{[0,T]})$ vagy $(\Omega \times [0,\infty), \mathscr{A} \times \mathscr{B}_{[0,\infty)})$ szorzattéren, ahol $\mathscr{B}_{[0,T]}$ a Borel σ-algebra a $[0,T]$ intervallumon, és $\mathscr{B}_{[0,\infty)}$ a Borel σ-algebra a $[0,\infty)$ félegyenesen.

A Kevei jegyzet azzal az esettel foglalkozik, amikor az Itô integrált valamely $[0,T]$ intervallumban akarjuk definiálni. Ebben az esetben bevezeti a sztochasztikus folyamatokból álló

$$\mathscr{H} = \left\{ X = (X_t),\ t \in [0,T]\colon\ (X_t)\ \mathscr{F}_t \text{ adaptált, és } E\int_0^T X_t(\omega)^2\,dt < \infty \right\}$$

és

$$\begin{aligned}\mathscr{H}' \quad = \quad & \Big\{ X = (X_t),\ t \in [0,T]\colon\ (X_t)\ \mathscr{F}_t \text{ adaptált,} \\ & \qquad \text{és } \int_0^T X_t(\omega)^2\,dt < \infty \text{ 1 valószínűséggel} \Big\}\end{aligned}$$

halmazokat. Elmagyarázza, hogyan lehet definiálni az $I_t(X) = \int_0^t X_u dW_u$ Itô integrált (egyszerre minden $t \in [0,T]$ paraméterre) az $X \in \mathscr{H}$ sztochasztikus folyamatokra, és bebizonyítja ezen integrál legfontosabb tulajdonságait. Azután azt állítja, hogy az $I_t(X) = \int_0^t X_u dW_u$ Itô integrált hasonló módon lehet definiálni minden $X \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatra, és az $X \in \mathscr{H}$ esetben bebizonyított eredmények továbbra is érvényben maradnak.

A helyzet azonban ennél bonyolultabb. Az $X \in \mathscr{H}'$ esetben az Itô integrált másképp kell definiálni, és csak hasonló, de nem megegyező eredmények érvényesek, mint az $X \in \mathscr{H}$ esetben. Ahhoz hogy a különbségeket megértsük át kell tekintenünk az Itô integrál definicióját és a definició megadásához szükséges eredményeket mind a két esetben.

Definálhatjuk a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált megfelelő tulajdonságú adaptált sztochasztikus folyamatok Itô integrálját is, de ezek definicióját egyszerű módon visszavezethetjük a véges intervallumon definiált sztochasztikus folyamatok integráljának a definiciójára. Ezért elsősorben ezzel az utóbbi integrállal foglalkozom, és ennek segítségével elmagyarázom a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált sztochasztikus folyamatok Itô integráljának a definicióját.

Azt mondjuk, hogy egy a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált $X(t)$ adaptált sztochasztikus folyamat eleme a $\mathscr{H}$ halmaznak, ha minden $T > 0$ számra $E\int_0^T X_t^2(\omega)\,dt < \infty$, és akkor eleme a $\mathscr{H}'$ halmaznak, ha minden $T > 0$ számra $\int_0^T X_t^2(\omega) < \infty$ 1 valószínűséggel minden $T > 0$ számra. Ez azt jelenti, hogy egy X_t, $0 \le t < \infty$, adaptált sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor eleme a $\mathscr{H}$ halmaznak, ha ez igaz az X_t, $0 \le t < \infty$, sztochasztikus folyamat megszorítására tetszőleges $[0,T]$ intervallumra, és hasonlóan akkor és csak akkor eleme a $\mathscr{H}'$ halmaznak, ha ez igaz az X_t, $0 \le t < \infty$, sztochasztikus folyamat megszorítására tetszőleges $[0,T]$ intervallumra. Ennek alapján tudjuk definiálni a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált $\mathscr{H}$ vagy $\mathscr{H}'$-beli X_t, $0 \le t < \infty$, sztochasztikus folyamatok Itô integrálját tetszőleges $[0,T]$ intervallumban. Mivel az így definiált Itô integrálok definiciója konzisztens különböző intervallumokon, ezek kiterjesztésével definiálni tudjuk az Itô integrált a teljes $[0,\infty)$ félegyenesen is.

Mind az $X \in \mathscr{H}$ mind az $X \in \mathscr{H}'$ esetben az Itô integrált először úgynevezett egyszerű folyamatokra definiáljuk, és bebizonyítjuk az elemi folyamatok integráljainak néhány olyan tulajdonságát, amelyek lehetővé teszik a definició kiterjesztését az általános esetre.

Azt mondjuk, hogy egy X_t, $0 \le t \le T$, sztochasztikus folyamat egyszerű folyamat, ha léteznek olyan $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = T$ időpontok, amelyekre az X_t folyamat egy konstans ξ_i valószínűségi változóval egyenlő a $t \in [t_i, t_{i+1})$ intervallumban, és ξ_i $\mathscr{F}_{t_i}$ mérhető. Az elemi folyamatok Itô integrálját a következő természetes módon definiáljuk: Legyen $t_k \le t \le t_{k+1}$ valamely $0 \le k \le n-1$ számmal. Ekkor

$$I_t(X) = \int_0^t X_u dW_u = \sum_{i=0}^{k} \xi_i (W_{t_{i+1}} - W_{t_i}) + \xi_k (W_t - W_{t_k}).$$

A Kevei jegyzet 4. tételében megfogalmazott eredmény a következőt állítja.

