**Martingálok elmélete.**

Először ismertetem a martingálok és szubmartingálok definicióját.

**Martingál és szubmartingál definiciója.** *Legyen adva σ-algebrák* $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots$ *növekvő sorozata egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn, amelyre teljesül az* $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ *tulajdonság minden* $n = 1, 2, \dots$ *számra. (*$\mathcal{F}_n$*,* $n = 1, 2, \dots$*, σ-algebrák fenti tulajdonságokkal rendelkező rendszerét filtrációnak fogjuk hívni.) Legyen adva ezen kívül* $\mathcal{F}_n$ *mérhető* $\xi_n(\omega)$*,* $E|\xi_n(\omega)| < \infty$*, valószínűségi változók sorozata. Azt mondjuk, hogy a* $\xi_n(\omega)$*,* $n = 1, 2, \dots$*, valószínűségi változók sorozata (diszkrét időben definiált) martingált alkot az* $\mathcal{F}_n$ *σ-algebra sorozatra nézve, ha teljesül az*

$$E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n) = \xi_n(\omega) \qquad \textit{1 valószínűséggel minden } n = 1, 2, \dots \textit{ számra} \tag{D1}$$

*azonosság. A fent definiált sorozat (diszkrét időben definiált) szubmartingált definiál, ha teljesül az*

$$E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge \xi_n(\omega) \qquad \textit{1 valószínűséggel minden } n = 1, 2, \dots \textit{ számra} \tag{D2}$$

*egyenlőtlenség.*

*Legyen adva egymásba skatulyázott* $\mathcal{F}_t$ *σ-algebrák,* $t \ge 0$*,* $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$*, ha* $s \le t$*,* $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$ *valós számokkal indexelt rendszere egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn. (*$\mathcal{F}_t$*,* $t \ge 0$*, σ-algebrák fenti tulajdonságokkal rendelkező rendszerét filtrációnak fogjuk hívni.) Legyen továbbá adva* $\mathcal{F}_t$ *mérhető* $\xi_t(\omega)$ *valószínűségi változók rendszere, amelyre* $E|\xi_t(\omega)| < \infty$*. Azt mondjuk, hogy a* $\xi_t(\omega)$ *valószínűségi változók időben folytonos martingált alkotnak az* $\mathcal{F}_t$ *σ-algebrák rendszerére nézve, ha teljesül az*

$$E(\xi_t(\omega)|\mathcal{F}_s) = \xi_s(\omega) \qquad \textit{1 valószínűséggel minden } 0 \le s \le t < \infty \textit{ számpárra} \tag{D1$'$}$$

*azonosság. A fent definiált sorozat (folytonos időben definiált) szubmartingált alkot, ha teljesül az*

$$E(\xi_t(\omega)|\mathcal{F}_s) \ge \xi_s(\omega) \qquad \textit{1 valószínűséggel minden } 0 \le s \le t < \infty \textit{ számpárra} \tag{D2$'$}$$

*egyenlőtlenség.*

*1. megjegyzés.* Hasonlóan definiálhatunk egy véges sok elemből álló $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$, $1 \le n \le N$, martingált vagy szubmartingált. Az egyetlen különbség az, hogy a (D1) illetve (D2) formulát csak $1 \le n < N$ indexekre követeljük meg. Hasonlóan definiálhatunk egy folytonos paraméterű martingált egy $[a, b]$ intervallumban, a (D1′) és (D2′) tulajdonságot csak $a \le s \le t \le b$ paraméterekre követelve meg.

*2. megjegyzés.* Ha adva van valószínűségi változók egy $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots,$ sorozata, akkor $\mathcal{F}_n^{(0)} = \mathcal{B}(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$ a legszűkebb a diszkrét idejű martingálok és szubmartingálok definicójában szereplő feltételeket teljesítő σ-algebrák. Vegyük észre, hogy amennyiben a (D1) feltétel teljesül akkor az

$$E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n^{(0)}) = E\left(E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n)|\mathcal{F}_n^{(0)}\right) = E\left(\xi_n(\omega)|\mathcal{F}_n^{(0)}\right) = \xi_n(\omega)$$
$$\text{1 valószínűséggel minden } n = 1, 2 \dots \text{ számra}$$

azonosság is teljesül, azaz ha a $\xi_n(\omega)$ sorozat martingált alkot az $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \dots$, $\sigma$-algebra sorozatra nézve, akkor martingált alkot az $\mathcal{F}_n^{(0)}$, $n = 1, 2, \dots$, $\sigma$-algebra sorozatra nézve is. Hasonlóan állíthatjuk, hogy ha a $\xi_n(\omega)$ sorozat szubmartingált alkot az $\mathcal{F}_n$ $\sigma$-algebrák sorozatára nézve, akkor szubmartingált alkot az $\mathcal{F}_n^{(0)}$ $\sigma$-algebrák sorozatára nézve is.

Folytonos idejű martingálok és szubmartingálok esetén definiálhatjuk az $\mathcal{F}_s^{(0)} = \mathcal{B}(\xi_u,\, 0 \le u \le s)$ $\sigma$-algebrákat, és ezekkel helyettesítve a $\mathcal{F}_s$ $\sigma$-algebrákat a folytonos idejű martingálokra és szubmartingálokra is állíthatjuk, hogy az $\xi_t(\omega)$ sztochasztikus folyamatok martingálok illetve szubmartingálok maradnak. Ezért jogunk van valószínűségi változók egy sorozatát diszkrét idejű martingálnak vagy szubmartingálnak hívni, ha ez a sorozat martingál, illetve szubmartingál a most definiált $\mathcal{F}_n^{(0)}$ $\sigma$-algebrák sorozatára nézve. Az irodalomban használják ezt a konvenciót, és mi is élni fogunk ezzel a lehetőséggel. Hasonlóan, egy $\xi_t(\omega)$ sztochasztikus folyamatot martingálnak illetve szubmartingálnak hívunk, ha az martingál illetve szubmartingál az $\mathcal{F}_t^{(0)}$, $t \ge 0$, $\sigma$-algebrák rendszerére nézve.

A martingálok az igazságos, a szubmartingálok pedig az előnyös játékoknak a természetes modelljei. Tekintsünk ugyanis egy játékot, amelynek minden egyes időpontban van egy fordulója, és ennek során nyereményünk értéke (véletlenszerűen) megváltozik. Jelölje $\mathcal{F}_n$ azt a $\sigma$-algebrát, amely tartalmazza az $n$-időpontig összegyüjtött összes információnkat, $\xi_n(\omega)$ pedig legyen a nyereményünk értéke az $n$ időpontban. Ekkor az $n+1$-ik forduló utáni időpontbeli várható nyereményünk az $n$-ik fordulóban rendelkezésünkre álló ismeretek alapján $E(\xi_{n+1}(\omega)|\mathcal{F}_n)$. A játék akkor igazságos, ha ez a várható nyeremény megegyezik az $n$-ik időpontbeli $\xi_n(\omega)$ nyereményünkkel, és akkor előnyös, ha nagyobb nála. Több a martingálok elméletében fontos eredmény ezen kép alapján érthető meg.

A következő feladatokban megfogalmazok néhány fontos példát martingálokra. A feladat állításai ellenőrízhetőek a feltételes várható érték előbb felsorolt tulajdonságainak segítségével.

*1. feladat.* Legyenek $\xi_1, \xi_2 \dots$, független valószínűségi változók, amelyekre $E|\xi_n| < \infty$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Ha $E\xi_n = 0$ minden $n = 1, 2, \dots$, számra, akkor az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, $k = 1, 2, \dots$, részletösszegek martingált alkotnak. Ha $E\xi_n \ge 0$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor az $S_k$, $k = 1, 2, \dots$, részletösszegek szubmartingált alkotnak.

*2. feladat.* Legyen adva az $\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra rész-$\sigma$-algebráinak növekvő $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots \subset A$ az sorozata és egy $\xi$ valószínűségi változó, $E|\xi| < \infty$, egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor az $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat, ahol $X_n = E(\xi|\mathcal{F}_n)$, martingált alkot.

*3. feladat.* Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók, $T_n = \prod\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$. Ha $E\xi_j = 1$ minden $j = 1, 2, \dots$ számra, akkor a $T_n$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat martingál. Ha $E\xi_j \ge 1$, és $P(\xi_j \ge 0) = 1$, $j = 1, 2, \dots$, akkor $T_n$ szubmartingál.

*4. feladat.* Legyen $W(t,\omega)$, $t \ge 0$, egy Wiener-folyamat. Ekkor mind a $W(t,\omega)$, mind a $W^2(t,\omega) - t$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat martingál. (Érdemes mind a két sztochasztikus folyamat esetében a $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(W(s);\ s \le t)$, $\sigma$-algebrát társítani a $W(t)$ illetve $W^2(t) - t$ valószínűségi változóhoz.

*4′. feladat.* Legyen $P(t,\omega)$, $t \ge 0$, egy Poisson-folyamat, $\lambda = 1$ paraméterrel. Ekkor mind a $P(t,\omega) - t$, mind a $(P(t,\omega) - t)^2 - t$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat martingál. Általában, ha $X(t,\omega)$ egy független és stacionárius növekményű sorozat $EX(t,\omega) = 0$ és $EX^2(t,\omega) = t$, akkor $X(t,\omega)$ és $X^2(t,\omega) - t$ martingál.

A 4. feladat felsorolja egy Wiener-folyamat bizonyos tulajdonságait. Ezenkívül tudjuk, hogy a Wiener-folyamat trajektóriái folytonosak. Megfogalmazom a Wiener-folyamat egy korábbi jellemzésének általánosabb, martingál-tulajdonságokkal megadott jellemzését.

**Tétel a Wiener-folyamatok egy jellemzéséről.** *Legyen $X(t,\omega)$, $0 \le t < \infty$, olyan sztochasztikus folyamat, amelyre $EX^2(t,\omega) < \infty$ minden $t \ge 0$ számra, $X(0,\omega) = 0$ egy valószínűséggel, és az $X(t,\omega)$ és $X^2(t,\omega) - t$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamatok martingálok (valamely $\mathcal{F}_t$ az $\mathcal{F}_t^{(0)} = \{X(s,\omega),\ s \le t\}$, $t \ge 0$, $\sigma$-algebrákat tartalmazó $\sigma$-algebrák rendszerére nézve). Ha ezenkívül az $X(t,\omega)$ sztochasztikus folyamat minden trajektóriája folytonos, akkor $X(t,\omega)$ Wiener-folyamat.*

A fenti tétel bizonyítását az előadásban elhagyom, azt másutt ismertetem. Megjegyzem, hogy a tétel bizonyításának lényege az, hogy a független valószínűségi változók összegeiről szóló centrális határeloszlástétel általánosítható martingálokra is, és ennek az itt nem ismertetett eredménynek a segítségével belátható, hogy tetszőleges $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \infty$ számokra a tétel feltételeinek teljesülése esetén az $X(t_j,\omega) - X(t_{j-1},\omega)$, $1 \le j \le k$, valószínűségi változók függetlenek, és normális eloszlásúak 0 várható értékkel és $t_j - t_{j-1}$ szórásnégyzettel.

