Áttekintés
Dynkin, Evgenyij Boriszovics és Yushkevics, Alekszandr Adolfovics
Tételek és feladatok Markov folyamatokról
című könyvéről

Második fejezet: Néhány parciális differenciálegyenlet megoldása valószínűségszámítási módszerrel.

E fejezet fő témája a következő két parciális differenciálegyenlet vizsgálata.

Legyen adva egy szép G tartomány az R^l l-dimenziós Euklideszi térben. Az első probléma az úgynevezett Dirichlet feladat megoldása ebben a tartományban, azaz a

$$\Delta f(u) = 0, \text{ ha } u \in G, \quad \text{és } \lim_{u\to x} f(u) = \varphi(x), \text{ha } x \in \partial G,$$

egyenlet megoldása, ahol ∂G a G tartomány határát jelöli, $\varphi(x)$ egy előre megadott folytonos és korlátos függvény a ∂G határon, és Δ az első fejezetben bevezetett Laplace operátort jelöli.

A második probléma az úgynevezett Poisson egyenlet, azaz a

$$\Delta f(u) = -2, \text{ ha } u \in G, \quad \text{és } \lim_{u\to x} f(u) = 0, \text{ ha } x \in \partial G$$

egyenlet megoldása.

Ezenkívül e fejezet tartalmazza a fenti problémák megoldásának néhány érdekes alkalmazását. Például megoldja a következő feladatot. Legyen adva két koncentrikus gömbfelület, és indítsunk egy Wiener folyamatot egy a két gömbfelület közötti pontból. Mi annak a valószínűsége, hogy ez a Wiener folyamat előbb éri el a belső gömbfelületet, mint a külsőt? Foglalkozik e könyv azzal a kérdéssel is, hogy a Dirichlet feladat megoldása egyértelmű-e. Ha a G tartomány (szép határral rendelkezik, és) korlátos, akkor nem nehéz belátni egy maximumelv segítségével a megoldás egyértelműségét. Nem korlátos tartományok esetén a helyzet bonyolultabb. Ezzel a kérdéssel is foglalkozik a könyv. Megmutatja az itt megadott megoldás egy különleges tulajdonságát ebben az esetben.

A probléma megoldása azon alapul, hogy az visszavezethető a Dirichlet feladat vizsgálatára speciális határfeltételek mellett. Ebben az esetben a Dirichlet feladat egyszerűen megoldható, és a megoldás segít a keresett valószínűség kiszámolásában.

A bizonyításokban felhasználjuk a $\Delta f(x) = 0$ egyenletet kielégítő, úgynevezett harmonikus függvények következő jellemzését.

2.1 Tétel a harmonikus függvények jellemzéséről. *Egy $f(\cdot)$ függvény akkor és csak akkor harmonikus egy G nyílt halmazon, azaz akkor és csak akkor teljesíti a $\Delta f(u) = 0$ egyenletet a G nyílt halmaz minden $u \in G$ pontjában, ha minden $a \in G$ pontra és olyan a középpontú és r sugarú $C(a) = \{u\colon\ |a-u| = r\}$ gömbfelületre, amelynek a belsejét* *tartalmazó* $\{u\colon\ |a-u|\le r\}$ *gömb is a* G *tartományban van, és a* $C(a)$ *gömbfelületen levő* $\mu=\mu_{a,r}$ *egyre normált egyenletes eloszlásra teljesül az*

$$f(a)=\int_{C(a)} f(u)\mu(\,du)$$

azonosság.

Megjegyzés E könyvben csak az van bebizonyítva, hogy a fent megfogalmazott azonosságból következik, hogy az f függvény harmonikus, mert itt csak erre az állításra van szükség. A bizonyítás során először azt látják be, hogy egy ezt az azonosságot teljesítő függvény elég sima. Ezt felhasználva, alkalmas Taylor sorfejtés segítségével bizonyítható, hogy a fenti egyenletet teljesítő függvények harmonikusak. Megjegyzem, hogy a másik irányú állítás bizonyítása az úgynevezett Green azonosságon alapul, amely szerint

