Tétel irracionális szám többszöröseinek eloszlásáról moduló 1. *Legyen α irracionális szám. Rögzítsünk egy $[a,b]\subset[0,1]$ intervallumot, és tekintsük minden n pozitív egész számra a $k\alpha$ moduló 1, $1\le k\le n$, sorozatot, illetve e sorozat $[a,b]$ intervallumba eső pontjainak $\frac{1}{n}\#\{k\colon\ \{k\alpha\}\in[a,b],\ 1\le k\le n\}$ relatív gyakoriságát, ahol $\#A$ egy A halmaz elemeinek számát jelöli, $\{x\}$ pedig egy x szám tört részét. Ez a relatív gyakoriság tetszőleges $[a,b]\subset[0,1]$ intevallumra konvergál az $[a,b]$ intervallum $b-a$ hosszához, ha $n\to\infty$.*

Bizonyítás. Az állítás átfogalmazható a következő módon. Definiáljuk minden n számra a következő μ_n valószínűségi mértéket: A μ_n mérték a $k\alpha \pmod 1$, $1\le k\le n$, pontokba van koncentrálva, és minden ilyen $k\alpha \pmod 1$ pont μ_n mértéke $\frac{1}{n}$. Ekkor a tétel állítása ekvivalens azzal, hogy a μ_n mértéksorozat eloszlásban konvergál a $[0,1]$ intervallumban $f(x)\equiv 1$ sűrűségfüggvénnyel rendelkező μ_0 egyenletes eloszláshoz.

A karakterisztikus függvény módszer, pontosabban annak a $[0,1]$ mod 1 csoportra megfogalmazott változata azt mondja ki, hogy μ_n valószínűségi mértékek egy sorozatának eloszlásban való konvergenciája egy μ_0 valószínűségi mértékhez ekvivalens azzal, hogy teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty}\int e^{2\pi ijx}\mu_n(\,dx)=\int e^{2\pi ijx}\mu_0(\,dx)$ reláció minden $j=0,\pm1,\pm2,\dots$ egész számra, ahol $i=\sqrt{-1}$. Valójában ez az ekvivalencia következik Weierstrass második approximációs tételéből, és az eloszlásban való konvergencia következő jellemzéséből: Tekintsük a $[0,1]$ mod 1 egységkört, és azon μ_n, $n=0,1,2,\dots$, valószínűségi mértékeket. A μ_n mértékek akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban a μ_0 mértékhez $n\to\infty$ esetén, ha $\lim\limits_{n\to\infty}\int f(x)\mu_n(\,dx)=\int f(x)\mu_0(\,dx)$ minden az egységkörön folytonos (és ezért korlátos) $f(x)$ függvényre. (Olyan függvényeket tekintünk, amelyekre $f(1)=f(0)$.)

Viszont a tétel bizonyításához szükséges limesz relációkat könnyen ellenőrizhetjük az adott esetben. Valóban $\int e^{2\pi ijx}\mu_0(\,dx)=\int_0^1 e^{2\pi ijx}\,dx=0$, ha $j\neq0$, és

$$\int e^{2\pi ijx}\mu_n(\,dx)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi ijk\alpha}=\frac{e^{2\pi i(n+1)j\alpha}-e^{2\pi ij\alpha}}{n(e^{2\pi ij\alpha}-1)}\to 0,$$

ha $n\to\infty$, és $j\neq0$, mert $\left|\frac{e^{2\pi i(n+1)j\alpha}-e^{2\pi ij\alpha}}{n(e^{2\pi ij\alpha}-1)}\right|\le\frac{2}{n(1-\cos2\pi j\alpha)}$, és $1-\cos2\pi j\alpha>0$ minden $j\neq0$ egész számra, ha α irracionális szám. Másrészt a $j=0$ indexre $e^{2\pi ijx}=1$, és $\int\mu_n(\,dx)=\int\mu_0(\,dx)=1$ minden $n=1,2,\dots$ számra.

Feladat:

Legyen $\alpha_1,\dots,\alpha_k$ k irracionális

Viszont a tétel bizonyításához szükséges limesz relációkat könnyen ellenőrizhetjük az adott esetben. Valóban $\int e^{2\pi ijx}\mu_0(\,dx)=\int_0^1 e^{2\pi ijx}\,dx=0$, ha $j\neq0$, és

$$\int e^{2\pi ijx}\mu_n(\,dx)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}e^{2\pi ijk\alpha}=\frac{e^{2\pi i(n+1)j\alpha}-e^{2\pi ij\alpha}}{n(e^{2\pi ij\alpha}-1)}\to 0,$$

ha $n \to \infty$, és $j \neq 0$, mert $\left|\frac{e^{2\pi i(n+1)j\alpha} - e^{2\pi ij\alpha}}{n(e^{2\pi ij\alpha}-1)}\right| \le \frac{2}{n(1-\cos 2\pi j\alpha)}$, és $1-\cos 2\pi j\alpha > 0$ minden $j \neq 0$ egész számra, ha α irracionális szám. Másrészt a $j = 0$ indexre $e^{2\pi ijx} = 1$, és $\int \mu_n(\,dx) = \int \mu_0(\,dx) = 1$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra.

A vizsgán tárgyalt feladatok:

Legyen $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ k irracionális szám, amelyek kiegészítve az $\alpha_0 = 1$ számmal lineárisan függetlenek a racionális számok teste felett, azaz az $r_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} r_j\alpha_j = 0$ reláció racionális r_j, $0 \le j \le k$, számokkal csak akkor teljesül, ha $r_j = 0$ minden $0 \le j \le k$ indexre. Rögzítsünk egy $B = \prod\limits_{j=1}^{k} [a_j, b_j] \subset [0,1]^k$ a k-dimenziós egységkocka által tartalmazott téglatestet, és tekintsük minden n pozitív egész számra azon l számok relatív gyakoriságát az $1 \le l \le n$ egész számok között, amelyekre az $(l\alpha_1 \bmod 1, \dots, l\alpha_k \bmod 1)$ vektor beleesik a B téglatestbe. Lássuk be, hogy ez a relatív gyakoriság tart a B téglatest térfogatához, ha $n \to \infty$.

Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után egészen addig, amig megjelenik az első hatos dobás. Mi a valószínűsége annak, hogy ez a dobássorozat tartalmaz négyes vagy ötös dobást?

Egy szabályos dobókockát feldobunk egymás után végtelen sokszor. Mi annak a valószínűsége, hogy a hatodik hárommal osztható szám a harmadik hárommal osztható dobás után 20 dobással később jelenik meg?

Egy szabályos dobókockát addig dobunk fel egymás után, amíg 5. alkalommal jelenik meg egy hatos dobás. Mi a valószínűsége annak, hogy az utolsó előtti dobás eredménye egy páros szám?

Két ember egy telefonbeszélgetésen elhatározza, hogy találkozik. A két ember a beszélgetés befejezése után egymástól véletlen ideig otthon marad, majd lemegy a főtérre, ott 10 percig vár a másikra, majd hazamegy. Az otthon maradás ideje mind a két ember esetében független exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel. Mi a valószínűsége annak, hogy találkoznak?