A szita formula és alkalmazásai.

Gyakran találkozunk az alábbi kérdéssel, sokszor egy összetett feladat részfeladataként. Tekintsünk bizonyos $A_1, \dots, A_n$ eseményeket, és számítsuk ki annak a valószínűségét, hogy legalább az egyikük bekövetkezik. Formálisan megfogalmazva, számítsuk ki a $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűséget.

A következő két fontos speciális esetben egyszerűen meg tudjuk oldani ezt a feladatot:

a) Ha az $A_1, \dots, A_n$ események diszjunktak, azaz $A_i \cap A_j = \emptyset$, ha $i \neq j$, $1 \le i, j \le n$,

b) Ha az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek.

Az a) esetben

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n).$$

A b) esetben

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) &= 1 - P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = 1 - P(\bar{A}_1 \cap \cdots \cap \bar{A}_n) \\ &= 1 - P(\bar{A}_1) \cdots P(\bar{A}_n) = 1 - (1 - P(A_1)) \cdots (1 - P(A_n)), \end{aligned}$$

ahol $\bar{A} = \Omega \setminus A$ az A esemény komplementerét jelöli. (A fenti számolásban kihasználtuk azt az eredményt, amely szerint, ha az $A_1, \dots, A_n$ események függetlenek, akkor az $\bar{A}_1, \dots, \bar{A}_n$ események is azok.)

Mit mondhatunk az általános esetben, ha a tekintett $A_1, A_2, \dots, A_n$ események nem feltétlenül diszjunktak, és nem feltétlenül függetlenek? Ez nehezebb kérdés, és az általános esetben a $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűséget nem lehet kifejezni csak a $P(A_j)$ valószínűségek segítségével. De ebben az esetben is van egy hasznos és tartalmas eredmény, az úgynevezett szita formula, amely lehetővé teszi a $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűség kiszámítását bizonyos plusz információk segítségével. Ismertetem ezt az eredményt. Továbbá tárgyalni fogok olyan feladatokat, amelyeket ennek az eredménynek a segítségével tudunk megoldani.

A kombinatorikában is van az ismertetetendő eredménynek egy megfelelője, amelyet szintén szita formulának neveznek. Érdemes ezt a két eredményt, amelyek, mint később látni fogjuk valójában ekvivalensek párhuzamosan ismertetni. Annak érdekében, hogy megkülönböztessük őket, kombinatorikus és valószínűségszámítási szita formuláról fogok beszélni.

Először a kombinatorikus szita formulát ismertetem: Legyen adva egy véges A halmaz, amely előáll bizonyos nem feltétlenül diszjunkt A_j, $1 \le j \le n$, halmazok $A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ uniójaként. Szeretnénk megszámolni az A halmaz elemeinek $|A|$ számát. Tekintsünk egy olyan esetet, amikor erre közvetlenül nem vagyunk képesek, de meg tudjuk számolni az A_j halmazok elemeinek $|A_j|$ számát minden $1 \le j \le n$ számra. Ekkor az $S_1 = \sum\limits_{j=1}^{n} |A_j|$ mennyiség természetes becslés lenne az $|A|$ számra. De ez csak egy felső becslés az általános esetben, mert egy olyan elemet, amely mind az A_i mind az A_j halmazban benne van valamely $i \neq j$ indexpárra kétszer számoltunk az S_1 kifejezésben holott csak egyszer kellett volna. Ezt korrigálandó vezessük be az

$S_2 = \sum_{1\le i<j\le n} |A_i \cap A_j|$ összeget, és vegyük az $S_1 - S_2$ becslést. Ekkor azonban csak az $S_1 - S_2 \le |A|$ egyenlőtlenséget kapjuk, mert például egy olyan elemet, amely három halmazban van benne háromszor számoltuk az S_1 összegben és háromszor vontuk le az S_2 összegben, tehát az ilyen pontok létezését nem vettük figyelembe az $S_1 - S_2$ becslésben. (Ha az A_i, A_j és A_k halmazban van a tekintett pont akkor pozitív előjellel számoltuk az S_1 összeg $|A_i|$, $|A_j|$ és $|A_k|$ tagjaiban és negatív előjellel az S_2 összeg $|A_i \cap A_j|$, $|A_i \cap A_k|$ és $|A_j \cap A_k|$ tagjaiban.) Ezért korrigáljuk ezt az összeget is. Vezessük be az $S_3 = \sum_{1\le i<j<k\le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$ kifejezéseket. Ekkor be lehet látni, hogy $S_1 - S_2 + S_3 \ge |A|$. Ha azonosságot akarunk kapni akkor ezt a korrekciós eljárást tovább kell folytatni, mert például a 4 különböző A_j halmazban szereplő elemeket figyelembe véve ... A fenti, kissé nagyvonalúan tárgyalt gondolatmenetet részletesebben kidolgozva és folytatva a következő eredményhez jutunk.

