TOVÁBBI FELADATOK

A következő feladatok véletlen bolyongásokkal kapcsolatos kérdésekről szólnak. Tekintsük egy szabályos pénzdarab végtelen sok egymás utáni (független) dobását, és tekintsünk egy részecskét, amely az origóból indul el, és az egész számok rácsán lépked a következő szabály szerint. Tartózkodjon a részecske az $n-1$-ik lépés után $n = 1, 2, \dots$, valamely j-pontban. Ekkor az n-ik lépésben a részecske a $j+1$ pontba lép, ha az n-ik pénzdobás eredménye fej, (azaz ebben az esetben 1-et lép jobbra), és a $j-1$ pontba lép, ha az n-ik dobás eredménye írás, (azaz ebben az esetben 1-et lép balra). A részecske által egymás után megtett lépések sorozatát a részecske bolyongásának nevezzük.

Feladatok.

1.) Mi annak a valószínűsége, hogy a részecske a bolyongás $2n$-ik lépésében visszatér az origóba?

2.) Mi annak a valószínűsége, hogy a részecske a bolyongás $2n$-ik lépésében tér vissza először az origóba?

3.) Mi annak a valószínűsége, hogy a részecske a bolyongás $2n$-ik lépésben visszatér az origóba, és az azt megelőző lépésekben csak nem negatív számokat látogatott meg?

4.) Mi annak a valószínűsége, hogy a részecske a bolyongás első n lépésében csak nem negatív számokat látogatott meg?

Megoldások:

1.) A részecske akkor lép vissza az origóba a bolyongás $2n$-ik lépésében, ha az első $2n$ lépésben pontosan n-szer lépett jobbra, és n-szer lépett balra, azaz az első $2n$ pénzdobásban n darab fej és n darab írás dobás volt. Összesen $\binom{2n}{n}$ ilyen $2n$ hoszúságú dobássorozat van, és mindegyiknek a valószínűsége 2^{-2n}. Ezért a keresett valószínűség $\binom{2n}{n}2^{-2n}$.

2. Vezessük be a bolyongás $X(0), X(1), \dots, X(2n)$ pályáit, ahol $X(j)$ jelöli a részecske tartózkodási helyét a j-ik lépés megtétele után, (természetesen $X(0) = 0$), és tekintsük a pálya által meghatározott $(0, X(0)$, $(1, X(1))$, ... , $(2n, X(2n))$ pontokat összekötő töröttvonalat. Számítsuk ki az olyan pályák számát, amelyekre $X(j) < 0$ minden $1 \le j \le 2n-1$ indexre és $X(2n) = 0$. Az ilyen pályák által meghatározott töröttvonalak átmennek az $(1, -1)$, és a $(2n-1, -1)$ pontokon, és $X(j) < 0$, ha $1 \le j \le 2n-1$. Az olyan pontok száma, amelyekre az általuk meghatározott töröttvonalak átmennek az $(1, -1)$, és a $(2n-1, -1)$ pontokon $\binom{2n-2}{n-1}$. Számoljuk ki hány olyan pálya van ezek között, amelyre létezik olyan l szám, amelyre $X(l) \ge 0$. Egy ilyen pályára létezik olyan j, $1 \le j \le 2n-1$, index is, amelyre $X(j) = 0$, és jelölje j_0 a legkisebb ilyen indexet. Az összeszámolandó, az $(1, -1)$ és $(2n-1, 1)$ pontokat összekötő "rossz" görbéket meghatározó pályák számát meghatározhatjuk a következő tükrözési elv segítségével. Minden ilyen pályának feleltessük meg azt az $\bar{X}(j)$, $1 \le j \le 2n-1$ pályát, amelyre $\bar{X}(j) = X_j$, ha $1 \le j \le j_0$, és $\bar{X}(j) = -X(j)$, ha $j_0 < j \le 2n-1$. (Azért nevezzük ezt a módszert tükrözési elvnek, mert geometriailag a következőképp interpretálható. Vegyük a pálya által meghatározott töröttvonalat, hagyjuk el belőle a $(0, 0)$ és a $(2n, 0)$ pontot, illetve az e pontokból kiinduló szakaszt, és nézzük azt a töröttvonalat, amelyet úgy kapunk, hogy ennek a töröttvonalnak az abszcissza első elérése után levő részét tükrözzük az abszcissza

