A JANUÁR 16.-I VIZSGA FELADATAI

1.) Legyen ξ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz legyen ξ sűrűségfüggvénye $f(x) = e^{-x}$, ha $x \geq 0$, és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Számolja ki a $\xi + \xi^2$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét.

2.) Feldobunk egy szabályos pénzdarabot egymástól függgetlenül véletlen sokszor. Legyen a dobások száma Poisson eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz annak valószínűsége, hogy k dobást végzünk legyen $\frac{1}{k!}e^{-1}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Mutassa meg, hogy a fej és írásdobások száma két egymástól független Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = \frac{1}{2}$ paraméterrel.

3.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, ξ normális eloszlású 1 várható értékkel és 1 szórásnégyzettel, η egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumon. Számolja ki az $E(\xi + \eta)^4$ várható értéket.

4.) Ledobunk a $[0, 2]$ intervallumra egymástól függetlenül 5040 pontot egyenletes eloszlással, azaz a ledobott pontok helyének a sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $0 \leq x \leq 2$, és $f(x) = 0$ egyébként. Azon dobások értékeit, amelyek a $[0, 1]$ intervallumba esnek egy jegyzőkönyvbe írjuk változtatás nélkül, azon dobások esetén, amelyek az $[1, 2]$ intervallumba estek 1-et írunk a jegyzőkönyvbe. Adjunk a mellékelt normális eloszlástáblázat segítségével jó becslést annak a valószínűségére, hogy a jegyzőkönyvbe írt számok négyzetösszege 3304 és 3402 közé esik.

5.) Legyen adva k-változós eloszlásfüggvényeknek egy $F_n(x_1, \dots, x_k)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozata. Mikor mondjuk, hogy ezek az eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak egy $F_0(x_1, \dots, x_k)$ eloszlásfüggvényhez?

6.) Legyen adva egy ξ változó és egy $\mathcal{F}$, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$, σ-algebra egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Definiálja az $E(\xi|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket. (Feltesszük, hogy létezik az $E|\xi| < \infty$ várható érték.)

7.) Legyenek (ξ_1, η_1), (ξ_2, η_2), ..., (ξ_n, η_n) kétváltozós véletlen vektorok egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Mikor mondjuk, hogy e véletlen vektorok függetlenek?

8.) Mikor mondjuk, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata teljesíti a nagy számok erős illetve a nagy számok gyenge törvényét? Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy egy ilyen sorozat teljesítse a nagy számok erős törvényét?