A Borel–Cantelli lemma és annak általánosítása.

A valószínűségszámítás egyik fontos eredménye a Borel–Cantelli lemma. Először informálisan ismertetem, hogy milyen probléma vizsgálatában jelent meg ez az eredmény.

A kérdés a következő: Mikor mondhatjuk azt, hogy bizonyos események közül végtelen sok bekövetkezik: a.) egy valószínűséggel, b.) pozitív valószínűséggel? Például mikor mondhatjuk, hogy egy (vagy pozitív) valószínűséggel végtelen sok olyan nap van, amikor valami jó történik? Ha ez teljesül, akkor minden nap bízhatunk abban, hogy lesz a jövőben olyan nap, amelyben valami jó történik, érdemes még élni.

A Borel–Cantelli lemmát megfogalmazásának és bizonyításának érdekében érdemes a halmazelmélet nyelvén megfogalmazni azt a tényt, hogy bízonyos események közül végtelen sok következik be. Ez azt jelenti, hogy ha adva van végtelen sok $A_1, A_2, \dots$ esemény (halmaz) egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, akkor azt az eseményt, hogy ezek közül végtelen sok következik be definiálni kívánjuk az $A_1, A_2, \dots$ események halmazelméleti függvényeként, azaz (megszámlálható) unió, metszet és komplementerképzés segítségével.

Ennek a feladatnak a megoldását tárgyaltuk az előadáson. (Lásd a 2. téma jegyzetének 7. feladatát.) E feladat megoldásának az eredménye alapján a keresett esemény $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k$ alakban adható meg, és ennek valószínűségét akarjuk megbecsülni. Erről a valószínűségről ad információt a Borel–Cantelli lemma.

Borel–Cantelli lemma. *Legyen adva végtelen sok $A_1, A_2, \cdots$ esemény egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. A következő két állítás igaz:*

a.) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) < \infty$, akkor

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0,$$

azaz ebben az esetben egy valószínűséggel csak véges sok A_n esemény következik be.

b.) Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, és az A_n, $n = 1, 2, \dots$, események függetlenek, akkor

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 1,$$

azaz ebben az esetben egy valószínűséggel végtelen sok A_n esemény következik be.

Teszek néhány megjegyzést ezzel az eredménnyel kapcsolatban. Ha a $P(A_n)$ valószínűségek viszonylag kicsik, ami jelen esetben azt jelenti, hogy az összegük konvergens, akkor csak véges sok A_n esemény következik be 1 valószínűséggel. A másik irányú állításban nemcsak azt követeltük meg, hogy az események valószínűségei legyenek viszonylag nagyok, összegük legyen divergens, hanem azt is, hogy az egyes A_n események legyenek függetlenek. Ebben az esetben viszont erősebb állítást fogalmaztam meg. Nemcsak azt állítottam, hogy ebben az esetben annak a valószínűsége hogy végtelen sok A_n

esemény következik be pozitív, hanem azt is, hogy ez a valószínűség 1. Ha tehát az A_n események függetlenek, akkor csak két eset fordulhat elő. Vagy nulla valószínűséggel következik be végtelen sok A_n esemény (ha a valószínűségek összege konvergens) vagy pedig egy valószínűséggel (ha a valószínűségek összege divergens). Közbülső lehetőség nincs.

A b) esetben megfogalmazott eredményben az A_n események függetlensége nagyon fontos feltétel. Ezt a feltételt lehet gyengíteni, (a 2. kiegészítésben ismertetni fogok egy ilyen eredményt,) de teljesen elhagyni nem lehet. Ezt mutatja az alábbi két példa:

Legyen az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező a $[0,1]$ intervallum, rajta a Borel mérhető halmazok σ-algebrája, és a P valószínűségi mérték a Lebesque mérték.

1. példa. Legyen $A_n = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ minden $n = 1, 2, \dots,$ számra. Ekkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \left[0, \frac{1}{2}\right]$, ezért $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = \frac{1}{2}$.

2. példa. Legyen $A_n = \left(0, \frac{1}{n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k = \emptyset$, ezért $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) = 0$.