Ismertetek néhány a martingálokról és szubmartingálokról szóló fontos eredményt. Nem adom meg mindegyikük részletes bizonyítását. Néhány esetben a bizonyítás fontos lépéseit (némi magyarázattal ellátott) feladat formájában fogalmazom meg. Viszont igyekszem elmagyarázni, hogy a bizonyítások hátterében ott van az igazságos és előnyös játékok tulajdonságairól szóló természetes gondolat. Az első eredmény azt fejezi ki, hogy egy igazságos játék esetén nem tudom a játékot úgy abbahagyni, hogy az számomra szigorúan előnyös legyen, egy előnyös játék esetén pedig a legelőnyösebb stratégia az, ha a játékban végig részt veszek. Természetesen, amikor arra gondolok, hogy milyen szabály szerint hagyjam abba a játékot, akkor olyan szabályra gondolok, amelyet effektíve végre is tudok hajtani. Ennek pontos megfogalmazása érdekében bevezetem a következő fogalmat.

**Megállási szabály definiciója.** *Legyen adva $\sigma$-algebrák növekvő $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy pozitív egész értékeket (és esetleg a $\infty$) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e $\sigma$-algebrák rendszerére nézve, ha $\{\omega\colon \tau(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ minden $n = 1, 2, \ldots$ számra.*

*E fogalom időben folytonos megfelelője a következő: Legyen adva $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$, $0 \le t < \infty$, $\sigma$-algebráknak egy növekvő rendszere (azaz legyen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $s \le t$) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy nem negatív értékeket (és esetleg a $\infty$) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e $\sigma$-algebrák rendszerére nézve, ha $\{\omega\colon \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \ge 0$ számra.*

Megadom a definició változatát abban az esetben, ha $\sigma$-algebrák helyett valószínűségi változók egy sorozata vagy egy sztochasztikus folyamat van adva.

**Megállási szabály definiciója.** *Legyen valószínűségi változók $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Egy pozitív egész értékeket (és esetleg a $\infty$) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e valószínűségi változók sorozatára nézve, ha megállási szabály az $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(\xi_k(\omega), 1 \le k \le n)$ $\sigma$-algebrák növekvő rendszerére nézve.*

*E fogalom időben folytonos megfelelője a következő: Legyen adva egy $X(t, \omega)$, $t \ge 0$, egy a pozitív félegyesen definiált sztochasztikus folyamat egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy nem negatív értékeket (és esetleg a $\infty$) értéket) felvevő $\tau(\omega)$ valószínűségi változó megállási szabály e sztochasztikus folyamatra nézve, ha megállási szabály az $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(\xi_s\colon 0 \le s \le t)$, $t \ge 0$, $\sigma$-algebrák növekvő rendszerére nézve.*

*Megjegyzés.* Az irodalomban gyakran a megállási idő kifejezést használják a megállási szabály kifejezés helyett.

Érdemes bevezetni a $\tau(\omega)$ (véletlen) megállási időpontig összegyüjtött információt tartalmazó $\mathcal{F}_\tau$ $\sigma$-algebrát is. Egy $B$ halmaz akkor és csak akkor tartozik a $\mathcal{F}_\tau$ $\sigma$-algebrába, ha a $\tau$ időpontig tett megfigyelések alapján el tudjuk dönteni, hogy a $B$ esemény bekövetkezett-e vagy sem. A pontos definició a következő.

**Egy megállási szabály által generált $\sigma$-algebra definiciója.** *Legyen adva $\sigma$-algebrák növekvő $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $\tau(\omega)$ megállási szabály erre a rendszerre nézve. Az $\mathcal{F}_\tau$ $\sigma$-algebra a következő halmazokból áll: Egy $B \subset \Omega$ halmazra $B \in \mathcal{F}_\tau$ akkor és csak akkor, ha $B \cap \{\omega\colon \tau(\omega) \le n\} \in \mathcal{F}_n$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra.*

*E fogalom időben folytonos megfelelője a következő: Legyen adva $\sigma$-algebrák növekvő $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}$, $0 \le t < \infty$, rendszere (azaz legyen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $s \le t$) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és legyen $\tau(\omega)$ megállási szabály erre a rendszerre nézve. Az $\mathcal{F}_\tau$ $\sigma$-algebra a következő halmazokból áll: $B \subset \Omega$ halmazra $B \in \mathcal{F}_\tau$ akkor és csak akkor, ha $B \cap \{\omega\colon \tau(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \ge 0$ számra.*

*Feladat 1:* Lássuk be, hogy a fenti definició értelmes, azaz az $\mathcal{F}_\tau$ halmaz rendszer valóban $\sigma$-algebra.

*Feladat 2:* Legyen adva $\sigma$-algebrák növekvő $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, valamint egy $\tau(\omega)$ megállási szabály erre a rendszerre nézve, és valószínűségi változók olyan $\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \dots$ sorozata, amelyre a $\xi_n(\omega)$ valószínűségi változó $\mathcal{F}_n$ mérhető minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Mutassuk meg, hogy $\xi_{\tau(\omega)}(\omega)$ $\mathcal{F}_\tau$ mérhető. Speciálisan, $\tau(\omega)$ $\mathcal{F}_\tau$ mérhető valószínűségi változó.

*Feladat 3:* Legyen adva $\sigma$-algebrák növekvő $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, valamint két olyan $\tau_1(\omega)$ és $\tau_2(\omega)$ megállási szabály erre a rendszerre nézve, amelyek teljesítik a $\tau_1(\omega) \le \tau_2(\omega)$ relációt minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre. Mutassuk meg, hogy $\mathcal{F}_{\tau_1(\omega)} \subset \mathcal{F}_{\tau_2(\omega)}$. Igaz ezen állítás következő folytonos változata is. Ha $\mathcal{F}_t$, $0 \le t < \infty$, $\sigma$-algebrák növekvő rendszere, azaz $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $0 \le s < t < \infty$, valamint $\tau_1(\omega)$ és $\tau_2(\omega)$ két olyan megállási szabály erre a $\sigma$-algebra rendszerre nézve, amelyek teljesítik a $\tau_1(\omega) \le \tau_2(\omega)$ relációt minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre, akkor $\mathcal{F}_{\tau_1(\omega)} \subset \mathcal{F}_{\tau_2(\omega)}$.

*Segítség:* Egy $B \in \mathcal{F}_{\tau_1(\omega)}$ eseményt írjunk $B = \bigcup\limits_k (B \cap \{\omega\colon \tau_1(\omega) = k\})$ alakban, és mutassuk meg, hogy $B \cap \{\omega\colon \tau_1(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_{\tau_2(\omega)}$.

A folytonos idő esetében használjuk ki, hogy amennyiben valamely $B$ halmazra $B \cap \{\omega\colon \tau_1(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$, akkor $B \cap \{\omega\colon \tau_2(\omega) \le t\} = B \cap \{\omega\colon \tau_1(\omega) \le t\} \cap \{\omega\colon \tau_2(\omega) \le t\} \in \mathcal{F}_t$.

*Feladat 4: (nem kötelező)* Tekintsük növekvő $\mathcal{F}_t$ $\sigma$-algebráknak a $t \ge 0$ számokkal paraméterezett növekvő rendszerét, és egy ezekre nézve természetes módon adaptált $X(t, \omega)$ *folytonos trajektóriájú* sztochasztikus folyamatot. Fogalmazzuk meg és bizonyítsuk be egy ilyen rendszerre a feladat 2 természetes megfelelőjét. (Miért kellett feltenni azt, hogy a sztochasztikus folyamat trajektóriái folytonosak?)

**Tétel véletlenül megállított (szub)martingálok várható értékének becsléséről.** *Legyen adva egy $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2, \dots$, martingál és egy $\tau(\omega)$ megállási szabály az $\mathcal{F}_k$, $k = 1, 2, \dots$, $\sigma$-algebrák rendszerére nézve, amelyre $P(n \le \tau(\omega) \le N) = 1$ valamilyen $1 \le n \le N < \infty$ számokra. Ekkor*

$$E(\xi_{\tau(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_n) = \xi_n(\omega) \quad \textit{és} \quad E(\xi_N(\omega)|\mathcal{F}_{\tau(\omega)}) = \xi_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \textit{1 valószínűséggel.} \tag{D3}$$

*Speciálisan*

$$E\xi_n(\omega) = E\xi_{\tau(\omega)}(\omega) = E\xi_N(\omega) = E\xi_1(\omega). \tag{D4}$$

*Ha $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2, \dots$, szubmartingál, akkor*

$$E(\xi_{\tau(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge \xi_n(\omega) \quad \textit{és} \quad E(\xi_N(\omega)|\mathcal{F}_{\tau(\omega)}) \ge \xi_{\tau(\omega)}(\omega) \quad \textit{1 valószínűséggel,} \tag{D3$'$}$$

*ezért*

$$E\xi_n(\omega) \le E\xi_{\tau(\omega)}(\omega) \le E\xi_N(\omega). \tag{D4$'$}$$

*Bizonyítás.* Először a (D3) és (D3′) formulák baloldalán szereplő relációkat bizonyítjuk be. Ennek érdekében vegyük észre, hogy az $\eta_k(\omega) = \xi_{k+1}(\omega) - \xi_k(\omega)$, $n \le k < N$, valószínűségi változók $\mathcal{F}_{k+1}$ mérhetőek, és a $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$, $n \le k \le N$, rendszer martingál volta ekvivalens azzal, hogy $E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k) = 0$, szubmartingál volta pedig azzal, hogy

$E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k) \ge 0$ 1 valószínűséggel minden $n \le k < N$ indexre. Vezessük be az $\tilde\eta_k(\omega) = \eta_k(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)\ge k+1\}}$, $n \le k < N$, valószínűségi változókat. Mivel $E(\xi_{\tau(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_n) - \xi_n(\omega) = \sum\limits_{k=n}^{N-1} E(\tilde\eta_k(\omega)|F_n)$, (ugyanis $\sum\limits_{k=n}^{N-1} \tilde\eta_k(\omega) = \xi_{\tau(\omega)}(\omega) - \xi_n(\omega)$), a (D3) és (D3′) formulák első részének az igazolásához elég azt bebizonyítani, hogy $E\tilde\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_n) = 0$, $k \le n < N$, ha $(\xi_k, \mathcal{F}_k)$, $n \le k \le N$, martingál, és $E\tilde\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge 0$, $n \le k < N$, ha $(\xi_k, \mathcal{F}_k)$, $n \le k \le N$, szubmartingál. Viszont az $\{\omega\colon \tau(\omega) \ge k+1\} \in \mathcal{F}_k$, (mert komplementere az $\{\omega\colon \tau(\omega) \le k\} \in \mathcal{F}_k$ halmaznak.) Ezért a feltételes várható érték tulajdonságai alapján

$$E(\tilde\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_n) = E(\eta_k(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)\ge k+1\}}|\mathcal{F}_n) = E(I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)\ge k+1\}} E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k))|\mathcal{F}_n).$$

Innen $E(\tilde\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_n) = 0$, ha $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$ martingál, azaz $E(\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_k) = 0$. Hasonlóan, $E(\tilde\eta_k(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge 0$, ha $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$ szubmartingál.

A (D3) és (D3′) formulák első azonosságából megkapjuk a (D4) és (D4′) képletek első állítását, ha várható értéket veszünk mind a két oldalon.

