Feladatok:

1a.) Legyen η standard normális eloszlású valószínűségi változó. Bizonyítsa be, hogy $Ee^{t\eta} = e^{t^2/2}$.

1b) Legyen $W(t)$, $t \geq 0$, Wiener folyamat, a valós szám. Mutassa meg, hogy

$$\exp\left\{aW(t) - \frac{a^2}{2}t\right\}, \quad t \geq 0,$$

martingál.

Megoldás:

1a.)

$$\begin{aligned} Ee^{t\eta} &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx - x^2/2}\, dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2/2 + tx - x^2/2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{t^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(t-x)^2/2}\, dx = e^{t^2/2} \end{aligned}$$

1b.) Legyen $0 \leq s < t$. Ekkor $W(t) = W(s) + [W(t) - W(s)] = W(s) + \sqrt{t-s}\frac{W(t)-W(s)}{\sqrt{t-s}}$, továbbá $W(s)$ $\mathcal{F}_s$ mérhető $\frac{W(t)-W(s)}{\sqrt{t-s}}$ pedig az $\mathcal{F}_s$ σ-algebrától független standard normális eloszlású valószínűségi változó. (Egy olyan $(W(t), \mathcal{F}_t)$ martingállal dolgozunk, ahol rögzített $s > 0$ számra a $W(u+s) - W(s)$, $u \geq 0$, folyamat független az $\mathcal{F}_s$ σ-algebrától.)

Ezért, ha $0 \leq s < t$, akkor

$$\begin{aligned} &E\left(\exp\left\{aW(t) - \frac{a^2}{2}t\right\} \middle| \mathcal{F}_s\right) \\ &\quad = E\left(\exp\left\{a\left(W(s) + \sqrt{t-s}\frac{W(t) - W(s}{\sqrt{t-s}}\right) - \frac{a^2}{2}t\right\} \middle| \mathcal{F}_s\right) \\ &\quad = \exp\left\{aW(s) - \frac{a^2}{2}t\right\} E\left(\exp\left\{a\sqrt{t-s}\frac{W(t) - W(s)}{\sqrt{t-s}}\right\} \middle| \mathcal{F}_s\right) \\ &\quad = \exp\left\{aW(s) - \frac{a^2}{2}t\right\} E\left(\exp\left\{a\sqrt{t-s}\frac{W(t) - W(s)}{\sqrt{t-s}}\right\}\right) \\ &\quad = \exp\left\{aW(s) - \frac{a^2}{2}t\right\} \exp\left\{\frac{a^2(t-s)}{2}\right\} = \exp\left\{aW(s) - \frac{a^2}{2}s\right\}. \end{aligned}$$

Tekintsük a Kevei jegyzet 3. példáját, és beszéljük meg részletesebben hogyan kell a benne szereplő Itô folyamatok szorzatát kiszámolni. (A feladat eredménye egy ezzel a képlettel ekvivalens állítás.)

Legyenek adva az

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s\, ds + \int_0^t H_s\, dW_s$$

és

$$Y_t = Y_0 + \int_0^t L_s\, ds + \int_0^t G_s\, dW_s$$

Itô folyamatok, és írjuk fel az $X_t Y_t$ szorzatot Itô folyamat formájában.

Az Itô formulát kell alkalmazni az $X_t Y_t = f(X_t, Y_t)$ folyamatra, ahol $f(x,y) = xy$, azaz az $f(x,y)$ kétváltozós függvény első koordinátájába az X_t a második koordinátájába az Y_t Itô folyamatot kell behelyettesíteni. Ekkor
$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y$, $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 1$, azaz
$\frac{\partial f}{\partial x}(X_t, Y_t) = Y_t$, $\frac{\partial f}{\partial y}(X_t, Y_t) = X_t$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, Y_t) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_t, Y_t) = 0$,
$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(X_t, Y_t) = 1$.

Az X_t és Y_t folyamatokat meghatározó formulák differenciálalakban
$dX_t = K_t\, dt + H_t\, dW_t$ és $dY_t = L_t\, dt + G_t\, dW_t$ (X_0 és Y_0 kezdeti értékekkel). Ezért az Itô formula szerint

$$\begin{aligned} dX_t Y_t &= \frac{\partial f}{\partial x}(X_t, Y_t)\, dX_t + \frac{\partial f}{\partial y}(X_t, Y_t)\, dy_t \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(X_t, Y_t)\, (dX_t)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(X_t, Y_t)\, (dY_t)^2 \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(X_t, Y_t)(dX_t\, dY_t) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(X_t, Y_t)(dX_t\, dY_t) \\ &= Y_t\, dX_t + X_t\, dY_t + (\, dX_t\, dY_t) = Y_t\, dX_t + X_t\, dY_t + H_t G_t\, dt, \end{aligned}$$

azaz ezt az azonosságot "kiintegrálva"

$$X_t Y_t - X_0 Y_0 = \int_0^t Y_s\, dX_s + \int_0^t X_s\, dY_s + \int_0^t H_s G_s\, ds.$$