Az első példában egy olyan esetet láttunk, amelyben annak a valószínűsége, hogy végtelen sok A_n következik be, $\frac{1}{2}$, tehát sem nem nulla sem nem 1. A második példában egy valószínűséggel csak véges sok A_n esemény következett be, noha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$ reláció teljesült. Természetesen egyik példában sem voltak a tekintett A_n események függetlenek. Ezek a példák mutatják, hogy a Borel–Cantelli tétel b) részében szereplő függetlenség feltétel lényeges. Az gyengíthető ugyan, de teljesen el nem hagyható.

Rátérek a Borel–Cantelli lemma bizonyítására. A bizonyításhoz szükségünk van a következő lemmára, amelynek állítását tartalmazza a 2. téma jegyzetének 15. oldalán megfogalmazott Tétel A.

Lemma valószínűségi mértékek folytonosságáról. *Legyen adva $B_1 \subset B_2 \subset \cdots$, $B_n \in \mathcal{A}$, $n = 1, 2, \dots,$ eseményeknek növekvő sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Legyen $B = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} B_n$. Ekkor létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n)$ határérték, és $\lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = P(B)$.*

Legyen adva $C_1 \supset C_2 \supset \cdots$, $C_n \in \mathcal{A}$. $n = 1, 2, \dots,$ eseményeknek csökkenő sorozata egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Legyen $C = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$. Ekkor létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} P(C_n)$ határérték, és $\lim\limits_{n\to\infty} P(C_n) = P(C)$.

A Borel–Cantelli lemma bizonyítása. Az a.) rész bizonyítása:

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le P\left(\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \sum_{k=n}^{\infty} P(A_k) \quad \text{minden } n \text{ számra.}$$

Mivel $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) < \infty$, minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $n = n(\varepsilon)$ szám, hogy $\sum\limits_{k=n}^{\infty} P(A_k) < \varepsilon$, ahonnan az előző reláció szerint $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k\right) \le \varepsilon$. Innen következik az a.) rész állítása.

A b.) rész bizonyítása: Az előbbi lemma szerint a valószínűségi mérték folytonosságáról kapjuk, hogy az A_n halmazok függetlensége miatt

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k\right) &= \lim_{N\to\infty} P\left(\bigcup_{k=N}^{\infty} A_k\right) = \lim_{N\to\infty}\left[\lim_{M\to\infty} P\left(\bigcup_{k=N}^{M} A_k\right)\right] \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\lim_{M\to\infty}\left(1 - P\left(\bigcap_{k=N}^{M}(\Omega\setminus A_k)\right)\right)\right] \\
&= \lim_{N\to\infty}\left[\lim_{M\to\infty}\left(1 - \prod_{k=N}^{M}(1-P(A_k))\right)\right].
\end{aligned}
$$

Ezért elég belátni, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$, akkor $\lim\limits_{M\to\infty}\prod\limits_{k=N}^{M}(1-P(A_k)) = 0$ minden rögzített N számra. Viszont az $1-x \le e^{-x}$ egyenlőtlenség alapján $\prod\limits_{k=N}^{M}(1-P(A_k)) \le \exp\left\{-\sum\limits_{k=N}^{M} P(A_k)\right\}$, ahonnan $\lim\limits_{M\to\infty}\prod\limits_{k=N}^{M}(1-P(A_k)) = 0$, ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \infty$.

A felhasznált $1-x \le e^{-x}$ egyenlőtlenség például a következő módon látható: Az $f(x) = e^x$ függvény konvex, $f(0) = 1$, $f'(0) = 1$. Az $f(x) = e^x$ függvény konvexitása miatt e függvény $(0, f(0)) = (0,1)$ ponton átmenő érintője minden valós x számra az $f(x)$ függvény alatt van, azaz $e^x \ge x+1$. Az x szám helyett $-x$-et írva megkapjuk a kívánt állítást.

Megjegyzés. Az analízisben bizonyítják és használják a következő eredményt: Adva x_n valós számoknak olyan sorozata, amelyre $0 \le x_n < 1$ minden $n = 1, 2, \dots$, számra $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-x_k) > 0$, ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k < \infty$, és $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-x_k) = 0$, ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \infty$. Bár nekünk erre az eredményre nem lesz szükségünk, az 1. kiegészítésben megadom ennek a formulának előbb heurisztikus indoklását majd precíz bizonyítását, mivel az tanulságos.