Kombinatorikus szita formula. *Legyenek adva bizonyos véges sok elemet tartalmazó $A_1, \dots, A_n$ halmazok, és tekintsük ezek $A = A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_n$ unióját. Jelölje $|X|$ egy véges X halmaz elemeinek a számát. Az A halmaz elemeinek $|A|$ számát a következő formulával fejezhetjük ki. Vezessük be az*

$$S_k = \sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} |A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_k}|, \quad 1 \le k \le n,$$

mennyiségeket. Ekkor

$$|A| = |A_1 \cup \dots \cup A_n| = S_1 - S_2 + S_3 - \dots + (-1)^{n+1} S_n.$$

Továbbá,

$$S_1 - S_2 = \sum_{j=1}^{n} |A_j| - \sum_{1\le j<k\le n} |A_j \cap A_k| \le |A| = |A_1 \cup \dots \cup A_n| \le S_1 = \sum_{j=1}^{n} |A_j|$$

és általában

$$\sum_{k=1}^{2l} (-1)^{k+1} S_k \le |A| = |A_1 \cup \dots \cup A_n| \le \sum_{k=1}^{2l-1} (-1)^{k+1} S_k$$

minden $l \ge 1$ indexre. (Legyen $S_k = 0$, ha $k > n$.) Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a kombinatorikus szita formulában szereplő $S_1 - S_2 + S_3 - \cdots$ előjeles összeg páratlan számú tagot tartalmazó részletösszegei felső és páros számú tagot tartalmazó részletösszegei alsó becslést adnak az $|A| = |A_1 \cup \dots \cup A_n|$ mennyiségre.

Ezen eredmény valószínűségszámítási megfelelője, a valószínűségszámítási szita formula hasonló eredményt állít bizonyos $A_1, \dots, A_n$ események uniójának a valószínűségéről.

Valószínűségszámítási szita formula. *Legyenek adva tetszőleges* $A_1, \dots, A_n$ *események egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn. Ekkor*

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n,$$

ahol

$$S_k = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}), \quad 1 \le k \le n.$$

Továbbá,

$$S_1 - S_2 = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) - \sum_{1 \le j < k \le n} P(A_j \cap A_k) \le P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \le S_1 = \sum_{j=1}^{n} P(A_j)$$

és általában

$$\sum_{k=1}^{2l} (-1)^{k+1} S_k \le P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) \le \sum_{k=1}^{2l-1} (-1)^{k+1} S_k$$

minden $l \ge 1$ *indexre. (Legyen* $S_k = 0$, *ha* $k > n$.*) Ez az egyenlőtlenség azt jelenti, hogy a* $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ *valószínűséget a szita formulában kifejező* $S_1 - S_2 + S_3 - \cdots$ *előjeles összeg páratlan számú tagot tartalmazó részletösszegei felülről és páros számú tagot tartalmazó részletösszegei alulról becsülik meg a vizsgált valószínűséget.*

Házi feladat:
Mutassuk meg, hogy a valószínűségszámítási szita formula a korábban ismertetett képleteket adja speciális esetként diszjunkt vagy független $A_1, \dots, A_n$ események uniójának $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűségére.

Mutatok egy olyan feladatot, amelyet viszonylag könnyen meg tudunk oldani az előbb megfogalmazott valószínűségszámítási szita formula segítségével.

Feladat:

Egy estélyen megjelenik n házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem, véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Mi a valószínűsége annak, hogy egyetlen házaspár sem táncol együtt? Mi ennek a valószínűségnek a határértéke, ha $n \to \infty$?
Megoldás: Definiáljuk a következő A_j eseményeket:

$$A_j = \text{a } j\text{-ik házaspár együtt táncol}, \quad 1 \le j \le n.$$

Ekkor minket a $P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűség érdekel. Számoljuk ki a $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)$ valószínűséget a valószínűségszámítási szita formula segítségével. Ennek érdekében vegyük észre, hogy a $P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}) = \frac{(n-k)!}{n!}$ azonosság érvényes minden lehetséges $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$ szám-k-asra. Ugyanis az összes lehetséges párbaállítások száma $n!$, míg az olyan párbaállítások száma, amelyben a j_1-ik, j_2-ik, ... , j_k-ik házaspár egy párba kerül $(n-k)!$.

Ezért a valószínűségszámítási szita formulában bevezetett S_k mennyiség értéke $S_k = \binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!} = \frac{1}{k!}$ minden $1 \le k \le n$ számra.
Innen adódik, hogy a minket érdeklő valószínűség n házaspár esetén

$$\begin{aligned}P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) &= 1 - P(A_1 \cup \cdots \cup A_n)\\ &= 1 - S_1 + S_2 + \cdots + (-1)^n S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!},\end{aligned}$$

ahonnan

$$P(\overline{A_1 \cup \cdots \cup A_n}) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \to \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} = \frac{1}{e} \qquad \text{ha } n \to \infty.$$

Tehát nagy n számra annak a valószínűsége, hogy egy házaspár sem fog együtt táncolni közelítőleg $\frac{1}{e}$.

Mutatok három másik feladatot is, ahol a szita formula jól alkalmazható.

1. feladat:

Egy urnából, amelyben az $1,\dots,n$ számokat tartalmazó lapok vannak, kihúzunk m lapot visszatevéssel. Minden lapot egyforma valószínűséggel húzunk. Mi annak a valószínűsége, hogy az $1,\dots,k$ számot tartalmazó lapok mindegyikét kihúztuk? Mi ennek a valószínűségnek a határértéke rögzített k számra és $m = n$ húzásszámra, ha $n \to \infty$?
Megoldás: Jelölje A_j, $1 \le j \le k$, azt az eseményt, hogy a j számot tartalmazó lapot nem húztuk ki, és jelölje $\bar{B}$ egy B esemény komplementerét. Ekkor a $P(\bar{A}_1 \cap \bar{A}_2 \cap \cdots \cap \bar{A}_k) = P(\overline{A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k}) = 1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)$ valószínűséget kell kiszámolnunk. Továbbá, $P(A_{j_1} \cap A_2 \cap \cdots \cap A_{j_l}) = \left(\frac{n-l}{n}\right)^m$ minden rögzített $1 \le j_1 < \cdots < j_l \le k$ indexsorozatra, mert ez egy olyan esemény valószínűségével egyenlő, ahol m (egymástól független) húzás mindegyikében n lehetőség közül l szám kihúzását tiltjuk meg. Innen $S_l = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_l \le k} P(A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_l}) = \binom{k}{l}\left(\frac{n-l}{n}\right)^m$, minden $1 \le l \le k$ indexre, és a szita formula alapján a keresett valószínűség $1 - P(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k) = 1 - S_1 + S_2 - \cdots + (-1)^k S_k = 1 - \sum\limits_{l=1}^{k} (-1)^l \binom{k}{l}\left(1 - \frac{l}{n}\right)^m$. Ennek határértéke $m = n$ és $n \to \infty$ esetén $1 - \sum\limits_{l=1}^{k} (-1)^l \binom{k}{l} e^{-l} = \sum\limits_{l=0}^{k} \binom{k}{l}\left(-\frac{1}{e}\right)^l = \left(1 - \frac{1}{e}\right)^k$, mert $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 - \frac{l}{n}\right)^n = e^{-l}$.