Tétel. *Legyenek X és Y olyan egyszerű folyamatok, amelyeknek az értékei minden időpontban véges második momentummal rendelkező valószínűségi változók. Ekkor*
(i) $(I_t(X), \mathscr{F}_t)$, $0 \le t \le T$, *folytonos martingál, amelyre* $I_0(X) \equiv 0$.
(ii) Tetszőleges $t > s$ *számpárra*

$$E\left[\left(\int_s^t X_u\, dW_u\right)^2 \middle| \mathscr{F}_s\right] = E\left[\int_s^t X_u^2\, du \middle| \mathscr{F}_s\right].$$

Speciálisan $s = 0$ *választással* $EI_t(X)^2 = E\int_0^t X_u^2\, du$.
(iii) Az integrál lineáris, azaz

$$I(\alpha X + \beta Y) = \alpha I(X) + \beta I(Y), \quad \alpha, \beta \in R$$

(iv) $E\left[\sup_{0 \le t \le T} \left(\int_0^t X_u\, dW_u\right)^2\right] \le 4E\int_0^T X_u^2\, du.$

Megjegyzem, hogy a Tétel (ii) állítása helyettesíthető azzal az állítással, hogy $\left(\left(\int_0^t X_u\, dW_u\right)^2 - \int_0^t X_u^2\, du, \mathscr{F}_t\right)$, $0 \le t \le T$, martingál.

A Kevei jegyzet 3. lemmája egy másik fontos eredmény, amit felhasználnak $X = (X_t) \in \mathscr{H}$ sztochasztikus folyamatok Itô integráljának a definiciójában. Ez a következőt mondja.

Lemma. *Tetszőleges a* $[0, T]$ *intervallumban definiált* $X = (X_t) \in \mathscr{H}$ *sztochasztikus folyamathoz létezik* $X^n = (X_t^n)$ *egyszerű folyamatok olyan sorozata, amelyre*

$$\lim_{n\to\infty} E\int_0^T (X_u - X_u^n)^2\, du = 0.$$

A Lemma és a Tétel, pontosabban a Tétel (iv) pontja lehetővé teszi, hogy minden $X \in \mathscr{H}$ sztochasztikus folyamathoz $X^n = (X_t^n)$ egyszerű folyamatok olyan sorozatát konstruáljuk amelyre létezik egy olyan $I(X) = I_t(X)$, $0 \le t \le T$, sztochasztikus folyamat, amelyre

$$I_t(X^n) \to I_t(X) \text{ a } t \in [0,T] \text{ intervallumban egyenletesen 1 valószínűséggel.}$$

Ez az $I(X)$ sztochasztikus folyamat egyértelműen meg van határozva, (azaz értéke nem függ attól, hogy melyik a feltételeknek eleget tevő $I_t(X^n)$ sorozat határértékeként definiáljuk), és az $X \in \mathscr{H}$ sztochasztikus folyamat Itô integrálját az $\int_0^t X_u\,dW_u = I_t(X)$, $0 \le t \le T$, képlet segítségével definiáljuk. Be lehet látni azt is, hogy a Tételben megfogalmazott állítások nemcsak az egyszerű, hanem az $X \in \mathscr{H}$ sztochasztikus folyamatok Itô integráljaira is érvényesek.

A Kevei jegyzet azt állítja, hogy az Itô integrál definiciója az $X \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatokra is kiterjeszthető, és a Tételben megfogalmazott állítások továbbra is érvényben maradnak. Ez a kijelentés azonban pontosításra szorul. Ahhoz, hogy ezt a pontosítást megtegyük először meg kell értenünk hogyan tudjuk kiterjeszteni az Itô integrál definicióját az $X \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatokra.

Az egyszerű jelölés érdekében $X \in \mathscr{H}'$ alakú sztochasztikus folyamatok Itô integrálját olyan esetben definiáljuk, amikor $[0,T] = [0,1]$. Ezenkívül az approximációban felhasznált egyszerű folyamatokról feltesszük, hogy azok az $[\frac{k}{2^n}, \frac{k+1}{2^n})$ alakú intervallumokon (valamilyen egész n számmal) egyenlőek egy ξ_k valószínűségi változóval. Az Itô integrál definiciójának a kiterjesztése mind az $X \in \mathscr{H}$ mind az $X \in \mathscr{H}'$ alakú sztochasztikus folyamatok integráljára azon alapult, hogy amennyiben az $\int_0^T (e_u - e'_u)^2 du$ integrál kicsi két e és e' egyszerű folyamatra, akkor a $\sup_{0 \le t \le T} \int_0^t (e_u - e'_u)\,dW_u$ kifejezés is kicsi. Az $X \in \mathscr{H}$ sztochasztikus folyamatok esetében a Tétel (iv) állítása tartalmazta ezt az $I(X)$ Itô integrál definiciójában felhasznált eredményt. Az $X \in \mathscr{H}'$ sztochaszikus folyamatok integráljának definiciójában más eredményre van szükségünk, mert ebben az esetben olyan valószínűségi változókkal kell dolgoznunk, amelyeknek nem feltétlenül van véges második momentumuk. Az alábbiakban ismertetem, hogy McKean hogyan oldotta meg ezt a problémát Stochastic Integrals című könyvében. A tárgyalásban a McKean könyv jelölését követem. Így például a vizsgált sztochasztikus folyamatokat $X = X_t$ helyett $e = e(u)$-val fogom jelölni.