A (D3) azonosság második relációjának a bizonyítása hasonló elven alapul. Elég belátni azt, hogy $E(\xi_N(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}|\mathcal{F}_\tau) = \xi_k(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}$ tetszőleges $n \le k \le N$ számra, mert ezt az azonosságot összegezve minden $n \le k \le N$ számra megkapjuk a kívánt állítást. Viszont tetszőleges $B \in \mathcal{F}_{\tau(\omega)}$ halmazra $B \cap \{\omega\colon\, \tau(\omega) = k\} \in \mathcal{F}_k$, ezért felhasználva a tekintett sorozat martingál tulajdonságát és azt a tényt, hogy az $\xi_N(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}$ függvény nullával egyenlő az $\{\omega\colon\, \tau(\omega) \ne k\}$ halmazon, kapjuk a következő azonosságot: Ha $B \in \mathcal{F}_{\tau(\omega)}$, akkor

$$\begin{aligned}\int_B \xi_N(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}} P(\,d\omega) &= \int_{B\cap\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}} \xi_N(\omega) dP(\,d\omega) \\ &= \int_{B\cap\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}} \xi_k(\omega) dP(\,d\omega) = \int_B \xi_k(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}} P(\,d\omega).\end{aligned}$$

Ezenkívül az $\xi_k(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}$ valószínűségi változó $\mathcal{F}_\tau$ mérhető, mert minden $x$ valós és $n \le k \le N$ egész számra $\{\omega\colon\, \xi_k(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}} < x\} \in \mathcal{F}_k$. Innen

$$E(\xi_N(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}|\mathcal{F}_\tau) = \xi_k(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}},$$

és ezt az állítást kellett bizonyítanunk.

A (D3′) egyenlőtlenség második relációjának a bizonyítása hasonló. Mindössze azt kell észrevenni, hogy a szubmartingál tulajdonság az $E(\xi_N(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}|\mathcal{F}_\tau) \ge \xi_k(\omega) I_{\{\omega\colon\, \tau(\omega)=k\}}$ egyenlőtlenség bizonyítását teszi lehetővé tetszőleges $n \le k \le N$ számra. Végül a (D4) és (D4′) még nem bizonyított része következik a (D3) és (D3′) relációk második felének az integrálásából.

*Nem kötelező feladat:* Mutassuk meg az előző tétel (D3′) állításának következő általánosítását. Ha $(\xi_k(\omega), \mathcal{F}_k)$, $k = 1, 2, \dots$, szubmartingál, $\tau_1(\omega)$ és $\tau_2(\omega)$ két olyan megállási szabály az itt szereplő $\sigma$-algebrák rendszerére nézve, amelyekre $P(n \le \tau_1(\omega) \le \tau_2(\omega) \le N) = 1$, akkor $\xi_{\tau_1}(\omega) \le E(\xi_{\tau_2(\omega)}(\omega)|\mathcal{F}_{\tau_1})$ 1 valószínűséggel.

*Megjegyzés.* A fenti nem kötelező feladatnak a következő élesebb formáját tartalmazza bizonyítás nélkül Kevei Péter jegyzete. A feladatban megfogalmazott egyenlőtlenség érvényes akkor is, ha a $\tau_2$ végessége helyett az ennél gyengébb $E|X_{\tau_2}| < \infty$ és $\liminf_{n\to\infty} \int_{\{\tau_2(\omega)>n\}} |\xi_n(\omega)| dP(\omega) = 0$ feltétel teljesül.

A fenti tételben feltételeztük, hogy a $\tau$ megállási szabály 1 valószínűséggel véges. Ezt a feltételt lehet gyengíteni, de teljesen elhagyni nem lehet, mint a következő híres példa mutatja:

Tegyük fel, hogy a következő játékot játszhatjuk. Feldobnak egy pénzdarabot, amely $\frac{1}{2}$ valószínűséggel esik a fej, és $\frac{1}{2}$ valószínűséggel esik az írás oldalra. Feltehetünk tetszőleges tétet, és fej dobás esetén tétünk megduplázodik, írás dobás esetén pedig elvész. Tegyük fel, hogy célunk a következő: Biztosan akarunk nyerni 1 forintot. Ennek érdekében felteszünk 1 forintot, és ha nyertünk hazamegyünk. Ha nem, duplázunk, 2 forintot teszünk fel, ha nyerünk hazamegyünk, ha nem duplázunk és 4 forintot teszünk fel. Ha nyerünk hazamegyünk, ha nem duplázunk és 8 forintot teszünk fel, és így tovább. Előbb vagy utóbb 1 valószínűséggel megjelenik a fej dobás, és ilyen módon ebben az igazságos játékban 1 valószínűséggel megnyerjük a kívánt 1 forintot. Ezek szerint mégis lehet egy igazságos játékban biztosan nyerni? Beszéljük meg ezt a példát részletesebben, fogalmazzuk meg a hozzátartozó matematikai modellt.

*Egy érdekes matematikai modell.* Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független valószínűségi változók, amelyekre $P(\xi_n = 2^{n-1}) = P(\xi_n = -2^{n-1}) = \frac{1}{2}$, $n = 1, 2, \dots,$ és legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Ekkor $S_n$, $n = 1, 2, \dots,$ martingál. Definiáljuk a következő megállási szabályt. $\tau(\omega) = \min\{n\colon n \ge 1,\ S_n \ge 1\}$, és vezessük be a $\tau_N(\omega) = \min(\tau(\omega), N)$ megállási szabályokat is minden $N = 1, 2, \dots$ számra. Ekkor $P(\tau(\omega) = k) = 2^{-k}$, $k = 1, 2, \dots,$ (a $\tau(\omega) = k$ esemény akkor következik be, ha a $\xi_n$, $n = 1, 2, \dots,$ változók közül a $k$-ik az első pozitív értékű valószínűségi változó), ezért $P(\tau(\omega) < \infty) = 1$, és $P(S_\tau = 1) = 1$. Ez felel meg az előbbi játéknak, és annak az állításnak, hogy 1 valószínűséggel 1 forintot nyerünk. Tekintsük a $\tau_N$ megállási szabályokat, és a hozzátartozó nyereményeket. Ekkor $P(\tau_N(\omega) = k) = 2^{-k}$ minden $1 \le k < N$ számra, $P(\tau_N = N) = 2 \cdot 2^{-N}$, $P(S_{\tau_N(\omega}(\omega) = 1) = 1 - 2^{-N}$, $P(S_{\tau_N(\omega}(\omega) = -(1+2+\cdots 2^{N-1}) = P(S_{\tau_N(\omega}(\omega) = -(2^N-1)) = 2^{-N}$. Ez azt jelenti, hogy $ES_{\tau_N(\omega)}(\omega) = 0$, ahogy a fenti tétel is állítja, de $ES_{\tau(\omega)}(\omega) = 1$. Igaz ugyan, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} S_{\tau_N(\omega)}(\omega) = S_{\tau(\omega)}(\omega)$ 1 valószínűséggel, ezért $E\left(\lim\limits_{n\to\infty} S_{\tau_N(\omega)}(\omega)\right) = E(S_{\tau(\omega)}(\omega))$. De nem lehet felcserélni a limesz és várható érték képzés sorrendjét a fenti azonosság bal oldalán. Megjegyzem, hogy a fenti példa azt mutatja, hogy valóban lehet egy ilyen játékban 1 valószínűséggel nyerni, de ehhez végtelen sok tőkével kell rendelkeznünk, ami lehetővé teszi, hogy a játékot ne kelljen idő előtt befejeznünk.

Megmutatom, hogy a fent megfogalmazott tételnek véletlenül megállított martingálok és szubmartingálok várható értékéről fontos következményei vannak. Többek között ebből következik a független valószínűségi változók részletösszegeiről szóló egyik fontos eredmény, a Kolmogorov-egyenlőtlenség.

Először bebizonyítok egy becslést martingálok és szupermartingálok maximumáról.

**Becslés szubmartingálok maximumáról.** *Legyen* $(\xi_n,\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots$, *szubmartingál. Ekkor*

$$P\left(\max_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\right)\le\frac{1}{\lambda}\int_{\{\omega\colon \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}}\xi_N(\omega)P(\,d\omega)\le\frac{E|\xi_N(\omega)|}{\lambda}\tag{D5}$$

*minden* $N=1,2,\dots$ *egész és* $\lambda>0$ *valós számra.*

*A becslés bizonyítása.* Vezessük be a $\bar\tau(\omega)=\min(j\colon \xi_j(\omega)\ge\lambda)$ és $\tau(\omega)=\min(\bar\tau(\omega),N)$ megállási szabályokat. Alkalmazzuk a (D3′) reláció második felét a véletlenül megállított (szub)martingálok várható értékének becsléséről szóló tételnek $n=1$ és $N$ paraméterrel. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\lambda P\left(\max_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\right)&\le\int_{\{\omega\colon \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}}\xi_{\tau(\omega)}(\omega)P(\,d\omega)\\ &\le\int_{\{\omega\colon \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}}E(\xi_N(\omega)|\mathcal{F}_{\tau(\omega)})P(\,d\omega)=\int_{\{\omega\colon \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}}\xi_N(\omega)P(\,d\omega),\end{aligned}$$

mert $\{\omega\colon \max\limits_{1\le k\le N}\xi_k(\omega)\ge\lambda\}\in\mathcal{F}_\tau$. Így megkaptuk a (D5) formula első egyenlőtlenségét. A (D5) formula második egyenlőtlensége nyílvánvaló.

A Kolmogorov-egyenlőtlenség egyszerűen bizonyítható az előző becslés és a következő lemma segítségével.

**Lemma.** *Legyen adva egy* $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$ $\sigma$*-algebra és egy az* $E\xi^2<\infty$ *feltételt teljesítő* $\xi$ *valószínűségi változó egy* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *valószínűségi mezőn. Ekkor teljesül a*

$$E(\xi^2|\mathcal{F})\ge(E\xi|\mathcal{F}))^2\quad \textit{1 valószínűséggel.}$$

*egyenlőtlenség. Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy amennyiben* $(\xi_n,\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots$, *martingál, és* $E\xi_n^2<\infty$ *minden* $n=1,2,\dots$ *számra, akkor* $(\xi_n^2,\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots$, *szubmartingál.*

*A lemma bizonyítása.* Azt állítom, hogy $E(\xi^2|\mathcal{F})-(E\xi|\mathcal{F}))^2=E(\xi-E(\xi|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F})$, ahonnan $E(\xi^2|\mathcal{F})-(E\xi|\mathcal{F}))^2\ge0$, tehát a lemma egyenlőtlensége igaz. Az előző azonosság következik az $E((\xi-E(\xi|\mathcal{F}))^2|\mathcal{F})=E(\xi^2|\mathcal{F})-2E(\xi E(\xi|\mathcal{F})|\mathcal{F})+(E(\xi|\mathcal{F}))^2=E(\xi^2|\mathcal{F})-(E(\xi|\mathcal{F}))^2$, mert $E(\xi E(\xi|\mathcal{F})|\mathcal{F})=(E(\xi|\mathcal{F}))^2$ számolásból.

Ezért, ha $(\xi_n,\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots$, martingál, $E\xi_n^2<\infty$ minden $n=1,2,\dots$ számra, akkor $E(\xi_{n+1}^2|\mathcal{F}_n)\ge(E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n))^2=\xi_n^2(\omega)$, $n=1,2,\dots$, és ezt kellett bizonyítanunk.