2. feladat:

Leírunk egy 20 hosszúságú szót, amelyik csak A, B, C és D betűt tartalmaz. Válasszuk ki a szó mindegyik betűjét egymástól függetlenül egyforma valószínűséggel.

a.) Mi annak a valószínűsége, hogy a felírt szó mind a négy betűt tartalmazza?

b.) Hány olyan 20 hosszúságú négy betűs szó van, amelyik mind a négy betűt tartalmazza?

Megoldás: Jelölje, 1, 2, 3 és 4 a négy betűt. Ezzel a megfogalmazással az a) rész megegyezik az első feladat problémájával, ha $n = k = 4$, és $m = 20$. Ezért az a) rész eredménye $1 - \sum\limits_{l=1}^{4} (-1)^l \binom{4}{l} \left(1 - \frac{l}{4}\right)^{20}$.

Összesen 4^{20} 20 hosszúságú 4 betűből álló szó van. Ezért az a) rész megoldásából következik, hogy a b) rész megoldása $4^{20} \left(1 - \sum\limits_{l=1}^{4} (-1)^l \binom{4}{l} \left(1 - \frac{l}{4}\right)^{20}\right) = 4^{20} - \sum\limits_{l=1}^{4} (-1)^l \binom{4}{l} \left(4^{20} - l\right)$. Ez az eredmény egyébként közvetlenül is levezethető a kombinatorikus szita formula segítségével.

3. feladat:

Egy cornflake gyártó cég minden dobozba betesz egy kupont, és összesen 10 különböző kupont használ. Mekkora annak a valószínűsége, hogy mind a 10 kupont megkapja egy olyan vásárló, aki 25 doboz cornflake-et vesz?

Megoldás: Jelölje A_j, $1 \le j \le 10$, azt az eseményt, hogy a j-ik kupont megkapta a vásárló, és $\bar{A}_j$ ennek az eseménynek a komplementerét. Ekkor a $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{10} A_j\right)$ valószínűséget kell kiszámolnunk. Viszont $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{10} A_j\right) = 1 - P\left(\bigcup\limits_{j=1}^{10} \bar{A}_j\right)$, és $P\left(\bigcup\limits_{j=1}^{10} \bar{A}_j\right) = \sum\limits_{k=1}^{10} (-1)^k S_k$, ahol $S_k = \sum P(\bar{A}_{j_1} \cap \bar{A}_{j_2} \cap \cdots \cap \bar{A}_{j_k})$, és a $\{j_1, \dots, j_k\}$ indexhalmaz a fenti szummában az $\{1, \dots, 10\}$ halmaz összes k elemű részhalmazából áll.

Viszont $P(\bar{A}_{j_1} \cap \bar{A}_{j_2} \cap \cdots \cap \bar{A}_{j_k}) = \left(\frac{10-k}{10}\right)^{25}$, annak a valószínűsége, hogy a lehetséges 10 kuponból mind a 25 vásárlásnál a $j_1, \dots\ j_k$ indexű kuponoktól különböző $10-k$ kupon valamelyikét kapjuk. Ezért $S_k = \binom{10}{k} \left(\frac{10-k}{10}\right)^{25}$ minden $1 \le k \le 10$ indexre $k = 10$-re $S_k = S_{10} = 0$, ahonnan $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{10} A_j\right) = \sum\limits_{k=0}^{9} (-1)^k \binom{10}{k} \left(1 - \frac{k}{10}\right)^{25}$.

A valószínűségszámítási szita formula bizonyítását egy kiegészítésben fogom tárgyalni. Alább megmutatom, hogy a kombinatorikus szita formula egyszerűen levezethető a valószínűségszámítási szita formulából, és vice versa.

A kombinatorikus szita formula igazolása érdekében tekintsünk bizonyos $A_1, \dots, A_n$ véges halmazokat, és jelöljük e halmazok unióját $A = A_1 \cup \cdots \cup A_n$-nel. Legyen $A = \{x_1, \dots, x_N\}$ egy N elemű halmaz, és vezessük be azt a valószínűségi mezőt, amelyben az A halmaz elemeit választhatjuk ki egyenletes eloszlással. Részletesebben kifejtve, a következő $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt definiáljuk: $\Omega = A$, $\mathcal{A}$ az A halmaz összes részhalmazából álló σ-algebra, $P(\{x_j\}) = \frac{1}{N}$ minden $1 \le j \le N$ számra, ahonnan

$P(B) = \frac{|B|}{N}$ minden $B \subset A$ halmazra. Megmutatom, hogy a kombinatorikus szita formulát megkaphatjuk a valószínűségi szita formula segítségével, ha azt a most definiált $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn az $A_1, \dots, A_n$ halmazokra alkalmazzuk.

