Feladatok:

1.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, mind a kettő $f(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}$, $-\infty < x < \infty$, sűrűségfüggvénnyel. Lássuk be először, hogy $f(x)$ valóban sűrűségfüggvény. Számítsuk ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Az $f(x)$ függvény minden pontban nem negatív. Annak ellenőrzéséhez, hogy $f(x)$ sűrűségfüggvény azt kell megmutatnunk, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. Ez igaz, mert $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} e^{x}\,dx + \frac{1}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-x}\,dx = \frac{1}{2}\left[e^{x}\right]_{-\infty}^{0} + \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_{0}^{\infty} = 1$.

A $\xi+\eta$ valószínűségi változó $g(x)$ sűrűségfüggvényét a $g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)f(x-y)\,dy$ formula segítségével számíthatjuk ki. Számítsuk ki ezt az integrált. Tekintsük először azt az esetet, amikor $x \geq 0$. Az integrált számítsuk ki úgy, hogy nézzük mind a négy (elvileg) lehetséges esetet, amikor a) $y \geq 0$ és $x - y \geq 0$, b) $y \geq 0$ és $x-y < 0$, c) $y < 0$, $x-y \geq 0$, d) $y < 0$, $x-y < 0$. Számítsuk ki mind a négy esetben azt, hogy milyen tartományban veszi fel értékét az y változó, és mi az integrandus illetve az integrál értéke ebben a tartományban. Az a) esetben $0 \leq y \leq x$, az integrandus $f(y)f(x-y) = \frac{1}{4}e^{-y}e^{-(x-y)} = \frac{e^{-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{xe^{-x}}{4}$ az a) tartományban. A b) esetben $y > x$ és $f(y)f(x-y) = \frac{e^{-y}e^{x-y}}{4} = \frac{e^{x-2y}}{4}$ az integrál pedig $\frac{1}{4}\int_{x}^{\infty} e^{x-2y}\,dy = \frac{e^{-x}}{8}$, a c) esetben $y < 0$ és $f(y)f(x-y) = \frac{1}{4}e^{y}e^{-(x-y)} = \frac{e^{2y-x}}{4}$, az integrál pedig $\frac{1}{4}\int_{-\infty}^{0} e^{2y-x}\,dy = \frac{e^{-x}}{8}$, a d) eset nem lehetséges, mert ekkor egyrészt az $y < 0$ másrészt az $y > x \geq 0$ feltételeknek kellene teljesülniük. Innen azt kapjuk, hogy $g(x) = \frac{(x+1)e^{-x}}{4}$, ha $x > 0$. Mivel f szimmetrikus függvény, ezért mint nem nehéz megmutatni, $f(x)$ is az. Tehát $g(-x) = g(x)$, és $g(x) = \frac{(|x|+1)e^{-|x|}}{4}$.

2.) Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó $m = 2$ várható értékkel, és $d = 3$ szórásnégyzettel. Számoljuk ki az $E\xi^4$ várható értékét.

Megoldás: Írjuk a ξ valószínűségi változót $\xi = \sqrt{3}\eta + 2$ alakban, ahol η sztandard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $\xi^4 = (\sqrt{3}\eta + 2)^4 = 9\eta^4 + 4 \cdot 3\sqrt{3} \cdot 2\eta^3 + 6 \cdot 3 \cdot 4\eta^2 + 4 \cdot \sqrt{3} \cdot 8\eta + 16$. Várható értéket véve, és felhasználva, hogy $E\eta = E\eta^3 = 0$ azt kapjuk, hogy $E\xi^4 = 9E\eta^4 + 72E\eta^2 + 16$. Mivel $E\eta^4 = 3$, $E\eta^2 = 1$ az előző feladat eredménye szerint $E\xi^4 = 115$.

3.) Legyen ξ és η két független valószínűségi változó, amelyek közül ξ egyenletes eloszlású a $[0,1]$ intervallumban, azaz sűrűségfüggvénye $f(x) = 1$, ha $0 \leq x \leq 1$, és $f(x) = 0$ egyébként, η exponenciális eloszlású $\lambda = 1$ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $g(x) = e^{-x}$, ha $x \geq 0$, és $g(x) = 0$ egyébként. Számoljuk ki a $\xi + \eta$ valószínűségi változó $h(x)$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: $h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du$. Határozzuk meg, hogy mely u értékekre lesz a fenti integrál $f(u)g(x-u)$ integrandusa szigorúan pozitív. Ehhez az kell, hogy $0 \leq u \leq 1$, és $x - u \geq 0$, azaz $u \leq x$. A két követelményt egy képletben egyesítve azt írhatjuk, hogy $0 \leq u \leq \min(x,1)$. Innen következik, hogy $h(x) = 0$, ha $x \leq 0$, $h(x) = \int_{0}^{x} e^{-(x-u)}\,du = e^{-x}[e^{u}]_{0}^{x} = e^{-x}(e^{x}-1) = 1 - e^{-x}$, ha $0 \leq x \leq 1$, és $h(x) = \int_{0}^{1} e^{-(x-u)}\,du = e^{-x}(e-1)$, ha $x > 1$.