tengelyre.) Be lehet látni, hogy ez az $X(\cdot) \to \bar{X}(\cdot)$ leképezés kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az összeszámolandó $X(j)$, $1 \le j \le 2n-1$ pályák és azon $\bar{X}(j)$, $1 \le j \le 2n-1$, pályák között, amelyekre $\bar{X}(1) = -1$, és $\bar{X}(2n-1) = 1$. Az $\bar{X}(t)$ tipusú pályák száma $\binom{2n-2}{n}$. (Ezek ugyanis olyan pályák, ahol $2n-2$ lépésben $n-2$-szer lépünk balra, és n-szer lépünk jobbra.) Ezért azon $X(j)$, $0 \le j \le 2n$, pályák száma, amelyekre $X(j) \ge 0$ valamilyen $1 \le j \le 2n-1$ indexre, és $X(2n) = 0$ $\binom{2n-2}{n}$. Innen azon $X(j)$, $0 \le j \le 2n$, pályák száma, amelyekre $X(j) < 0$ minden $1 \le j \le 2n-1$ indexre és $X(2n) = 0$, $\binom{2n-2}{n-1} - \binom{2n-2}{n} = \binom{2n-2}{n-1}\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) = \frac{1}{n}\binom{2n-2}{n-1}$. Mivel minden $2n$ hosszúságú pálya valószínűsége 2^{-2n}, és figyelembe kell venni azokat a pályákat is, amelyekre $X(2n) = 0$, és $X(j) > 0$ $1 \le j \le 2n-1$ indexre, ezért a keresett valószínűség $\frac{2}{n2^{2n}}\binom{2n-2}{n-1}$.

3.) A válasz $\frac{1}{(n+1)2^{2n}}\binom{2n}{n}$. Ezt a 2. feladat megoldásához hasonlóan bizonyíthatjuk, de közvetlenül is visszavezethetjük rá. A feladat feltételeit teljesítő $2n$ hosszúságú pályák számát összeszámolhatjuk úgy, hogy minden ilyen pálya elé elhelyezünk egy $+1$ utána pedig egy -1 lépést. Így a keresett $2n$ hosszúságú pályák száma megegyezik az olyan $2n+2$ hosszú pályák számával, amelyekre $X(2n+2) = 0$, és $X(j) > 0$, ha $1 \le j \le 2n+1$.

4.) Elegendő a feladatot páratlan, azaz $2n+1$ alakú lépésszámok esetén megoldani. Ugyanis ilyen esetben a bolyongás értéke az utolsó lépésben egy páratlan értékű szám, és ha ez nem negatív, akkor a bolyongás értéke következő lépés után is nem negatív.

Jelölje $p_k = p_k(2n+1)$ annak a valószínűségét, hogy a bolyongás $2n+1$ lépésben a k pontba kerül, és a bolyongás az első $2n+1$ lépés valamelyikében negatív értéket is felvesz, $P_k = P_k(2n+1)$ pedig jelölje annak a valószínűségét, hogy a bolyongás a $2n+1$-ik lépésben a k pontba jut. Ekkor a minket érdeklő esemény komplementerének a valószínűsége $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k$, és a vizsgált esemény valószínűsége $1 - \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k$. Ezért a feladat megoldása érdekében érdemes kiszámolni a p_k valószínűségeket. Ezt a 2. feladat megoldásához hasonlóan a tükrözési elv segítségével megtehetjük.