Jelöljük a kombinatorikus szita formulában definiált S_j, $1 \le j \le n$, összegek megfelelőit a valószínűségi szita formulában $\bar{S}_j$-vel. Ekkor nyílván $S_j = N\bar{S}_j$. Továbbá, mivel $P(A) = 1$, a valószínűségi szita formula azt adja, hogy $S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n = N(\bar{S}_1 - \bar{S}_2 + \bar{S}_3 - \cdots + (-1)^{n+1}\bar{S}_n) = NP(A) = N$, és mivel $|A| = N$, ezt kellett bizonyítanunk. A kombinatorikus szita formulában megfogalmazott egyenlőtlenségek hasonlóan vezethetők le ezen állítások megfelelőiből a valószínűségszámítási szita formulában.

Megfordítva, a valószínűségszámítási szita formula is egyszerűen levezethető a kombinatorikus szita formulából. Annak érdekében, hogy ezt megtegyük tekintsük azt az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőt, ahol az $A_1, \dots, A_n$ események definiálva vannak, és definiáljuk minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre és $B \in \mathcal{A}$ halmazra azt a $\bar{B} = \bar{B}(\omega)$ halmazt, amelyre $\bar{B}(\omega) = \{\omega\}$, ha $\omega \in B$, és $\bar{B}(\omega) = \emptyset$, ha $\omega \notin B$. Felírom a kombinatorikai szitaformulát az $\bar{A}_1(\omega) \cup \cdots \cup \bar{A}_n(\omega)$ halmaz számosságára minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre, majd megmutatom, hogy ezt az azonosságot az ω szerint kiátlagolva, azaz várható értéket véve megkapjuk a valószínűségszámítási szita formulát.

A kombinatorikai szita formula szerint $|\bar{A}_1(\omega) \cup \cdots \cup \bar{A}_n(\omega)| = \bar{S}_1(\omega) - \bar{S}_2(\omega) + \bar{S}_3(\omega) - \cdots + (-1)^{n+1}\bar{S}_n(\omega)$, ahol $\bar{S}_k(\omega) = \sum\limits_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} |\bar{A}_{j_1}(\omega) \cap \cdots \cap \bar{A}_{j_k}(\omega)| = \sum\limits_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} I_{A_{j_1} \cap \cdots \cap A_{j_k}}(\omega)$, $1 \le k \le n$. Itt és a továbbiakban $I_B(\omega)$ jelöli egy $B \in \mathcal{A}$ halmaz indikátorfüggvényét. Továbbá $|\bar{A}_1(\omega) \cup \cdots \cup \bar{A}_n(\omega)| = I_{A_1 \cup \cdots \cup A_n}(\omega)$. Tehát $I_{A_1 \cup \cdots \cup A_n}(\omega) = \bar{S}_1(\omega) - \bar{S}_2(\omega) + \bar{S}_3(\omega) - \cdots + (-1)^{n+1}\bar{S}_n(\omega)$. Mivel $E\bar{S}_k(\omega) = S_k$. $1 \le k \le n$, a fenti azonosságban várható értéket véve megkapjuk a $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = S_1 - S_2 + S_3 - \cdots + (-1)^{n+1} S_n$ azonosságot. A valószínűségszámítási szita formulában felírt egyenlőtlenségek hasonlóan bizonyíthatóak. A

$$\sum_{k=1}^{2l} (-1)^{k+1} \bar{S}_k(\omega) \le I_{A_1 \cup \cdots \cup A_n}(\omega) \le \sum_{k=1}^{2l-1} (-1)^{k+1} \bar{S}_k(\omega)$$

egyenlőtlenséget kell felírni a kombinatorikus szita formula segítségével, és várható értéket kell venni ebben a relációban.

1. kiegészítés. *A valószínűségszámítási szita formula és annak egy általánosítása.*

A valószínűségszámítási szita formula egy olyan bizonyítását ismertetem, amely egy önmagában is érdekes, és más esetekben is alkalmazható eredményen alapul. Ezt az alábbi lemmában fogalmazom meg.

Lemma. *Legyenek adva valamely $A_1, \dots, A_n$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és definiáljuk ezek felhasználásával véges sok unió, metszet és komplementer segítségével bizonyos $B_j = f_j(A_1, \dots, A_n)$, $1 \le j \le k$, eseményeket. Rögzítsünk valamely $c_1, \dots, c_k$ valós számokat. A*

$$\sum_{j=1}^{k} c_j P(B_j) = \sum_{j=1}^{k} c_j P\left(f_j(A_1, \dots, A_n)\right) \ge 0$$

egyenlőtlenség teljesül tetszőleges valószínűségi mezőn definiált tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ halmazokra, ha speciálisan teljesül abban a (2^n számú) speciális esetben, amikor mindegyik A_j halmaz vagy az Ω biztos vagy az $\emptyset$ üres esemény.

A lemma bizonyítása. Jelölje $A_j^{-1} = \Omega \setminus A_j$ az A_j halmaz komplementerét. Vezessük be az $A_j^1 = A_j$ jelölést, és jelöljön $(k_1, \dots, k_n)$, $k_j = \pm 1$, $1 \le j \le n$, valamely n hosszúságú ± 1 sorozatot. Írjuk fel mindegyik $B_j = f_j(A_1, \dots, A_n)$ eseményt konjunktív normálforma alakban. Felhasználva, hogy a konjunktív normálformában diszjunkt halmazok uniója jelenik meg, a vizsgálandó egyenlőtlenség felírható

$$\text{(A)} \qquad \sum_{(k_1,\dots,k_n):\ k_j=\pm 1,\ j=1,\dots,n} d(k_1, \dots, k_n) P\left(A_1^{k_1} \cap \dots \cap A_n^{k_n}\right) \ge 0$$

alakban alkalmas $d(k_1, \dots, k_n)$ együtthatókkal. Az (A) egyenlőtlenség nyílván érvényes minden $A_1, \dots, A_n$ halmazrendszerre, ha $d(k_1, \dots, k_n) \ge 0$ minden $(k_1, \dots, k_n)$ argumentumra. Ezért elég megmutatni, hogy amennyiben az (A) egyenlőtlenség teljesül minden olyan speciális esetben, amikor az A_j, $1 \le j \le n$, halmazok mindegyike vagy az Ω biztos vagy az $\emptyset$ üres esemény, akkor $d(k_1, \dots, k_n) \ge 0$ az összes $(k_1, \dots, k_n)$ argumentumra.