A Kevei jegyzet ezt az azonosságot írja fel kissé átrendezett alakban. Természetesen ebben az azonosságban bizonyos integrálokat részletesebben is felírhatnánk. Nevezetesen,

$$\int_0^t Y_s\, dX_s = \int_0^t Y_s (K_s\, ds + H_s\, dW_s) = \int_0^t Y_s K_s\, ds + \int_0^t Y_s H_s\, dW_s,$$

és

$$\int_0^t X_s\, dY_s = \int_0^t X_s(L_s\, ds + G_s\, dW_s) = \int_0^t X_s L_s\, ds + \int_0^t X_s G_s\, dW_s.$$

A.) Legyen $Z(t) = e^{U(t)}$ és $Y(t) = e^{-U(t)}$, ahol $U(t) = \int_0^t X(s)\, dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t X^2(s)\, ds$ egy olyan $X(s)$, $0 \le s \le T$, sztochasztikus folyamattal, amelyre $X(\cdot) \in \mathcal{H}'$ ezért az $\int_0^t X(s)\, dW(s)$ és $\int_0^T X^2(s)\, ds$, $0 \le t \le T$, és így az előbb felírt $U(t)$ Itô-folyamat létezik. Mutassa meg, hogy igazak a

$$dZ(t) = Z(t)X(t)\, dW(t), \quad Z(0) = 1,$$

és

$$dY(t) = Y(t)[X^2(t)\, dt - X(t)\, dW(t)], \quad Y(0) = 1,$$

azonosságok.

B.) Mutassa meg, hogy ha a $Z(t)$ Itô folyamat teljesíti a $dZ(t) = Z(t)X(t)\, dW(t)$, $Z(0) = 1$, azaz a $Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s)X(s)\, dW(s)$ egyenletet az A) feladatban szereplő $X(t)$ sztochasztikus folyamattal, akkor

$$d[Y(t)Z(t)] = 0.$$

Ezért a $dZ(t) = Z(t)X(t)\, dW(t)$ egyenletnek az egyetlen a $Z(0) = 1$ határfeltételt teljesítő megoldása a Kevei jegyzet 6. példájában tárgyalt $Z(t) = e^{U(t)}$ sztochasztikus folyamat.

Megoldás. Legyen $f(x) = e^x$, $g(x) = e^{-x}$. Ekkor $Z(t) = f(U_t)$, $Y(t) = g(U_t)$ és az Itô formula szerint

$$\begin{aligned} dZ(t) &= f'(U_t)\, dU(t) + \frac{1}{2} f''(U_t)[\, dU(t)]^2 \\ &= e^{U(t)} \left[X(t) dW(t) - \frac{1}{2} X^2(t)\, dt \right] + \frac{1}{2} e^{U(t)} X^2(t)\, dt \\ &= e^{U(t)} X(t)\, dW(t) = Z(t)X(t)\, dW(t), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} dY(t) &= g'(U_t)\, dU(t) + \frac{1}{2} g''(U_t)[\, dU(t)]^2 \\ &= -e^{-U(t)} \left[X(t) dW(t) - \frac{1}{2} X^2(t)\, dt \right] + \frac{1}{2} e^{-U(t)} X^2(t)\, dt \\ &= e^{-U(t)}[-X(t)\, dW(t) + X^2(t)\, dt] = Y(t)[X^2(t)\, dt - X(t)\, dW(t)], \end{aligned}$$

és ez volt az a) rész bizonyítása.

A b) rész bizonyítása.

Ha $Z(t)$ olyan Itô folyamat, amelyre $dZ(t) = Z(t)X(t)\,dW(t)$, akkor az előző feladat és az a) rész eredményei alapján

$$\begin{aligned} d[Y(t)Z(t)] &= Y(t)\,dZ(t) + Z(t)\,dY(t) + \,dZ(t)\,dY(t) \\ &= Y(t)Z(t)X(t)\,dW(t) + Z(t)Y(t)[X^2(t)\,dt - X(t)\,dW(t)] \\ &\qquad - Z(t)X(t)Y(t)X(t)\,dt = Y(t)Z(t)[0\cdot\,dW(t) + 0\cdot\,dt] = 0 \end{aligned}$$

Ezért $Z(t)Y(t) = Z(0)Y(0)$ minden $0 \le t \le T$ időpontra. Ha a $Z(0) = 1$ reláció is teljesül, akkor $Z(t)Y(Y(t) = 1$.

Az a) rész szerint $Z(t) = e^{U(t)}$ megoldása az $dZ(t) = Z(t)X(t)\,dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletnek, és $Z(0) = 1$. A b) rész már bizonyított része szerint, ha $Z(t)$ megoldása ennek a sztochasztikus differenciálegyenletnek a $Z(0) = 1$ kezdeti feltétel mellett, akkor $Z(t) = Y^{-1}(t) = e^{U(t)}$ minden $0 \le t \le T$ időpontban.