*Megjegyzés:* Az előző lemma bizonyításában használt azonosság hátterében az a jól ismert tény áll, hogy az $E(\xi|\mathcal{F})$ feltételes várható érték a $\xi$ valószínűségi változó ortogonális vetülete az $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebrára, ezért alkalmazhatjuk a Pythogorász tételt a megfelelő valószínűségi változókra. Az így kapott az $\xi(\omega)^2=(\xi(\omega)-E(\xi(\omega)|\mathcal{F})^2+E(\xi(\omega)|\mathcal{F})^2$

azonosság két oldalának az $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebra szerinti feltételes várható értékét véve megkapjuk a lemma bizonyításában felírt azonosságot.

A fenti eredmények egyszerű következménye a Kolmogorov-egyenlőtlenség.

**Kolmogorov-egyenlőtlenség.** *Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_N$ független valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_n=0$, $\sigma_n^2=E\xi_n^2<\infty$ minden $1\le n\le N$ számra. Vezessük be az $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$, $1\le n\le N$, részletösszegeket. Érvényes a*

$$P\left(\max_{1\le n\le N}|S_n|>x\right)\le\frac{\operatorname{Var}S_N}{x^2}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sigma_n^2}{x^2}\qquad \textit{minden } x>0 \textit{ számra}$$

*reláció, amelyet Kolmogorov-egyenlőtlenségnek hívnak.*

*Bizonyítás.* Az $S_n(\omega)$, $n=1,\dots,N$, sorozat martingál, ezért az előző lemma alapján az $S_n^2(\omega)$, $n=1,\dots,N$, sorozat szubmartingál. Alkalmazva erre a szubmartingálok maximumáról szóló becslést kapjuk, hogy

$$P\left(\max_{1\le n\le N}|S_n|>x\right)=P\left(\max_{1\le n\le N}S_n^2>x^2\right)\le\frac{ES_N^2}{x^2}=\frac{\operatorname{Var}S_n}{x^2}=\frac{\sum\limits_{n=1}^{N}\sigma_n^2}{x^2},$$

amint állítottuk.

*1. megjegyzés.* Érdemes megjegyezni, hogy a Kolmogorov-egyenlőtlenség ugyanazt a becslést adja a $P\left(\max\limits_{1\le n\le N}|S_n|>x\right)$ valószínűségre, mint amit a Csebisev-egyenlőtlenség ad a $P\left(|S_N|>x\right)$ valószínűségre. Ez az eredmény olyan tényt fejez ki, hogy független, nulla várható értékű valószínűségi változók részletösszegeinek a maximuma nem sokkal nagyobb, mint az utolsó részletösszeg. Több ilyen jellegű eredmény van a valószínűségszámításban, (lásd például a következő 2. megjegyzést). A Kolmogorov-egyenlőtlenség hasznos például a nagy számok erős törvényének a bizonyításában. Ha a nagy számok törvényét a lehető legáltalánosabb feltételek mellett akarjuk bizonyítani, akkor minél enyhébb momentum feltételek mellett kell jó becslést adni független valószínűségi változók részletösszegeinek a maximumára. Ilyenkor a Kolmogorov-egyenlőtlenség tesz jó szolgálatot.

A Kolmogorov-egyenlőtlenség bizonyításában szereplő lemmának érvényes a következő általánosítása.

**Lemma martingálok konvex függvényeiről.** *Legyen adva egy $\xi(\omega)$ valószínűségi változó és egy $\Phi(x)$, $-\infty<x<\infty$, konvex függvény, amelyekre teljesülnek az $E|\xi(\omega)|<\infty$ és $E|\Phi(\xi(\omega)|<\infty$ feltételek egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, és egy $\mathcal{F}\subset\mathcal{A}$ $\sigma$-algebra. Ekkor teljesül az*

$$E(\Phi(\xi(\omega)|\mathcal{F}))\ge\Phi\left(E(\xi(\omega)|\mathcal{F})\right)\qquad \textit{1 valószínűséggel}$$

*egyenlőtlenség. Ezért, ha* $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, *martingál,* $\Phi(x)$ *konvex függvény, és* $E|\Phi(\xi_n)| < \infty$ *minden* $n = 1, 2, \dots$ *számra, akkor* $(\Phi(\xi_n), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, *szubmartingál.*

*A lemma indoklása.* A Jensen egyenlőtlenség alapján tudjuk, hogy a $\xi$ valószínűségi változóra érvényes az

$$E\Phi(\xi(\omega)) = \int \Phi(x) F(\,dx) \geq \Phi\left(\int x F(\,dx)\right) = \Phi\left(E(\xi(\omega))\right)$$

egyenőtlenség, ahol $F(x)$ jelöli a $\xi$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Tudván, hogy létezik a $\xi$ valószínűségi változó $F(B, \omega)$, feltételes eloszlása $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebrára nézve, ahol $\omega \in \Omega$, és $B$ a számegyenes Borel mérhető részhalmaza, és azt, hogy hogyan lehet a feltételes várható értéket a feltételes eloszlás segítségével kiszámítani, kapjuk, ismét a Jensen egyenlőtlenség segítségével, hogy

$$E\Phi(\xi(\omega)|\mathcal{F}) = \int \Phi(x) F(\,dx, \omega) \geq \Phi\left(\int x F(\,dx, \omega)\right) = \Phi\left(E(\xi(\omega)|\mathcal{F}\right)$$

1 valószínűséggel,

ahol $F(\cdot, \omega)$ jelöli a $\xi$ valószínűségi változó feltételes eloszlását feltéve a $\mathcal{F}$ $\sigma$-algebrát. Ennek az egyenlőtlenségnek a segítségével belátható, hogy $(\Phi(\xi_n), \mathcal{F}_n)$ $n = 1, 2, \dots$, szubmartingál az adott feltételek mellett.

*Feladat.* Lássuk be elemi módszerekkel (a feltételes eloszlás létezéséről szóló eredmény ismerete nélkül), hogy $|E(\xi(\omega)|\mathcal{F})| \leq E(|\xi(\omega)|\,|\mathcal{F})$ és $(E(\xi(\omega)|\mathcal{F}))^+ \leq E(\xi(\omega)^+|\mathcal{F})$, ahol $x^+ = \max(x, 0)$. Mutassuk meg, hogy ha $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$ martingál, akkor $(|\xi_n(\omega)|, \mathcal{F}_n)$ és $(\xi_n^+(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, szubmartingál.

Felhasználva a martingálok konvex függvényeiről szóló lemmát az $\Phi(x) = |x|^\alpha$, $1 \leq \alpha < \infty$ konvex függvényekkel valamint a (D5) formula első egyenlőtlenségét be lehet látni az alábbi eredményt, amelynek bizonyítását a 2. kiegészítésben fogom ismertetni.

**Tétel szubmartingálok maximumának a momentumairól.** *Legyen* $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$, $1 \leq n \leq N$, *nem-negatív szubmartingál, azaz legyen* $P(\xi_n(\omega) \geq 0) = 1$ *minden* $1 \leq n \leq N$ *indexre. Ekkor*

$$E\left(\max_{1 \leq n \leq N} \xi_n\right)^\alpha \leq \left(\frac{\alpha}{\alpha - 1}\right)^\alpha E\xi_N^\alpha \quad \textit{ha } \alpha > 1,$$

*és*

$$E\left(\max_{1 \leq n \leq N} \xi_n\right) \leq \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} E\xi_N \log^+ \xi_N$$

*az* $\alpha = 1$ *esetben, ahol* $\log^+ x = \max(\log x, 0)$.

*2. megjegyzés.* Az előző eredmény azt jelenti, hogy ha vesszük egy martingálnak (például nulla várható értékű valószínűségi változók részletösszegeinek) az abszolút értékét, akkor az így kapott sorozat maximumának a momentumai csak konstans számszor nagyobbak, mint az utolsó tag maximuma. Ez az egyenlőtlenség is olyan tényt fejez ki, hogy egy nem-negatív szubmartingál maximuma nem sokkal nagyobb, mint az utolsó tagja. Érdemes megjegyezni, hogy az $\alpha = 1$ eset kissé "kilóg a sorból". Itt a felső becslés kissé gyengébb, mert az egy $E|\xi_N|\log^+|\xi_N|$ alakú tagot is tartalmaz, azaz egy logaritmikus faktor is megjelenik. Megmutatták, hogy ez a tag nem hagyható el a becslésből.

*Konvergencia tételek martingálokra.*

Fontos eredmények érvényesek martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról. Itt csak a legfontosabb eredményt ismertetem. Ezenkívül megmutatom ennek az eredménynek egy érdekes alkalmazását, amely lehetővé teszi bizonyos esetekben a Radon–Nikodym derivált többé-kevésbé explicit kiszámolását. Ezeknek az eredményeknek a bizonyításában is azt használjuk ki, hogy a martingálok az igazságos, a szubmartingálok pedig az előnyös játékok modelljei.

**Tétel martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról.** *Legyen $(\xi_n(\omega),\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots$, martingál egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor az $E|\xi_n(\omega)|$, $n=1,2,\dots$, sorozat monoton növekszik. Ha ez a sorozat korlátos, azaz létezik olyan $K>0$ szám, amelyre $E|\xi_n(\omega)|\le K$ minden $n=1,2,\dots$ számra, akkor létezik 1 valószínűséggel a $\xi_\infty(\omega)=\lim\limits_{n\to\infty}\xi_n(\omega)$ határérték. Ezenkívül érvényes az $E|\xi_\infty(\omega)|\le K$ egyenlőtlenség is ugyanazzal a $K>0$ konstanssal.*

*A tétel bizonyítása.* Abból, hogy $(\xi_n(\omega),\mathcal{F}_n)$ martingál következik, hogy az $(|\xi_n(\omega)|,\mathcal{F}_n)$ sorozat $n=1,2,\dots$, szubmartingál. Ezért az $E|\xi_n(\omega)|$ sorozat monoton növekszik, amint azt a tételben állítjuk. Az, hogy a $\xi_n(\omega)$, $n=1,2,\dots$, sorozat 1 valószínűséggel konvergál ekvivalens azzal a ténnyel, hogy nulla annak a valószínűsége, hogy az $\xi_n(\omega)$, $n=1,2,\dots$, sorozat limesz szuperiora szigorúan nagyobb, mint annak limesz inferiora. Ezért annak érdekében, hogy megmutassuk azt, hogy a $\xi_n(\omega)$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál, elég megmutatni, hogy

$$P(\liminf_{n\to\infty}\xi_n(\omega)\le r_1<r_2\le\limsup_{n\to\infty}\xi_n(\omega))=0$$

minden $(r_1,r_2)$, $r_1<r_2$, racionális számpárra. Ezt meg tudjuk mutatni úgy, hogy definiáljuk természetes módon azt, hogy az $(\xi_n(\omega),n)$, $n=1,2,\dots$, pontokon keresztülmenő (véletlen) töröttvonal függvény hányszor metszi át az $[r_1,r_2]\times[1,\infty]$ sávot, és bebizonyítjuk, hogy ez a metszésszám 1 valószínűséggel véges.