Ezt megmutatandó, rögzítsünk egy n hosszúságú $(k_1, \dots, k_n)$ ± 1 sorozatot, és definiáljuk ennek segítségével $A_1, \dots, A_n$ halmazoknak azt a sorozatát, amelyre $A_j = \Omega$, ha $k_j = 1$, és $A_j = \emptyset$, ha $k_j = -1$, $1 \le j \le n$. Ezzel a választással az (A) formula baloldalán szereplő kifejezés $d(k_1, \dots, k_n)$-nel egyenlő, ezért ez csak úgy lehet nem negatív, ha $d(k_1, \dots, k_n) \ge 0$. Mivel ezt az érvet minden lehetséges $(k_1, \dots, k_n)$ ± 1 sorozatra alkalmazhatjuk innen következik a lemma állítása.

A valószínűségszámítási szita formula bizonyítása a lemma segítségével. A lemma alapján a valószínűségszámítási szita formula azonosságát elegendő abban a speciális esetben belátni, ha mindegyik A_j esemény vagy a biztos vagy az üres esemény. Ekkor ugyanis a szita formula azonosságában szereplő kifejezések bal és jobboldalán szereplő formulák különbségéről tudjuk, hogy az egyrészt nagyobb vagy egyenlő, másrészt kisebb egyenlő, mint nulla. Ezért az nullával egyenlő. Tekintsük azokat az eseteket, amikor az A_j

események között r darab biztos és $n-r$ üres esemény van, $0 \le r \le n$. Feltehetjük, hogy $r \ge 1$, mert $r=0$ esetén, amikor mindegyik A_j esemény az üres halmaz, az azonosság mindkét oldala nullával egyenlő. Ha $1 \le r \le n$, akkor $S_l = \binom{r}{l}$ az $1 \le l \le r$ esetben, és $S_l = 0$, ha $l > r$. Ezért az $1 \le r \le n$ esetben a szita formula jobboldalán álló kifejezés $\sum\limits_{l=1}^{r}(-1)^{l+1}S_l = \sum\limits_{l=1}^{r}(-1)^{l+1}\binom{r}{l} = 1 - \sum\limits_{l=0}^{r}(-1)^{l}\binom{r}{l} = 1-(1-1)^r = 1$, a baloldali kifejezés pedig szintén $P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(\Omega) = 1$.

Hasonló meggondolások alapján a szita formulában megfogalmazott egyenlőtlenségek igazolásához elég azt megmutatni, hogy $1 - \sum\limits_{l=1}^{s}(-1)^{l+1}\binom{r}{l} \le 0$, azaz $\sum\limits_{l=0}^{s}(-1)^{l}\binom{r}{l} \le 0$, ha $1 \le s \le r$, és s páratlan szám, és $\sum\limits_{l=0}^{s}(-1)^{l}\binom{r}{l} \ge 0$, ha $1 \le s \le r$, és s páros szám. (A bizonyítandó állítás ezen redukciójához úgy jutunk a fenti lemma segítségével, hogy r-val jelöljük azon A_j halmazok számát, amelyekre $A_j = \Omega$, és felírjuk, hogy mit jelent a lemma szerint bizonyítandó állítás ebben az esetben. Az $r=0$ esetben az ellenőrizendő egyenlőtlenségek nyilvánvalóan teljesülnek, mert ekkor minden tekintett kifejezés nullával egyenlő.)

A bizonyítandó egyenlőtlenségek következnek az alábbi tartalmasabb azonosságból.

$$\sum_{l=0}^{s}(-1)^{l}\binom{r}{l} = (-1)^s\binom{r-1}{s}, \quad 0 \le s \le r.$$

Ez azonosság nyílvánvaló az $s=0$ esetben, az általános esetben pedig az s változó szerinti indukcióval kapjuk, hogy $\sum\limits_{l=0}^{s}(-1)^{l}\binom{r}{l} = (-1)^{s-1}\binom{r-1}{s-1} + (-1)^s\binom{r}{s} = (-1)^s\binom{r-1}{s}$.

Ismertetem a szita formula egy hasonlóan bizonyítható általánosítását.

A szita formula egy általánosítása. *Legyenek adva tetszőleges $A_1, \dots, A_n$ események egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és vezessük be az $N = N(\omega)$ valószínűségi változót, amely egyenő azon j indexek számával, amelyekre az $\omega \in A_j$ reláció teljesül. Ekkor*

$$P(N=r) = \sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\binom{i+r}{i}S_{i+r}, \quad \textit{minden } 0 \le r \le n \textit{ számra,}$$

ahol

$$S_0 = 1, \quad S_k = \sum_{1 \le i_1 < \cdots < i_k \le n} P\left(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}\right), \quad 1 \le k \le n.$$

Továbbá ezen összeg részletösszegei felváltva alsó illetve felső becslést adnak a tekintett valószínűségekre, azaz

$$\sum_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{i+r}{i}S_{i+r} \ge P(N=r) \quad \textit{ha } 0 \le s \le n-r \textit{ és } s \textit{ páros szám.}$$

és

$$\sum_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{i+r}{i}S_{i+r} \le P(N=r) \quad \textit{ha } 0 \le s \le n-r \textit{ és } s \textit{ páratlan szám.}$$

Megjegyzés. Mivel $P(N=0)=1-P(A_1\cup\cdots\cup A_n)$ és $S_0=1$ ez az eredmény az $r=0$ esetben megegyezik a szita formulával.