Megjegyzés. Az Itô integrálok elméletében fontos szerepet játszanak a $Z(t) = e^{U(t)}$, $U(t) = \int_0^t X(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t X^2(s)\,ds$, $0 \le t \le T$, alakú folyamatok valamilyen $X \in \mathcal{H}$ sztochasztikus folyamattal. Ezek hasonló szerepet játszanak, mint az $\exp\left\{\int_0^t A(s)\,ds\right\}$ alakú (determinisztikus) függvények az analízisben, és szokás őket Doléans–exponential-nak nevezni. Egy ilyen sztochaszikus folyamatokról szóló martingál egyenlőtlenség fontos szerepet játszott az Itô integrálok általános definiciójának általunk ismertetett módjában.

Másrészt tudjuk, hogy ha adva van egy $A(t)$ függvény, akkor a $\frac{dy}{dt} = A(t)y(t)$ differenciálegyenletnek (differenciál alakban $dy = A(t)y(t)\,dt$), $y(0) = 1$ határfeltétellel az egyetlen megoldása az $y(t) = \exp\left\{\int_0^t A(s)\,ds\right\}$ függgvény. Az előző feladat arról szól, hogy a Doléans–exponential hasonló tulajdonsággal rendelkezik. Adva egy $X \in \mathcal{H}'$ sztochasztikus folyamat, a $dZ(t) = X(t)Z(t)\,dW(t)$, $Z(0) = 1$, sztochasztikus differenciálegyenlet egyetlen megoldása a $Z(t) = e^{U(t)}$ sztochasztikus folyamat, ahol $U(t) = \int_0^t X(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t X^2(s)\,ds$.

3.) Legyen adva egy $W(t)$ Wiener folyamat. Számoljuk ki az Itô formula segítségével az $\int_0^t W(s)\,dW(s)$ integrált. (Ez a Kevei jegyzet 5. példája.)

Megoldás. Számoljuk ki az $W(t)^2$ kifejezést az Itô formulát alkalmazva a $W(t) = \int_0^t 1\,dW(s)$ Itô folyamatra az $f(x) = x^2$ függvénnyel. Azt kapjuk, hogy

$$d(W^2(t)) = 2W(t)\,dW(t) + \frac{1}{2}\cdot 2\,dt,$$

azaz

$$W^2(t) - W^2(0) = \int_0^t 2W(s)\,dW(s) + \int_0^t 1\,ds = 2\int_0^t W(s)\,dW(s) + t,$$

tehát $\int_0^t W(s)\,dW(s) = \frac{1}{2}(W^2(t) - t)$.

Megjegyzem, hogy e számolás szerint $W^2(t)-t$ előállítható, mint egy Wiener folyamat szerinti Itô integrál a következő módon. $W^2(t)-t=\int_0^t 2W(s)\,dW(s)$. Továbbá ezen Itô integrál magfüggvénye teljesíti az $E\int_0^T(2W(t))^2\,dt<\infty$ relációt, tehát eleme az Itô integrálok definiciójában szereplő $\mathcal{H}$ halmaznak. Ezzel azt is bebizonyítottuk, hogy $W^2(t)-t$ martingál, (és nem csak szemimartingál).

4a) Tekintsünk egy $X(t)=W(t)+\int_0^t\vartheta(s)\,ds$, $0\le t\le T$, Itô folyamatot, ahol $W(t)$ egy Wiener folyamat, $\int_0^T|\vartheta(s)|\,ds<\infty$ 1 valószínűséggel, és vegyük minden $n=1,2,\dots$ számra a $[0,T])$ intervallum egy olyan felosztását $[t_{i-1}^{(n)},t_i^{(n)})$, $i=1,\dots,n$, $0=t_0^{(n)}<t_1^{(1)}<\cdots<t_n^n=T$ intervallumokra, amelyekre $\max\limits_{1\le i\le n}(t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)})\to 0$, ha $n\to\infty$. Tekintsük az $U_n=\sum_{i=1}^n(X(t_i^{(n)})-X(t_{i-1}^{(n)}))^2$ valószínűségi változókat. Mutassa meg, hogy $U_n\Rightarrow T$, ha $n\to\infty$, ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelent.