Vegyük észre, hogy $P_k = p_k = 0$, ha k páros szám, és $P_k = p_k$, ha $k < 0$. Ha k páratlan pozitív szám, akkor $p_k = P_{-k-2}$. Ugyanis, ha tekintünk egy olyan bolyongást, amelyre az általa meghatározott töröttvonal a $2n+1$-ik lépés után a k pontba ér, ($k \ge 1$,) és valamely korábbi időpontban meglátogatja a -1 pontot, és tükrözzük e töröttvonalnak a -1 pont első meglátogatása utáni részét az $y = -1$ egyenesre, akkor kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítünk ezen bolyongások és az olyan bolyongások között, amelyeknek az értéke a $2n+1$-ik lépés után $-k-2$. Ezért $p_k = P_{-k-2} = P_{k+2}$, ha $k \ge 1$. Innen $1 - \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1 - \sum\limits_{k>0} P_{k+2} - \sum\limits_{k\le 0} P_k = 1 - \sum\limits_{k\ne 1} P_k = P_1$. E számolásban felhasználtuk, hogy $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} P_k = 1$, és $P_{2k} = 0$ minden k-ra. Ezért a keresett valószínűség $2n+1$ paraméterrel $2^{-2n-1}\binom{2n+1}{n}$.

Az előző feladatokhoz kapcsolódó további problémák.

5.) Adjunk nagy n számokra jó aszimptotikát az első és második feladat megoldásában kapott eredmény nagyságrendjére, azaz annak valószínűségére, hogy egy bolyongás az n-ik lépésben visszatér az origóba, illetve annak valószínűségére, hogy a bolyongás az n-ik lépésben tér oda vissza először.

Megoldás: Alkalmazzuk a Stirling formulát, amely szerint $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$ nagy n-re, azaz a két oldalon levő kifejezések hányadosa 1-hez tart, ha $n \to \infty$. Ennek alapján $\binom{2n}{n} = \frac{(2n)!}{n!^2} \sim \frac{\sqrt{4\pi n}}{2\pi n} \frac{\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\frac{n}{e}\right)^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 2^{2n}$. Innen az első feladat eredménye $\binom{2n}{n} 2^{-2n} \sim \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$, a második feladat eredménye pedig $\frac{1}{n 2^{2n}}\binom{2n-2}{n-1} \sim \frac{1}{4\sqrt{\pi} n^{3/2}}$.

Egy bolyongás 1 valószínűséggel visszatér az origóba. Ez következik például a 4. feladat eredményéből. Az ugyanis, hogy a bolyongás nem tér vissza az origóba azt jelenti, hogy az vagy minden $n \geq 1$ időpontban pozitív vagy minden $n \geq 1$ időpontban negatív értéket vesz fel. Viszont a 4. feladat eredménye alapján mind a két esemény valószínűsége nulla. (Ugyanis $2^{-2n-1}\binom{2n+1}{n} \sim \text{const.}\, n^{-1/2} \to 0$, ha $n \to \infty$.) A második és ötödik feladat eredménye alapján viszont meg lehet mutatni, hogy ez csak sokára következik be, az első visszatérés idejének a várható értéke végtelen. Ezen két állításnak több bizonyítása ismeretes. Most egy olyan megoldást tárgyalunk, amely két önmagában is érdekes azonosság bizonyításán alapul.

6.) Rögzítsünk egy n pozitív egész számot és a $[0, n]$ intervallumot. Tekintsünk egy olyan bolyongást, amely valamely x (egész) számhoz tartozó pontból indul ki, $0 \leq x \leq n$. Annak a valószínűsége, hogy a bolyongás a 0 és n pontok közül az n pontot látogatja meg először $\frac{x}{n}$, annak, hogy a 0 pontot, $1 - \frac{x}{n}$.

7.) Tekintsük az előző feladatban vizsgált x pontból kiinduló bolyongást. A 0 vagy n pont valamelyikének az első meglátogatásához szükséges lépésszám várható értéke $x(n-x)$.