McKean bebizonyítja a következő egyenlőtlenséget. Legyen $e = e(u)$, $0 \le u \le 1$, egyszerű folyamat, és legyen adva két $\alpha > 0$ és $\beta > 0$ pozitív szám. Ekkor

$$P\left(\max_{0 \le t \le 1}\left(\int_0^t e(u)\,dW_u - \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^2(u)\,du\right) > \beta\right) \le e^{-\alpha\beta}. \tag{1}$$

A bizonyítás a klasszikus martingál egyenlőtlenségeken alapul. Ismeretes, hogy $\exp\left\{aW_t - \frac{a^2}{2}t\right\}$, ahol a tetszőleges valós szám, és W_t, $t \geq 0$, Wiener folyamat, martingál. Be lehet látni ezen állítás következő élesítését is. Ha $e = e(u)$, $0 \leq u \leq 1$, egyszerű folyamat, akkor $z(t) = \exp\left\{\int_0^t e(u)\,dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t e^2(u)\,du\right\}$, $0 \leq t \leq 1$ (folytonos trajektóriájú) martingál. (Megjegyzem, hogy a most definiált $z(t)$ sztochasztikus folyamat minden $e \in \mathscr{H}'$ választással létezik, de az nem mindig martingál. Bizonyos vizsgálatokben fontos tudni, hogy ez a $z(t)$ folyamat mikor martingál. Ezért egy kiegészítésben ismertetek egy eredményt, amely megmutatja, hogy ez a folyamat martingálbizonyos feltételek teljesülése esetén.)

Felhasználva ezt a martingál tulajdonságot az $\alpha e(u)$, $0 \leq u \leq 1$, egyszerű folyamatra, azaz azt, hogy $z(t) = \exp\left\{\alpha\int_0^t e(u)\,dW_u - \frac{\alpha^2}{2}\int_0^t e^2(u)\,du\right\}$, $0 \leq t \leq 1$, folytonos martingál, és a Doob egyenlőtlenséget martingálokra azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P\left[\max_{0\leq t\leq 1}\left(\int_0^t e(u)\,dW_u - \frac{\alpha}{2}\int_0^t e^2(u)\,du\right) > \beta\right] &= P\left(\max_{0\leq t\leq 1} z(t) > e^{\alpha\beta}\right) \\ &\leq \frac{Ez(1)}{e^{\alpha\beta}} = e^{-\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Ezzel bebizonyítottuk az (1) egyenlőtlenséget.

A következő lépésben bebizonyítunk ezen egyenlőtlenség segítségével egy olyan relációt, amely felhasználva egy később megfogalmazandó állítást arról, hogy az $e \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatok jól approximálhatóak egyszerű folyamatokkal lehetővé teszi az $e \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatok Itô integráljának a definicióját. Ebben a tárgyalásban alkalmazni fogjuk a következő McKean által használt jelölést. Ha adva van A_n, $n = 1, 2, \dots$, események egy sorozata egy $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mezőn, akkor $P(A_n,\ n \uparrow \infty) = 1$ azt jelenti, hogy majdem minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre az $\omega \in A_n$ esemény teljesül véges sok n index kivételével.

Legyen adva e_n egyszerű folyamatok olyan sorozata, amelyre

$$P\left(\int_0^1 e_n(u)^2\,du \leq 2^{-n},\ n \uparrow \infty\right) = 1, \tag{2}$$

és egy $\vartheta > 1$ szám. Ekkor

$$P\left(\max_{0\leq t\leq 1}\left|\int_0^t e_n(u)\,dW_u\right| < \vartheta(2^{-n+1}\log n)^{1/2},\ n \uparrow \infty\right) = 1. \tag{3}$$

Valóban, az (1) egyenlőtlenség $\alpha_n = (2^{n+1}\log n)^{1/2}$ és $\beta_n = \vartheta(2^{-n-1}\log n)^{1/2}$

választással azt adja, hogy

$$P\left(\max_{0\le t\le 1}\int_0^t e_n(u)\,dW_u > \frac{\alpha_n}{2}\int_0^1 e_n^2(u)\,du+\beta_n\right)$$
$$\le P\left(\max_{0\le t\le 1}\left(\int_0^t e_n(u)\,dW_u-\frac{\alpha_n}{2}\int_0^t e_n^2(u)\,du\right)>\beta_n\right)\le e^{-\alpha_n\beta_n}=n^{-\vartheta}.$$

Ezért a Borel–Cantelli lemma és a (2) reláció azt adja, hogy

$$P\Bigg(\max_{0\le t\le 1}\int_0^t e_n(u)\,dW_u \le \frac{\alpha_n}{2}\int_0^1 e_n^2(u)\,du+\beta_n \le \frac{1+\vartheta}{2}(2^{-n+1}\log n)^{1/2},\; n\uparrow\infty\Bigg)=1.$$

Ezt a relációt a $-e_n$ folyamatokra is alkalmazva megkapjuk a (3) formulát.

Szükségünk van még a következő eredményre is, amely a Lemma állításának a megfelelője akkor, ha $\mathscr{H}'$-beli és nem $\mathscr{H}$-beli sztochasztikus folyamatokat akarunk jól approximálni egyszerű folyamatokkal.