Megoldás. Legyen $V(t,\omega)=\int_0^t\vartheta(s,\omega)\,ds$, és $V_0(t,\omega)=\int_0^t|\vartheta(s,\omega)|\,ds$. Ekkor $V_n=\sum_{i=1}^n|V(t_i^{(n)})-V(t_{i-1}^{(n)})|<V_0(T)$, mert $|V(t_i^{(n)})-V(t_{i-1}^{(n)})|<V_0(t_i^{(n)})-V_0(t_{i_1}^{(n)})$, $i=1,\dots,n$. Ezért a $V_n^{(1)}=\sum_{i=1}^n(V(t_i^{(n)})-V(t_{i-1}^{(n)}))^2$ valószínűségi változókra $V_n^{(1)}\to 0$ 1 valószínűséggel, mivel $V(t,\omega)$, $0\le t\le T$, 1 valószínűséggel egyenletesen folytonos, és $\max\limits_{1\le i\le n}(t_i^{(n)}-t_{i-1}^{(n)})\to 0$, ha $n\to\infty$. Ezért

$$
\begin{aligned}
U_n=\sum_{i=1}^n(X(t_i^{(n)})-X(t_{i-1}^{(n)}))^2&=\sum_{i=1}^n\Big((W(t_i^{(n)})+V(t_i^{(n)}))-(W(t_{i-1}^{(n)})+V(t_{i-1}^{(n)}))\Big)^2\\
&=\sum_{i=1}^n(W(t_i^{(n)})-W(t_{i-1}^{(n)}))^2+\sum_{i=1}^n(V(t_i^{(n)})-V(t_{i-1}^{(n)}))^2\\
&\quad+2\sum_{i=1}^n(W(t_i^{(n)})-W(t_{i-1}^{(n)}))(V(t_i^{(n)})-V(t_{i-1}^{(n)}))=I_1^{(n)}+I_2^{(n)}+I_3^{(n)}.
\end{aligned}
$$

Az előadáson tanultuk, hogy $I_1^{(n)}\Rightarrow T$, (valójában azt az erősebb állítást láttuk, hogy L_2 konvergencia is érvényes), láttuk, hogy $I_2^{(n)}\to 0$ (1 valószínűségű konvergencia is érvényes). Másrészt a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$
\begin{aligned}
|I_3^{(n)}|&=2\left|\sum_{i=1}^n(W(t_i^{(n)})-W(t_{i-1}^{(n)}))(V(t_i^{(n)})-V(t_{i-1}^{(n)}))\right|\\
&\le 2\left(\sum_{i=1}^n(W(t_i^{(n)})-W(t_{i-1}^{(n)}))^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n(V(t_i^{(n)})-V(t_{i-1}^{(n)}))^2\right)^{1/2}\\
&=\sqrt{I_1^{(n)}I_2^{(n)}}\Rightarrow 0.
\end{aligned}
$$

innen következik a feladat állítása.

4b) Tekintsünk egy $\alpha W(t)$ sztochasztikus folyamatot, ahol $W(t)$ Wiener folyamat, $\alpha > 0$, $\alpha \neq 1$ valós szám, valamint tekintsük a 4a) feladatban definiált $X(t)$ sztochasztikus folyamatot egy $[0,T]$ intervallumon. Bizonyítsa be, hogy az $\alpha W(t)$ és $X(t)$ sztochasztikus folyamatok eloszlása két egymásra nézve szinguláris mérték a $C([0,T])$ téren, azaz a $[0,T]$ intervallumon folytonos függvények Banach terén a szuprémum normával.

Megoldás. Használjuk a 4a) feladatban bevezetett mennyiségeket. Tekintsük az ott definiált U_n valamint a $W_n^{(\alpha)} = \sum_{i=1}^n (\alpha W(t_i^{(n)}) - \alpha W(t_{i-1}^{(n)}))^2$ valószínűségi változókat. Tudjuk, hogy létezik az egész számoknak olyan n_k részsorozata, amelyre $U_{n_k} \to T$ és $W_{n_k}^{(\alpha)} \to \alpha^2 T$ 1 valószínűséggel. Ez azt jelenti, hogy ki tudunk jelölni két egymástól diszjunkt halmazt a $C([0,T])$ téren úgy, hogy az $X(t)$ folyamat trajektóriái 1 valószínűséggel az első, az $\alpha W(t)$ folyamat trajektóriái pedig 1 valószínűséggel a második halmazba esnek. Tehát a két folyamat eloszlása egymásra nézve szinguláris.

Megjegyzés. A 4b) feladat gondolatának finomításával és néhány az Itô integrálokról szóló mély tétel felhasználásával meg lehet mutatni, hogy miért természetes az a Girsanov tétel megfogalmazásában, hogy amikor egy olyan az $X(t)$ folyamatot meghatározó P mértékkel ekvivalens mértéket keresünk, amely szerint az $X(t)$ folyamat martingál, akkor azt az erősebb megkötést kívánjuk teljesíteni, hogy az $X(t)$ folyamat az új mérték szerint legyen Wiener folyamat.