$$\int_\Omega (u\Delta v-v\Delta u)\,dV=\int_{\partial\Omega}(uD_nv-vD_nu)\,ds$$

az R^n n-dimenziós Euklideszi térben, ahol Ω egy korlátos nyílt halmaz sima $\partial\Omega$ határral, u és v kétszer folytonosan differenciálható függvények egy az Ω halmaz lezártját tartalmazó nyílt halmazon, dV a Lebesgue mérték az R^n téren, ds a Lebesgue mérték által indukált felszíni mérték a $\partial\Omega$ határfelületen és D_nu, D_nv az u és v függvény differenciálhányadosai a $\partial\Omega$ határ kifelé mutató egység normálvektorának az irányában. Az utolsó állítás pontosabban azt jelenti, hogy egy a $\partial\Omega$ határon levő x pontban $D_nu(x)$ és $D_nv(x)$ egyenlő a $\operatorname{grad} u(x)$ és $\operatorname{grad} v(x)$ gradiens vektorok skalárszorzatával a $\partial\Omega$ határfelület x pontbeli kifelé mutató normális egységvektorával.

A Dirichlet feladat megoldását az l-dimenziós térben az l-dimenziós Wiener folyamatok segítségével tudjuk megtalálni valószínűségszámítási módszerekkel. Ebben a megoldásban felhasználjuk a Wiener folyamat néhány tulajdonságát. Különösen fontos szerepet játszik e tulajdonságok között a Wiener folyamat erős Markov tulajdonsága. Felidézem a Wiener folyamat definicióját és a rá érvényes erős Markov tulajdonság megfogalmazását. Először az 1-dimenziós Wiener folyamat definicióját adom meg.

Egy dimenziós Wiener folyamat definiciója. *Egy* $X(t)$ *sztochasztikus folyamat egy* $(\Omega,\mathcal{A},P)$ *valószínűségi mezőn 1-dimenziós Wiener folyamat egy* $[0,a]$ *intervallumban (illetve a* $[0,\infty)$ *félegyenesen), ha* $X(t)$ *Gauss folyamat (azaz összes véges dimenziós eloszlása normális),* $EX(t)=0$, $EX(s)X(t)=\min(s,t)$ *minden* $0\le s,t\le a$ *(illetve* $0\le s,t<\infty$*) paraméterre, és minden* $\omega\in\Omega$ *elemi eseményre az* $X(\cdot,\omega)$ *trajektória folytonos függvény.*

2.2 Tétel. *Létezik Wiener folyamat, és annak véges dimenziós eloszlásai egyértelműen meg vannak határozva.*

Az l-dimenziós, $l\ge1$, Wiener folyamat definiciója az 1-dimenziós Wiener folyamat segítségével egyszerű.

Egy l-dimenziós Wiener folyamat definiciója. *Egy $X_x(t)$, értékeit az R^l l-dimenziós Euklideszi téren felvevő sztochasztikus folyamat egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn l-dimenziós Wiener folyamat egy $[0,a]$ intervallumban (illetve a $[0,\infty)$ félegyenesen) $x = (x_1, \dots, x_l) \in R^l$ kezdőértékkel, ha $X_x(t) = (x_1 + X_1(t), \dots, x_l + X_l(t))$, és $X_1(t)$, $\dots$, $X_l(t)$ független 1-dimenziós Wiener folyamatok a $[0,a]$ intervallumon, illetve a $[0,\infty)$ félegyenesen.*

Megjegyzés. Egy $X_x(t)$ l-dimenziós Wiener folyamat rendelkezik a következő tulajdonságokkal:

a) $X_x(t)$ független növekményű folyamat, azaz tetszőleges $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ időpontokra az $X_x(t_1) - x$, $X_x(t_2) - X_x(t_1)$, $\dots$, $X_x(t_k) - X_x(t_{k-1})$ véletlen vektorok függetlenek. Ez következik abból, hogy a tekintett valószínűségi változók együttesen Gauss eloszlású vektort alkotnak, amelynek koordinátái korrelálatlanok. Ez a tulajdonság azt is jelenti, hogy egy Wiener folyamat Markov folyamat. Némi számolás azt is mutatja, hogy egy Wiener folyamat stacionárius Markov folyamat.