Rögzítsünk valamilyen $1\le N<\infty$ számot és az $1\le n\le N$ időintervallumban történt átmetszések számának definiciója érdekében vezessük be a következő $\zeta_k(\omega)$, $k=1,2,\dots$ (véletlen) időpontokat:

$\zeta_1(\omega)=\min\{k\colon 1\le k\le N,\xi_k(\omega)\le r_1\}$, ha létezik ilyen $k$ index, $\zeta_2(\omega)=\min\{k\colon \zeta_1(\omega)\le k\le N,\xi_k(\omega)\ge r_2\}$, ha létezik ilyen $k$ index. A további $\zeta_j(\omega)$, $j=3,4,\dots$ időpontokat hasonlóan definiáljuk (amíg ez lehetséges). Ha $j$ páros szám, akkor legyen $\zeta_{j+1}(\omega)=\min\{k\colon\zeta_j(\omega)\le k\le N,\xi_k(\omega)\le r_1\}$, ha létezik ilyen $k$ index. Ha $j$ páratlan szám, legyen $\zeta_{j+1}(\omega)=\min\{k\colon\zeta_j(\omega)\le k\le N,\xi_k(\omega)\ge r_2\}$. Legyen $\beta_N(\omega)$ a legnagyobb olyan $j$ index, amelyet ily módon definiálni tudtunk, és ezután definiáljuk a $\zeta_{\beta_N(\omega)+1}$ valószínűségi változót (véletlen index-szel) a $\zeta_{\beta_N(\omega)+1} = N$ képlet segítségével. Vegyük észre, hogy $\{\omega\colon \zeta_j(\omega) = n\} \in \mathcal{F}_n$ tetszőleges $j = 1, 2, \dots, 1 \le n \le N$ számokra. Itt $\zeta_j(\omega)$-t tekinthetjük olyan valószínűségi változónak, amely nincs értelmezve az egész $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, vagy azt mondjuk, hogy $\zeta_j(\omega) = N + 1$ azokon az $\omega \in \Omega$ helyeken, ahol eddig nem definiáltuk őt. Be lehet látni, hogy a $\beta_N(\omega)$ valószínűségi becslés várható értéke teljesíti a következő egyenlőtlenséget.

**Becslés annak várható értékéről, hogy egy martingál hányszor metsz át egy intervallumot.** *Legyen $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots,$ martingál egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Rögzítsünk egy $N$, $N \ge 1$ egész, és két $r_1$, $r_2$, $r_1 < r_2$, valós számot, és tekintsük az általuk az előző bekezdésben definiált $\beta_N(\omega)$ valószínűségi változót. Ez teljesíti az*

$$\frac{E\beta_N(\omega) - 1}{2}(r_2 - r_1) \le E(\xi_N(\omega) - r_1)^+ \le E|\xi_N(\omega)| + |r_1|. \tag{D6}$$

*egyenlőtlenséget, ahol $x^+ = \max(x, 0)$.*

*A becslés bizonyítása.* Vezessük be a $\bar{\xi}_n(\omega) = (\xi_n(\omega) - r_1)^+$ és $\eta_n(\omega) = \bar{\xi}_{n+1}(\omega) - \bar{\xi}_n(\omega)$, $n = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változókat. Ekkor $(\bar{\xi}_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots,$ szemimartingál, és $E(\eta_n(\omega)|\mathcal{F}_n) \ge 0$ 1 valószínűséggel minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Tekintsük a $[\zeta_{2j-1}(\omega), \zeta_{2j})(\omega) - 1]$, $1 \le j \le \frac{\beta_N(\omega)}{2}$ (véletlen, és véletlen számú) intervallumok rendszerét, valamint az $A(\omega) = \{1, \dots, N-1\} \setminus \left( \bigcup_{j=1}^{[\frac{\beta_N(\omega)+1}{2}]} [\zeta_{2j-1}(\omega), \zeta_{2j}(\omega) - 1] \right)$ véletlen halmazt és a $Z_n(\omega) = \sum_{j=1}^{[\frac{\beta_N(\omega)+1}{2}]} (\bar{\xi}_{\zeta_{2j}(\omega)}(\omega) - \bar{\xi}_{\zeta_{2j-1}(\omega)}(\omega))$ valószínűségi változót, ahol $[x]$ egy szám egész részét jelöli. Ekkor $(r_2 - r_1)\frac{\beta_N(\omega)-1}{2} \le Z_N(\omega)$ 1 valószínűséggel, mert $(\bar{\xi}_{\zeta_{2j}(\omega)}(\omega) - \bar{\xi}_{\zeta_{2j-1}(\omega)}(\omega)) \ge (r_2 - r_1)$, ha $2j \le \beta_n(\omega)$, és a $2j = \beta_N(\omega) + 1$ esetben $(\bar{\xi}_{\zeta_{2j}(\omega)}(\omega) - \bar{\xi}_{\zeta_{2j-1}(\omega)}(\omega)) \ge 0$. A most bebizonyított egyenlőtlenségből következik, hogy

$$(r_2 - r_1)\frac{E\beta_N(\omega) - 1}{2} \le EZ_N(\omega).$$

Másrészt azt állítom, hogy

$$EZ_N(\omega) \le E(\xi_N(\omega) - r_1)^+ - E(\xi_1(\omega) - r_1)^+ \le E(\xi_N(\omega) - r_1)^+.$$

A fenti két egyenlőtlenségből következik a (D6) egyenlőtlenség első fele. Az utoljára felírt egyenlőtlenség pedig azért igaz, mert $E(\xi_N(\omega) - r_1)^+ - E(\xi_1(\omega) - r_1)^+ - EZ_N(\omega) = \sum_{n=1}^{N-1} E\eta_n I_{\{\omega\colon n \in A(\omega)\}}$, és mivel $\{\omega\colon n \in A(\omega)\} \in \mathcal{F}_n$, ezért $E\eta_n I_{\{\omega\colon n \in A(\omega)\}} \ge 0$ minden $1 \le n \le N - 1$ számra.

A (D6) formula második egyenlőtlensége nyílvánvaló.

A tétel bizonyítását egyszerűen befejezhetjük az előző becslés segítségével. Mivel $\beta_N(\omega)$, $N = 1, 2, \ldots$, monoton növekvő függvénysorozat, $\beta_N(\omega) \ge 0$ minden $N = 1, 2, \ldots$ számra és $\omega \in \Omega$ pontban, alkalmazhatjuk a Beppo–Levy tételt monoton függvény sorozat határértékének integráljáról. A Beppo–Levy tételből és a (D6) becslésből következik, hogy $E\left(\lim\limits_{N\to\infty} \beta_N(\omega)\right) = \lim\limits_{N\to\infty} E\beta_N(\omega) < \infty$, ahonnan kapjuk, hogy $P\left(\lim\limits_{N\to\infty} \beta_N(\omega) < \infty\right) = 1$. Innen következik a fent elmondottak alapján, hogy a $\xi_n(\omega)$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál egy $\xi_\infty(\omega)$ valószínűségi változóhoz. Be akarjuk látni még, hogy a $|\xi_\infty|$ valószínűségi változó egy valószínűséggel véges. Ezt a Fatou lemma segítségével mutatjuk meg. Innen ugyanis következik, hogy $E|\xi_\infty(\omega)| \le \lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n(\omega)| \le K$. A Tétel bizonyítását befejeztük.

Ismertetem a fenti eredmény egy változatát (enyhe élesítését), amely szubmartingálokról mond hasonló eredményt, és amelynek szintén vannak hasznos alkalmazásai.

**Tétel szubmartingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról.** *Ha $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, egy olyan szubmartingál amelyre $\sup\limits_n E|\xi_n(\omega)| \le K$ alkalmas $K < \infty$ konstanssal, akkor 1 valószínűséggel létezik a $\xi_\infty(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$ határérték, és ez a határérték teljesíti az $E|\xi_\infty(\omega)| \le K$ egyenlőtlenséget.*

E tétel az előző tétel bizonyításának kis változtatásával igazolható. A bizonyítás egyetlen új lépése annak megmutatása, hogy az $((\xi_n(\omega) - r_1)^+, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, sorozat is szubmartingál. Ez tekinthető a következő lemma speciális esetének.

**Lemma szubmartingálok konvex függvényeiről.** *Ha $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, szubmartingál, $\Phi(x)$ monoton növekvő konvex függvény, és $E|\Phi(\xi_n)| < \infty$ minden $n = 1, 2, \ldots$ számra, akkor $(\Phi(\xi_n), \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, szubmartingál.*

*Bizonyítás.* $E(\Phi(\xi_{n+1})|\mathcal{F}_n) \ge \Phi(E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n))$ 1 valószínűséggel a Jensen egyenlőtlenség miatt, és mivel $E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n) \ge \xi_n$ a szubmartingál tulajdonság miatt, és $\Phi(\cdot)$ monoton nővekvő függvény, ezért $\Phi(E(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)) \ge \Phi(\xi_n)$ 1 valószínűséggel. Ezekből az egyenlőtlenségekből következik a lemma állítása.

*Megjegyzés.* Szeretnénk bizonyos esetekben tudni, hogy a $\xi_n(\omega)$ martingál nem csak 1 valószínűséggel konvergál a $\xi_\infty(\omega)$ valószínűségi változóhoz, hanem $L_1$ normában is, azaz $\lim\limits_{n\to\infty} E|\xi_n(\omega) - \xi_\infty(\omega)| = 0$. Ez a reláció nem feltétlenül érvényes a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel feltételeinek teljesülése esetén. Ellenpéldát kaphatunk például azon példa módosításával, amelyben megmutattuk, hogyan lehet igazságos játékban 1 valószínűséggel nyerni.

Legyenek $X_n(\omega)$, $n = 1, 2 \ldots$, független valószínűségi változók, $P(X_n(\omega) = 2^{n-1}) = P(X_n(\omega) = -2^{n-1}) = \frac{1}{2}$. Definiáljuk az $S_n(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{n} X_j(\omega)$ részletösszegeket és a $\tau(\omega) = \min\{k\colon S_k(\omega) \ge 1\}$, $\tau_n(\omega) = \min(n, \tau(\omega))$, $n = 1, 2, \ldots$, megállási szabályokat. Vezessük be az $\xi_n(\omega) = S_{\tau_n(\omega)}$, $n = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változókat. Ekkor $\xi_n(\omega)$,

$n = 1, 2, \ldots$, martingál, és $E|\xi_n(\omega)| = 2 - 2^{-n}$, $n = 1, 2, \ldots$. Ez azt jelenti, hogy erre a martingálra is alkalmazható a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel. Közvetlenül is látható, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega) = 1$, azaz a martingál sorozat 1 valószínűséggel konvergál 1-hez, míg $E\xi_n(\omega) = 0$. Tehát ez a martingál 1 valószínűséggel konvergál 1-hez, és $L_1$ normában nem konvergál oda.

A következő eredmény a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel egyik érdekes következménye, amely segíthet a Radon–Nikodym derivált kiszámításában bizonyos esetekben.