Minden $e\in\mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamathoz létezik e_n, $n=1,2,\dots$, egyszerű folyamatoknak olyan sorozata, amelyre

$$P\left(\int_0^1 (e(u)-e_n(u))^2 du \le 2^{-(n+2)},\; n\uparrow\infty\right)=1. \tag{4}$$

A McKean könyv a következő módon definiál a kívánt tulajdonsággal rendelkező egyszerű folyamatokat. Először terjesszük ki az $e\in\mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamat definicióját a negatív $u<0$ időpontokra az $e(u)\equiv 0$, ha $u<0$ definicióval. Ezután válasszunk két m és l pozitív egész számot, és definiáljuk a segítségükkel az $e'=e'_l(t)=2^l\int_{t-2^{-l}}^t e(u)\,du$ és $e''=e''_{m,l}(t)=e'_m(2^{-m}[2^m t])$ sztochasztikus folyamatokat, ahol $[\cdot]$ egész részt jelöl. Ekkor $e',e''\in\mathscr{H}'$, és e'' egyszerű folyamat. Tetszőleges n egész számra választhatunk úgy l és m számokat, hogy az általuk definiált e'' sztochasztikus folyamat teljesíti a

$$P\left(\int_0^1 (e(u)-e''(u))^2\,du > 2^{-(n+2)}\right)\le 2^{-n}$$

relációt. Ha ilyen $e''=e''_n$ egyszerű folyamatot választunk minden $n=1,2,\dots$ számra, akkor ezek a Borel–Cantelli lemma alapján teljesítik a (4) relációt.

Ezután nem nehéz definiálni az $I_t(e)=\int_0^t e(u)\,dW_u$, $0\le t\le 1$, Itô integrált $e\in\mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatokra. Ilyen sztochasztikus folyamatokra lehet olyan

e_n egyszerű folyamatokat választani, amelyekre teljesül a (4) reláció. Ekkor az $e_n - e_{n+1}$ folyamatokra teljesül a (2) és (3) reláció. Ezért

$$P\left(\max_{0\le t\le 1}\left|\int_0^t (e_n(u)-e_{n+1}(u))\,dW_u\right| < \vartheta(2^{-n+1}\log n)^{1/2},\ n\uparrow\infty\right)=1,$$

és létezik olyan $I(e) = I_t(e)$, $0 \le t \le 1$, folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat, amelyre $\lim_{n\to\infty}\int_0^t e_n(u)\,dW_u = I_t(e)$, és ez a konvergencia 1 valószínűséggel egyenletes a $t \in [0,1]$ intervallumban. Így, ha $e \in \mathscr{H}'$, akkor az

$$I_t(e) = \lim_{n\to\infty}\int_0^t e_n(u)\,dW_u, \quad 0 \le t \le 1,$$

definiciót alkalmazzuk az Itô integrál definiciójában. Nem nehéz belátni, hogy az így definiált Itô integrál értéke nem függ a (4) relációt teljesítő e_n egyszerű folyamatok választásától.

Ilyen módon definiáltuk minden $e \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamat integrálját, ha $\mathscr{H}'$ a $[0,1]$ intervallumon definiált sztochasztikus folyamatokat tartalmaz. A konstrukcióból az is következik, hogy az Itô integrál trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak. Hasonlóan, definiálhatjuk az $e \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatok Itô integrálját akkor is, ha $\mathscr{H}'$ a $[0,T]$ intervallumon van definiálva valamilyen $T > 0$ paraméterrel. Megtárgyaltuk azt is, hogy hogyan tudjuk ennek alapján definiálni a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált $e \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatok Itô integráját.

Megjegyzem, hogy akkor, ha a $[0,\infty)$ intervallumon definiált $e(u)$ adaptált folyamat az erősebb $\int_0^\infty e(u)^2\,du < \infty$ 1 valószínűséggel feltételt is teljesíti, akkor az $I_t(e) = \int_0^t e(u)\,dW_u$, $0 \le t < \infty$, Itô integrál kiterjeszthető folytonosan a $t = \infty$ paraméterre is, azaz úgy, hogy teljesül az $\int_0^\infty e(u)\,dW_u = \lim_{t\to\infty}\int_0^t e(u)\,dW_u$ azonosság. Az $I_t(e)$, $0 \le t \le \infty$, integrál konstrukciója és a megfogalmazott folytonosság bizonyítása hasonló módon történhet, mint a $t \in [0,1]$ esetben, csak ebben az esetben azt kell kihasználni, hogy ekkor lehetséges olyan e_n egyszerű folyamatokat választani, amelyek egy véges intervallumon kívül eltünnek, és teljesítik a (4) relációnak azt a változatát, amelyben az $\int_0^\infty (e(u)-e_n(u))^2\,du$ integrálokat tekintjük. Ezenkívül a (3) reláció olyan változatát tekintjük, ahol a szuprémumot minden $t \ge 0$ paraméterre vesszük.

A Tétel állításai akkor is érvényesek, ha bennük egyszerű folyamatok helyett $X \in \mathscr{H}$ és $Y \in \mathscr{H}$ sztochasztikus folyamatok szerepelnek. Tekintsük át, hogy a Tétel mely állításai maradnak érvényben, és melyek módosulnak, ha $e \in \mathscr{H}$ sztochasztikus folyamatok helyett $e \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatok Itô integráljait tekintjük.

Az (i) pontban azt állítottuk, hogy az $I_t(e)$ Itô integrál, $0 \le t \le T$, folytonos martingál, amelyre $I_0(e) \equiv 0$. Az $e \in \mathscr{H}'$ esetben az $I_t(e)$ Itô integrál továbbra is folytonos trajektóriájú adaptált folyamat, de nem feltétlenül martingál. Definiálni fogjuk a martingál fogalom egy gyengített változatát, az úgynevezett lokális martingál fogalmát, és megmutatjuk, hogy az $I_t(e)$ Itô integrál az $e \in \mathscr{H}'$ esetben lokális martingál.

A (ii) tulajdonság helyett tekintsük azt a vele ekvivalens állítást, hogy az

$$\left(\int_0^t e(u)\,dW_u\right)^2 - \int_0^t e^2(u)\,du, \quad 0 \le t \le T,$$

sztochasztikus folyamat martingál. Ez az állítás nem feltételenül igaz, ha $e \in \mathscr{H}'$, de ez a sztochasztikus folyamat ebben az esetben is lokális martingál.