A 'Folytonos idejű Markov láncok' című írásomban ismertettem a születési (folytonos idejű Markov láncok) időbeli eloszlását leíró (forward) egyenletrendszer egy megoldását, ami a következőképpen néz ki. Induljon a születési folyamat a nulla időpontban nulla létszámú populációval, és legyenek a születési folyamat paraméterei $\lambda_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, számok, ahol a λ_n paraméter azt jelenti, hogy ha a t időpontban a populáció összlétszáma n, akkor a $[t, t+h]$ időintervallumban $\lambda_n h + o(h)$ valószínűséggel születik egy új egyed. (Halálozás nem történik, és annak valószínűsége, hogy legalább két egyed születik a $[t, t+h)$ időintervallumban $o(h)$.) A következő megoldást kaptuk. Léteznek $\xi_0, \xi_1, \dots$ független valószínűségi változók úgy, hogy ξ_n exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ_n paraméterrel, és a rendszer fejlődése a következő. Az első egyed a ξ_0 időpontban születik, és miután megszületett az n-ik egyed, azután ξ_n idő múlva születik meg az $n+1$-ik egyed. Tehát az n-ik egyed az $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} \xi_k$ időpontban születik meg. Arra vagyunk kiváncsiak, hogy mikor "robban fel" véges időn belül a rendszer, azaz milyen $\lambda_0, \lambda_1, \dots$ paraméterek esetén történik meg az, hogy a populáció véges időn belül végtelen lesz.

A populáció akkor éri el a végtelen létszámot T időn belül, ha $\sum_{n=0}^\infty \xi_n < T$. Tehát a rendszer akkor "robban fel" véges időn belül, ha $\sum_{n=0}^\infty \xi_n < \infty$. A valószínűségszámítás bizonyos klasszikus eredményei szerint független valószínűségi változók összegei vagy 1 valószínűséggel konvergálnak vagy 1 valószínűséggel divergálnak, és Kolmogorov háromsor tétele megmondja, hogy mikor melyik eset következik be.

5.) Legyen ξ_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, független, exponenciális eloszlású valószínűségi változók sorozata $\lambda_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, paraméterekkel. Bizonyítsa be, hogy a $\sum_{n=0}^\infty \xi_n$ összeg 1 valószínűséggel konvergens, ha $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$ és 1 valószínűséggel divergens, ha $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. Tehát a feladat megfogalmazása előtt tekintett születési folyamat akkor "robban fel" véges időn belül 1 valószínűséggel, ha $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$.

Megoldás. Egy λ paraméterű exponenciális eloszlású valószínűségi változó várható értéke $\frac{1}{\lambda}$, szórásnégyzete $\frac{1}{\lambda^2}$. Ezért, ha $\sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, akkor $\sum\limits_{n=0}^\infty E\xi_n = \sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} < \infty$, és $\sum\limits_{n=0}^\infty \operatorname{Var} \xi_n = \sum\limits_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty$. Bizonyos eredmények alapján ebből következik, hogy a $\sum\limits_{n=0}^\infty \xi_n$ összeg 1 valószínűséggel konvergens.

Be akarjuk, látni, hogy ha $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = \infty$, akkor a $\sum_{n=0}^\infty \xi_n$ összeg 1 valószínűséggel divergens. Feltehetjük, hogy $\lambda_n \to \infty$, ha $n \to \infty$, mert ellenkező esetben végtelen sok olyan n_i index van, amelyre $P(\xi_{n_i} > 1) > c$ valamilyen $c > 0$ számmal, és ekkor a $\sum_{n=0}^\infty \xi_n$ összeg 1 valószínűséggel divergál a Borel–Cantelli lemma alapján. Másrészt, ha $\lambda \to \infty$ és $\xi(\lambda)$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, akkor $\lambda E(\xi(\lambda) I(\{\xi(\lambda) < 1\})) \to 1$, ahol $I(A)$ egy A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Valóban,

$$\lambda E(\xi(\lambda) I(\{\xi(\lambda) < 1\})) = \lambda \int_0^1 \lambda x e^{-\lambda x}\, dx = \int_0^\lambda y e^{-y}\, dy \to \int_0^\infty y e^{-y}\, dy = 1,$$

ha $\lambda \to \infty$. Innen következik, hogy $\sum_{n=0}^\infty E(\xi_n I(\{\xi_n < 1\})) = \infty$, ha $\sum_{n=0}^\infty \frac{1}{\lambda_n} = \infty$. A Kolmogorov-féle háromsor tételből következik, hogy ekkor a $\sum_{n=0}^\infty \xi_n$ összeg 1 valószínűséggel divergens.

Mind a 'Folytonos idejű Markov láncok' című írásom mind Kevei Péter jegyzete tárgyalja azt, hogyan lehet felírni a folytonos idejű diszkrét állapotterű Markov láncok átmenetvalószínűségeit meghatározó Kolmogorov-féle backword és forward egyenleteket. Mind a két írás kissé általánosabban tárgyalja a kérdést. Az én írásom a nem feltétetlenül stacionárius Markov láncokra is felírja ezeket az egyenleteket, majd megfogalmazza, hogy mit mondanak ezek az egyenletek abban a speciális esetben, ha stacionárius Markov láncokat tekintünk. A Kevei jegyzet általános stacionárius Markov folyamatokat tekint, és azokra fogalmazza meg az egyenleteket. Ezt új, alkalmasan definiált mennyiségek, a Markov folyamat úgynevezett infinitezimális generátorának, illetve ezen operátor adjungáltjának a segítségével teszi meg. Ez az eredmény speciális esetként tartalmazza a folytonos idejű stacionárius Markov láncokra érvényes Kolmogorov egyenleteket. Magyarázatra szorul, hogy honnan látható, hogy ez a két írásban különböző módon bebizonyított és más fogalmakat használó egyenlet ugyanazt állítja. A következő feladat célja ennek a magyarázatnak a megadása.

