**A január 11.-i vizsga feladatai.**

1.) Legyen $\xi$ és $\eta$ két független, exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda$ illetve $\mu$ paraméterrel, $\lambda \neq \mu$, azaz legyen $\xi$ és $\eta$ sűrűségfüggvénye $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$, illetve $g(x) = \mu e^{-\mu x}$, ha $x \geq 0$, és $g(x) = 0$, ha $x < 0$. Számítsa ki $\xi + \eta$ sűrűségfüggvényét.

2.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók, $E\xi_n = 0$, $E\xi_n^2 < \infty$, minden $n = 1, 2, \dots$ indexre. Definiáljuk az $S_n = \left(\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j\right)^2$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat. Bizonyítsa be, hogy az $S_1, S_2, \dots$ sorozat szubmartingál?

3.) Legyen $\xi$ és $\eta$ két független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Számolja ki az $E\left(\frac{\xi^4+1}{\eta^2+1} \middle| \eta\right)$ feltételes várható értéket.

4.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_{10\,000}$ független, a $[-1, 1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók, azaz legyen sűrűségfüggvényük $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $-1 \leq x \leq 1$, és $f(x) = 0$, ha $x > 1$ vagy $x < -1$. Legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{10\,000} \xi_j$, és $T = \sum\limits_{j=1}^{10\,000} \xi_j^4$. Adjon jó becslést a $P(S < 170,\, T < 2200)$ valószínűségre.

5.) Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ martingál. Milyen eredményt ismer, amely azt mondja ki, hogy bizonyos feltételek teljesülése esetén a $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$ határérték 1 valószínűséggel létezik?

6.) Hogyan definiáljuk egy valószínűségi változó karakterisztikus függvényét? Mi a kapcsolat valószínűségi változók eloszlásban való konvergenciája és e valószínűségi változók karakterisztikus függvényeinek a konvergenciája között?

7.) Mikor mondjuk, hogy valószínűségi változók egy $\xi_1, \xi_2, \dots$ sorozata sztochasztikusan illetve 1 valószínűséggel konvergál egy $\xi$ valószínűségi változóhoz? Mutasson példát valószínűségi változók olyan $\xi_1, \xi_2, \dots$ sorozatára, amely sztochasztikusan konvergál, de 1 valószínűséggel nem konvergál egy $\xi$ valószínűségi változóhoz.