A (iii) tulajdonság, amely azt állítja, hogy az $I(\alpha e + \beta e')$ Itô integrál az α és β paraméterek lineáris transzformációja, $e \in \mathscr{H}'$ és $e' \in \mathscr{H}'$ esetén is érvényes.

A (iv) tulajdonság semmitmondó, ha $e \in \mathscr{H}' \setminus \mathscr{H}$, mert ekkor az e tulajdonságot megfogalmazó becslés jobboldalán végtelen van. Viszont a (1) reláció igaz nemcsak egyszerű, hanem $e \in \mathscr{H}'$ folyamatokra is, és a (iv) tulajdonság helyett használhatjuk ezt a becslést. (E formulában $\max\limits_{0 \le t \le 1}$ helyett $\max\limits_{0 \le t \le T}$-t írunk).

McKean az Itô integrál következő fontos tulajddonságát is megfogalmazta. Legyen τ olyan megállási idő, amelyre $P(\tau < \infty) = 1$, és legyen $f = f(u, \omega)$ az a sztochasztikus folyamat, amelyre rögzített u időpontra az $f(u, \omega)$ valószínűségi változó a τ megállási idő által definiált $\{\omega\colon\ \tau(\omega) \le u\}$ halmaz indikátor függvénye. Ekkor minden $e \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamatra f $\mathscr{F}_t$ adaptált sztochasztikus folyamat, és

$$\int_0^\tau e(u)\,dW_u = \int_0^\infty e(u) f(u)\,dW_u.$$

Valóban, ez az állítás könnyen ellenőrizhető, ha e egy korlátos intervallumra koncentrált egyszerű folyamat. Az állítást könnyen lehet redukálni arra az esetre, amikor $P(\tau \le T) = 1$ valamely $T < \infty$ számra. Ebben az esetben viszont léteznek olyan e_n egyszerű folyamatok, amelyekre $P\left(\int_0^T (e_n - e)^2\,du \le 2^{-(n+2)},\ n \uparrow \infty\right) = 1$, és $P\left(\int_0^\infty (e_n - e)^2 f(u)^2\,du \le 2^{-(n+2)}\ n \uparrow \infty\right) = 1$, és ekkor a kívánt állítás könnyen bizonyítható a (2) és (3) relációk segítségével, ha azokban az integrált és maximumot a $[0, T]$ intervallumban vesszük.

Megfogalmazom a lokális martingál definicióját.

A lokális martingál definiciója. *Legyen adva egy $\mathscr{F}_t$, $0 \le t \le T$ vagy $0 \le t < \infty$, filtráció egy $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen X_t, $0 \le t \le T$ vagy $0 \le t < \infty$, adaptált sztochasztikus folyamat erre a filtrációra. Azt mondjuk, hogy ez az X_t adaptált sztochasztikus folyamat lokális martingál, ha létezik megállási időknek olyan $0 \le \tau_1 \le \tau_2 \le \cdots$ egy valószínűséggel növekvő sorozata, amelyre, ha a filtráció és az adaptált sztochasztikus folyamat a $[0,T]$ intervallumban van definiálva, akkor $P(\lim_{n\to\infty} \tau_n = T) = 1$, ha a filtráció és az adaptált sztochasztikus folyamat a $[0,\infty)$ félegyenesen van definiálva akkor $P(\lim_{n\to\infty} \tau_n = \infty) = 1$, és minden $n = 1,2,\dots$ paraméterre az $X_t^{(n)} = X_{\min(t,\tau_n)}$ sztochasztikus folyamatra $(X_t^{(n)}, \mathscr{F}_t)$ martingál a $t \in [0,T]$ intervallumban vagy a $t \in [0,\infty)$ félegyenesen.*

Legyen $e \in \mathscr{H}'$. Ekkor az $I_t(e) = \int_0^t e(u)\,dW_u$ Itô integrál és a

$$J_t(e) = \left(\int_0^t e(u)\,dW_u\right)^2 - \int_0^t e^2(u)\,du,$$

sztochasztikus folyamat lokális martingál. (Ez a $[0,T]$ intervallumban érvényes, ha e a $[0,T]$ intervallumban van definiálva, és a $[0,\infty)$ félegyenesen, ha e ott van definiálva.)

Valóban, definiáljuk a következő valószínűségi változókat minden $n = 1,2,\dots$ számára. Legyen $\tau_n^* = \min(t\colon\ \int_0^t e^2(u)\,du = n)$, ha van ilyen t időpont, és $\tau_n^* = \infty$, ha ilyen t időpont nem létezik. Legyen $\tau_n = \min(\tau_n^*, T)$, ha az e sztochasztikus-folyamat a $[0,T]$ intervallumon, és $\tau_n = \min(\tau_n^*, n)$ ha az $e(t)$ sztochasztikus folyamat a $[0,\infty)$ félegyenesen van definiálva. Ekkor a τ_n, $n = 1,2,\dots$, valószínűségi változók, a lokális martingál definiciójában szereplő feltételeket teljesítő megállási idők. Legyen $f_n(u)$, az $\{\omega\colon\ \tau_n(\omega) \le u\}$ halmaz indikátor függvénye minden $u \ge 0$ számra. Ekkor $ef_n \in \mathscr{H}$, és az

$$I_t^{(n)}(e) = \int_0^{\min(t,\tau_n)} e(u)\,dW_u = \int_0^t e(u) f_n(u)\,dW_u$$

sztochasztikus folyamat lokális martingál. Hasonlóan, a

$$J_t^{(n)}(e) = \left(\int_0^{\min(t,\tau_n)} e(u)\,dW_u\right)^2 - \int_0^{\min(t,\tau_n)} e^2(u)\,du$$

sztochasztikus folyamat szintén lokális martingál.