Az 5. és 6. feladat megoldásában felhasználjuk azt a tényt, hogy 1 annak a valószínűsége, hogy a 0 és n pont valamelyikét meglátogatjuk, sőt az is igaz, hogy a két pont valamelyikének az első meglátogatásához szükséges lépésszám várható értéke véges. Aztán egy külön feladatban ezt is belátjuk.

A 6. és 7. feladat megoldása.

6.) Legyen $p(x)$ annak a valószínűsége, hogy az x pontból kiindulva az n pontot látogatjuk meg először, $q(x)$, hogy a 0 pontot. Ekkor $p(x) + q(x) = 1$, $p(0) = 0$, $p(n) = 1$, és $p(x) = \frac{1}{2}(p(x-1) + p(x+1))$ minden $1 \leq x \leq n-1$ számra. Legyen $p(1) = y$. Ekkor alkalmazva rekurzive a $p(x) = \frac{1}{2}(p(x-1) + p(x+1))$ azonosságot minden $k = 1, 2, \dots$ számra kapjuk, hogy $p(k) = ky$, $k = 1, \dots, n-1$ Végül alkalmazva ezt az azonosságot $x = n-1$-re kapjuk, hogy $(n-1)y = \frac{1}{2}((n-2)y + 1)$, ahonnan $y = \frac{1}{n}$, $p(x) = \frac{x}{n}$, $q(x) = 1 - \frac{x}{n}$.

7.) Jelölje $f(x)$ a 0 vagy n pont valamelyikének az első meglátogatásához szükséges lépésszám várható értékét, ha az x pontból indul a bolyongás. Ekkor $f(x) = \frac{1}{2}(f(x-1) + f(x+1)) + 1$, ha $1 \leq x \leq n-1$, és $f(n) = 0$, $f(0) = 0$. Vezessük be a $g(x) = f(x) - x(n-x)$. Mivel $x(n-x) = \frac{1}{2}[(x-1)(n-(x-1)) + (x+1)(n-(x+1))] + 1$, ezért $g(x) = \frac{1}{2}[g(x-1) + g(x+1)]$, ha $1 \le x \le n-1$. Továbbá $g(0) = g(n) = 0$, ahonnan $g(x) = 0$, $f(x) = x(n-x)$ minden $0 \le x \le n$ számra.

8.) Lássuk be a 6. és 7. feladat még hiányzó részét, azt hogy a tekintett bolyongásokban a 0 vagy n pont valamelyikének az első meglátogatásához szükséges lépésszám várható értéke véges.

Megoldás: Jelölje A_k azt az eseményt, amely akkor következik be, ha a bolyongás m-ik lépése minden $kn < m < (k+1)n$ számra $+1$-gyel egyenlő. Vezessük be azt a Z valószínűségi változót, amely kn-nel egyenlő, ha az A_k esemény bekövetkezik, de az A_j esemény $j < k$ indexre nem következik be. Ekkor a Z valószínűségi változó nyílván nagyobb, mint a keresett lépésszám. Ezért elég megmutatni, hogy $EZ < \infty$. Ez viszont könnyen ellenőrizhető, mert $P(Z = kn) = (1-p)^{k-1}p$, $p = 2^{-n}$ paraméterrel.

9.) Mutassuk meg a 6. és 7. feladat eredményének a segítségével, hogy egy az origóból induló bolyongás 1 valószínűséggel visszatér az origóba, viszont a visszatéréshez szükséges lépésszám várható értéke végtelen.

Megoldás: Elég megmutatni, hogy a visszatérés feltételes valószínűsége 1, az első visszatérés idejének feltételes várható értéke pedig végtelen ama feltétel mellett, hogy a bolyongás első lépése $+1$ volt. Eme feltétel mellett viszont annak a valószínűsége, hogy a bolyongás a nullába hamarabb tér vissza, mint az n pontba $1 - \frac{1}{n}$. Innen $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy az origóba való visszatérés valószínűsége 1. Hasonlóan az origóba való első visszatérés idejének a várható értéke nagyobb, mint annak az időnek a várható értéke, ami arra kell, hogy vagy az origót vagy az n pontot elérjük. De ez utóbbi várható érték n-nel egyenlő. Innen $n \to \infty$ határátmenettel kapjuk a várható értékre vonatkozó állítást.