b) Az R^l Euklideszi tér tetszőleges x pont körüli elforgatása (általánosabban minden az R^l térben definiált $T(u) = x + (u - x)U$, $u \in R^l$, alakú transzormáció, ahol U unitér (líneáris) transzformáció) egy x pontból kiinduló l-dimenziós Wiener folyamat olyan transzformációját indukálja, amely nem változtatja meg annak eloszlását. Ezt láthatjuk, ha felírjuk az x pontból kiinduló $X_x(t)$ Wiener folyamat véges dimenziós eloszlásainak a sűrűségfüggvényeit. Például az $X_x(t)$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $\varphi_{x,t}(u) = \frac{1}{(2\pi t)^{l/2}} e^{-(u-x,u-x)/2t}$, ahol $(\cdot,\cdot)$ skalárszoratot jelöl.

Adva egy $X_x(t)$ l-dimenziós Wiener folyamat (valamely $x \in R^l$ kezdőponttal a $0 < t < \infty$ félegyenesen) tekintsünk egy rögzített $t > 0$ számot és a következő két sztochasztikus folyamatot:

Az $X_x(s)$, $0 \le s \le t$, és $Y_x(u) = X_x(t+u) - X_x(t)$, $u \ge 0$, sztochasztikus folyamatok.

Ekkor az $X_x(s)$, $0 \le s \le t$, és $Y_x(u)$, $u \ge 0$, sztochasztikus folyamatok egymástól független Wiener folyamatok, amelyek közül az első az x pontból, a második az origóból indul ki. Ez a tény fejezi ki a Wiener folyamat Markov tulajdonságát. A könyv megfogalmaz egy olyan analóg, erős Markov tulajdonságnak nevezett állítást, amelyben az $X_x(\cdot)$ Wiener folyamatot nem egy fix t időpontban, hanem egy alkalmasan definiált, jó tulajdonságokkal rendelkező véletlen τ időpontban állítjuk meg. Az erős Markov tulajdonság azt jelenti, hogy az $X_x(\tau + u) - X_x(\tau)$, $u \ge 0$, sztochasztikus folyamat olyan Wiener folyamat, amely független az $X_x(\cdot)$ sztochasztikus folyamat viselkedésétől a (véletlen) τ időpontig. Ez az állítás pontosabb magyarázatot igényel. Megfogalmazok egy olyan eredményt egy speciálisan definiált τ megállási időpontra, amely az erős Markov tulajdonság érvényességéről szóló tétel speciális esetének tekinthető. Később tárgyalni fogom az erős Markov tulajdonság általános megfogalmazását Wiener folyamatokra. A most megfogalmazott állítás ezen eredmény speciális esetének tekinthető. De ennek magyarázatát csak jelzem, a részletes indoklást elhagyom.

A számunkra érdekes állítás a következő:

2.3 Tétel. *Tekintsünk egy valamely x pontból kiinduló $X_x(t)$, $t \ge 0$, l-dimenziós Wiener folyamatot. Rögzítsünk egy $r > 0$ számot, és tekintsük azt a τ véletlen időpontot, amikor a Wiener folyamat először éri el a $C(x) = \{u\colon\ |u - x| = r\}$ gömbfelületet. Ekkor $X_x(\tau)$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $C(x)$ gömbfelületen, és az $Y_x(t) = X_x(t + \tau) - X_x(\tau)$, $t > 0$, sztochasztikus folyamat egy az $X_x(\tau)$ valószínűségi változótól független, az origóból kiinduló Wiener folyamat.*

A 2.3 Tétel alábbi következménye lesz számunkra fontos.