1. kiegészítés. Egy analízisbeli tétel bizonyítása.

Igazolom a következő eredményt:

Állítás. *Legyen* x_n *valós számoknak olyan sorozata, amelyre* $0 \le x_n < 1$ *minden* $n = 1, 2, \dots,$ *számra. Ekkor* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - x_k) > 0$*, ha* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k < \infty$*, és* $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - x_k) = 0$*, ha* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k = \infty$.

Indoklás. Heurisztikusan a következő módon érvelhetünk: Logaritmust véve kapjuk, hogy $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - x_k) > 0$ akkor és csak akkor, ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty} -\log(1 - x_k) < \infty$. Viszont azt, hogy az utóbbi összeg konvergens-e vagy divergens az dönti el, hogy kis x_k számokra a $-\log(1 - x_k)$ összeadandók milyen kicsik. Mivel $-\log(1 - x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$, a $-\log(1 - x_k)$ mennyiségnek természetes jó közelítése az x_k kifejezés, (a Taylor sor első tagja), és ez azt sugallja, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} -\log(1 - x_k)$ illetve $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ végtelen sorok egyszerre konvergensek vagy divergensek.

Némi munkával a fenti érvelés precízzé tehető. Először azt kell meggondolni, hogy a feladat állításában a $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - x_k) > 0$ tulajdonság a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} -\log(1 - x_k) < \infty$ egyenlőtlenséggel, a $\prod\limits_{k=1}^{\infty}(1 - x_k) = 0$ tulajdonság pedig a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} -\log(1 - x_k) = \infty$ relációval ekvivalens. Ehhez azt kell felhasználni, hogy esetünkben $0 < 1 - x_k < 1$, és $-\log(1 - x_k) > 0$, továbbá

$$\prod_{k=1}^{\infty}(1 - x_k) = \lim_{N\to\infty} \prod_{k=1}^{N}(1 - x_k) = \lim_{N\to\infty} \exp\left\{\sum_{k=1}^{N} \log(1 - x_k)\right\}$$

$$= \exp\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \log(1 - x_k)\right\}.$$

Ezután vegyük észre, hogy a $-\sum\limits_{k=1}^{\infty} \log(1 - x_k)$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ sorok mindegyike divergens, ha rögzítve egy kis pozitív számot például az $\frac{1}{10}$ számot az x_k számsorozatnak végtelen sok olyan tagja van, amelyek nagyobbak mint ez az $\frac{1}{10}$ szám. Továbbá, égy végtelen összeg konvergenciáját vagy divergenciáját nem befolyásolja véges sok tagjának az értéke. Ezért az összegekben szereplő $x_k \ge \frac{1}{10}$ tagokat elhagyva elég csak azzal az esettel foglalkozni, amikor $x_k \le \frac{1}{10}$ minden k-ra. Viszont ekkor $\frac{1}{2}x_k < -\log(1 + x_k) < 2x_k$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra, ahonnan $\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{n} x_k < \sum\limits_{k=1}^{n} -\log(1 - x_k) < 2\sum\limits_{k=1}^{n} x_k$ minden n-re, és innen következik, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} -\log(1 - x_k)$ sorok egyszerre konvergálnak vagy divergálnak.

2. kiegészítés. A Borel–Cantelli lemma egy élesítése.

Láttunk példát arra, hogy a Borel–Cantelli lemma b) részének érvényességéhez, azaz ahhoz hogy végtelen sok A_k esemény következék be 1 valószínűséggel nem elegendő csak azt feltenni, hogy $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty$. Valamilyen módon biztosítani kell azt is, hogy a tekintett A_k események 'nem fedik le túlságosan egymást'. Ezt biztosítja azA_k események függetlensége. Ezt a feltételt lehet gyengíteni. Erre mutat példát az alábbi eredmény.