A szita formula általánosításának a bizonyítása. A szita formula bizonyításához hasonlóan ebben az esetben is redukálhatjuk a bizonyítandó állítás igazolását arra a speciális esetre, amikor a tekintett A_j események között k darab Ω biztos és $n-k$ darab üres esemény van, $0\le k\le n$. Sőt, azt is feltehetjük, hogy $k>r$. Ugyanis $k<r$ esetén a felírt azonosság illetve egyenlőtlenségek mind a két oldala 0-val, míg $k=r$ esetén 1-gyel egyenlő. Ugyanis $S_{r+i}=0$, ha $r+i>k$, ami minden $i\ge 0$-ra teljesül, ha $k<r$. Ezért ebben az esetben a tekintett azonosság és egyenlőtlenségek jobboldalán 0 áll. A $k=r$ esetben $S_{r+i}=0$, ha $i\ge 1$, és $S_{r+0}=1$. Másrészt $P(N=r)=0$, ha $k\ne r$, és $P(N=r)=k$, ha $k=r$. Ezekből az állításokból következik az állítás fenti redukciójának a jogossága.

Másrészt a tekintett speciális esetben (amikor pontosan k darab biztos esemény van, és a többi $n-k$ esemény pedig üres) $S_{r+i}=\binom{k}{r+i}$, és $\binom{i+r}{i}\binom{k}{i+r}=\binom{k}{r}\binom{k-r}{i}$. Innen a bizonyítandó azonosság jobboldalán álló kifejezés

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\binom{i+r}{i}S_{r+i}&=\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\binom{i+r}{i}\binom{k}{r+i}=\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\binom{k}{r}\binom{k-r}{i}\\&=\binom{k}{r}\sum_{i=0}^{k-r}(-1)^i\binom{k-r}{i}=\binom{k}{r}\sum_{i=0}^{k-r}(1-1)^{k-r}=0,\end{aligned}$$

ha $k>r$. Innen következik, hogy a felírt azonosság valóban érvényes. Az egyenlőtlenségek bizonyítása hasonló, csak ebben az esetben a számolás végén a $\sum\limits_{i=0}^{k-r}(-1)^i\binom{k-r}{i}=0$ azonosság helyett a szita formula bizonyítása során már igazolt a $\sum\limits_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{k-r}{i}\ge 0$, ha $0\le s\le k-r$ és s páros szám, és $\sum\limits_{i=0}^{s}(-1)^i\binom{k-r}{i}\le 0$, ha $0\le s\le k-r$ és s páratlan szám egyenlőtlenségeket kell használni.

Bebizonyítok egy hasonló azonosságot, amelyben a $P(N\ge r)$ valószínűséget számoljuk ki az S_k mennyiségek segítségével, azaz annak a valószínűségét, hogy legalább r darab A_j esemény következett be. Megmutatom, hogy ez a formula egyszerűen levezethető az előző eredményben bizonyított a $P(N=r)$ valószínűséget kifejező azonosságból.

Formula a $P(N\ge r)$ valószínűség kifejezésére. *A szita formula előbb megfogalmazott általánosításában bevezetett jelöléseket alkalmazva felírhatjuk a*

$$P(N\ge r)=\sum_{i=0}^{n-r}(-1)^i\binom{i+r-1}{i}S_{i+r},\quad \textit{minden } 1\le r\le n \textit{ számra},$$

azonosságot, ahol

$$S_0=1,\quad S_k=\sum_{1\le i_1<\cdots<i_k\le n}P\left(A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_k}\right),\quad 1\le k\le n.$$

A formula bizonyítása. A képlet $r = n$-re érvényes, mert $P(N \geq n) = S_n$, és az azonosság jobboldalán álló kifejezés is ezzel egyenlő az $r = n$ esetben. (Ekkor az összeg csak az $i = 0$ tagot tartalmazza.) Az azonosságot r szerinti backward indukcióval és a $P(N = r)$ kifejezésre már bizonyított azonosság segítségével bizonyítjuk be. Ugyanis, ha az azonosságot tudjuk $r + 1$-re, akkor felírhatjuk a

$$\begin{aligned} P(N \geq r) &= P(N = r) + P(N \geq r+1) \\ &= \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i \binom{i+r}{i} S_{i+r} + \sum_{i=0}^{n-r-1} (-1)^i \binom{i+r}{i} S_{i+r+1} \end{aligned}$$

azonosságot. Mivel $\sum\limits_{i=0}^{n-r-1} (-1)^i \binom{i+r}{i} S_{i+r+1} = \sum\limits_{i=1}^{n-r} (-1)^{i-1} \binom{i+r-1}{i-1} S_{i+r}$, innen azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(N \geq r) &= \sum_{i=1}^{n-r} (-1)^i \left(\binom{i+r}{i} - \binom{i+r-1}{i-1} \right) S_{i+r} + S_r \\ &= \sum_{i=1}^{n-r} (-1)^i \binom{i+r-1}{i} S_{i+r} + S_r, \end{aligned}$$

mivel $\binom{i+r}{i} = \binom{i-r-1}{i-1} + \binom{i+r-1}{i}$, és ezt az azonosságot kellett bizonyítani.

