A január 25.-i vizsga feladatai.

1.) Legyen ξ és η két független exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz legyen a sűrűségfüggvényük $f(x) = e^{-x}$, ha $x \geq 0$ és $f(x) = 0$, ha $x < 0$. Számolja ki $\xi - \eta$ sűrűségfüggvényét.

2.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, és jelölje $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Definiáljuk a $Z_n = \exp\left\{\sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j - \frac{n}{2}\right\}$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat. Bizonyítsa be, hogy a $(Z_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat martingál.

3.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, és definiáljuk az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_j$, $1 \leq k \leq n$ részletösszegeket. Bizonyítsa be, hogy az $(S_k - \frac{k}{n} S_n,\ 1 \leq k \leq n-1)$ véletlen vektor és az S_n valószínűségi változó független egymástól.

4.) Ledobunk a $[-1, 1]$ intervallumba egymástól függetlenül 20 000 pontot egymástól függetlenül egyenletes eloszlással, azaz a ledobott pontok $\xi_1, \dots, \xi_{20\,000}$ értékei független valószínűségi változók, és sűrűségfüggvényük $f(x) = \frac{1}{2}$, ha $-1 \leq x \leq 1$, és $f(x) = 0$, ha $x < -1$ vagy $x > 1$. Készítsünk két jegyzőkönyvet. Az első jegyzőkönyvbe beírjuk a ledobott pontok ξ_j, $1 \leq j \leq 20\ 000$, értékeit. A második jegyzőkönyvbe a j-ik dobás után az 1 számot írjuk, ha $\xi_j > \frac{1}{2}$, a -1 számot írjuk, ha $\xi_j < -\frac{1}{2}$, és nem írunk be semmit, ha $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$, $1 \leq j \leq 20\ 000$. Jelölje S az első T pedig a második jegyzőkönyvbe írt számok összegét. Adjon jó becslést (egy normális eloszlástáblázat segítségével) a $P(S < 80,\ T < 100)$ valószínűségre.

5.) Hogy szól a Borel–Cantelli lemma? (Ez az eredmény arról szól, hogy bizonyos $A_1, A_2, \dots$ események közül mikor következik be véges sok és mikor következik be végtelen sok esemény.)

6.) Milyen tulajdonságokkal kell rendelkeznie egy A mátrixnak ahhoz, hogy létezzen olyan $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ véletlen vektor, amelynek ez az A mátrix a kovariancia mátrixa?

7.) Fogalmazzon meg olyan (minél általánosabb) határeloszlástételt, amelyben a határérték a Poisson eloszlás.