A McKean könyv az Itô integráloknak számos egyéb tulajdonságát tárgyalja. Ezek közül egyet ismertetek, mert ez megmutatja az Itô integrálok egyik fontos tulajdonságát. Az eredmény bizonyítását nem ismertetem, megelégszem annak egy heurisztikus magyarázatával.

Legyen adva egy $e \in \mathscr{H}'$ sztochasztikus folyamat. Tekintsük az $X(t) = \int_0^t e(u)\,dW_u$ Itô integrált, ($t \geq 0$), valamint a $\tau(t) = \int_0^t e^2(u)\,du$ sztochasztikus folyamatot, és annak $\tau^{-1}(t) = \min(s\colon\ \tau(s) = t)$ baloldali inverzét a $t < \tau(\infty)$ időpontokra, (azaz a $\tau^{-1}(t)$ megállási időpont, $t \geq 0$, nincs feltétlenül minden $\omega \in \Omega$ pontban definiálva). Az ismertetendő eredmény azt mondja, hogy az $a(t) = X(\tau^{-1}(t))$ sztochasztikus folyamat Wiener folyamat a $t < \tau(\infty)$ időpontokra megszorítva, azaz létezik egy olyan $Z(t)$, $t \geq 0$, Wiener folyamat, amelyre $a(t) = X(\tau^{-1}(t)) = Z(t)$, ha $t < \tau(\infty)$. Ezt a tényt szokás úgy interpretálni, hogy az $X(t)$ Itô integrál megegyezik egy új Wiener folyamattal $\tau(t)$ belső idővel (órával) az $X(t)$ folyamatra.

Ezen eredménynek megadom egy heurisztikus magyarázatát Paul Lévynek a Wiener folyamatokra adott következő jellemzésének a segítségével. Egy $X(t)$, $X(0) \equiv 0$, sztochasztikus folyamat Wiener folyamat, ha $X(t)$ és $X^2(t) - t$ martingál, és az $X(t)$ sztochasztikus folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel folytonos függvények.

Az $a(t) = X(\tau^{-1}(t))$ sztochasztikus folyamat trajektóriái folytonos függvények, mert, ha $t - s$ kicsi , akkor $\tau^{-1}(t) - \tau^{-1}(s) = \int_s^t e^2(u)\,du$, és

$$a(t) - a(s) = X(\tau^{-1}(t) - X(\tau^{-1}(s)) = \int_s^t e(u)\,dW_u$$

is kicsi nagy valószínűséggel.

Továbbá $a(t) = \int_0^{\tau^{-1}(t)} e(u)\,dW_u$ és

$$a(t)^2 - t = \left(\int_0^{\tau^{-1}(t)} e(u)\,dW_u\right)^2 - \int_0^{\tau^{-1}(t)} e^2(u)\,du$$

martingál. Be lehet ugyanis látni, hogy a $e \in \mathscr{H}$ sztochasztikus folyamatok Itô integráljaira érvényes martingál tulajdonságok ilyen megállási szabályok esetén is érvényesek.

1 Kiegészítés

Legyen adva egy $W(t)$, $0 \le t < \infty$, Wiener folyamat, egy $\mathscr{F}_t$, $0 \le t < \infty$, filtráció egy $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ valószínűségi mezőn és egy $K = K(t,\omega)$, $0 \le t < \infty$, $\omega \in \Omega$, az $\mathscr{F}_t$ filtrációra adaptált sztochasztikus folyamat, amelyre az $[M](t) = \int_0^t K^2(u,\omega)\,du$, $t > 0$, (véletlen) integrál teljesíti a $P([M](t) < \infty) = 1$ relációt minden $t > 0$ számra. Definiáljuk az $M(t) = \int_0^t K(u)\,dW_u$, Itô integrált és az

$$\mathscr{E}(M)(t) = \exp\left\{M(t) - \frac{1}{2}[M](t)\right\} = \exp\left\{\int_0^t K(u)\,dW_u - \frac{1}{2}\int_0^t K^2(u)\,du\right\}, \quad t \ge 0,$$

úgynevezett Doléans–exponenciális függvényt. Arra vagyunk kiváncsiak, hogy ez a Doléans–exponenciális függvény mikor martingál.

Megjegyzem, hogy minden egyszerű folyamat Doléans–exponenciális függvénye martingál, és $\mathscr{E}(M)$ mindig folytonos trajektóriájú, pozitív értékű szupermartingál. Ezt nem nehéz látni annak a ténynek az alapján, hogy minden Doléans–exponenciális függvény előállítható, mint pozitív martingálok, (mint egyszerű folyamatok Doléans–exponenciális függgvényének) a limesze, és a konvergencia minden véges $[0,t]$ intervallumban 1 valószínűséggel egyenletes. Továbbá, $\mathscr{E}(M)$ lokális martingál, mert az Itô formula segítségével $\mathscr{E}(M)$ felírható, mint $\mathscr{E}(M)(t) = 1 + \int_0^t K(u)\mathscr{E}(M)(u)\,dW_u$, tehát mint egy Wiener folyamat szerinti Itô integrál plusz egy konstans.

Azért foglalkoznak sokat azzal a kérdéssel, hogy egy Doléans–exponenciális függvény mikor martingál, mert ez olyan fontos eredményeknek szerepel a feltételei között, mint a Girsanov formula. Másrészt egy Doléans–exponenciális függvény mindig "majdnem martingál", és az érdekel minket, hogy mi kell ahhoz, hogy az ne csak majdnem, hanem valódi martingál legyen. Alekszandr Novikov bizonyította a következő hasznos eredményt.