10.) Minden $x > 0$ számra

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x}\varphi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ és $\varphi(x)$ a standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény.
Általánosabban, minden $k \ge 0$-ra teljesül a

$$\sum_{l=0}^{2k+1} \frac{(-1)^l c_l}{x^{2l+1}}\,\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \sum_{l=0}^{2k} \frac{(-1)^l c_l}{x^{2l+1}}\,\varphi(x)\ , \quad \text{ha } x > 0$$

egyenlőtlenség alkalmas $c_l > 0$ konstansokkal, ahol $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, és a további konstansok is explicit módon megadhatóak.

Megoldás: Parciális integrálással kapjuk, hogy minden $x > 0$ számra

$$\begin{aligned}\sqrt{2\pi}(1 - \Phi(x)) &= \int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du = \int_x^\infty \frac{1}{u}\left(ue^{-u^2/2}\right)du \\ &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}\,du = \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{1}{u^3}\left(ue^{-u^2/2}\right)du \\ &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2} + \int_x^\infty \frac{3}{u^4}e^{-u^2/2}\,du.\end{aligned}$$

Az $1-\Phi(x)$ kifejezésre a második sorban kapott kifejezésből kapjuk, hogy $1-\Phi(x) < \frac{1}{x}\varphi(x)$, a harmadik sorban kapott kifejezésből pedig azt, hogy $\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) < 1-\Phi(x)$.
Az általánosabb állítás további parciális integrálással hasonló módon bizonyítható be.

Megjegyzés: Sok vizsgálatban elég az $1-\Phi(x)$ függvény nagyságrendjét olyan pontossággal tudni, hogy $1-\Phi(x) \sim \text{const.}\,\frac{1}{x}e^{-x^2/2}$ nagy x számokra. Ez heurisztikusan a következőképp látható. $1-\Phi(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \sim \int_x^{x+h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du$, ahol a h konstanst úgy érdemes választani, hogy az integrandus a konstansszorosára csökkenjen. Ez azt sugallja, hogy válasszuk h-t $h=\frac{1}{x}$-nek, mert $(x+\frac{1}{x})^2 = x^2+2+o(1)$, és $1-\Phi(x) = \int_x^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \sim \int_x^{x+h}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du \sim \text{const.}\,he^{-x^2/2} = \frac{\text{const.}}{x}e^{-x^2/2}$. Hasonló meggondolás alapján azt várjuk, hogy ha $u(x)$ sima, (differenciálható) monoton függvény, amely gyorsan tart végtelenhez a végtelenben, akkor $\int_x^\infty e^{-u(t)}\,dt \sim \text{const.}\,\frac{1}{u'(x)}e^{-u(x)}$ nagy x számokra.

11. Legyenek $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Mutassuk meg, hogy minden x valós számra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\le k\le n}\xi_k < \sqrt{2\log n - \log\log n - \log 4\pi + x}\right) = e^{-e^{-x/2}}.$$

Megoldás: Vezessük be az $x_n = \sqrt{2\log n - \log\log n - \log 4\pi + x}$ jelölést, és írjuk fel a $P\left(\max_{1\le k\le n}\xi_k < x_n\right) = \Phi(x_n)^n = (1-(1-\Phi(x_n)))^n$ azonosságot. Az ezen azonosság jobboldalán álló kifejezést jól tudjuk becsülni az $1-\Phi(x)$ kifejezésre az előző feladatban adott alsó és felső korlát segítségével. Valóban, felírhatjuk, hogy $P\left(\max_{1\le k\le n}\xi_k < x_n\right) \le \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}x_n}e^{-x_n^2/2}\right)^n = \left(1-\frac{2\sqrt{\pi\log n}}{\sqrt{2\pi}x_n}\frac{1}{n}e^{-x/2}\right)^n$. Továbbá, mivel $\lim_{n\to\infty}\frac{2\sqrt{\pi\log n}}{\sqrt{2\pi}x_n} = 1$, innen azt kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} P\left(\max_{1\le k\le n}\xi_k < x_n\right) \le \limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}e^{-x/2}\right)^n = e^{-e^{-x/2}}.$$