**Tétel.** *Legyen adva egy $\xi(\omega)$, $E|\xi(\omega)| < \infty$, valószínűségi változó és $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{A}$ $\sigma$-algebrák növekvő sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Jelölje $\mathcal{F}_\infty$ a $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \ldots$ $\sigma$-algebrák által generált $\sigma$-algebrát. A*

$$\lim_{n\to\infty} E(\xi(\omega)|\mathcal{F}_n) = E(\xi(\omega)|\mathcal{F}_\infty)$$

*konvergencia teljesül 1 valószínűséggel és $L_1$ normában is.*

*A tétel bizonyítása.* A $(\xi_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $\xi_n(\omega) = E(\xi(\omega)|\mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, sorozat martingál, és $E|\xi_n(\omega)| \le E|\xi(\omega)|$, ezért alkalmazható rá a martingálok 1 valószínűségi konvergenciájáról szóló tétel. Innen következik, hogy létezik a $\xi_\infty(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n(\omega)$ határérték 1 valószínűséggel alkalmas $\xi_\infty(\omega)$ valószínűségi változóval, de be kell bizonyítani, hogy $\xi_\infty(\omega) = E(\xi(\omega)|\mathcal{F}_\infty)$. Ez ekvivalens azzal az állítással, hogy

$$\int_B \xi_\infty(\omega) P(\,d\omega) = \int_B \xi(\omega) P(\,d\omega) = \int_B E(\xi|\mathcal{F}_n)(\omega) P(\,d\omega)$$

minden $B \in \mathcal{F}_n$ halmazra és $n = 1, 2, \ldots$ számra. Ezért elég belátni, hogy

$$\lim_{n\to\infty} E|E(\xi|\mathcal{F}_n) - \xi_\infty(\omega)| \to 0,$$

azaz a $\xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, sorozat nem csak majdnem mindenütt, hanem $L_1$ normában is konvergál a $\xi_\infty(\omega)$ valószínűségi változóhoz. Ehhez az analízis általános eredményei alapján elegendő belátni, hogy a $\xi_n(\omega)$, $n = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változók egyenletesen integrálhatóak, azaz minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ szám, hogy $\int_{\{\omega\colon\, |\xi_n(\omega)| \ge K\}} |\xi_n(\omega)| P(\,d\omega) \le \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \ldots$ indexre. Viszont

$$\int_{\{\omega\colon\, |\xi_n(\omega)| \ge K\}} |\xi_n(\omega)| P(\,d\omega) \le \int_{\{\omega\colon\, |\xi_n(\omega)| \ge K\}} |\xi(\omega)| P(\,d\omega),$$

és minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, hogy $\int_B |\xi(\omega)| P(\,d\omega) < \varepsilon$, ha $P(B) \le \delta$. Másrészt, $P(\omega\colon |\xi_n(\omega)| \ge K) \le \frac{E|\xi_n(\omega)|}{K} \le \frac{E|\xi(\omega)|}{K} \le \delta$, ha $K \ge K_0(\delta)$ alkalmas $K_0(\delta) > 0$ számra. A fenti becslésekből következik a Tétel állítása.

**Következmény:** *Legyen adva egy $(X, \mathcal{X})$ mérhető téren egy $\mu$ valószínűségi mérték és egy $\nu$, a $\mu$ valószínűségi mértékre nézve abszolút folytonos előjeles mérték, amelynek* *mind a pozitív mind a negatív része véges. Tekintsük az $X$ tér olyan egyre finomodó $\{A_1^{(n)},\dots,A_{k_n}^{(n)}\}$ particióit, $n=1,2,\dots$, $A_j^{(n)}\in\mathcal{X}$, $1\le j\le k_n$, amelyek egyesítése generálja a $\mathcal{X}$ $\sigma$-algebrát, és definiáljuk az $f_n(x)=\frac{\nu(A_j^{(n)})}{\mu(A_j^{(n)})}$, ha $x\in A_j^{(n)}$ függvényeket. Az $f_n(\cdot)$ függvények $\mu$ majdnem mindenütt konvergálnak a $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$ Radon–Nikodym deriválthoz.*

*Bizonyítás:* Tekintsük az $(X,\mathcal{X},\mu)$ teret, mint valószínűségi mezőt, vezessük be rajta azokat az $\mathcal{F}_n$, $n=1,2,\dots$, $\sigma$-algebrákat, amelyek atomjai az $\{A_1^{(n)},\dots,A_{k_n}^{(n)}\}$ partició elemei, és legyen $f(x)=\frac{d\nu}{d\mu}(x)$, $x\in X$. Ekkor a Következményben megfogalmazott feltételek teljesülés esetén $Ef(x)<\infty$, $f_n(x)=E(f(x)|\mathcal{F}_n)$, és az $\mathcal{F}_n$ növekvő $\sigma$-algebra sorozat generálja a $\mathcal{X}$ $\sigma$-algebrát. Ezért az előző tétel szerint $f_n(x)$ egy valószínűséggel konvergál az $f(x)$ függvényhez, és ezt kellett belátnunk.

A fenti eredménynek érvényes a következő általánosítása, amely szintén hasznos biznyos alkalmazásokban.

**A következmény általánosítása:** *Legyen adva egy $(X,\mathcal{X})$ mérhető téren egy $\mu$ valószínűségi mérték és egy $\nu$, a $\mu$ valószínűségi mértékre nézve abszolút folytonos előjeles mérték, amelynek mind a pozitív, mind a negatív része véges. Tekintsük az $X$ téren $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots$ $\sigma$-algebrák olyan növekvő sorozatát, amelyek egyesítése generálja a $\mathcal{X}$ $\sigma$-algebrát. Vezessük be az $f_n(x)=\left.\frac{d\nu}{d\mu}\right|_{\mathcal{F}_n}(x)$, $x\in X$, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változókat, amelyek a $\mu$ mérték Radon–Nikodym deriváltjával egyenlőek, ha mind a $\mu$ mind a $\nu$ mértéket megszorítjuk a $\mathcal{F}_n$ $\sigma$-algebrára. Az $f_n(x)$, $n=1,2,\dots$, függvények $\mu$ majdnem minden pontban és $L_1(\mu)$ normában is konvergálnak a $\frac{d\nu}{d\mu}(x)$ Radon–Nikodym deriválthoz az $(X,\mathcal{X})$ téren.*

*Megfordítva, ha nem tudjuk, hogy a $\nu$ mérték abszolút folytonos-e a $\mu$ mértékre nézve az $(X,\mathcal{X})$ téren, de tudjuk, hogy az $f_n(x)$ függvények $L_1(\mu)$ normában konverálnak egy $f_\infty(x)$ függvényhez, akkor állíthatjuk azt, hogy a $\nu$ mérték abszolút folytonos az $(X,\mathcal{X})$ téren a $\mu$ mértékre nézve, és $\frac{d\nu}{d\mu}(x)=f_\infty(x)$.*

*Indoklás:* Az szorul még magyarázatra, hogy abból, hogy az $f_n(x)$ függvények $L_1(\mu)$ normában konvergálnak egy $f_\infty$ függvényhez miért következik a $\nu$ mérték abszolút folytonossága a $\mu$ mértékre nézve az $(X,\mathcal{X})$ téren $f_\infty(x)$, $x\in X$, Radon–Nikodym deriválttal. Viszont az adott feltételek mellett felírhatjuk, hogy

$$\nu(A)=\lim_{n\to\infty}\int_A f_n(x)\mu(\,dx)=\int_A f_\infty(x)\mu(\,dx)$$

minden $A\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\mathcal{F}_n$ halmazra. Viszont a mértékek kiterjesztésének egyértelműsége miatt (egy algebráról egy $\sigma$-algebrára) következik, hogy a $\nu(A)=\int_A f_\infty(x)\mu(\,dx)$ azonosság érvényes minden $A\in\mathcal{X}$ halmazra, és ezt kellett bizonyítanunk.

*Feladat:* Legyenek $\xi_1(\omega),\xi_2(\omega),\dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyeknek létezik várható értékük. Legyen $\tau(\omega)$ egy megállási szabály a $\mathcal{F}_n=$

$\mathcal{B}(\xi_1,\dots,\xi_n)$, $n=1,2,\dots$, $\sigma$-algebrák sorozatára nézve. Tegyük fel továbbá, hogy létezik olyan $N$ egész szám, amelyre $P(\tau(\omega)\le N)=1$. Vezessük be az $S_n(\omega)=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k(\omega)$, $n=1,2,\dots$, jelölést. Mutassuk meg, hogy $ES_{\tau(\omega)}(\omega)=E\tau(\omega)E\xi_1(\omega)$. Igaz ennek az állításnak a következő némileg élesebb formája is. Ha $E\tau<\infty$, (azaz $\tau$ nem feltétlenül véges, csak véges várható értékű valószínűségi változó, akkor $ES_{\tau(\omega)}=E\tau(\omega)E\xi_1(\omega)$.

Ha $E\xi_1(\omega)=0$, $E\xi_1^2(\omega))<\infty$ és $P(\tau(\omega)\le N)=1$ valamely véges $N$ számmal akkor $ES^2_{\tau(\omega)}(\omega)=E\tau(\omega)E\xi_1^2(\omega)$. (A fenti eredményeket hívják Wald azonosságnak az irodalomban.)

*Megoldás:* Vegyük észre, hogy az $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k-nE\xi_1$, $n=1,2,\dots$ sorozat martingált alkot. Ezért, ha $P(\tau\le N)=1$ valamely véges $N$ számra, akkor $E(S_\tau-\tau E\xi_1)=E(S_1-E\xi_1)=0$, azaz $ES_\tau=E\tau E\xi_1$. Azt az esetet, ha csak annyit teszünk fel a $\tau$ megállási szabályról, hogy $E\tau<\infty$ a következő módon vezethetjük vissza erre az esetre. Legyen $\xi_k^+=\max(\xi_k,0)$, $\xi_k^-=\min(\xi_k,0)$, $S_n^+=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^+$, $S_n^-=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k^-$ és $\tau_N=\min(\tau,N)$. Elég belátni, hogy $ES_\tau^+=E\xi_1^+E\tau$, és $ES_\tau^-=E\xi_1^-E\tau$. Viszont $ES^+_{\tau_N}=E\xi_1^+E\tau_N$ tetszőleges $N$ egész számra, és az $S^+_{\tau_N}$ és $\tau_N$ valószínűségi változók sorozatai 1 valószínűséggel monoton nőnek. Ezért a Beppo–Levy tétel alapján $ES_\tau^+=\lim\limits_{n\to\infty}ES^+_{\tau_N}$, és $E\tau=E\lim\limits_{N\to\infty}E\tau_N$. Innen $ES_\tau^+=E\xi_1^+E\tau$. Az $ES_\tau^-=E\xi_1^-E\tau$ azonosság hasonlóan látható.

Ha $E\xi_1=0$, akkor az $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$ részletösszegekkel az $(S_n^2-nE\xi_1^2,\mathcal{F}_n)$, $n=1,2,\dots$, sorozat martingált alkot, mert

$$\begin{aligned}E(S^2_{n+1}-(n+1)E\xi_1^2)|\mathcal{F}_n)&=E((S_n+\xi_{n+1})^2|\mathcal{F}_n)-(n+1)E\xi_1^2\\&=S_n^2+2S_nE(\xi_{n+1}|\mathcal{F}_n)+E\xi^2_{n+1}-(n+1)E\xi_1^2=S_n^2-nE\xi_1^2.\end{aligned}$$

Innen $ES_\tau^2-E\tau E\xi_1^2=0$, ha $P(\tau\le N)=1$ valamely egész $N$ számra.