4.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-1,1]$ intervallumon, η egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[-2,2]$ intervallumban, és legyen ξ és η független egymástól. Számoljuk ki $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: Jelölje $f(x)=\frac{1}{2}$, ha $-1\le x\le 1$, $f(x)=0$ egyébként a ξ valószínűségi változó, $g(x)=\frac{1}{4}$, ha $-2\le x\le 2$, $g(x)=0$ egyébként az η valószínűségi változó, és $h(x)$ a $\xi+\eta$ valószínűségi változó sűrűségfüggvényét. Ekkor $h(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(u)g(x-u)\,du$. Határozzuk meg, hogy mely u értékekre lesz a fenti integrál $f(u)g(x-u)$ integrandusa szigorúan pozitív. Ehhez az kell, hogy $-1\le u\le 1$, és $-2\le x-u\le 2$, azaz $x-2\le u\le x+2$. Ha $x>0$, akkor ez azt jelenti, hogy $\min(x-2,-1)\le u\le 1$. Innen $-1\le u\le 1$, ha $0\le x\le 1$, továbbá $x-2\le u\le 1$, ha $1\le x\le 3$, és a tekintett halmaz üres, ha $x>2$. Ezért $h(x)=0$, ha $x>3$, $h(x)=\frac{1}{8}\int_{x-2}^{1}du=\frac{3-x}{8}$, ha $1\le x\le 3$, és $h(x)=\frac{1}{8}\int_{-1}^{1}du=\frac{1}{4}$, ha $0\le x\le 1$. Mivel mind $f(x)$ mind $g(x)$ páros függvény, ugyanez igaz a $h(x)$ függvényre is, azaz $h(x)=h(-x)$. Innen $h(x)=\frac{1}{4}$, ha $-1\le x\le 1$, $h(x)=\frac{3-x}{8}$, ha $1\le|x|\le 3$, és $h(x)=0$, ha $|x|\ge 3$.

5.) Legyen ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,2]$ intervallumon, η egyenletes eloszlású valószínűségi változó az $[1,5]$ intervallumban, és legyen ξ és η független egymástól. Számoljuk ki $\xi+\eta$ sűrűségfüggvényét.

Megoldás: A feladat megoldható az előző feladathoz hasonló módon kissé bonyolultabb számolással. De egyszerűbb azt közvetlenül visszavezetni az előző feladatra. Ennek érdekében vegyük észre, hogy a $\bar\xi=\xi-1$ és $\bar\eta=\eta-3$ valószínűségi változók teljesítik az előző feladat feltételeit. Ezért a $\xi+\eta=\bar\xi+\bar\eta+4$ összeg $\tilde h(x)$ sűrűségfüggvénye teljesíti a $\tilde h(x)=h(x-4)$ azonosságot, ahol $h(x)$ az előző feladatban tekintett véletlen összeg sűrűségfüggvénye. Innen $\tilde h(x)=\frac{1}{4}$, ha $-1\le x-4\le 1$, $\tilde h(x)=\frac{3-x}{8}$, ha $1\le|x-4|\le 3$, és $\tilde h(x)=0$, ha $|x-4|\ge 3$.

6.) Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független, (egyforma eloszlású) valószínűségi változók egyenletes eloszlással valamely $[a,b]$ intervallumon. Vegyük e valószínűségi változók $\xi_1^*<\xi_2^*<\cdots<\xi_n^*$ nagyság szerinti sorbarendezését, azaz a belőlük készített rendezett mintát. A $(\xi_1^*,\xi_2^*,\dots,\xi_n^*)$ véletlen vektor (létező) $g(x_1,\dots,x_k)$ sűrűségfüggvényét az alábbi képlet adja meg: $g(x_1,\dots,x_k)=\frac{n!}{(b-a)^n}$, ha $a\le x_1<x_2<\cdots<x_n<b$, és $g(x_1,\dots,x_n)=0$ egyébként.

Megoldás: Azt kell belátni, hogy az n-dimenziós tér tetszőleges $C\subset R^n$ (mérhető) részhalmazára

$$P((\xi_1^*,\xi_2^*,\dots,\xi_n^*)\in C)=\int_C g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n.$$

Elég ezt az azonosságot a $C\subset A$, $A=\{(x_1,\dots,x_n)\colon a<x_1<x_2,\dots<x_n<b\}$ alakú halmazokra belátni a $g(x_1,\dots,x_n)=\frac{n!}{(b-a)^n}$ függvénnyel, mert $C\in R^n\setminus A$ esetén mind $P((\xi_1^*,\xi_2^*,\dots,\xi_n^*)\in C)=0$, mind $\int_C g(x_1,\dots,x_n)\,dx_1\dots dx_n=0$. Adva egy $C\subset A$ (mérhető) halmaz, vezessük be az $\{1,\dots,n\}$ halmaz $\pi\in\Pi_n$ permutációinak a halmazát, és legyen

$$C_\pi=\{(x_{\pi(1)},\dots,x_{\pi(n)})\colon (x_1,\dots,x_n)\in C,\}$$

minden $\pi \in \Pi_n$ permutációra és $C \subset A$ halmazra. Definiáljuk a $\bar{C} = \bigcup_{\pi \in \Pi_n} C_\pi$ halmazt. Ekkor

$$\{\omega\colon\ (\xi_1^*(\omega), \xi_2^*(\omega), \ldots, \xi_n^*(\omega)) \in C\} = \{\omega\colon\ (\xi_1(\omega), \xi_2(\omega), \ldots, \xi_n)(\omega)) \in \bar{C}\},$$

a C_π halmazok diszjunktak különböző π permutációkra, és minden $C \subset A$ halmazra. Ezért

$$\begin{aligned} P((\xi_1^*, \ldots, \xi_n^*) \in C) = P((\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \bar{C}) &= \int_{\bar{C}} \frac{1}{(b-a)^n}\, dx_1 \ldots dx_n \\ &= \int_C \frac{n!}{(b-a)^n}\, dx_1 \ldots dx_n, \end{aligned}$$

és innen következik a feladat állítása.