Hasonlóan, a

$$\begin{aligned} P\left(\max_{1\le k\le n}\xi_k < x_n\right) &\ge \left(1-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n^3}\right)e^{-x_n^2/2}\right)^n \\ &= \left(1-\frac{2\sqrt{\pi\log n}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{1}{x_n}-\frac{1}{x_n^3}\right)\frac{1}{n}e^{-x/2}\right)^n \end{aligned}$$

egyenlőtlenségből kapjuk, hogy $\liminf_{n\to\infty} P\left(\max_{1\le k\le n}\xi_k < x_n\right) \ge e^{-e^{-x/2}}$.

Megjegyzés: Némi számolás mutatja, hogy a 11. feladat eredménye ekvivalens a következő állítással: Ha $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, akkor minden x valós számra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\max_{1\le k\le n} \xi_k - \sqrt{2\log n} - \frac{\log\log n - \log 4\pi}{2\sqrt{2\log n}} < \frac{x}{\sqrt{2\log n}}\right) = e^{-e^{-x}}.$$

A 11. feladat eredménye alapján független, standard normális eloszlású $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók $\max\limits_{1\le k\le n} \xi_k$ maximuma majdnem 1 valószínűséggel a $\sqrt{2\log n}$ szám közelében koncentrálódik. Nem nehéz belátni a fenti számolásokhoz hasonló módon, hogy $E \max\limits_{1\le k\le n} \xi_k \le \sqrt{2\log n}$. A 2008. évi Schweitzer verseny alább tárgyalandó valószínűségszámítási feladata azt állítja, hogy ez a becslés nem csak független normális valószínűségi változókra érvényes.

12. Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ (nem feltétlenül független) nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_k^2 \le 1$, $1 \le k \le n$. Ekkor

$$E \max_{1\le k\le n} \xi_k \le \sqrt{2\log n}.$$

Megoldás. Legyen $Z = E \max\limits_{1\le k\le n} \xi_k$. Ekkor a Jensen egyenlőtlenség alapján tetszőleges $t \ge 0$ számra $e^{EtZ} \le Ee^{tZ}$, azaz $EZ \le \frac{1}{t}\log Ee^{tZ}$. Mivel $Ee^{tZ} \le E\sum\limits_{k=1}^{n} Ee^{t\xi_k} \le ne^{t^2/2}$, innen

$$E \max_{1\le k\le n} \xi_k \le \frac{1}{t}\log ne^{t^2/2} = \frac{\log n}{t} + \frac{t}{2},$$

és $t = \sqrt{2\log n}$ választással adódik a feladat állítása.

A centrális határeloszlástétel szerint sok független valószínűségi változó összege nagyon általános feltételek mellett közel normális eloszlású. Az alább tárgyalandó Cramer–Lévy tétel szerint viszont egy ilyen összeg csak akkor lehet pontosan normális eloszlású, ha az összes összeadandó normális eloszlású.

Cramer–Lévy tétel. *Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyekre $\xi+\eta$ normális eloszlású. Ekkor ξ és η is normális eloszlású.*

Ennek az eredménynek rendkívül érdekes története van. Ezt az állítást Paul Lévy, aki híres volt rendkívüli intuiciójáról, fogalmazta meg sejtés formájában, és e sejtés néhány következményét is megadta. Harald Cramer bizonyította be Lévy sejtését. Bizonyításában fontos szerepet játszottak bizonyos komplex függvénytani gondolatok. Lévy ezzel a bizonyítással elégedetlen volt, mert ő más meggondolások alapján látta, hogy sejtése igaz. Az, hogy mi volt Lévy heurisztikájának az alapja valószínűleg örök rejtély marad.