Olyan folytonos idejű stacionárius Markov láncokat fogunk tekinteni, amelyeknek az állapottere a pozitív egész számok $\{1, 2, \dots\}$ halmaza. Valójában az érvelések megváltoztatása nélkül választhattunk volna általánosabban egy tetszőleges megszámlálható $\{E_1, E_2, \dots,\}$ halmazt állapottérnek a diszkrét topológiával, (azaz olyan topológiával amelyben minden 1 elemű halmaz nyílt). Olyan Markov láncokat fogunk tekinteni, amelyek $P(t,i,j)=P(X_t=j|X_0=i)$ átmenetvalószínűségeire teljesülnek az alábbi aszimptotikus relációk:

$$P(h,i,i)=1-c_ih+o(h), \quad P(h,i,j)=c_ip_{i,j}h+o(h) \quad \text{kis } h>0 \text{ számokra,} \tag{1}$$

és

$$c_i\ge 0,\ \ p_{i,i}=0,\ \ p_{i,j}\ge 0,\ \ \sum_{j=1}^{\infty}p_{i,j}=1 \text{ minden } i,j=1,2,\dots \text{ indexre.} \tag{2}$$

Megjegyzem, hogy a (2) tulajdonság következik az (1) tulajdonságból és néhány regularitási feltételből. Valójában, ahhoz, hogy az eredményeket bebizonyítsuk, erősebb feltételek kellenek, amelyek biztosítják, hogy a számolások során fellépő $o(h)$ nagyságrendű mennyiségek által okozott hibák elhanyagolhatóak. Az én írásomban ezek a kérdések tárgyalva vannak, a Kevei jegyzet, amely csak egy átfogó képet kíván adni erről a problémakörről nem vizsgálja az ilyen technikai részleteket.

6.) Tekintsünk egy olyan folytonos idejű $X(t)$, $t\ge 0$, stacionárius Markov láncot az $\mathcal{E}=\{1,2,\dots\}$ állapottéren, amelynek $P(t,i,j)$ átmenetvalószínűségei kielégítik az (1) és (2) relációt. Számolja ki e Markov lánc S infinitezimális generátorát és annak S^* adjungálját. Ezen eredmények és a Kevei jegyzetben ismertetett Kolmogorov-féle forward és backward egyenletek segítégével (a Kevei jegyzet ezeket előre és hátra egyenletnek nevezi), írja fel az ezen egyenletek által a tekintett Markov lánc átmenetvalószïnűségeinek az idő paraméter szerinti $\frac{dP(t,i,j)}{dt}$ deriváltját.

Emlékeztető. Az S infinitezimális generátor definiciója a következő. Adva egy (szép tulajdonságú) $f=f(i)$ függvény az $\mathcal{E}=\{1,2,\dots\}$ állapottéren ennek (Sf) képe az S infinitezimális generátor hatására az

$$(Sf)(i)=\lim_{h\to 0}\frac{E(f(X(h))|X(0)=i)-f(i)}{h}, \quad i\in\mathcal{E}=\{1,2,\dots\},$$

függvény.

Az S infinitezimális generátor S^* adjungáltja egy a Markov lánc $\mathcal{E}=\{1,2,\dots\}$ állapottéren definiált (szép tulajdonságú) $\mu=(\mu(1),\mu(2),\dots)$ (előjeles) mértéket arra a szintén az $\mathcal{E}=\{1,2,\dots\}$ állapotterén definiált $S^*\mu$ mértékre képez le, amelyet az

$$\int (Sf)\,d\mu=\int f\,d(S^*\mu)$$

azaz

$$\sum_{i=1}^{\infty}(Sf)(i)\mu(i)=\sum_{i=1}^{\infty}f(i)(S^*\mu)(i)$$

azonosság határoz meg minden olyan f függvényre, amelyre az (Sf) infinitezimális generátor létezik. Be lehet látni, hogy az ilyen f függvények elég sokan vannak, ezért a fenti reláció egyértelműen meghatározza az $S^*\mu$ mértéket.