Novikov tétele. *Ha az*

$$E\left(\exp\left\{\frac{1}{2}[M](t)\right\}\right) = E\left(\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^t K^2(u)\,du\right\}\right) < \infty \quad \text{minden } t \ge 0 \text{ számra} \tag{5}$$

feltétel teljesül, akkor $\mathscr{E}(M)$ martingál.

Ezt a tételt két lemma segítségével bizonyítjuk be. Először bebizonyítjuk az (5) reláció egy hasznos következményét.

1. Lemma. *Rögzítsünk egy $c < \infty$ számot, és jelölje T_c a c számnál kisebb megállási idők halmazát, azaz legyen*

$$T_c = \{\tau\colon\ \tau \text{ megállási idő, és } P(\tau \le c) = 1\}. \tag{6}$$

Ha teljesül a (5) reláció, akkor a

$$\sup_{\tau\in T_c} E\left(\exp\left\{\frac{1}{2}M(\tau)\right\}\right) = \sup_{\tau\in T_c} E\left(\exp\left\{\frac{1}{2}\int_0^\tau K(u)\,dW_u\right\}\right) < \infty$$

egyenlőtlenség is teljesül minden $c > 0$ számra.

Az 1. Lemma bizonyítása. Legyen $\tau \in T_c$ megállási idő. Ekkor

$$\begin{aligned}\exp\left\{\frac{1}{2}M(\tau)\right\} &= \exp\left\{\frac{1}{2}M(\tau)-\frac{1}{4}[M](\tau)\right\}\exp\left\{\frac{1}{4}[M](\tau)\right\}\\ &\le \exp\left\{\frac{1}{2}M(\tau)-\frac{1}{4}[M](\tau)\right\}\exp\left\{\frac{1}{4}[M](c)\right\},\end{aligned}$$

mert $[M](\tau) \le [M](c)$, ha $\tau \in T_c$. Továbbá

$$E\mathscr{E}(M)(\tau) \le E\mathscr{E}(M)(0) = 1,$$

mert $\mathscr{E}(M)$ pozitív, folytonos trajektóriájú szupermartingál.

Ezért, az előző egyenlőtlenségben várható értéket véve, majd alkalmazva a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenséget azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}E\exp\left\{\frac{1}{2}M(\tau)\right\} &\le (E\exp\{\mathscr{E}(M)(\tau)\})^{1/2}\left(E\exp\left\{\frac{1}{2}[M](c)\right\}\right)^{1/2}\\ &\le \left(E\exp\left\{\frac{1}{2}[M](c)\right\}\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Viszont $E\exp\left\{\frac{1}{2}[M](c)\right\} < \infty$ az (5) reláció teljesülése miatt. Innen következik az 1. Lemma állítása.

Az 1. lemma azért volt hasznos, mert lehetővé teszi a következő 2. lemma alkalmazását.

2. Lemma. *Legyenek p és q olyan $1 \le p,q < \infty$ számok, amelyekre $\frac{1}{p}+\frac{1}{q} = 1$. Ha minden $c > 0$ számra*

$$\sup_{\tau\in T_c}\left(E\exp\left\{\frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)}M(\tau)\right\}\right) < \infty, \tag{7}$$

ahol T_c a (6) formulában van definiálva, akkor $\mathscr{E}(M)$ L_q martingál, azaz olyan martingál, amely elemeinek véges a q-ik momentuma.

Számunkra az 1. és 2. lemma alább megfogalmazott következménye lesz érdekes. Ezen eredmény megfogalmazása előtt az alábbi megjegyzést teszem.

Bevezetem a következő jelölést. Ha adva van egy valós a szám, akkor tekintsük az aM, $[aM]$ és $\mathscr{E}(aM)$ kifejezéseket is, amelyeket úgy definiálunk, hogy a definicióban a $K(u)$ magfüggvényt az $aK(u)$ magfüggvénnyel helyettesítjük. Tehát legyen $aM(t) = \int_0^t (aK(u))\,dW_u$, $[aM](t) = \int_0^t (aK(u))^2\,du$, $t \ge 0$, és $\mathscr{E}(aM) = \exp\{aM - \frac{1}{2}[aM]\}$.

Következmény. *Teljesüljön a (5) reláció, és legyen adva egy $0 < a < 1$ szám. Ekkor $\mathscr{E}(aM)$ q-martingál a $q = \frac{1}{2a-a^2}$ számmal.*

A 2. lemma bizonyítása. Tekintsünk egy $\tau \in T_c$ megállási időt, és definiáljuk az

$$u = \frac{\sqrt{p}+1}{\sqrt{p}-1} \text{ és } v = \frac{\sqrt{p}+1}{2}$$

számokat. Ekkor $u > 1$, $\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = 1$ és

$$\left(q - \sqrt{\frac{q}{u}}\right) v = \frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)}.$$

Mivel

$$\mathscr{E}(M)(\tau)^q = \exp\left\{\sqrt{\frac{q}{u}}M(\tau) - \frac{q}{2}[M](\tau)\right\} \exp\left\{\left(q - \sqrt{\frac{q}{u}}\right) M(\tau)\right\},$$

a Hölder egyelőtlenség azt adja, hogy

$$\begin{aligned} E\mathscr{E}(M)(\tau)^q &\le \left(E\exp\left\{\sqrt{qu}M(\tau) - \frac{qu}{2}[M](\tau)\right\}\right)^{1/u} \\ &\qquad \left(E\exp\left\{\left(q - \sqrt{\frac{q}{u}}\right) vM(\tau)\right\}\right)^{1/v} \\ &= (E\mathscr{E}(\sqrt{qu}M(\tau))^{1/u} \left(E\exp\left\{\left(\frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)}\right) M(\tau)\right\}\right)^{1/v}, \end{aligned}$$

ahol az $\mathscr{E}(\sqrt{qu}M)$ az $\mathscr{E}(\cdot)$ Doléans–exponens függvényt jelöli, ha abban az $\mathscr{E}(M)$ kifejezést definiáló $K(\cdot)$ magfüggvény helyett a $\sqrt{qu}K(\cdot)$ magfüggvényt választjuk.