Cramer bizonyításának gondolata a következő volt. Jelölje $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ és $\psi(t) = Ee^{it\eta}$, $-\infty < t < \infty$, ξ és η karakterisztikus függvényét. Feltehetjük, hogy $\xi+\eta$ standard normális eloszlású. Ekkor $\varphi(t)\psi(t)=e^{-t^2/2}$. Azt kell belátni, hogy ez az azonosság csak úgy teljesülhet, ha $\varphi(\cdot)$ és $\psi(\cdot)$ normális eloszlások karakterisztikus függvényei. A fő problémát az okozza, hogy rendkívül nehéz kihasználni a bizonyításban azt a tényt, hogy $\varphi(t)$ és $\psi(t)$ karakterisztikus függvények, azaz nagyon speciális tulajdonságú függvények.

Cramer a következő módon győzte le ezt a nehézséget. Belátta, hogy nemcsak a $\xi+\eta$ hanem a ξ és η valószínűségi változók abszolut értékei is rendkívül kis valószínűséggel vesznek fel nagy értékeket. Innen következik, hogy hogy mind a $\varphi(\cdot)$ mind a $\psi(\cdot)$ függvény kiterjeszthető egy az egész komplex számsíkon holomorf függvénnyé, és a $\varphi(z)\psi(z)=e^{-z^2/2}$ azonosság minden komplex számra érvényes. Ezért a $\varphi(z)$ függvény sehol sem nulla, és definiálhatjuk a $\log\varphi(z)$ holomorf függvényt. Innen és a $\varphi(z)$ függvény nagyságára kapott becslésekből, illetve a Liouville tétel egy nem-triviális változatából következik, hogy $\varphi(z)=e^{Az^2+Bz+C}$ alakú. Ezen eredmény segítségével könnyen látható, hogy $\varphi(t)$ egy normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Ugyanez elmondható a $\psi(t)$ függvényről is.

13.) Bizonyítsuk be a Cramer–Lévy tételt.

Megoldás. Lássuk először be, hogy létezik olyan $B>0$ és $C>0$ szám, amelyre $P(|\xi|>x)\le Be^{-Cx^2}$ minden $x>0$ számra. Létezik olyan $A>0$ szám, amelyre $P(|\eta|<A)\ge\frac12$. Ekkor az $x>A$ számokra $P(|\xi|>x)\le 2P(|\xi|>x,|\eta|<A)\le 2P(|\xi+\eta|>x-A)\le 4e^{-(x-A)^2/2}$. Innen következik, hogy $P(|\xi|>x)\le Be^{-Cx^2}$ minden $x>A$ számra alkalmas $B>0$ és $C>0$ számokkal. A B szám esetleges növelésével elérhetjük, hogy ez az egyenlőtlenség minden $x>0$ számra érvényes legyen. Felírhatjuk, hogy $|Ee^{z\xi}|\le Ee^{\operatorname{Re} z\xi}\le Ee^{|\operatorname{Re} z||\xi|}=\int_0^\infty e^{|\operatorname{Re} z|x}F(\,dx)$ minden komplex z számra, ahol $F(x)=P(|\xi|<x)$ a $|\xi|$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Innen a most bizonyított egyenlőtlenség alapján parciális integrálással azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
|Ee^{z\xi}|&\le\int_0^\infty(1-F(x))d\,e^{|\operatorname{Re} z|x}\le B|\operatorname{Re} z|\int_0^\infty e^{-Cx^2+|\operatorname{Re} z|x}\,dx\\
&=B|\operatorname{Re} z|e^{|\operatorname{Re} z|^2/C^2}\sqrt{2\pi}/C\le K_1e^{K_2(\operatorname{Re} z)^2}\le K_1e^{K_2|z|^2}
\end{aligned}
$$

alkalmas $K_1>0$ és $K_2>0$ számokkal.