Megoldás.

$$E(f(X(h))|X(0)=i)=\sum_{j=1}^{\infty}P(h,i,j)f(j)=(1-c_ih)f(i)+\sum_{j\,:\,j\neq i}c_ip_{i,j}f(j)h+o(h)$$

az (1) reáció szerint. (Valójában az (1) reláció egy erősebb változata kellene, amely szerint a $o(h)$ hibatagok összege is elhanyagolható.) Innen kapjuk, hogy

$$E(f(X(h))|X(0)=i)-f(i)=h\left(-c_if(i)+\sum_{j\,j\neq i}c_ip_{i,j}f(j)+o(1)\right).$$

Elosztva ezen egyenlet mindkét oldalát h-val, majd véve a $h\to 0$ határátmenetet, azt kapjuk, hogy

$$(Sf)(i)=-c_if(i)+c_i\sum_{j:\;j\neq i}p_{i,j}f(j).$$

Így kiszámoltuk az (Sf) függvény értékét minden $i\in\mathcal{E}=\{1,2,\dots\}$ pontban. (Természetesen egy precíz bizonyításban az elvégzett határátmenetek részletesebb indoklást igényeltek volna, és a feltételeket is pontosabban meg kellett volna fogalmazni.)

Az (Sf) kiszámításáról kapott képletet a következőképp is interpretálhatjuk. Definiáljuk a $(B(i,j))$, $i,j=1,2,\dots$, végtelen mátrixot, amelyet a $B(i,i)=-c_i$, és $B(i,j)=c_jp_{j,i}$, ha $i\neq j$, $i,j=1,2,\dots$, képlettel definiálunk. Tekintsük az $f=(f(1),f(2),\dots,)$ és $\mu=(\mu(1),\mu(2),\dots)$ végtelen (sor)vektorokat. Ekkor

$$(Sf)=(Sf)(1),(Sf)(2),\dots)=fB.$$

Innen követekezik, hogy $\sum_{i=1}^{\infty}(Sf)(i)\mu(i)=fB\mu^*=\mu B^*f^*$. Ezért definiálva az $S^*\mu=\mu B^*$ vektort azt kapjuk, hogy

$$\sum_{i=1}^{\infty}(Sf)(i)\mu(i)=\mu B^*f=\sum_{i=1}^{\infty}f(i)(S^*\mu)(i)$$

az előbb definiált $S^*\mu$ vektorral minden olyan f függvényre, amelyre (Sf) definiálva van. Innen

$$(S^*\mu)(j)=-c_j\mu(j)+\sum_{k:\;k\neq j}c_kp_{k,j}\mu(k),\quad j\in\mathcal{E}=\{1,2,\dots\}.$$

Számoljuk ki, hogy mit ad a Kolomogorov-féle forward és backward egyenlet a tekintett modellben az (Sf) és $S\mu$ ismeretében. Tekintsük először a Kevei jegyzet (28) képletében leírt Kolmogorov-féle backward egyenletet a $B=\{j\}$ halmazzal és $x=i$ ponttal. Ekkor $\frac{\partial}{\partial t}p_t(B,x)=\frac{dP(t,i,j)}{dt}$, és $(Sp_t(B|\cdot))(x)=(Sf)(i)$, az

$f(i) = P(t,i,j)$, $i = 1,2,\dots$, függvénnyel (rögzített j paraméterrel). Ezért a Kolmogorov-féle backward egyenlet és az (Sf)-re adott képlet szerint

$$\frac{dP(t,i,j)}{dt} = -c_i P(t,i,j) + c_i \sum_{k\colon\, k\neq i} p_{i,k} P(t,k,j).$$

Tekintsük a Kolmogorov-féle forward egyenletet. Ez a Kevei jegyzet (30) képletében van megadva. Megint válasszunk $B = \{j\}$-t, és $x = i$-t. Ekkor $\frac{\partial}{\partial t} p_t(B,x) = \frac{dP(t,i,j)}{dt}$, és $(S^* p_t(\cdot|x))(B) = (S^*\mu)(j)$ a $\mu(j) = P(t,i,j)$, $j = 1,2,\dots$, mértékkel, (rögzített i számmal). A Komogorov-féle forward egyenlet a mi esetünkben azt adja, hogy

$$\frac{dP(t,i,j)}{dt} = -c_j P(t,i,j) + \sum_{k\colon\, k\neq j} c_k p_{k,j} P(t,i,k).$$

A most kapott képletek a Kolmogorov-féle forward és backward egyenletekről a tekintett modellben megegyeznek a Folytonos idejű Markov láncok jegyzet megfelelő eredményeivel, azzal a megjegyzéssel, hogy nincs jelentősége annak, hogy a tekintett képletekben szereplő összegekben kihagyjuk-e azt a tagot, amelyre $k = i$ vagy $k = j$, mert $p_{i,i} = p_{j,j} = 0$ a (2) formula szerint.

7.) Mutassa meg, hogy a Poisson folyamat $\frac{P(i,j,t)}{dt}$ deriváltjaira az előző feladatban bizonyított és a Kevei jegyzetben tárgyalt formulák ugyanazt az eredményt adják.

