Néhány megjegyzés a folytonos idejű Markov folyamatokról.

Teszek néhány kiegészítést a Kevei jegyzet tárgyalásához a folytonos idejű Markov folyamatokról. A fő kérdés az, hogy hogyan tudjuk jól megadni a folytonos idejű stacionárius Markov folyamatokat. Adva egy X_t, $t \ge 0$, stacionárius Markov folyamat szeretnénk meghatározni annak $P(t,x,B) = P(X_t \in B | X_0 = x)$ átmenetvalószínűségeit. (A Kevei jegyzet ezeket az átmenetvalószínűségeket $p_t(B|x)$-szel jelöli.)

Érdemes bevezetni a következő T_t, $t \ge 0$, operátorokat a Markov lánc $\mathscr{E}$ állapotterén definiált korlátos függgvények terén. Ha $f(x)$, $x \in \mathscr{E}$, korlátos függvény az $\mathscr{E}$ téren, akkor legyen

$$T_t f(x) = \int f(y) P(t,x,dy), \quad x \in \mathscr{E}.$$

(Ez úgy is interpretálható, hogy $T_t f(x) = E(f(X_t)|X_0 = x)$.)

Be lehet látni, hogy $T_t T_s = T_{t+s}$ minden $s,t \ge 0$ számpárra, $T_0 = I$ (I az identitás operátor) $T_t \to I$, ha $t \to 0$, $\|T_t\| \le 1$ minden $t > 0$ számra a szuprémumnormában. Ha $f(x) \ge 0$, akkor $T_t f(x) \ge 0$. (Az hogy $g(x) \ge 0$ valamely $g(x)$ függvényre azt jelenti, hogy $g(x) \ge 0$ minden $x \in \mathscr{E}$ pontban.) A $P(t,x.B)$ átmenetvalószínűségeket úgy próbáljuk megadni, hogy jó jellemzést adunk a T_t operátorokra. Ezt a Kolmogorov-féle backward egyenletekkel tesszük a Markov folyamat úgynevezett infinitezimális generátora segítségével.

Az S infinitezimális generátor definiciója a következő. Adva egy (szép tulajdonságú) $f = f(x)$ függvény az $\mathscr{E}$ állapottéren ennek (Sf) képe az S infinitezimális generátor hatására az

$$(Sf)(x) = \lim_{t \to 0} \frac{E(f(X(t))|X(0) = x) - f(x)}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{T_t f(x) - f(x)}{t}, \quad x \in \mathscr{E},$$

függvény.

Bevezetjük a T_t^*, $t \ge 0$, operátorokat is a $\mathscr{E}$ téren definiált mértékek terén. Ezek tulajdonképpen a T_t operátorok adjungáltjai.

$$(T_t^* \mu)(B) = \int P(t,x,B)\, \mu(dx) \quad \text{minden mérhető } B \subset \mathscr{E} \text{ halmazra.}$$

(Ha μ valószínűségi mérték, akkor $(T_t \mu)(B)$ annak feltételes valószínűsége, hogy $X_t(\omega) \in B$, feltéve, hogy $X_0(\omega)$ eloszlása μ. Ezekre a transzformációkra is igaz, hogy $T_t^* T_s^* = T_{t+s}^*$ minden $s,t \ge 0$ számpárra, $T_0^* = I$ $T_t^* \to I$, ha $t \to 0$, $\|T_t^*\| \le 1$ minden $t > 0$ számra a totális variáció normában. Ha $\mu \ge 0$ akkor $T_t \mu \ge 0$.

A T_t^* operátorok segítségével is meg lehet határozni a $P(t,x,B)$ átmenetvalószínűségeket, és ez történik a Kolmogorov-féle forward egyenletekben. Ezek tárgyalásához be kell vezetnünk az S^* operátort, amely valójában az S operátor adjungáltja. Ennek definiciója a következő.

(Ezt a transzformációt is csak a 'szép' (előjeles) μ mértékekre definiáljuk.)

$$\int (Sf(x))\,d\mu = \int f(x)(S^*\mu)(dx)$$

minden olyan f függvényre, amelyre Sf létezik. Az ilyen f függvények elég sokan vannak, ezért ezek az azonosságok meghatározzák az $S^*\mu$ mértéket.

Néhány megjegyzés a Kevei könyv számolásaihoz.

55. oldal -5. sor:

$$\varphi_{t+\tau}(x) = E_X \varphi_t(X_\tau),$$

mert $\varphi_t(X_\tau) = P(t, X_\tau, B)$, és X_τ P_x mérték szerinti eloszlása $P(\tau, x, dy)$, ezért

$$E_x\varphi_t(X_\tau) = \int P(t,y,B)P(\tau,x,dy) = P(t+\tau,x,B) = \varphi_{t+\tau}(x)$$

a Chapman–Kolmogorov azonosság alapján.

56. oldal 6. sor

Érdemesebb úgy írni, hogy

$$\begin{aligned}\int f(y)p_{t+\tau}(dy|x) &= E(f(X_{t+\tau})|X_0=x) = E(E(f(X_{t+\tau})|X_t)|X_0=x)\\ &= \int E(f(X_{t+\tau})|X_t=y)p_t(dy|x) = \int E_y f(X_\tau)p_t(dy|x).\end{aligned}$$

A Kevei jegyzet tartalmaz egy azonosságot a $\frac{\partial}{\partial t}p_t(B|x)$ kifejezésre a Kolmogorov-féle backward egyenlet alapján a (30) formulában és a Kolmogorov-féle forward egyenlet alapján a (32) formulában. Az első azonosságban az S a második azonosságban az S^* operátor szerepel. Mind a két azonosság bizonyos a jegyzetben nem ismertetett de általános feltételek mellett igaz.

Szép esetekben nemcsak a $p_t(B|x)$ feltételes eloszlások, hanem azok $p_t(y|x)$ feltételes sűrűségfüggvényei is léteznek, és a fenti egyenletekből a következő egyenletek következnek.

$$\frac{\partial}{\partial t}p_t(y|x) = Sp_t(y|\cdot)(x),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} p_t(y|x) = S^* p_t(\cdot|x)(y).$$

A második azonosság jobboldala úgy értendő, hogy hogy olyan eseteket nézünk, amikor az $S^*(p_t(B|x)$, $B \in \mathscr{B}$, mértéknek létezik $S^*(p_t(y|x)$ sűrűségfüggvénye minden x pontban, és ezt a sűrűségfüggvényt vesszük az y pontban. (Valójában olyan eseteket nézünk, amikor a $p_t(B|x)$, $B \in \mathscr{B}$ feltételes eloszlásnak is létezik $p_t(y|x)$ sűrűségfüggvénye minden x feltétel esetén.)

Az 58. oldal 3. kiemelt képletét jobb lett volna így írni:

$$\int (Sf)(y)\mu(dy) = \int \frac{f''(y)}{2} g(y)\,dy = \int f(y)\frac{g''(y)}{2}\,dy.$$

A diffúziós folyamatok bevezetésének az indoklásánál érdemes lett volna tekinteni az alábbi példát. Vegyünk egy $W(t)$ Wiener folyamatot, és definiáljuk az $Y(t) = Y_{\mu,\sigma}(t) = \sigma W(t) + \mu t$ sztochasztikus folyamatot, valamely μ és σ valós számokkal. Legyen $h > 0$ egy kis szám, és definiáljuk a $\Delta Y(t) = Y(t+h) - Y(t)$ különbséget. Ekkor

$$\begin{aligned}
E(\Delta Y(t)|Y(t) = y) &= E\Delta Y(t) = \mu h \\
E(\Delta^2 Y(t)|Y(t) = y) &= \operatorname{Var}\Delta Y(t) + (E\Delta Y(t))^2 = \sigma^2 h + (\mu h)^2 = \sigma^2 h + o(h).
\end{aligned}$$

A diffúziós folyamat definicióját a következőképp interpretálhatjuk. Olyan sztochasztikus folyamatokat vesznk, amelyek lokálisan úgy viselkednek, mint az előbbi $Y(t)$ sztochasztikus folyamat, csak a $E(\Delta Y(t)|Y(t) = y)$ feltételes várható értékben és $E(\Delta^2 Y(t)|Y(t) = y)$ feltételes második momentumban szereplő μ és σ paraméterek értékei az $Y(t) = y$ feltételtől függő $\mu(y)$ és $\sigma(y)$ számok.

A Kevei jegyzet tekint egy olyan sztochasztikus differenciálegyenlet által definiált sztochasztikus folyamatot, amely tekinthető példának diffúziós folyamatokra. Egy későbbi eredményben (a 8. tételben a 63. oldalon) belátja, hogy ennek a sztochasztikus differenciálegyenletnek van (erős) megoldása, ha a sztochasztikus differenciálegyenletben szereplő együtthatók teljesítenek bizonyos feltételeket. Szemléleesen várható, hogy az ilyen sztochasztikus differenciálegyenletek megoldásai diffúziós folyamatok. Ez be is van bizonyítva, bár a Kevei jegyzet nem tartalmazza a bizonyítást.

Megjegyzem, hogy a diffúziós folyamat végső definiciójában szereplő (i) feltétel, egy Lindeberg tipusú feltétel. Azt fejezi ki, hogy a $\Delta Y(t)$ különbség viszonylag nagy értékeinek a hatása elhanyagolható.

Néhány megjegyzés az Ornstein-Uhlenbeck folyamatokról.

A Kevei jegyzet megmutatja, hogy a $dY(t) = -\mu\, dt + \sigma\, dW(t)$, $\mu > 0$, $\sigma > 0$ sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása, amit Ornstein–Uhlenbeck folyamatnak neveznek, csak

$$Y(t) = e^{-\mu t}\left(Y(0) + \int_0^t e^{\mu s}\sigma dW(s)\right)$$

alakú lehet, ahol $Y(0)$ $\mathscr{F}_0$ mérhető valószínűségi változó. Egy feladatsorban tárgyalt számolás azt is mutatja, hogy ez a sztochasztikus folyamat valóban megoldása a felírt sztochasztikus differenciálegyenletnek.

Továbbá azt is megmutatja a Kevei jegyzet, hogy ha az $Y(0)$ kezdeti feltétel nulla várható értékű $\frac{\sigma^2}{2\mu}$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó, akkor az $Y(t)$ Ornstein–Uhlenbeck folyamat egy (stcacionárius) Gauss folyamat $Y(t) = 0$ várható értékkel és $\operatorname{Cov}(Y_s, Y_t) = \frac{\sigma^2}{2\mu} e^{-\mu|t-s|}$ kovarianciával.

A Kevei jegyzet tartalmazza annak az állításnak a bizonyítását is, hogy egy $Y(t)$ Ornstein–Uhlenbeck folyamat tetszőleges $Y(0)$ kezdeti feltétellel, (ahol $Y(0)$ $\mathscr{F}_0$ mérhető valószínűségi változó), stacionárius Markov folyamat, amelynek $P(t,x,\cdot)$ átmenetvalószínűségei $e^{-\mu t}x$ várható értékű, $\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-e^{-2\mu t})$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változók eloszlásai, azaz

$$P(Y(t+s) \in A | Y(s) = x) = P(\xi \in A),$$

ahol ξ $e^{-\mu t}x$ várható értékű, $\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-e^{-2\mu t})$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

Ez következik az alábbi a Kevei jegyzetben bizonyított azonosságból, amely tetszőleges $Y(0)$ kezdeti feltétel mellett érvényes,

$$\begin{aligned} &P(Y(t) \in A | Y(u), 0 \le u \le s,\ Y(s) = x) \\ &\quad = P(Y(t) - e^{-\mu(t-s)}Y(s) \in A - e^{-\mu(t-s)}x) \\ &\quad = P(Y(t) - e^{-\mu(t-s)}Y(s) + e^{-\mu(t-s)}x \in A), \end{aligned}$$

valamint abból az észrevételből, hogy

$$Y(t) - e^{-\mu(t-s)}Y(s) + e^{-\mu(t-s)}x = e^{-\mu t}\int_s^t \sigma^2 e^{\mu u}\, dW(u) + e^{-\mu(t-s)}x$$

normális eloszlású valószínűségi változó.

Az Ornstein–Uhlenbeck folyamatnak, mint stacionárius Markov folyamatnak ismerve az átmenetvalószínűségeit, nem nehéz e sztochasztikus folyamatokat diffúziós folyamatként definiálni. Ehhez azt kell észrevenni, hogy az átmenetvalószínűségek kis t paraméterre olyan normális eloszlású valószínűségi változók eloszlásai, amelyek várható értéke $e^{-\mu t}x = x(1-\mu t)+o(t)$ és szórásnégyzete $\frac{\sigma^2}{2\mu}(1-e^{-2\mu t}) = \sigma^2 t + o(t)$. Innen adódik, hogy

$$\begin{aligned} E\Delta Y(t)|Y(t)=y) &= -\mu yh + o(h), \\ E(\Delta Y(t))^2|Y(t)=y) &= \sigma^2 h + o(h), \end{aligned}$$

ahol, a Kevei jegyzethez hasonlóan a $\Delta Y(t) = E(Y(t+h)-Y(t))$ jelölést használtuk. Nem nehéz belátni, hogy az

$$E(\Delta Y(t))^4|Y(t)=y) = O(h^2).$$

reláció szintén érvényes. Nem nehéz belátni, hogy ezekből a relációkból következnek a diffúziós folyamatot definiáló a Kevei jegyzet 59. oldalán felírt (i), (ii) és (iii) relációk $\mu(y) = -\mu y$, $\sigma^2(y) = \sigma^2$ választással.

A Kevei jegyzet utolsó fejezete az Itô folyamatokról szóló sztochasztikus differenciálegyenletetekkel foglalkozik. Definiálja a sztochasztikus differenciálegyenletek erős megoldását, és a fejezet fő eredményében, a 8. tételben belátja, hogy ha a sztochasztikus differenciálegyeltben szereplő függvények teljesítenek bizonyos feltételeket, akkor az egyenletnek létezik egyértelmű erős megoldása.

Az elnevezés sugallja, hogy definiálták sztochasztikus differenciálegyenleteknek mind erős mind gyenge megoldását. Valóban, erős megoldásról beszélünk akkor, ha az a Wiener folyamat, amely szerint definiáljuk a sztochasztikus differenciálegyenletben szereplő Itô integrálokat a kiinduló időpontban már definiálva van. Gyenge megoldásról akkor beszélünk, ha ez a Wiener folyamat nincs definiálva a kiinduló időpontban, hanem a sztochasztikus differenciálegyenletet kielégítő sztochasztikus folyamattal együtt definiáljuk, és ennek értéke egy adott időpontban függhet a sztochasztikus differenciálegyenlet megoldásának korábbi értékeitől.

Van néhány további olyan eredmény a sztochasztikus differenciálegyenletekről, amelyek hasznosak, de amelyeket a Kevei jegyzet nem tárgyal. Ezek másutt be vannak bizonyítva. Ezenkívül ezek olyan hasznos eredmények, amilyeneket természetesen várunk.

Be lehet látni, hogy ha a 8. tétel feltételei teljesülnek, akkor a megoldásként kapott sztochasztikus folyamat Markov folyamat. Továbbá, ha az egyenletben szereplő együtthatók nem függnek a t időparamétertől, azaz $f(x,t) = f(x)$ és $\sigma(x,t) = \sigma(x)$ akkor a megoldás stacionárius Markov folyamat. Az is igaz, hogy ez a Markov folyamat diffúziós folyamat, amelyet a $\mu(x) = f(x)$ és $\sigma^2(x)$ mennyiségek határoznak meg.

Kiegészítések a 8. tétel bizonyításához:

A 62. oldalon a 34. képletben helyesen $EX_0 = \xi$.

A 63. oldal 2. kiemelt képletében, ahol a sztochasztikus differenciálegyenlet az általános esetben van felírva, azaz akkor amikor egy r-dimenziós Wiener folyamat szerint integrálunk, és d egyenletből álló sztochaszikus differenciálegyenletet vizsgálunk, azaz X_t egy d-dimenziós véletlen vektor, az egyenlet után érdemes lett volna kiegészítésként odaírni, hogy ahol $X_s = (X_s^1, \cdots, X_s^d)$.

A 64.oldal 3. kiemelt képletében az $E(X_t - X_s)^2$ kifejezés becslésében az első tag helyesen a következő:

$$E\left(\int_0^t (f(X_s,s) - f(Y_s,s))\,ds\right)^2.$$

Ezt az integrált a Cauchy–Schwartz egyenlőtlenség és a 8. tétel feltételei alapján a következő módon becsüljük meg.

$$\begin{aligned} E\left(\int_0^t (f(X_s,s) - f(Y_s,s))\,ds\right)^2 &\le E\left[\int_0^t 1\,ds \cdot \int_0^t (f(X_s,s) - f(Y_s,s))^2\,ds\right] \\ &\le tE\left(\int_0^t K^2(X_s - Y_s)^2\,ds\right) \le TK^2 \int_0^t E(X_s - Y_s)^2\,ds. \end{aligned}$$

A 8. tétel bizonyításának a végén meg kellene jegyezni, hogy a bizonyított egyenlőtlenségekből (és a martingálokra vonatkozó maximum egyenlőtlenségből) az $E \sup\limits_{0 \le t \le T} |X_t|^2 \le C(1 + E|\xi|^2)$ egyenlőtlenség is bizonyítható.