Feladat:

Tekintsük a jegyzet elején megfogalmazott példát, és számoljuk ki az általánosított szita formula segítségével annak valószínűségét, hogy pontosan r, $r \geq 0$, házaspár táncol együtt. Mi e valószínűség határértéke, ha $n \to \infty$?

Megoldás: Az eredeti feladat megoldása során kiszámoltuk, hogy $S_k = \frac{1}{k!}$. Ezért az általánosított szita formula alapján annak a valószínűsége, hogy az n házaspárból álló társaságban az együtt táncoló házaspárok N_n száma pontosan r

$$P(N_n = r) = \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i \binom{i+r}{i} S_{i+r} = \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i \binom{i+r}{i} \frac{1}{(i+r)!} = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{n-r} (-1)^i \frac{1}{i!}.$$

Innen

$$\lim_{n \to \infty} P(N = r) = \frac{1}{r!} \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i \frac{1}{i!} = \frac{1}{r!} \frac{1}{e}.$$

Megjegyzés. Az előző feladat eredménye speciálisan azt jelenti, hogy a feladatban tekintett egymással táncoló házaspárok számának eloszlása tart az 1 paraméterű Poisson eloszláshoz, ha $n \to \infty$.

Tekintsük a következő módosított feladatot. Legyen adva n házaspár, és táncoljanak a feleségek egymás után egy véletlenül kiválasztott férfival úgy, hogy minden férfit egyforma valószínűséggel választanak, és minden egyes ilyen párválasztás független egymástól. (Lehetséges, hogy lesz olyan férj, amely többször, illetve olyan férj, amely egyszer sem táncolt.) Kérdés: Mi annak a valószínűsége, hogy pontosan r feleség táncolt a férjével? Mi ennek a valószínűségnek a határértéke rögzített r számra, ha a házaspárok n száma tart a végtelenhez?

Ezt a feladatot a benne szereplő függetlenségi tulajdonságok miatt könnyen meg lehet oldani. Nevezetesen a keresett valószínűség értéke $\binom{n}{r}\left(\frac{1}{n}\right)^r\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-r}$, aminek a határértéke rögzített r számra $n\to\infty$ esetén $\frac{1}{r!}e^{-1}$. (Vegyük észre, hogy $\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-r}=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-r}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n}\to e^{-1}$, és $\binom{n}{r}\left(\frac{1}{n}\right)^r\to\frac{1}{r!}$, ha $n\to\infty$.) Egyébként a kapott eredmény a független valószínűségi változókra vonatkozó Poisson eloszlású határeloszlástétel speciális esete, amely azt adja, hogy a keresett határérték megegyezik annak a valószínűségével, hogy egy 1 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó az r értéket veszi fel.

Tehát a tekintett két feladatban ugyanaz a határeloszlás jelent meg. Ez a következő ténnyel van kapcsolatban. Az eredeti feladatban az a megkötés, hogy az a férj, akit egyszer kijelöltek táncpartnernek nem választható mégegyszer táncpartnernek a független párválasztás bizonyos megszorítását jelenti, de ez egy nagyon enyhe megszorítás. Ezért a férjükkel táncoló feleségek száma felírható, mint olyan valószínűségi változók összege, amelyek ugyan nem függetlenek, de majdnem azok. Ezért összegük hasonló határeloszlástételt teljesít, mint amilyennel a független esetben találkoztunk.

2. kiegészítés. *A vizsgált határeloszlástétel egy más bizonyítása.*

Tanulságos lehet megmutatni, hogy hogyan lehet egyszerűen (a szita formula használata nélkül) bebizonyítani azt, hogy az e jegyzet feladatában vizsgált együtt táncoló házaspárok számának a határeloszlása az 1 paraméterű Poisson eloszlás, ha a házaspárok száma tart a végtelenhez.

A bizonyítás a követekező két lemmán alapul.

1. lemma. *Tekintsük a következő feladatot. Egy estélyen megjelenik n házaspár. Egy táncmester, aki nem tudja, hogy kik házastársak és kik nem, véletlen módon párba rendezi a férfiakat és nőket a tánc előtt. Jelölje T_n az együtt táncoló házaspárok számát. Mutassuk meg, hogy $E\binom{T_n}{k}=\frac{1}{k!}$ minden $1\le k\le n$ számra.*

2. lemma. *Legyen $\zeta=\zeta_\lambda$ egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Ekkor $E\binom{\zeta}{k}=\frac{\lambda^k}{k!}$ minden $k=1,2,\dots$ számra*

1. lemma bizonyítása. Vezessük be minden $1\le j_1<j_2<\cdots<j_k\le n$ k hosszúságú sorozatra a következő $\eta(j_1,\dots,j_k)$ valószínűségi változót: $\eta(j_1,\dots,j_k)=1$, ha a j_1-ik, j_2-ik, … j_k-ik házaspárok mindegyike egymással táncol, és $\eta(j_1,\dots,j_k)=0$ egyébként. Ekkor

$$\binom{T_n}{k}=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\eta(j_1,\dots,j_k),$$

ahonnan

$$E\binom{T_n}{k} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} E\eta(j_1,\dots,j_k).$$

Viszont $E\eta(j_1,\dots,j_k)=\frac{(n-k)!}{n!}$, ahonnan $E\binom{T_n}{k}=\binom{n}{k}\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{1}{k!}$, amint állítottuk.

2. lemma bizonyítása.

$$E\binom{\zeta}{k} = \sum_{n=k}^{\infty}\binom{n}{k}\frac{\lambda^n}{n!}e^{-\lambda} = e^{-\lambda}\lambda^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{1}{k!}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}\sum_{n=k}^{\infty}\frac{\lambda^{n-k}}{(n-k)!} = \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Az 1. és 2. lemmából következik, hogy az 1. lemmában definiált T_n valamint egy a 2. lemmában tekintett $\zeta=\zeta_1$ $\lambda=1$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változók momentumaira érvényes a $\lim\limits_{n\to\infty} ET_n^k = E\zeta^k$ azonosság minden $k=1,2,\dots$ számra.

Valóban, vegyük észre, hogy a $E\binom{T_n}{0}=E\binom{\zeta}{0}=1$, ami az ott megfogalmazott állítások megfelelője az 'elfajuló' $k=0$ esetben. Továbbá megadható az $E\binom{\eta}{k}$ kifejezés $E\binom{\eta}{k}=\frac{1}{k!}E\eta(\eta-1)\cdots(\eta-k+1)=\frac{1}{k!}(E\eta^k+B_{k-1,k}E\eta^{k-1}+\cdots+B_{1,k}E\eta+B_{0,k})$ alakú formában alkalmas $B_{j,k}$, $0\le j\le k-1$ konstansokkal. Ezen konstansok értékeit explicit módon meg lehet adni, de erre nem lesz szükségünk. Ebből a relációból az is következik, hogy az $E\eta^k$ momentumot ki lehet fejezni az $E\binom{\eta}{j}$, $0\le j\le k$, kifejezések lineáris kombinációjaként. Az ET_n^k momentum hasonlóan kifejezhető az $E\binom{T_n}{j}$, $0\le j\le k$, kifejezések lineáris kombinációjaként ugyanazon együtthatókkal. Ebből a tényből, illetve az 1. és 2. lemmából következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} ET_n^k=E\zeta^k$ minden $k=0,1,2,\dots$ számra, amint állítottam.

Viszont a valószínűségszámítás alapvető eredményeiből következik, hogy ha teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} ET_n^k=E\zeta^k$ reláció minden $k=0,1,2,\dots$ számra és egy Poisson eloszlású ζ valószínűségi változóra, akkor a T_n valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a ζ valószínűségi változóhoz.

Az, hogy eloszlások momentumainak a konvergenciájából egy Poisson eloszlású valószínűségi változó momentumaihoz következik az eloszlások konvergenciájá ezen Poisson eloszlású valószínűségi változó eloszlásához következik a következő három feladat eredményeiből. Valójában egy élesebb állítás is következik ezen feladatok eredményeiből. Az, hogy ha eloszlások egy sorozatának minden momentuma konvergál egy olyan eloszlás megfelelő momentumához, amelynek eloszlását egyértelműen meghatározzák momentumai, akkor az eloszlások sorozata konvergál ehhez az eloszláshoz.

1. feladat:

Legyen adva μ_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi mértékek egy olyan sorozata, amelyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty}\int x^k\mu_n(\,dx)=B_k<\infty$ határérték minden $k=1,2,\dots$ indexre. Ekkor a μ_n sorozat relative kompakt, azaz minden μ_{n_k} részsorozatának van $\mu_{n_{k_j}}$ eloszlásban konvergens részsorozata.

2. feladat:
Legyen adva μ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mértékek egy olyan sorozata, amely eloszlásban konvergál egy μ_0 valószínűségi mértékhez, továbbá amelyre létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \int x^k \mu_n(\,dx) = B_k < \infty$ határérték minden $k = 1, 2, \dots$ indexre. Ekkor ez a határérték teljesíti a $B_k = \int x^k \mu_0(\,dx)$ relációt minden $k = 1, 2, \dots$ indexre.

3. feladat:
Legyen adva μ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mértékek egy olyan sorozata, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} \int x^k \mu_n(\,dx) = \int x^k \mu_0(\,dx)$ minden $k = 1, 2, \dots$ indexre valamely μ_0 valószínűségi mértékkel. Ha a μ_0 mértéket meghatározzák momentumai, akkor a μ_n sorozat eloszlásban konvergál a μ_0 valószínűségi mértékhez.

Segítség: Az első feladat megoldásában a valószínűségszámítás általános eredményei alapján elég ellenőrizni, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ szám, amelyre $\mu_n(x\colon |x| > K) < \varepsilon$ minden $n = 1, 2, \dots$ indexre. Ez igaz, mert a feladat feltételei szerint $\int x^2 \mu_n(\,dx) < B$ alkalmas $B > 0$ számmal minden n indexre.
A gyenge konvergenciából következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{-A}^{A} x^k \mu_n(\,dx) = \int_{-A}^{A} x^k \mu_0(\,dx)$ minden olyan A számra, amely folytonossági pontja a μ_0 mértéknek. Ahhoz, hogy a 2. feladatot ennek alapján $A \to \infty$ határátmenettel megoldjuk elég belátni, hogy minden k egész és $\varepsilon > 0$ valós számra létezik olyan $B = B(k, \varepsilon)$ szám, amelyre $\int_{x\colon |x| > B} |x|^k \mu_n(\,dx) < \varepsilon$ minden n indexre. Viszont $\int_{x\colon |x|>B} |x|^k \mu_n(\,dx) < \frac{1}{B^k} \int_{x\colon |x|>B} |x|^{2k} \mu_n(\,dx) < \frac{1}{B^k} \int |x|^{2k} \mu_n(\,dx) < \varepsilon$ minden $n \ge 1$ indexre, ha B elég nagy. Némi plusz munkával látható, hogy ez a becslés $n = 0$ indexre is érvényes.
A 3. feladat állítása egyszerűen következik az első és második feladat eredményéből.