A Kevei jegyzetben meg van fogalmazva (és fel van használva Gronwall-lemma), amely a következőt mondja.

Legyen $\alpha(t)$ és $\beta(t)$ két integrálható függvény egy $[a,b]$ intervallumon, amelyekre teljesül az

$$\alpha(t) \le \beta(t) + H \int_a^t \alpha(s)\,ds, \quad t \in [a,b],$$

egyenlőtlenség valamely $H \ge 0$ számmal. Ekkor

$$\alpha(t) \le \beta(t) + H \int_a^t e^{H(t-s)}\,ds$$

minden $a \le t \le b$ számra.

8.) Bizonyítsa be a Gronwall lemmát.

Megoldás: Adjunk először jó becslést az $A(t) = \int_a^t \alpha(s)\,ds$, $0 \le t \le b$, függvényre. Mivel $\frac{d}{dt}\left(e^{-Ht}A(t)\right) = e^{-Ht}[\alpha(t) - HA(t)] \le e^{-Ht}\beta(t)$ a lemma feltétele miatt, és $A(a) = 0$, ezért $e^{-Ht}A(t) \le \int_a^t e^{-Hs}\beta(s)\,ds$ minden $a \le t \le b$ számra. Innen $\alpha(t) \le \beta(t) + H\cdot A(t) \le \beta(t) + H\int_a^t e^{H(t-s)}\beta(s)\,ds$ minden $a \le t \le b$ számra.

A Kevei jegyzet bebizonyítja azt, hogy ha egy $Y(t)$ sztochasztikus folyamat teljesíti a $dY(t) = -\mu Y(t)\,dt + \sigma dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletet ($\mu > 0$, $\sigma > 0$) akkor az csak $Y(t) = e^{-\mu t}\left(Y(0) + \int_0^t e^{\mu s}\sigma dW(s)\right)$ alakú lehet, (ahol $Y(0)$ független a $W(t)$ Wiener folyamattól. A következő feladat ezen állítás megfordítását fogalmazza meg.

9. Bizonyítsa be az Itô formula segítségével, hogy az

$$Y(t) = e^{-\mu t}\left(Y(0) + \int_0^t e^{\mu s}\sigma dW(s)\right)$$

sztochasztikus folyamat teljesíti a $dY(t) = -\mu Y(t)\,dt + \sigma dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletet, és az értéka a nulla időontban $Y(0)$.

Megoldás. Definiáljuk a $Z(t) = e^{\mu t}Y(t) = Y(0) + \int_0^t e^{\mu s}\sigma dW(s)$, sztochasztikus folyamatot, az $f(t,x) = e^{-\mu t}x$ függvényt, és alkalmazzuk az Itô formulát az $Y(t) = f(t, Z(t))$ folyamatra. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} dY(t) = {} & \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial t}\right|_{(t,x)=(t,Z(t))} dt + \left.\frac{\partial f(t,x)}{\partial x}\right|_{(t,x)=(t,Z(t))} dZ(t) \\ & + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2}\right|_{(t,x)=(t,Z(t))} (dZ(t))^2 \\ = {} & -\mu e^{-\mu t} Z(t)\,dt + e^{-\mu t}\,dZ(t) = -\mu Y(t)\,dt + \sigma\,dW(t), \end{aligned}$$

mert $\frac{\partial f(t,x)}{\partial t} = -\mu e^{\mu t}x$, $\frac{\partial f(t,x)}{\partial x} = e^{\mu t}$, $\frac{\partial^2 f(t,x)}{\partial x^2} = 0$, $e^{-\mu t}Z(t) = Y(t)$, és $dZ(t) = e^{\mu t}\sigma\,dW(t)$. A definiált $Y(t)$ folyamat értéke a nulla időpontban $Y(0)$, tehát ez a sztochasztikus folyamat teljesíti a kívánt feltételeket.

10.) A Kevei jegyzet eredményei alapján a stacionárius Ornstein–Uhenbeck folyamat stacionárius megoldása egy olyan $Y(t)$, $t \ge 0$, Gauss folyamat, amelyre $EY(t) = 0$, $\operatorname{Cov}(Y(s), Y(t)) = \frac{\sigma^2}{2\mu}e^{-\mu|t-s|}$, $s, t \ge 0$. Legyen $W(t)$, $t \ge 0$, Wiener folyamat, és definiáljuk az $U(t) = \frac{\sigma}{\sqrt{2\mu}}\frac{W(e^{-2\mu t})}{e^{-\mu t}}$, $-\infty < t < \infty$, sztochasztikus folyamatot. Ez olyan stacionárius Gauss folyamat, amelyre $EU(t) = 0$, $\operatorname{Cov}(U(s), U(t)) = \frac{\sigma^2}{2\mu}e^{-\mu|t-s|}$, tehát ennek megszorítása a $t \ge 0$ félegyenesre ugyanolyan eloszlású, mint a stacionárius Ornstein–Uhlenbeck folyamat.