*Feladat:* Legyen $S_1(\omega),S_2(\omega),\dots,$ a nulla pontból kiinduló bolyongás az egész számokon, azaz legyenek az $S_{n+1}(\omega)-S_n(\omega)$ valószínűségi változók függetlenek, és vegyenek fel $+1$ vagy $-1$ értéket, mind a kettőt $\frac{1}{2}$ valószínűséggel. Rögzítsünk egy $a>0$ pozitív és egy $b<0$ negatív egész számot. Jelölje $\tau_{a,b}(\omega)$ azt a véletlen időpontot, amikor a bolyongás először eléri az $a$ vagy $b$ pontot. Lássuk be (az előző feladat eredményének a segítségével), hogy annak a valószínűsége, hogy először az $a$ pontot látogatja meg a bolyongás $\frac{a}{a+|b|}$, annak, hogy a $b$ pontot $\frac{|b|}{a+|b|}$. Továbbá $E\tau_{a,b}=a|b|$. Jelölje $\tau_a(\omega)$ azt a véletlen időpontot, amikor a bolyongás először meglátogatja az $a>0$ pontot. Lássuk be, hogy $P(\tau_a(\omega)<\infty)=1$, de $E\tau_a(\omega)=\infty$.

*Segítség:* Vegyük észre, hogy $S_{\tau_{N,(a,b)}(\omega)}(\omega)$, és $S^2_{\tau_{N,(a,b)}(\omega)}(\omega)-\tau_{N,(a,b)}(\omega)$, $N=1,2,\dots$, martingálok, ahol $\tau_{N,(a,b)}(\omega)=\min(N,\tau_{a,b}(\omega))$. Ennek segítségével belátható, hogy

$ES_{\tau_{a,b}(\omega)}(\omega) = 0$, és

$$E\tau_{a,b}(\omega) = ES^2_{\tau_{a,b}(\omega)}(\omega) = a^2P(P(\tau_{a,b}(\omega) = a) + b^2P(\tau_{a,b}(\omega) = -b).$$

Továbbá $P(\tau_a(\omega) < \infty) = \lim\limits_{b\to-\infty} P(\tau_{a,b}(\omega) < \infty) = 1$, és $E\tau_a(\omega) = \lim\limits_{b\to-\infty} E\tau_{a,b}(\omega) = \infty$.

*Feladat:* Legyen $W(t,\omega)$, $t \ge 0$, Wiener-folyamat a félegyenesen. Lássuk be, hogy a $Z(t,\omega) = e^{W(t,\omega)-t^2/2}$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat martingál.

*Feladat:* Legyen $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener-folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Vegyük a $[0,1]$ intervallum egyre finomodó $0 = t_1^{(n)} < t_2^{(n)} < \cdots < t_{k_n}^{(n)} = 1$ felosztássorozatát minden $n = 1,2,\dots$ számra úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{1\le j<k_n} (t_{j+1}^{(n)} - t_j^{(n)}) = 0$, és vegyük a $Z_n(\omega) = \sum\limits_{j=1}^{k_n-1} \left(W(t_{j+1}^{(n)}) - W(t_j^{(n)})\right)^2$ valószínűségi változókat és $\mathcal{F}_n = \mathcal{B}(W(t_j^{(n)}),\ 1 \le j \le k_n)$ $\sigma$-algebrákat. Mutassuk meg, hogy a $(Z_n(\omega), \mathcal{F}_n)$, $n = 1,2,\dots$, sorozat martingál. Mutassuk meg a martingálok 1 valószínűségi konvergencia tételének a segítségével, hogy a $Z_n(\omega)$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál 1-hez.

*Segítség:* Ha már bebizonyítottuk azt, hogy a $Z_n(\omega)$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál, de még nem tudjuk, hogy mi a limesz, akkor elegendő egy elég ritka részsorozatának a határértékét megtalálni annak érdekében, hogy a bizonyítást befejezzük. Az előadásban szereplő hasonló tétel bizonyítása segít ennek a részfeladatnak a megoldásában.

*Nem kötelező feladat:* Tekintsük a $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener-folyamatot a $[0,1]$ intervallumon és a $W(t,\omega) + mt$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamatot, ahol $m$ rögzített valós szám. Jelölje $\mu$ a Wiener-folyamat, és $\nu_m$ a $W(t,\omega) + mt$ sztochasztikus folyamat eloszlását a $C([0,1])$ térben. Mutassuk meg, hogy a $\nu_m$ mérték abszolút folytonos a $\mu$ mértékre nézve, és Radon–Nikodym deriváltja $\frac{d\nu_m}{d\mu}(x(t)) = e^{mx(1)-m^2/2}$ az $x(t)$, $0 \le t \le 1$, folytonos függvény helyén.

*Az előző nem kötelező feladat általánosítása:* Tekintsük a $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener-folyamatot a $[0,1]$ intervallumon és egy $W(t,\omega) + \int_0^t m(t)\,dt$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamatot, ahol $m(t)$, $0 \le t \le 1$, folytonosan differenciálható függvény. szám. Jelölje $\mu$ a Wiener-folyamat, és $\nu_m$ a $W(t,\omega) + \int_0^t m(t)\,dt$ sztochasztikus folyamat eloszlását a $C([0,1])$ térben. Mutassuk meg, hogy a $\nu_m$ mérték abszolút folytonos a $\mu$ mértékre nézve, és Radon–Nikodym deriváltja

$$\frac{d\nu_m}{d\mu}(x(t)) = \exp\left\{\int_0^1 m(t)\,dx(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 m(t)^2\,dt\right\}.$$

(Az eredmény általánosítható, de ennek megfogalmazásához sztochasztikus integrálok használatára van szükség, és ez nem témája ennek az előadásnak.)

*Nem kötelező feladat:* Legyen $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener-folyamat a $[0,1]$ intervallumon. Mutassuk meg, hogy ennek feltételes eloszlása feltéve, hogy $W(1,\omega) = x$ megegyezik egy $B(t,\omega) + tx$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat eloszlásával, ahol $B(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, egy Wiener-bridge. Pontosabban megfogalmazva, rögzítve valamilyen $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_k \le 1$ időpontokat és $u_1, \dots, u_k$ számokat

$$\begin{aligned} &P(W(t_1,\omega) < u_1, \dots, W(t_k,\omega) < u_k | W(1,\omega) = x) \\ &\qquad = P(B(t_1,\omega) + t_1 x < u_1, \dots, B(t_k,\omega) + t_k x < u_k). \end{aligned}$$

*Segítség:* Érdemes a bizonyításban felhasználni a $W(t,\omega) = B(t,\omega) + tW(1,\omega)$ azonosságot, ahol $B(t,\omega) = W(t,\omega) - tW(1,\omega)$ a $W(1,\omega)$ valószínűségi változótól független Wiener-bridge.

**1. Kiegészítés.** *Szubmartingálok maximumának a momentumairól.*

Ebben a kiegészítésben a következő eredményt fogom bebizonyítani.

**Tétel szubmartingálok maximumának a momentumairól.** *Legyen $(\xi_n, \mathcal{F}_n)$, $1 \le n \le N$, nem-negatív szubmartingál, azaz legyen $P(\xi_n(\omega) \ge 0) = 1$ minden $1 \le n \le N$ indexre. Ekkor*

$$E\left(\max_{1\le n\le N} \xi_n\right)^\alpha \le \left(\frac{\alpha}{\alpha-1}\right)^\alpha E\xi_N^\alpha \quad \text{ha } \alpha > 1,$$

*és*

$$E\left(\max_{1\le n\le N} \xi_n\right) \le \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} E\xi_N \log^+ \xi_N$$

*az $\alpha = 1$ esetben, ahol* $\log^+ x = \max(\log x, 0)$.

*Bizonyítás.* Parciális integrálással kapjuk, hogy ha $\eta$ nem negatív valószínűségi változó $G(x)$ eloszlásfüggvénnyel, akkor minden $\alpha > 0$ számra igaz az $E\eta^\alpha = \int_0^\infty x^\alpha G(\,dx) = \int_0^\infty (1 - G(x))\,dx^\alpha = \int_0^\infty \alpha x^{\alpha-1}(1 - G(x))\,dx$ azonosság.

Alkalmazzuk ezt az azonosságot az $\eta_N = \max\limits_{1\le n\le N} \xi_n$ valószínűségi változóra. Továbbá felhasználjuk, hogy ha $G(\cdot)$ jelöli $\eta_N$ eloszlásfüggvényét, akkor a (D5) formulában bizonyított azonosság első része szerint

$$1 - G(\lambda) = P(\eta_N \ge \lambda) \le \frac{1}{\lambda} \int_{\{\omega\colon \eta_N(\omega) > \lambda\}} \xi_N(\omega)\,dP(\omega).$$

A várható érték fenti kifejezéséből és az előző egyenlőtlenségből az $\alpha > 1$ esetben azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} E\eta_N^\alpha &= \int_0^\infty \alpha\lambda^{\alpha-1}(1 - G(\lambda))\,d\lambda \le \int_0^\infty \alpha\lambda^{\alpha-2} \left[\int_{\{\omega\colon \eta(\omega) > \lambda\}} \xi_N(\omega)\,dP(\omega)\right] d\lambda \\ &= \int_\Omega \left[\int_0^{\eta(\omega)} \alpha\lambda^{\alpha-2}\,d\lambda\right] \xi_N(\omega)\,dP(\omega) = \int_\Omega \frac{\alpha}{\alpha-1} \eta_N(\omega)^{\alpha-1} \xi_N(\omega)\,dP(\omega). \end{aligned}$$

Innen és a Hölder egyenlőtlenségből $p = \frac{\alpha}{\alpha-1}$ választással azt kapjuk, hogy

$$E\eta_N^\alpha \le \frac{\alpha}{\alpha-1}\int_\Omega \eta_N(\omega)^{\alpha-1}\xi_N(\omega)\,dP(\omega) \le \frac{\alpha}{\alpha-1}\left(E\eta_N^\alpha\right)^{(\alpha-1)/\alpha}\left(E\xi_N^\alpha\right)^{1/\alpha},$$

azaz $\left(E\left(\max\limits_{1\le n\le N}\xi_n\right)^\alpha\right)^{1/\alpha} = (E\eta_N^\alpha)^{1/\alpha} \le \frac{\alpha}{\alpha-1}(E\xi_N^\alpha)^{1/\alpha}$, és ezt kellett belátni.

Az $\alpha = 1$ esetben hasonlóan érvelhetünk, de ekkor a $\lambda \le 1$ esetben érdemes a látszólag durvább $1 - G(\lambda) \le 1$ azonosságot alkalmazni. Innen

$$\begin{aligned}E\eta_N &= \int_0^\infty (1-G(\lambda))\,d\lambda \le 1 + \int_1^\infty \frac{1}{\lambda}\left[\int_{\{\omega\colon\, \eta(\omega)>\lambda\}} \xi_N(\omega)\,dP(\omega)\right] d\lambda \\ &= 1 + \int_\Omega \left[\int_1^{\max(1,\eta(\omega))} \frac{1}{\lambda}\,d\lambda\right] \xi_N(\omega)\,dP(\omega) \\ &= 1 + \int_{\{\omega\colon\, \eta_N(\omega)\ge 1\}} \xi_N(\omega)\log\eta_N(\omega)\,dP(\omega).\end{aligned}$$

Becsüljük meg a fenti becslés jobboldalán szereplő integrált az

$$a\log b \le a\log a + \frac{b}{e} \le a\log^+ a + \frac{b}{e}, \quad \text{ha } a \ge 0, \text{ és } b > 0$$

egyenlőtlenség segítségével. Az $a = \xi_N(\omega)$ és $b = \eta_N(\omega)$ választással az

$$\begin{aligned}\int_{\{\omega\colon\, \eta_N(\omega)\ge 1\}} \xi_n(\omega)\log\eta_N(\omega)\,dP(\omega) &\le \int_{\{\omega\colon\, \eta_N(\omega)\ge 1\}} \left(\xi_N(\omega)\log^+\xi_N(\omega) + \frac{\eta_N(\omega)}{e}\right) dP(\omega) \\ &\le E\xi_N(\omega)\log^+\xi_N(\omega) + \frac{1}{e}E\eta_N(\omega)\end{aligned}$$

becslést kapjuk, ahonnan

$$\left(1-\frac{1}{e}\right) E\max_{1\le n\le N}\xi_n = \left(1-\frac{1}{e}\right) E\eta_N \le 1 + E\xi_N\log^+\xi_N,$$

és ezt kellett belátni.