Vezessük be a $\varphi(z)=Ee^{iz\xi}$ és $\psi(z)=Ee^{iz\eta}$ függvényeket minden komplex z számra. Valós t értékekre megszorítva e függvények a ξ és η valószínűségi változók karakterisztikus függvényeivel egyenlőek. Az eddigi becslések alapján $|\varphi(z)|\le K_1e^{K_2|z|^2}$, és hasonlóan $|\psi(z)|\le K_1e^{K_2|z|^2}$ alkalmas $K_1>0$, és $K_2>0$ számokkal. Továbbá a $\varphi(z)$ és $\psi(z)$ függvények holomorfak az egész komplex számsíkon. Ennek indoklásául Weierstrass tételére érdemes hivatkozni, amely szerint egy tartományban egyenletesen korlátos holomorf függvények limesze is holomorf ebben a tartományban. Ezenkívül azt kell észrevenni, hogy a ξ és η valószínűségi változók alkalmas diszkrét közelítésével a $\varphi(\cdot)$ és $\psi(\cdot)$ függvényeket előállíthatjuk $\varphi(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(z)$ és $\psi(z)=\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(z)$ alakban, ahol $\varphi_n(z)$ és $\psi_n(z)$ olyan holomorf függvények, (e közelítő függvények $\sum ak^{b_kz}$ alakúak alkalmas a_k és b_k konstansokkal, ahol véges összegeket veszünk), amelyekre $|\varphi_n(z)|\le K_1e^{K_2|z|^2}$, és $|\psi_n(z)|\le$

$K_1 e^{K_2|z|^2}$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre és z komplex számra. A holomorf függvények egyértelmű kiterjesztéséről szóló eredmény alapján $\varphi(z)\psi(z) = e^{-z^2/2}$ minden z számra, és speciálisan $\varphi(z) \neq 0$ minden z számra.
Innen az is következik, hogy definiálhatjuk az egész komplex számíkon holomorf $\log \varphi(z)$ függvényt, és arra $\mathrm{Re}\,(\log \varphi(z) \le \log K_2 + K_s|z|^2$. Valóban, mivel $\frac{\frac{d}{dz}\varphi(z)}{\varphi z}$ holomorf az egész komplex számsíkon, és $\varphi(0) = 1$, tekinthetjük a $\log \varphi(z)$ függvény következő verzióját: $\log \varphi(z) = \int_0^z \frac{\frac{d}{du}\varphi(u)}{\varphi u}\, du$, ahol tetszőleges a 0 és z pontot összekötő szép görbén tekinthetjük a fenti komplex integrált. Mivel $|e^{\log \varphi)z)}| = |\varphi(z)| \le K_1 e^{K_2|z^2|}$, és $|e^{Kz^2}| = e^{\mathrm{Re}\,(Kz^2)}$ minden z komplex számra innen adódik, hogy $\mathrm{Re}\,(\log \varphi(z)) \le \log K_1 + K_2|z|^2$. $\mathrm{Re}\,(\log \varphi(z))$ harmonikus függvény, (mert egy holomorf függvény valós része). Ezért a fenti egyenlőtlenségből és a Liouville tétel egy mély általánosításából következik, hogy $\mathrm{Re}\,(\log(\varphi(x+iy))$ az x és y változók egy egy másodfokú polinomja, és ennek analitikus kiegészítése $\log \varphi(z) = Az^2 + Bz + C$ alakú. Ezért $\varphi(t) = e^{At^2+Bt+C}$ alakú. Továbbá mivel $\varphi(t)$ karakterisztikus fügvény, ezért $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = im = iE\xi$, $\varphi''(0) = -\sigma^2 = -E\xi^2$. Innen $\varphi(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2 + imt}$, egy normális eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye.