Áttekintés

Dynkin, Evgenyij Boriszovics és Yushkevics, Alekszandr Adolfovics

Tételek és feladatok Markov folyamatokról

című könyvéről

Első fejezet: A rekurrencia feltétele.

Tekintsünk egy közönséges bolyongást az l-dimenziós rácson. Ismert, hogy ez $l = 1,2$ esetben rekurrens, azaz egy pontból elindulva a bolyongás egy valószínűséggel valamikor visszatér a kiinduló pontba, míg $l \ge 3$ dimenziós rács esetében a bolyongás tranziens, azaz csak 1-nél kisebb valószínűséggel tér vissza a kiinduló pontba. Az is igaz, hogy $l = 1,2$ dimenzióban tetszőleges pontból kiindulva a bolyongás minden pontot 1 valószínűséggel végtelen sokszor látogat meg, míg $l \ge 3$ dimenzióban a bolyongás bármely pontot csak véges sokszor látogat meg egy valószínűséggel.

A könyv első fejezetében tárgyalt fő probléma a következő: Tekintsünk egy $l = 3$ dimenziós bolyongást, és jellemezzük a 3-dimenziós tér egész koordinátájú pontjaiból álló $\mathbb{Z}^3$ rácsnak azokat a nagy részhalmazait, amelyeket a bolyongás bárhonnan kiindulva egy valószínűséggel meglátogat. Az ilyen halmazokat rekurrens (az eredeti orosz szöveg megfogalmazásában maszív) halmazoknak nevezzük. Az első fejezet eredményei jellemzik a rekurrens halmazokat. A könyv az $l = 3$ dimenziós esettel foglalkozik, de a bebizonyított eredményt nem nehéz általánosítani tetszőleges $l \ge 3$ dimenzió esetére. Az említett feladatot, illetve annak megoldását az teszi különösen érdekessé, hogy szoros kapcsolatban van a Laplace operátor, a harmonikus és szuperharmonikus függvények elméletével, illetve a fizikában is fontos szerepet játszó kapacitás fogalmával. Pontosabban, az itt felmerülő fogalmak és eredmények diszkrét változatát kell tekinteni. Ugyancsak érdekes, hogy a vizsgálatban megjelenő eredmények azt is mutatják, hogy mennyire hasonlóan viselkedik a bolyongás és a Wiener folyamat.

Az analízisben fontos szerepet játszik az úgynevezett Laplace operátor, amelynek definiciója az l-dimenziós térben a következő.

Laplace operátor definiciója. *Tekintsünk az l-dimenziós térben egy (sima) $f(x) = f(x_1,\dots,x_l)$ függvényt. Alkalmazva erre a Δ Laplace operátort a következő Δf függvényt kapjuk.*

$$\Delta f(x) = \Delta f(x_1,\dots,x_l) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_1,\dots,x_l) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_l^2}(x_1,\dots,x_l).$$

Ugyancsak fontos szerepet játszik az analízisben az úgynevezett harmonikus függvény fogalma.

Harmonikus függvény fogalma. *Egy $f(x) = f(x_1,\dots,x_l)$ (sima) függvényt harmonikusnak nevezünk egy $G \subset R^l$ nyílt halmazon, ha $\Delta f(x) = 0$ minden $x \in G$ pontban. Egy $f(x) = f(x_1,\dots,x_l)$ függvényt harmonikusnak nevezünk, ha harmonikus az egész R^l téren.*

Szükségünk lesz a fenti fogalmak diszkrét megfelelőire. Ebben a fejezetben egy l-dimenziós bolyongást tekintünk. Ez olyan (diszkrét idejű, stacionárius) Markov lánc, amelynek állapottere a $\mathbb{Z}^l$, l-dimenziós egész koordinátájú rács, azaz az $x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_l\mathbf{e}_l$ alakú pontok halmaza, ahol $x_1,\dots,x_l$ egész számok, $e_k=(\underbrace{0,\dots,0}_{k-1\text{-szer}},1,\underbrace{0\dots,0}_{l-k\text{-szor}})$, $1\le k\le l$, egységvektorok, és egy lépésben a bolyongás egy $x=x_1\mathbf{e}_1+\cdots+x_l\mathbf{e}_l$ rácspontból $\frac{1}{2l}$ valószínűséggel egy szomszéd rácspontba megy, azaz egy olyan rácspontba, amelynek egy koordinátája különbözik az $x_1,\dots,x_l$ koordinátáktól, és az 1-gyel nagyobb vagy kisebb, mint az eredeti koordináta. Jelöljük $p(1,x,y)$ és $p(n,x,y)$ formulával egy Markov lánc, speciálisan egy bolyongás 1 illetve n-lépéses átmenetvalószínűségeit, $x,y\in E$, ahol E a Markov lánc állapottere, illetve definiáljuk a $p(1,x,y)$ 1-lépéses átmenetvalószínűségek segítségével a következő, a Markov láncok elméletében fontos szerepet játszó P operátort.

Egy Markov lánc átmenetvalószínűségei által definiált P operátor. *Legyen adva egy E állapottéren definiált (diszkrét idejű, stacionárius) Markov lánc $p(1,x,y)$, $x,y\in E$, egylépéses átmenetvalószínűségekkel. Ez a következő P operátort definiálja az E téren értelmezett $f(x)$, $x\in E$, függvények terében.*

$$Pf(x)=\sum_{y\in E}p(1,x,y)f(y),\qquad x\in E,$$

feltéve, hogy a fenti összeg (abszolut) konvergens minden $x\in E$ pontban.

Megjegyzés. Ha $x=(x(0),x(1),\dots,)$ egy Markov lánc $P(1,x,y)$, $x,y\in E$, egylépéses átmenetvalószínűségekkel, akkor $Pf(x)=E_xf(x(1))$, azaz $Pf(x)$ az $f(x(1))$ valószínűségi változó várható értéke a nulla időpontban x pontból induló $(x(0),x(1),\dots)$, $x(0)=x$, Markov láncban. Az l-dimenziós rácson definiált bolyongás esetén

$$Pf(x)=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{l}[f(x+e_k)+f(x-e_k)].$$

A Laplace operátor és harmonikus függvény diszkrét megfelelői. *Tekintsünk egy bolyongást az l-dimenziós rácson a korábban bevezetett $p(1,x,y)$ egylépéses átmenetvalószínűségekkel. Ekkor bevezetjük a következő A operátort a $\mathbb{Z}^l$ rácson definiált függvényekre, amely a Δ Laplace operátor diszkrét megfelelőjének tekinthető.*

$$Af(x)=Pf(x)-Ef(x)=\frac{1}{2l}\sum_{k=1}^{l}[f(x+e_k)+f(x-e_k)-2f(x)]$$

minden $x\in\mathbb{Z}^l$ pontban, ahol f egy a $\mathbb{Z}^l$ rácson értelmezett függvény, P a bolyongás egylépéses átmenetvalószínűségei által definiált P operátor, és E az idenititásoperátor.

Egy a $\mathbb{Z}^l$ rácson értelmezett $f(x)$ függvényt harmonikusnak nevezünk, ha $Af(x)=0$, azaz $Pf(x)=f(x)$ minden $x\in\mathbb{Z}^l$ pontban.

Megfogalmazok néhány a könyvben bebizonyított fontos eredményt. Ezeket számozott tételekben ismertetem, de ez a számozás nem követi a könyv jelölését.

1.1. Tétel. *Egy a $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 1$, rácson definiált korlátos harmonikus függvény konstans.*

A következő tétel bizonyításának legfontosabb lépése ezen eredmény alkalmazása.

1.2. Tétel. *Ha egy $B \subset \mathbb{Z}^l$ halmaz rekurrens, $l \geq 1$, akkor tetszőleges pontból kiinduló l-dimenziós bolyongás 1 valószínűséggel végtelen sokszor meglátogatja. Ha egy $B \subset \mathbb{Z}^l$ halmaz tranziens, akkor tetszőleges pontból kiinduló bolyongás 1 valószínűséggel csak véges sokszor látogatja meg.*

Az 1.2 Tétel bizonyítása. A bizonyítás érdekes része annak megmutatása, hogy ha a B halmaz olyan, hogy van olyan x pont, amelyre az x pontból a B halmazba jutás $\pi_B(x)$ valószínűségére $\pi_B(x) < 1$, akkor $\bar{\pi}_B(x)$-szel jelölve annak valószínűségét, hogy az x pontból kiinduló bolyongás a B halmazt végtelen sokszor meglátogatja igaz a $\bar{\pi}_B(x) = 0$ reláció minden $x \in \mathbb{Z}^l$ pontra. Ezen állítás bizonyítása érdekében vegyük először észre azt, hogy $\bar{\pi}_B(x)$ korlátos harmonikus függvvény, ezért konstans értékű, azaz $\bar{\pi}_B(x) = \bar{\pi}_B$ valamely $0 \leq \bar{\pi}_B \leq 1$ számmal minden $x \in Z^l$ pontban.

Vegyünk egy olyan x pontot, amelyre $\pi_B(x) < 1$. Legyen $\tau_B(\omega)$ az az időpont, amikor az x pontból kiinduló bolyongás először meglátogatja az a B halmazt, és legyen $X_{\tau_B}(\omega)$ a bolyongás helye ebben az időpontban. (Ha nincs ilyen időpont, akkor $\tau_B(\omega) = \infty$ és nem definiáljuk az $X_{\tau_B}(\omega)$ mennyiséget.) Ekkor $P(\tau_B < \infty) < 1$, és

$$\bar{\pi}_B = \bar{\pi}_B(x) = \sum_{y \in B} P(X_{\tau_B}(\omega) = y)\bar{\pi}_B(y) = \sum_{y \in B} P(X_{\tau_B}(\omega) = y)\bar{\pi}_B = \bar{\pi}_B P(\tau_B < \infty).$$

Innen $\bar{\pi}_B = 0$ a $P(\tau_B < \infty) < 1$ reláció miatt.

A lemma másik fele hagyományos módon bizonyítható. Be lehet látni teljes indukcióval, hogy ha $\pi_B(x) = 1$ minden x rácspontra, akkor a B halmaz m-szeri meglátogatásának a valószínűsége is 1 minden x rácspontra és $m = 1, 2, \dots$ számra. A bizonyítás részleteit elhagyom.

Az 1.2. Tétel eredménye némi hasonlóságot mutat a tranziens és rekurrens állapotok viselkedését leíró eredménnyel egy tetszőleges Markov lánc esetén. Fontos számunkra a 1.2. Tétel alábbi következménye.

1.2. Tétel következménye. *A $\mathbb{Z}^l$ rács két tranziens halmazának az uniója is tranziens. Speciálisan $l \geq 3$ esetében minden véges sok elemből álló $D \subset \mathbb{Z}^l$ halmaz tranziens.*

Megjegyzés. Az, hogy korlátos, harmonikus függvények konstans értékűek, nemcsak a $\mathbb{Z}^l$ téren, hanem az R^d téren értelmezett függvényekre is igaz. Sőt, mind a két esetben igaz az az élesebb állítás, mely szerint nem-negatív harmonikus függvények konstans értékűek.

Az analízisben vizsgálják az úgynevezett Poisson egyenletet, azaz a

$$\Delta u(x) = -\varphi(x), \quad \lim_{|x| \to \infty} u(x) = 0$$

egyenletet az R^l térben valamely rögzített $\varphi(x)$ függvénnyel. A következő eredmény igaz.

1.3. Tétel. *Ha az $l \geq 3$ dimenzióban tekintjük a Poisson egyenletet, és $\varphi(x)$ elég szép (például sima és integrálható) függvény, akkor a $\Delta u = -\varphi$ Poisson egyenlet megoldása az*

$$u(x) = \int_{R^l} C \frac{\varphi(y)}{|x-y|^{l-2}}\, dy$$

függvény valamely alkalmas $C = C_l > 0$ konstanssal.

Megjegyzés. Ez az eredmény szoros kapcsolatban van azzal a ténnyel, hogy az $\frac{1}{|x-y|^{l-2}}$ függvény, (mint az x változó függvénye y paraméterrel) az R^l tér, $l \geq 3$, minden pontjában harmonikus, kivéve az y pontot. Ez a függvény, alkalmas elméleti háttér kidolgozása után úgy is tekinthető, mint a $\Delta u(x) = -C\delta(y)$ egyenlet megoldása valamely alkalmas $C > 0$ számmal, ahol $\delta(y)$ az y pontba koncentrált Dirac-delta függvény. Az $l = 2$ dimenzió esete kissé eltér. Ekkor a $\log|x-y|$ függvény játszik hasonló szerepet, mint az $\frac{1}{|x-y|^{l-2}}$ függvény az $l \geq 3$ dimenzióban.

A tárgyalt könyv első fejezetében szükség van a fenti eredmény egy diszkrét változatára. A következő eredményt bizonyítják be a könyvben.

1.4. Tétel. *Tekintsük az*

$$Au(x) = Pu(x) - u(x) = -\varphi(x), \quad x \in \mathbb{Z}^l,$$

(diszkrét Poisson) egyenletet a $\mathbb{Z}^l$, $l \geq 3$, dimenziós rácson. Ha $\varphi(x)$ szép függvény (például ha a $\varphi(x)$ függvény teljesíti a $\sum\limits_{x\in\mathbb{Z}^l} |\varphi(x)| < \infty$ feltéltelt), akkor az egyenlet (végtelenben eltünő) megoldása a következő $u(x)$ függvény.

$$u(x) = G\varphi(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^n\varphi(x) = \sum_{y\in\mathbb{Z}^l} g(x,y)\varphi(y),$$

ahol

$$g(x,y) = \bar{g}(x-y) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,x,y),$$

és $p(n,x,y)$ a bolyongás n-lépéses átmenetvalószínűsége az x pontból az y pontba. Továbbá,

$$g(x,y) = \bar{g}(x-y) \sim \frac{C_l}{|x-y|^{l-2}}, \quad \text{ha } |x-y| \to \infty$$

alkalmas $C_l > 0$ számmal.

Megjegyzés. Mivel az $A = P - E$ a Laplace operátor diszkrét megfelelője a 1.4. Tételben vizsgált egyenlet tekinthető a Poisson egyenlet diszkrét változatának. Ezen egyenlet megoldása is hasonló a Poisson egyenlet megoldásához. A diszkrét esetben az R^l

téren tekintett integrált egy a $\mathbb{Z}^l$ rácson vett összeggel helyettesítjük, és az $\frac{1}{|x-y|^{l-2}}$ magfüggvény helyett olyan $g(x,y) = \bar{g}(x-y)$ magfüggvényt veszünk, amelynek végtelenben való viselkedése hasonló, mert $\bar{g}(y) \sim \frac{C_l}{|y|^{l-2}}$, ha $|y| \to \infty$.

2. megjegyzés. Az 1.3 Tétel után tett megjegyzés magyarázatot ad arra, hogy az $\frac{1}{|x-y|^{l-2}}$ függvény, $l \geq 3$, miért játszik fontos szerepet a Poisson egyenlet vizsgálatában. Hasonló szerepet játszik a $g(x,y)$ függvény a Poisson egyenlet $Au(x) = -\varphi(x)$ diszkretizált megfelelőjének a vizsgálatában. Ugyanis a $g(x,y)$ függvény $l \geq 3$ dimenzió esetén (mint az x változó függvénye rögzített y paraméterrel) az y pont kivételével harmonikus függvény a $\mathbb{Z}^l$ rácson, azaz $Ag(x,y) = 0$, kivéve az $x = y$ pontot.

Az 1.4. Tételben megfogalmazott azonosság bizonyítása viszonylag egyszerű. A bizonyításban felhasználjuk, hogy a P^n operátornak a következő jellemzése van.

$$P^n f(x) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^l} p(n,x,y) f(y), \quad n = 0, 1, 2, \ldots.$$

Több munkát igényel a $g(x,y)$ függvény végtelenbeli aszimptotikus viselkedését leíró formula bizonyítása. E formula igazolása érdekében először belátjuk, hogy $l \geq 3$ dimenzió esetén $g(x,y) < \infty$ minden $x, y \in \mathbb{Z}^l$ esetén. Ezt úgy tudjuk egyszerűen megmutatni, hogy először a $p_n(x,y)$ átmenetvalószínűségeket, majd a $g(x,y)$ függvényt kifejezzük Fourier transzformáció segítségével a következő módon.

$$p(n,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_{[-\pi,\pi)^l} e^{(i(\vartheta, x-y)} \Phi^n(\vartheta)\, d\vartheta, \tag{1.1}$$

ahol

$$\Phi(\vartheta) = \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \cos \vartheta_j.$$

E számolásban felhasználjuk, hogy

$$\sum_{y \in \mathbb{Z}^l} e^{i(\vartheta, y-x)} p(n,x,y) = E e^{i(\vartheta, \xi_1 + \cdots + \xi_n)} = \left(E e^{i(\vartheta, \xi_1)} \right)^n = \Phi(\vartheta)^n,$$

ahol $\xi_1, \ldots, \xi_n$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, és $P(\xi_1 = e_j) = P(\xi_1 = -e_j) = \frac{1}{2l}$, $j = 1, \ldots, l$.

Vegyük észre, hogy $g(x,y)$ annak várható értékével egyenlő, hogy az x pontból kiinduló bolyongás hányszor látogatja meg az y pontot.

A fenti formula segítségével beláthatjuk, hogy $l \geq$ esetben $g(x,y) < \infty$, sőt a $g(x,y)$ függvényt explicite kifejezhetjük, mint

$$g(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n,x,y) = \frac{1}{(2\pi)^l} \int_{[-\pi,\pi)^l} e^{i(\vartheta, x-y)} \frac{1}{1 - \Phi(\vartheta)}\, d\vartheta. \tag{1.2}$$

Az (1.2) formulát megkaphatjuk az (1.1) formula összegezésének segítségével az n változó szerint. Annak érdekében, hogy az (1.2) formula igazolásához szükséges számolásokat elvégezhessük először megmutatjuk, hogy az $\frac{1}{1-|\Phi(\vartheta)|}$ függvény integrálható a $[\pi,\pi)^l$ halmazon az $l \geq 3$ esetben. Az (1.2) formula, illetve a Fourier analízis néhány eredménye lehetővé teszi, hogy a $g(x,y)$ függvény aszimptotikus viselkedését leírjuk $x-y \to \infty$ esetén.

Ismeretes, hogy egy sima függvény Fourier együtthatói gyorsan tartanak nullához a végtelenben. Minél simább a függvény, annál gyorsabban tartanak a Fourier együtthatók a végtelenben nullához. Ha a függvénynek szingularitása van egy pontban, egyébként pedig mindenütt sima, akkor a Fourier együtthatók végtelenben való viselkedését ez a szingularitás határozza meg.

Jelen esetben némi számolás mutatja, hogy a $[-\pi,\pi)^l$ tartományban tekintett $\frac{1}{1-\Phi(\vartheta)}$ függvénynek egyetlen szingularitása van az origóban, ahol $\frac{1}{1-\Phi(\vartheta)} \sim C|\vartheta|^{-2}$. Ezért az analízis általános módszereit felhasználva be lehet bizonyítani az 1.4. Tétel utolsó állítását is.

Megjegyzés. A 1.4. Tételben definiált $g(x,y)$ függvény természetes folytonos megfelelője a

$$g^*(x,y) = \int_0^\infty \varphi_l((y-x),t)\,dt = \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi t)^{l/2}} e^{-(y-x)^2/2t}\,dt$$

függvény, ahol $\varphi_l(\cdot,t)$ az l-dimenziós, nulla várható értékű, és tE kovarianciamátrixú normális sűrűségfüggvény, és $l \geq 3$. Alkalmazva a $\bar{t} = \frac{t}{|y-x|^2}$ helyettesítést azt kapjuk, hogy

$$g^*(x,y) = \frac{1}{|y-x|^{l-2}} \int_0^\infty \frac{1}{(2\pi\bar{t})^{l/2}} e^{-1/2\bar{t}}\,d\bar{t} = \frac{C_l}{|y-x|^{l-2}}.$$

A könyv vizsgálataiban fontos szerepet játszanak az úgynevezett szuperharmonikus és excesszív függvények. Megadjuk ezek definicióját mind az R^l Euklideszi téren mind a $\mathbb{Z}^l$ l-dimenziós rácson értelmezett függvények esetében.

Szuperharmonikus és excesszív függvények definiciója. *Egy az R^l Euklideszi téren definiált (sima) $f(x)$ függvényt szuperharmonikusnak nevezünk, ha $-\Delta f(x) \geq 0$ minden $x \in R^l$ pontban. Egy az R^l l-dimenziós téren definiált $f(x)$ függvény excesszív, ha egyrészt szuperharmonikus, másrészt $f(x) \geq 0$ minden $x \in R^l$ pontban.*

Egy a $\mathbb{Z}^l$ l-dimenziós rácson definiált $f(x)$ függvényt szuperharmonikusnak nevezünk, ha $-Af(x) = f(x) - Pf(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{Z}^l$ pontban. Egy a $\mathbb{Z}^l$ l-dimenziós rácson definiált $f(x)$ függvény excesszív, ha egyrészt szuperharmonikus, másrészt $f(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{Z}^l$ pontban.

A könyv jellemzi a rácson definiált excessziv függvényeket.

1.5. Tétel. Rácson definiált excesszív függvények jellemzése. *Legyen $f(x)$, $x \in \mathbb{Z}^l$, az l-dimenziós rácson definiált excesszív függvény. Akkor f felírható*

$$f = G\varphi + h, \quad G\varphi(x) = \sum_{n=0}^\infty P^n \varphi(x),$$

alakban, ahol $\varphi(x) \geq 0$ minden $x \in \mathbb{Z}^l$ pontban, és $h(x)$ a $\mathbb{Z}^l$ rácson definiált nem negatív harmonikus függvény. Az f függvény fenti előállításában szereplő φ függvény megadható $\varphi(x) = -Af(x) = f(x) - Pf(x)$ alakban, és $h(x) = \lim\limits_{n\to\infty} P^n f(x)$. (A tétel azt is állítja, hogy ez a limesz létezik. Továbbá a $G\varphi(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P^n\varphi(x)$ összeg (abszolut) konvergens. Sőt, $G\varphi(x) \leq f(x)$.)

1. Megjegyzés. A fenti reprezentációban szereplő $h(x)$ nem negatív harmonikus függvény szükségszerűen egy nem negatív konstanssal egyenlő. A tételnek létezik az R^l térben érvényes megfelelője. Ebben az esetben is felírhatjuk, hogy $f = G\varphi + h$, továbbá $\varphi(x) = -\Delta f(x)$, és $G\varphi(x) = C_l \int \frac{\varphi(y)}{|x-y|^{l-2}}\, dy$ az $l \geq 3$ esetben.

2. Megjegyzés. Az analízisben bebizonyítják, hogy egy (sima) $f(x)$ függvény az R^l téren akkor és csak akkor szuperharmonikus, ha $f(x) \geq \oint_{|y-x|=r} f(y)\, dy$ minden $x \in R^l$ pontra és $r > 0$ számra. Itt dy azt jelöli, hogy az $|y - x| = r$ halmazon, azaz az x középpontú és r sugarú gömbön integrálunk az (egyre normált) egyenletes eloszlás szerint.

Tekintsük egy tetszőleges $B \subset \mathbb{Z}^l$ halmazra a következő $\pi_B(x)$ függvényt.

$$\pi_B(x) = P(\text{az } x \text{ pontból kiinduló } (x(0), x(1), \dots) \text{ bolyongás meglátogatja a } B \text{ halmazt}).$$

Nem nehéz belátni, hogy $\pi_B(x)$ excesszív függvény. Ha B rekurrens halmaz, akkor $\pi_B(x) \equiv 1$, ami nem különösen érdekes eset. Érdekesebb az az eset, ha B tranziens halmaz. Ekkor fel lehet írni a $\pi_B(x)$ függvény 1.5. Tételben szereplő felbontását. Némi számolással ez azt adja, hogy ha B tranziens halmaz, akkor

$$\pi_B(x) = G\varphi_B(x),$$

ahol a $\varphi_B(x) = \pi_B(x) - P\pi_B(x)$ függvény úgy is jellemezhető, hogy

$$\varphi_B(x) = P(\text{egy } x(0) = x \text{ pontból kiinduló bolyongásra } x = x(0) \in B \text{ és } x(n) \notin B \text{ minden } n = 1, 2, \dots \text{ időpontban}).$$

Megfogalmazok tétel formájában egy a könyv bizonyos érveléseiben fontos szerepet játszó azonosságot. Ebben az E_x jelölés várható értéket jelent abban az esetben, ha egy x pontból kiinduló Markov lánc értékeitől függő valószínűségi változó várható értékét tekintjük.

1.6. Tétel. *Tekintsünk egy $x \in \mathbb{Z}^l$, $l \geq 3$, pontból kiinduló Markov láncot, és egy nem negatív $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^l$, függvényt. Legyen $f(x) = G\varphi(x)$. Tekintsünk egy $B \subset \mathbb{Z}^l$ halmazt, és jelölje $\tau = \tau_B$ azt a véletlen időpontot, amikor az $(x(0), x(1), \dots)$ bolyongás először meglátogatja a B halmazt. Ekkor igaz a következő azonosság.*

$$f(x) = E_x\left(\sum_{n=0}^{\tau-1} \varphi(x(n))\right) + E_x f(x(\tau)).$$

Ez az azonosság úgy értendő, hogy abban az esetben, ha a bolyongás soha nem látogatja meg a B halmazt, akkor $\tau = \infty$, és $f(x(\tau)) = 0$.

Megjegyzés. Az e tételben kimondott azonosság hátterében az úgynevezett erős Markov tulajdonság van, és valójában minden τ megállási szabályra érvényes ez az azonosság.

Bizonyításvázlat: Tekintsünk egy x pontból kiinduló Markov láncot, és vegyük a $\mathbb{Z}^l$ rácson értelmezett $\varphi(x)$, $x \in Z^l$, függvényt. Ekkor

$$f(x) = E_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} \varphi(x(n))\right) = E_x\left(\sum_{n=0}^{\tau-1} \varphi(x(n))\right) + E_x\left(\sum_{n=\tau}^{\infty} \varphi(x(n))\right).$$

Másrészt $E_x\left(\sum\limits_{n=\tau}^{\infty} \varphi(x(n)) \middle| x(\tau) = y\right) = f(y)$ minden $y \in \mathbb{Z}^l$ pontban. Ezért

$$E_x\left(\sum_{n=\tau}^{\infty} \varphi(x(n))\right) = \sum_{y \in \mathbb{Z}^l} P_x(x(\tau) = y) f(y) = E_x f(x(\tau)).$$

Rátérek a kapacitás fogalmának ismertetésére, amelyben az előbb definiált $\pi_B(x)$ és $\varphi_B(x)$ függvények fontos szerepet játszanak. A bevezetendő kapacitás a fizikában is fontos szerepet játszó kapacitás természetes diszkrét megfelelője. Ezt bizonyos optimum feladat megoldásaként kapjuk. A fizikában egy B (szép halmaz) kapacitása annak a maximális töltésmennyiségnek az értéke, amelyet úgy helyezhetünk el a B halmazban, hogy az általa létrehozott potenciál értéke a tér minden pontjában kisebb vagy egyenlő, mint 1. A diszkrét rács esetében is hasonló optimum elv segítségével definiáljuk a kapacitást. Érdemes ennek megfogalmazása érdekében bevezetni a következő $\mathcal{K}_B$ függvényosztályt.

A kapacitás definiciójában megjelenő $\mathcal{K}_B$ függvényosztály definiciója. *Legyen adva egy $B \subset \mathbb{Z}^l$ halmaz. A $\mathcal{K}_B$ függvényosztály azon a $\mathbb{Z}^l$ halmazon definiált $\varphi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^l$, függvényekből áll, amelyekre, $\varphi(x) \ge 0$ minden $x \in \mathbb{Z}^l$ pontban, $\varphi(x) = 0$, ha $x \notin B$, és $G\varphi(x) \le 1$ minden $x \in \mathbb{Z}^l$ pontban.*

Nem nehéz belátni, hogy egy tranziens $B \subset \mathbb{Z}^l$ halmaz esetében $\varphi_B(x) \in \mathcal{K}_B(x)$, mert $\varphi_B(x) = 0$, ha $x \notin B$, és $G\varphi_B(x) = \pi_B(x) \le 1$. Sőt, a $\varphi_B(x)$ függvény teljesíti az alábbi szélsőérték tulajdonságokat is.

1.7. Tétel. *Legyen $B \subset \mathbb{Z}^l$ tranziens halmaz, $l \ge 3$. Ekkor a $\varphi_B(x)$, $x \in \mathbb{Z}^l$, függvényre $\varphi \in \mathcal{K}_B$, és ez a függvény teljesíti az alábbi szélsőérték tulajdonságokat.*

a) $\pi(x) = G\varphi(x) \le \pi_B(x) = G\varphi_B(x)$ *minden* $\varphi \in \mathcal{K}_B$ *függvényre és* $x \in \mathbb{Z}^l$ *pontra.*

b) $\sum\limits_{x \in B} \varphi(x) \le \sum\limits_{x \in B} \varphi_B(x)$ *minden* $\varphi \in \mathcal{K}_B$ *függvényre.*

Az 1.7 Tétel bizonyítása. Láttuk, hogy $\varphi_B \in \mathcal{K}_B$ egy tranziens B halmazra, és teljesül a $G\varphi_B(x) = \pi_B(x) = 1$ azonosság minden $x \in B$ pontra. Az 1.7 Tétel a) része az 1.6 Tétel következménye, mert e tétel és a minden $x \in \mathbb{Z}^l$ pontra és $\varphi \in \mathcal{K}_B$ függvényre teljesülő $G\varphi(x) \le 1$ egyenlőtlenség alapján $G\varphi(x) = E_x G\varphi(x(\tau)) \le P_x(x(\tau) < \infty) = \pi_B(x)$ minden $\varphi \in \mathcal{K}_B$ függvényre, ahol τ a B halmaz első elérésének az ideje.

A b) rész bizonyításának érdekében rögzítsünk egy B tranziens halmazt, és definiáljuk e halmaz segítségével az $(f, g) = \sum\limits_{x \in B} f(x)g(x)$ skalár szorzatot, feltéve, hogy ez az összeg (abszolut) konvergens. A $\mathcal{K}_B$ tér függvényeire a G operátor így írható fel: $G\varphi(x) = \sum\limits_{y \in B} g(x, y)\varphi(y)$ minden $x \in B$ pontra, ha $\varphi \in \mathcal{K}_B$. (Jelen esetben elég az $y \in B$ pontokra összegezni, mert $\varphi(y) = 0$, ha $y \notin B$.) Ezért az 1.7 Tétel a) része alapján $G\varphi(x) \le \pi_B(x) = 1$ minden $\varphi \in \mathcal{K}_B$ függvényre és $x \in B$ pontra, és $G\varphi_B(x) = \pi_B(x) = 1$, ha $x \in B$. Innen

$$\sum_{x \in B} \varphi(x) = (\varphi, G\varphi_B) = (G\varphi, \varphi_B) \le (1, \varphi_B) = \sum_{x \in B} \varphi_B(x)$$

minden $\varphi \in \mathcal{K}_B$ függvényre. A fenti számolásban felhasználtuk, hogy $(\varphi, G\varphi_B) = (G\varphi, \varphi_B)$ a $g(x, y) = g(y, x)$ azonosság miatt.

A 1.7. Tétel alapján definiálhatjuk a $B \subset \mathbb{Z}^l$ alakú tranziens halmazok kapacitását a fizikában definiált kapacitás természetes analógiájaként. Egy $\varphi \in \mathcal{K}_B$ függvényt tekinthetünk egy B halmazon definiált töltéseloszlásnak, ahol $\varphi(x)$ az x pontba helyezett töltés. Ez indukál egy $\pi(x) = G\varphi(x)$, $x \in \mathbb{Z}^l$, potenciált, amely minden pontban kisebb vagy egyenlő mint 1. Egy $\varphi \in \mathcal{K}_B$ függvény által tartalmazott töltés $\sum\limits_{x \in B} \varphi(x)$. Keressük a legtöbb töltést tartalmazó $\varphi \in \mathcal{K}_B$ töltéseloszlást, amit egyensúlyi eloszlásnak nevezünk, és az általa tartalmazott töltést kapacitásnak. A 1.7. Tétel szerint $\varphi_B(x)$, $x \in \mathbb{Z}^l$, az egyensúlyi eloszlás, és $C(B) = \sum\limits_{x \in B} \varphi_B(x)$ a B halmaz kapacitása. A φ_B egyensúlyi eloszlás által létrehozott potenciál a $\pi_B(x) = G\varphi_B(x)$, $x \in \mathbb{Z}^l$, függvény.

Megfogalmazom az 1. fejezet fő eredményét, egy Wiener által bizonyított tételt, amely jellemzi a 3-dimenziós rács tranziens és rekurrens részhalmazait. Egy halmaz akkor rekurrens, ha valamilyen értelemben nagy. Ezt a tulajdonságot a kapacitás segítségével tudjuk jól kifejezni. Megjegyzem, hogy mint láttuk az $l \ge 3$ dimenziós rács véges részhalmazai tranziensek, ezért létezik kapacitásuk.

1.8. Tétel. Wiener tétele tranziens és rekurrens halmazok jellemzéséről. *Legyen $B \subset \mathbb{Z}^3$ a három dimenziós tér rácsának egy részhalmaza, és definiáljuk a B halmaz*

$$B_k = \{x \colon x \in B,\ 2^{k-1} \le |x| < 2^k\}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

alakú részhalmazait. Ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C(B_k)}{2^k} < \infty,$$

akkor a B halmaz tranziens, ha

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{C(B_k)}{2^k} = \infty,$$

akkor a B halmaz rekurrens. A fenti formulákban $C(B_k)$ a B_k halmaz kapacitását jelöli.

Röviden ismertetem a 1.8. Tétel bizonyításának néhány fontos gondolatát.

Némi számolás azt mutatja, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\pi_{B_k}(0)$ és $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{C(B_k)}{2^k}$ összegek, ahol $\pi_{B_k}(0)$ annak valószínűségét jelöli, hogy az origóból kiinduló bolyongás meglátogatja a B_k halmazt, equikonvergensek. Ez abból következik, hogy

$$\pi_{B_k}(0)=G\varphi_{B_k}(0)=\sum_{y\in B_k}g(0,y)\varphi_{B_k}(y),\qquad \frac{C(B_k)}{2^k}=\sum_{y\in B_k}\frac{\varphi_{B_k}(y)}{2^k},$$

és $Q_1 2^{-k}\le g(0,y)\le Q_2 2^{-k}$ alkalmas $0<Q_1<Q_2<\infty$ számokkal, ha $y\in B_k$.

Ha $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{C(B_k)}{2^k}<\infty$, vagy ami ezzel ekvivelens $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\pi_{B_k}(0)<\infty$, akkor egyszerű Borel–Cantelli lemma tipusú érveléssel kapjuk, hogy az origóból kiinduló bolyongás csak véges sok B_k halmazt látogat meg 1 valószínűséggel, ezért a $B=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}B_k$ halmaz tranziens.

A rekurrenciáról szóló állítás bizonyítása bonyolultabb, mert a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\pi_{B_k}(0)=\infty$ reláció önmagában nem elegendő egy Borel–Cantelli lemma tipusú érvelés végrehajtásához. Ezért egy olyan bonyolultabb esemény valószínűségére adunk jó becslést, amellyel jobban tudunk dolgozni. Ennek érdekében először vegyük észre azt, hogy ha a 1.8. Tételben szereplő összegben csak a $4k$, $k=1,2,\dots$ vagy $4k+1$ vagy $4k+2$ vagy $4k+3$, $k=0,1,2,\dots$, alakú tagokra összegzünk abban az esetben, amikor a rekurrencia feltétele teljesül, akkor 4 olyan összeget kapunk, amelyek közül legalább az egyik divergens.

Tegyük fel például, hogy

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{C(B_{4k})}{2^{4k}}=\infty,$$

és lássuk be, hogy ebben az esetben a B halmaz rekurrens. Azért érdemes ilyen esetekre redukálni az eredeti állítást, mert a B_{4k} halmazok távol vannak egymástól, és ez segít olyan függetlenség tipusú állítások megfogalmazásában és bizonyításában, amelyek a Borel–Cantelli lemma divergens összegekről szóló felének a számunkra megfelelő módosítását adják. A $\pi_{B_k}(0)$ valószínűségek becslése helyett olyan A_k eseményeket definiálunk, amelyek valószínűségét szintén jól meg tudjuk becsülni, és amely események valószínűségére adott becslések hasznosabbak a számunkra.

Tudjuk, hogy a bolyongás egy valószínűséggel végtelenbe tart. Ezért, ha valamely x pontból indítjuk a bolyongást, és k elég nagy szám, akkor létezik egy legkisebb (véletlen) τ_k időpont, amikor a bolyongás az $S_k=\{y\colon\ y\in\mathbb{Z}^3,\ 2^{4k-2}\le|y|\le 2^{4k-2}+1\}$ halmazt meglátogatja. Tekintsük azt a hasonlóan definiált τ_{k+1} időpontot, amikor a bolyongás az $S_{k+1}=\{y\colon\ y\in\mathbb{Z}^3,\ 2^{4k+2}\le|y|\le 2^{4k+2}+1\}$ halmazt először meglátogatja. Jelölje A_k azt az eseményt, hogy a bolyongás a $[\tau_k,\tau_{k+1}]$ időintervallumban meglátogatja B_{4k} halmazt. Némi munkával be lehet látni, hogy

$$P_y(A_k)\ge Q_1\frac{C(B_{4k})}{2^{4k}}\quad\text{minden } y\in S_k \text{ pontra},$$

ahol a $Q_1 > 0$ szám nem függ sem a k indextől sem az $y \in S_k$ ponttól.

Ezen állítás bizonyítása hasonló a $\pi_{B_k}(0)$ valószínűség becsléséhez, csak némileg több figyelmet igényel. Azt kell kihasználni, hogy mivel az S_{k+1} sáv pontjai viszonylag távol vannak az B_{4k} halmaz pontjaitól, ezért annak a valószínűsége, hogy a bolyongás a τ_{k+1} időpont után látogatja meg a B_{4k} halmazt sokkal kisebb, mint annak a valószínűsége, hogy a bolyongás a τ_k időpont után látogatja meg a B_{4k} halmazt.

Az utolsó egyenlőtlenség és az erős Markov tulajdonság segítségével be lehet látni az alábbi egyenlőtlenséget is. Ha $|x| < 2^{4m-2}$ akkor

$$P_x(\bar{A}_m \cap \bar{A}_{m+1} \cap \cdots \cap \bar{A}_{m+s}) \le \prod_{k=m}^{m+s} \left(1 - Q_1 \frac{C(B_{4k})}{2^{4k}}\right)$$

minden $s = 0, 1, 2, \dots$ számra, ahol $\bar{A}$ az A halmaz komplementerét jelöli. Mivel a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{C(B_{4k})}{2^{4k}} = \infty$ relációból következik, hogy $\prod\limits_{k=m}^{\infty} \left(1 - Q_1 \frac{C(B_{4k})}{2^{4k}}\right) = 0$, ezért a fenti egyenlőtlenségből következik, hogy $P_x\left(\bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \bar{A}_{m+k}\right) = 0$, azaz $P_x\left(\bigcup\limits_{k=0}^{\infty} A_{m+k}\right) = 1$ az adott feltétel mellett. Ebből viszont az következik, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{C(B_{4k})}{2^{4k}} = \infty$ feltétel teljesülése esetén a bolyongás bármely x pontból kiindulva 1 valószínűséggel meglátogatja a $B = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} B_k$ halmazt, azaz a B halmaz rekurrens.

A Dynkin-Yushkevich könyv első fejezete egy érdekes példával fejeződik be. Ebben Wiener tétele segítségével (1.8. Tétel) meghatározzák, hogy a 3-dimenziós rács bizonyos részhalmazai rekurrensek-e vagy tranziensek. Nem nehéz belátni, felhasználva azt a tényt, hogy a két dimenziós bolyongás állapotai rekurrensek, hogy a 3-dimenziós rács $B_0 = \{(n, 0, 0)\colon -\infty < n < \infty\}$ részhalmaza rekurrens. Lényegesen nehezebb annak eldöntése, hogy a B_0 halmaz mely részhalmazai rekurrensek, és melyek tranziensek. Azt várjuk, hogy a B_0 halmaz egy elég sűrű részhalmaza rekurrens, míg egy nem elég sűrű részhalmaza tranziens. De nem világos, mikor tekinthetjük B_0 egy részhalmazát elég sűrűnek. Erre a kérdésre ad választ az alábbi tétel.

1.9. Tétel. *Tekintsük a $\mathbb{Z}^3$ 3-dimenziós rács egy $B = \{(b_n, 0, 0),\ n = 1, 2, \dots\}$ alakú részhalmazát, ahol $1 \le b_1 < b_2 < \cdots$, pozitív egész számok szigorúan monoton sorozata. Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} < \infty$, akkor a B halmaz tranziens. Ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \infty$, és $b_{n+1} - b_n \ge c \log b_n$ minden elég nagy n számra alkalmas $c > 0$ konstanssal, akkor a B halmaz rekurrens.*

Természetesen egy tranziens halmaz minden részhalmaza tranziens, és minden egy rekurrens halmazt tartalmazó halmaz rekurrens. Így a 1.9. Tétel elég jó leírását adja annak, hogy a $B_0 = \{(n, 0, 0)\colon -\infty < n < \infty\}$, halmaz mely részhalmazai rekurrensek és melyek tranziensek. Érdemes megjegyezni, hogy a rekurrencia feltételei között a $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{b_n} = \infty$ reláció mellett a $b_{n+1} - b_n \ge c \log b_n$ elég nagy $n = 1$ számokra feltétel is szerepel. Ez egy olyan típusú feltétel, amely azt követeli meg, hogy a b_n sorozat elég regulárisan változzék. A könyv megemlít egy eredményt, amely azt mutatja, hogy ez a feltétel nem hagyható el. A 1.9. Tétel speciálisan azt állítja, hogy egy $(b_n, 0, 0)$, $1 \le b_1 < b_2 < \dots$, pontokból álló halmaz rekurrens, ha $b_n \sim cn \log n$, és tranziens, ha $b_n \sim cn(\log n)^{1+\alpha}$, $c > 0$ és $\alpha > 0$.

A 1.9. Tétel bizonyítása a Wiener tétel segítségével egyszerű, ha jó becslésünk van bizonyos $B \subset B_0$ halmazok $C(B)$ kapacitására. Valójában elegendő a 1.8. Tétel megfogalmazásában szereplő B_k halmazok $C(B_k)$ kapacitását megbecsülni. A bizonyítás fő része annak igazolása, hogy $C(B) \le$ a B halmaz elemszáma, míg ha $b_{n+1} - b_n \ge c \log b_n$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor létezik olyan $M > 0$ szám, amelyre

$$C(B_k) \ge \frac{1}{M} \cdot (\text{a } B_k \text{ halmaz elemszáma})$$

minden $k = 1, 2, \dots$ számra, ahol $B_k = \{(b_n, 0, 0)\colon\ 2^{k-1} \le b_n < 2^k\}$.

A 1.9. Tétel egyszerűen következik a fenti két egyenlőtlenségből és a $2^{k-1} \le b_l < 2^k$, ha $b_l \in B_k$ relációból. Ugyanis, innen következik, hogy egyrészt

$$\sum_{l\colon\, b_l \in B_k} \frac{1}{b_l} \ge \sum_{l\colon\, b_l \in B_k} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^k}(\text{a } B_k \text{ halmaz elemszáma}) \ge \frac{C(B_k)}{2^k},$$

másrészt, ha $b_{n+1} - b_n \ge c \log b_n$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, akkor

$$\sum_{l\colon\, b_l \in B_k} \frac{1}{b_l} \le \sum_{l\colon\, b_l \in B_k} \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{2}{2^k}(\text{a } B_k \text{ halmaz elemszáma}) \le 2M \frac{C(B_k)}{2^k}.$$

Az első egyenlőtlenség bizonyítása egyszerű, mert $\varphi_B(x) \le 1$ minden $x \in B$ pontra. Ezért

$$C(B) = \sum_{x \in B} \varphi_B(x) \le \sum_{x \in B} 1 = \text{a } B \text{ halmaz elemszáma.}$$

A másik irányú egyenlőtlenség bizonyítása bonyolultabb. Itt azt látjuk be, hogy ha $b_{n+1} - b_n \ge c \log b_n$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra alkalmas $c > 0$ konstanssal, akkor létezik olyan $M > 0$ szám, amelyre igaz minden $k = 1, 2, \dots$ számra, hogy ha azt a φ_{0,B_k} függvényt definiáljuk a $\mathbb{Z}^3$ rácson, amelyre $\varphi_{0,B_k}(b_n) = \frac{1}{M}$, ha $b_n \in B_k$, és $\varphi_{0,B_k}(x) = 0$ egyébként akkor egy olyan φ_{0,B_k} függvényt kapunk, amelyre teljesül a $\varphi_{0,B_k} \in \mathcal{K}_{B_k}$ tulajdonság. Ez ugyanis azt jelenti a 1.7. Tétel b) része szerint, hogy

$$C(B_k) = \sum_{x \in B_k} \varphi_{B_k}(x) \ge \sum_{x \in B_k} \varphi_{0,B_k}(x) = \sum_{x \in B_k} \frac{1}{M} = \frac{1}{M} \cdot \text{a } B_k \text{ halmaz elemszáma.}$$

A fő nehézség annak bizonyítása, hogy $G\varphi_{0,B_k}(x) = \sum\limits_{y \in B_k} \varphi_{0,B_k}(y) g(x,y) \le 1$ minden $x \in \mathbb{Z}^3$ pontban, mert ez kell a $\varphi_{0,B_k} \in \mathcal{K}_{B_k}$ reláció bizonyításához. Ez az a pont, ahol a $b_{n+1} - b_n \ge c \log b_n$ feltételre szükségünk van.