(A felhasznált egyenlőtlenségsorozatnak elég az első tagját igazolni, amely a $\log\frac{b}{a} \le \frac{b}{ea}$, vagy $1 + \log\frac{b}{ea} \le \frac{b}{ea}$ alakban írható. Ez következik az $1 + \log x \le x$, ha $x > 0$ egyenlőtlenségből.)

**2. Kiegészítés.** *Szubmartingálok jellemzése az un. Doob felbontás segítségével.*

Ezen eredmény megfogalmazása érdekében bevezetjük a következő fogalmat.

**Előrejelezhető sorozatok definiciója.** *Legyen adva $\sigma$-algebrák $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots$ növekvő sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyre teljesül az $\mathcal{F}_n \subset \mathcal{A}$ tulajdonság minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Azt mondjuk, hogy valószínűségi változók egy $Z_n$, $n = 1, 2, \dots$, sorozata előrejelezhető erre a $\sigma$-algebra sorozatra, ha $Z_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető minden $n = 1, 2, \dots$ indexre. (E definicióban $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$.)*

Legyen $M_n$, $n = 1, 2, \dots$, egy martingál, és $Z_n$, $n = 1, 2, \dots$, egy olyan előrejelezhető sorozat $\sigma$-algebrák egy $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2 \subset \mathcal{F}_3 \subset \cdots$ növekvő sorozatára nézve, amelyre $Z_1 \le Z_2 \le \dots$. Ekkor $X_n = M_n + Z_n$, $n = 1, 2, \dots$, szubmartingál az $\mathcal{F}_n$ $\sigma$-algebra sorozatra nézve. Doob felbontási tétele azt állítja, hogy minden szubmartingál előállítható ilyen módon. Sőt azt is feltehetjük, hogy $Z_0 \equiv 0$. Ebben az esetben a szubmartingál előállítása a fenti módon egyértelmű. Részletesebben megfogalmazva igaz a következő eredmény.

**Tétel szubmartingálok Doob felbontásáról.** *Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, szubmartingál $\mathcal{F}_n$ növekvő $\sigma$-algebrák sorozatával. Ekkor létezik olyan $(M_n, \mathcal{F}_n)$ martingál és valószínűségi változók $Z_n$, $0 \equiv Z_1 \le Z_2 \le \dots$, $n = 1, 2, \dots$, előrejelezhető sorozata az $\mathcal{F}_n$, $n = 1, 2, \dots$, $\sigma$-algebra sorozatra, amelyekre $X_n = M_n + Z_n$, $n = 1, 2, \dots$. Továbbá a fenti tulajdonságú $M_n$ és $Z_n$ sorozatokat egyértelműen meghatározza az $(X_n, \mathcal{F}_n)$ szubmartingál.*

*Bizonyítás.* Definiáljuk az $U_k = E(X_k | \mathcal{F}_{k-1}) - X_{k-1}$, $k \ge 2$, mennyiségeket, és legyen $Z_1 = 0$, $Z_n = \sum_{k=2}^n U_k$, $n = 2, 3, \dots$, $M_n = X_n - Z_n$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor $U_k \ge 0$, ezért $0 \equiv Z_1 \le Z_2 \le \dots$, $Z_n$ $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető, azaz a $Z_n$ sorozat előrejelezhető, $X_n = M_n + Z_n$. Továbbá az $M_n$ sorozat martingál, mert $E(U_k | \mathcal{F}_{n-1}) = U_k$, ha $k \le n$, ezért $E(M_n | \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1} = E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - X_{n-1} - U_n = 0$.

Annak érdekében, hogy belássuk a Doob-féle felbontás egyértelműségét tekintsünk egy másik $X_n = M_n^* + Z_n^*$ Doob-féle felbontást, és mutassuk meg $n$ szerinti teljes indukcióval, hogy $Z_n^* = Z_n$, és $M_n^* = M_n$.

Az $n = 1$ esetben $Z_1^* = Z_1 = 0$, $M_1^* = M_1 = X_1$. Ha tudjuk az állítást $n - 1$-re, akkor felírhatjuk az előrejelezhetőség, a martingál tulajdonság és az induktív feltevés alapján, hogy

$$\begin{aligned} Z_n^* &= E(Z_n^* | \mathcal{F}_{n-1}) = E((X_n - M_n^*) | \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1}^* \\ &= E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1}. \end{aligned}$$

Hasonlóan,

$$Z_n = E(Z_n | \mathcal{F}_{n-1}) = E((X_n - M_n) | \mathcal{F}_{n-1}) = E(X_n | \mathcal{F}_{n-1}) - M_{n-1}.$$

Ezért $Z_n^* = Z_n$, és $M_n^* = X_n - Z_n^* = X_n - Z_n = M_n$.

**3. Kiegészítés.** *Eredmények folytonos idejű szubmartingálok viselkedéséről.*

Ebben a kiegészítésben megfogalmazok néhény olyan eredményt folytonos idejű martingálokról és szubmartingálokról, amelyek fontos szerepet játszanak az Itô integrálok elméletében. A bizonyításokat, amelyek azon alapulnak, hogy az eredményeket vissza lehet vezetni azok diszkrét idejű megfelelőire, elhagyom.

Olyan martingálokat és szubmartingálokat fogunk tekinteni, amelyekben olyan $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$ (vagy $0 \leq t \leq T$ valamely $T > 0$ számmal) filtráció szerepel, amelyre teljesülnek a következő feltételek:

(i) $\mathcal{F}_0$ tartalmazza az összes olyan $A \in \mathcal{A}$ halmazt az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben, amelyre $P(A) = 0$.

(ii) Az $\mathcal{F}_t$ filtráció jobbról folytonos, azaz $\mathcal{F}_{t+} = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s = \mathcal{F}_t$ minden $t$ paraméterre.

Ezenkívül feltesszük azt is, hogy a tekintett $X_t$ martingál vagy szubmartingál jobbról folytonos, azaz minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre az $X_t(\omega)$ függvény, mint a $t \geq 0$ vagy $0 \leq t \leq T$ paraméter függvénye jobbról folytonos.

Igazak a következő egyenlőtlenségek.

**Tétel.** *Legyen* $(X_t, \mathcal{F}_t$ *jobbról folytonos szubmartingál. Ekkor tetszőleges* $0 < S < T < \infty$ *és* $x > 0$ *számokra*

$$xP\left(\sup_{S \leq t \leq T} X_t > x\right) \leq EX_T^+.$$

*Ha ezenkívül* $X_t(\omega) \geq 0$ *minden* $t > 0$ *számra és* $\omega \in \Omega$ *elemi eseményre, valamint* $p > 1$*, akkor*

$$E\left(\sup_{S \leq t \leq T} X_t\right)^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right) EX_T^p.$$

Azt mondjuk, hogy egy $(X_t, \mathcal{F}_t$ szubmartingálnak van utolsó eleme, ha vagy a paraméter tartomány egy $t \in [0, T]$ zárt intervallum vagy $t \in [0, \infty)$, és létezik olyan $X_\infty$ valószínűségi változó, amelyre $X_t \leq E(X_\infty | \mathcal{F}_\infty)$ 1 valószínűséggel minden $0 \leq t < \infty$ számra. Teljesül a következő opcionális megállási tétel.

**Opcionális megállási tétel.** *Legyen* $(X_t, \mathcal{F}_t)$ *olyan folytonos idejű jobbról folytonos syubmartingál, amelynek létezik utolsó eleme. Legyen* $\sigma$ *és* $\tau$ *két olyan megállási idő, amelyekre* $\sigma \leq \tau$ *1 valószínűséggel. Ekkor*

$$E(X_\tau | \mathcal{F}_\sigma) \geq X_\sigma \quad \text{1 valószínűséggel.}$$

Igaz a következő szubmartingál konvergenciatétel.

**Szubmartingál konvergenciatétel.** *Legyen* $(X_t, \mathcal{F}_t)$*,* $t \geq 0$*, jobbról folytonos szubmartingál, amelyre* $\sup_{t \geq 0} E|X_t| < \infty$*. Ekkor 1 valószínűséggel létezik a* $\lim_{t \to \infty} X_t = X_\infty$ *határérték, és* $E|X_\infty| < \infty$*.*

A diszkrét idejű szubmartingálok Doob felbontásáról szóló tételnek is létezik folytonos idejű megfelelője, amelyet úgy hívnak, hogy Doob–Meyer felbontás. Ennek az eredménynek azonban van még egy plusz feltétele. Ezen feltétel megfogalmazása érdekében először felidézem az egyenletes integrálhatóság fogalmát.

**Egyenletes integrálhatóság fogalma.** *Legyen adva valószínűségi változók egy $\mathcal{D}$ halmaza egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy a valószínűségi változók ezen $\mathcal{D}$ halmaza egyenletesen integrálható, ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ szám, amelyre*

$$\int_{\{|X|>K\}} |X|\, dP < \varepsilon \quad \textit{minden } X \in \mathcal{D} \textit{valószínűségi változóra.}$$

Ezen fogalom segítségével bevezetjük valószínűségi változók DL osztályát. Ez a fogalom szerepelni fog a Doob–Meyer felbontásban.

**DL osztályok definiciója.** *Legyen adva egy $\mathcal{F}_t$, $t \geq 0$, filtráció és legyen $X_t$, $t \geq 0$, valószínűségi változóknak az $\mathcal{F}_t$ filtrációra adaptált halmaza. Jelölje továbbá minden $a > 0$ számra $\mathcal{S}_a$ azon megállási szabályok halmazát az $\mathcal{F}_t$ filtrációra nézve, amelyek 1 valószínűséggel kisebbek, mint $a$. Azt mondjuk, hogy az $X_t$, $t \geq 0$, valószínűségi változóknak a halmaza teljesíti a DL tulajdonságot, ha az $\{X_\tau,\ \tau \in \mathcal{S}_a\}$, valószínűségi változók halmaza egyenletesen integrálható minden $a > 0$ számra.*

**Tétel szubmartingálok Doob–Meyer felbontásáról.** *Legyen $(X_t, \mathcal{F}_t)$, $t \geq 0$, olyan jobbról folytonos szubmartingál, amelyre $X_t$, $t \geq 0$, teljesíti a DL tulajdonságot. Ekkor létezik az $X_t$ szubmartingálnak olyan $X_t = M_t + A_t$, $t \geq 0$, felbontása, amelyre $M_t$, $t \geq 0$, martingál, $A_t$ olyan adaptált folyamat , amelyre $A_0 \equiv 0$, és $A_t(\omega)$ egy valószínűséggel monoton nem csökkenő függvény. Továbbá az ilyen tulajdonságú $X_t = M_t + A_t$, $t \geq 0$, felbontás egyértelmű.*