A Borel–Cantelli lemma b) részének élesebb változata. *Legyenek $A_1, A_2, \dots$ olyan események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyekre teljesülnek a*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty, \quad \textit{és} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)\right)^2} = 1$$

feltételek. Ekkor az $A_1, A_2, \dots$ események közül 1 valószínűséggel végtelen sok következik be.

Megjegyzés. Ha $A_1, A_2, \dots$ események függetlenek, akkor

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j)P(A_k) = \left(\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right)^2$$

minden n indexre. Ezért ebben az esetben a fenti eredmény második feltétele teljesül. Ezért a Borel–Cantelli lemma b) része következik ebből az eredményből.

Bizonyítás. Jelölje $I_A(\omega)$ egy A halmaz indikátor függvényét, és válaszunk ki egy olyan n_l részsorozatot, amelyre $\lim\limits_{l\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n_l}\sum\limits_{k=1}^{n_l} P(A_j\cap A_k)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n_l} P(A_j)\right)^2} = 1$. Először megmutatjuk, hogy

$$\lim_{l\to\infty} P\left(\left|\frac{\sum\limits_{j=1}^{n_l}(I_{A_j}(\omega) - P(A_j))}{\sum\limits_{j=1}^{n_l} P(A_j)}\right| > \varepsilon\right) = 0$$

minden $\varepsilon > 0$ számra. Valóban,

$$\mathrm{Var}\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n_l}(I_{A_j}(\omega) - P(A_j))}{\sum\limits_{j=1}^{n_l} P(A_j)}\right) = \frac{\sum\limits_{j=1}^{n_l}\sum\limits_{k=1}^{n_l} P(A_j \cap A_k) - \left(\sum\limits_{j=1}^{n_l} P(A_j)\right)^2}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n_l} P(A_j)\right)^2} \to 0,$$

ha $l \to \infty$, és $E\left(\frac{\sum\limits_{j=1}^{n_l}(I_{A_j}(\omega)-P(A_j))}{\sum\limits_{j=1}^{n_l}P(A_j)}\right) = 0$. Ezért a fenti állítás következik a Csebisev egyenlőtlenségből.

Innen, alkalmazva ezt az eredményt $\varepsilon = \frac{1}{2}$ választással, kapjuk, hogy

$$\lim_{l\to\infty} P(B_{n_l}) = \lim_{l\to\infty} P\left(\sum_{j=1}^{n_l} I_{A_j}(\omega) < \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n_l} P(A_j)\right) = 0.$$

Ezért létezik az n_l sorozatnak olyan n_p részsorozata, amelyre $\sum\limits_{p=1}^{\infty} P(B_{n_p}) < \infty$, így a Borel–Cantelli lemma a) része miatt 1 valószínűséggel végtelen sok olyan $n = n(\omega)$ index van, (az n_l sorozat elemei véges sok kivétellel ilyen indexek), amelyre $\sum\limits_{j=1}^{n} I_{A_j}(\omega) > \frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)$. Mivel $\sum\limits_{j=1}^{\infty} P(A_j) = \infty$. Innen következik a Borel–Cantelli lemma b) részének élesebb változata.

1. feladat. Legyenek $A_1, A_2, \dots$ olyan események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, melyekre $P(A_n) \ge \alpha$ valamely $0 < \alpha \le 1$ számmal minden $n = 1, 2, \dots$ indexre. Mutassuk meg, hogy annak valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be nagyobb vagy egyenlő, mint α.

Segítség: Fejezzük ki metszet és unió operációk segítségével azt az eseményt, hogy végtelen sok A_n esemény következik be.

2. feladat. Bizonyítsuk be az előző bizonyítás módszereinek finomításával és az előző feladat eredményének segítségével a következő állítást. Ha $A_1, A_2, \dots$ események olyanok, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \infty, \quad \text{és} \quad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{j=1}^{n}\sum\limits_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k)}{\left(\sum\limits_{j=1}^{n} P(A_j)\right)^2} = 1 + c$$

valamely $0 \le c < 1$ számmal, akkor annak valószínűsége, hogy végtelen sok A_n esemény következik be nagyobb vagy egyenlő, mint $1 - c$.