Mivel $\mathscr{E}(\sqrt{qu}M)$ pozitív, folytonos trajektóriájú szupermartingál

$$E\mathscr{E}(\sqrt{qu}M)(\tau) \le E\mathscr{E}(\sqrt{qu}M)(0) = 1,$$

ahonnan az (7) feltétel teljesülése esetén az előző egyenlőtlenség alapján

$$\sup_{\tau \in T_c} E\mathscr{E}(M)(\tau)^q < \infty.$$

Mivel $q > 1$, innen következik hogy az $\{\mathscr{E}(M)(\tau) \colon \ \tau \in T_c\}$ valószínűségi változók halmaza egyenletesen integrálható. Ezért a martingálok általános elméletéből következik, hogy $\mathscr{E}(M)$ nemcsak lokális martingál, hanem martingál is. (Azt használjuk ki, hogy az egyenletes integrálhatóság lehetővé teszi, hogy a martingál tulajdonságot biztosító azonosságokat megkapjuk a lokális martingál tulajdonságokat biztosító azonosságokból alkalmas limeszeléssel.) A 2. lemmát beláttuk.

A következmény bizonyítása. Az 1. lemma eredményéből következik, hogy a 2. lemma feltétele teljesül a Novikov tétel feltételei mellett, ha azt az $\mathscr{E}(M)$ Doléans–integrál függvény helyett az $\mathscr{E}(aM)$ Doléans–integrál függvényre alkalmazzuk, $0 < a < 1$, és olyan p paramétert választunk, amelyre $\frac{1}{2a} = \frac{\sqrt{p}}{2(\sqrt{p}-1)}$. Ezért a következmény állítása érvényes $q = \frac{p}{p-1} = \frac{1}{2a-a^2}$ választással.

A Novikov tétel bizonyítása. Elég azt belátni, hogy $\mathscr{E}(M)(t) \ge 1$, minden $t > 0$ számra, mert $\mathscr{E}(M)$ szupermartingál, $\mathscr{E}(M)(0) = 1$, és $\mathscr{E}(M)$ akkor és csak akkor martingál, ha $\mathscr{E}(M)(t) = 1$ minden $t > 0$ számra. De ennek igazolásához elég bebizonyítani az előbb megfogalmazott egyenlőtlenséget.

Ezen egyenlőtlenség bizonyításában fel fogjuk használni, hogy a tétel feltételének teljesülése esetén $E\mathscr{E}(aM)(t) = 1$ minden $0 < a < 1$ és $t > 0$ számra. Felírhatjuk, hogy

$$\mathscr{E}(aM)(t) = (\mathscr{E}(M)(t))^{a^2} \exp\{a(1-a)M(t)\}.$$

Ebben az azonosságban várható értéket véve, majd a Hölder egyenlőtlenséget alkalmazva $p = \frac{1}{1-a^2}$ és $q = \frac{1}{a^2}$ választással azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
1 = E\mathscr{E}(aM)(t) &\le \left(E\mathscr{E}(M)(t))^{a^2 q}\right)^{1/q} (E\exp\{a(1-a)pM(t)\})^{1/p} \\
&= (E\mathscr{E}(M)(t))^{a^2} \left(E\exp\left\{\frac{a}{1+a}M(t)\right\}\right)^{1-a^2} \\
&= (E\mathscr{E}(M)(t))^{a^2} \left(E\exp\left\{\frac{1}{2}M(t)\right\}^{2a/(1+a)}\right)^{1-a^2}.
\end{aligned}$$

A következő lépésben az előbbi egyenlőtlenség jobboldalán levő szorzat második tagját becsüljük meg az $E\exp\{\frac{1}{2}M(t)\}$ kifejezés segítségével. Ebben a becslésben kihasználjuk, hogy $u = \frac{2a}{1+a} < 1$, ezért a Hölder egyenlőtlenség a következő becslést adja.

$$\left(E\exp\left\{\frac{1}{2}M(t)\right\}^u\right)^{1/u} \le E\exp\left\{\frac{1}{2}M(t)\right\},$$

ezért

$$\left(E\exp\left\{\frac{1}{2}M(t)\right\}^u\right)^{1-a^2} \le \left(E\exp\left\{\frac{1}{2}M(t)\right\}\right)^{2a(1-a)}.$$

Innen az előző egyenlőtlenség alapján

$$1 \le (E\mathscr{E}(M)(t))^{a^2}\left(E\exp\left\{\frac{1}{2}M(t)\right\}\right)^{2a(1-a)}.$$

Vegyük az $a \to 1$ határértéket az utolsó egyenlőtlenségben. Ekkor a jobboldali szorzat második tagja 1-hez konvergál a (5) feltétel miatt, és azt kapjuk, hogy $1 \le E\mathscr{E}(M)(t)$. Viszont, mint a bizonyítás elején megjegyeztük, innen következik a Novikov tétel állítása.