A január 18.-i vizsga feladatai.

1.) Két ember kíván találkozni. Egy véletlen időpontban 7 és 8 óra között mind a két ember kimegy a város főterére, és 10 percig vár a másikra. Mi a valószínűsége annak, hogy a két ember találkozik, ha a két ember főtérre való megérkezésének az időpontja két egymástól független valószínűségi változó, és mind a kettő egyenletes eloszlású a 7 óra és 8 óra közötti időpontok közötti időintervallumban?

2.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók, $E\xi_n = 0$, minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, és jelölje $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Definiáljuk a $Z_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_1\xi_2\cdots\xi_j$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat. Bizonyítsa be, hogy a $(Z_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat martingál.

3.) Legyen ξ, η és ζ három független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mutassa meg, hogy a $\xi + \eta + \zeta$ valószínűségi változó és a $(\xi - \eta, \xi - \zeta)$ véletlen vektor független egymástól.

4.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_{10\,000}$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $P(\xi_j = 1) = P(\xi_j = -1) = \frac{1}{4}$, és $P(\xi_j = 0) = \frac{1}{2}$ minden $1 \le j \le 10\,000$ indexre. Legyen $S = \sum\limits_{j=1}^{10\,000} \xi_j$, és $T = \sum\limits_{j=1}^{10\,000} \xi_j^2$. Adjon jó becslést a $P(S < 70, T < 4950)$ valószínűségre.

5.) Hogy szól az ergod tétel? Mit jelent az, hogy valószínűségi változók egy sorozata stacionárius?

6.) Hogyan szól a többváltozós centrális határeloszlástétel? Milyen a többváltozós normális eloszlás tulajdonságairól szóló tételről tanult, amelynek ismerete szükséges annak indoklásához, hogy a kimondott tétel értelmes állítás?

7.) Fogalmazza meg a tanult legáltalánosabb centrális határeloszlástételet szériasorozatokra. Mutasson példát olyan $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozatra, amelyre a $\xi_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$, valószínűségi változók rögzített k indexre függetlenek, $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 < \infty$, $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$, a szériasorozat teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét, de nem teljesíti a centrális határeloszlástételt.