A 2.3 Tétel következménye. *Legyen adva egy G nyílt halmaz és egy korlátos $\varphi(x)$ függvény a G halmaz ∂G határán. Minden $u \in G$ pontra tekintsünk egy az u pontból kiinduló $X_u(t)$, $t \ge 0$, Wiener folyamatot, és definiáljuk azt a $\tau_G(u)$ véletlen időpontot, amikor ez az u pontból kiinduló $X_u(t)$ Wiener folyamat eléri a ∂G határt. Vegyük a $\varphi(\cdot)$ függvény $\varphi(X_u(\tau_G(u))$ értékét ebben a (véletlen) $X_u(\tau_G(u)) \in \partial G$ pontban, illetve annak $f(u) = E\varphi(X_u(\tau_G(u))))$ várható értékét. Ez a várható érték úgy értendő, hogy a $\varphi(X_u(\tau_G(u)))$ valószínűségi változót csak azon $\omega \in \Omega$ pontok halmazán integráljuk, ahol $\tau_G(\omega) < \infty$. Ekkor teljesül a $\Delta f(u) = 0$ azonosság a G tartomány minden $u \in G$ pontjában.*

Természetes azt várni, hogy ha adva van egy G tartomány és egy a ∂G határon definiált φ függvény, akkor az általuk meghatározott Dirichlet feladatot meg tudjuk oldani a 2.3 Tétel következményének a segítségével, ha alkalmazzuk annak eredményét a Dirichlet feladatban szereplő φ függvénnyel. Ekkor minden $u \in G$ pontban teljesül a $\Delta f(u) = 0$ azonosság a 2.3 Tétel következményében definiált $f(\cdot)$ függvénnyel. A fő probléma annak eldöntése, a $\lim\limits_{u \to x} f(u) = \varphi(x)$ határfeltétel is teljesül-e minden $x \in \partial G$ pontban. Azt várjuk, hogy ha ∂G szép halmaz, akkor erre a kérdésre igen a válasz. Ez a feltételezés helyes, de szeretnénk pontos képet kapni arról, hogy mikor teljesül ez a határfeltétel. A könyv második fejezetében tárgyalt egyik fő probléma ennek a kérdésnek a vizsgálata.

Heurisztikus szinten egyszerűen le tudjuk vezetni a 2.3 Tételből annak következményét, felhasználva a harmonikus függvények 2.1 Tételben megadott jellemzését.

Tekintsünk egy $a \in G$ pontot, és vegyünk egy olyan r sugarú a középpontú $C(a) = \{u\colon\ |u - a| = r\}$ gömbfelületet, amelynek a belseje is a G tartományban van. Legyen τ_0 az első olyan időpont, amikor az a pontból induló $X_a(t)$, $t \ge 0$, Wiener folyamat eléri a $C(a)$ halmazt. Akkor a 2.3 tétel szerint $X_a(\tau_0)$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $C(a)$ halmazon, és független az $Y_a(t) = X_a(\tau_0 + t) - X_a(\tau_0)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamattól, amely egy az origóból kiinduló Wiener folyamat. Ezt a tényt felhasználva az $f(a) = E\varphi(X_a(\tau_G(a)))$ várható értékét a következő módon tudjuk kiszámolni. Tekintsük az $X_a(\tau_0)$ valószínűségi változót, és rögzítve annak $u = X_a(\tau_0)$ értékét számoljuk ki az ettől az értéktől függő $E\varphi(u + Y_a(\tau_G(u)))$ várható értéket. Ezután integrálva ezt az u változótól függő kifejezést az $X_a(\tau_0)$ valószínűségi változó eloszlása szerint megkapjuk az $f(a)$ értéket. Az így kapott formulából és a 2.1 Tételből következik, hogy $f(\cdot)$ harmonikus függvény.

A részletesebb, pontosabb bizonyításban kissé másképp érvelünk. Definiálunk egy alkalmas szorzatteret, rajta egy szorzat valószínűségi mértéket úgy, hogy a szorzattér két koordinátájának a mértéke megegyezzen az $X_a(\tau_0)$ valószínűségi változó és az $Y_a(t)$, $t \geq 0$, Wiener folyamat eloszlásával. Ezen a szorzattéren egy alkalmasan definiált függvény segítségével bebizonyítunk egy formulát, amelyből következik, hogy az $f(\cdot)$ függvény harmonikus.

Egy $(C(a) \times B_\infty, \mathcal{B} \times \mathcal{A}, \mu_a \times P_W)$ alakú szorzatteret vezetünk be, ahol mind $(C(a), \mathcal{B}, \mu_a)$ mind $(B_\infty, \mathcal{A}, P_W)$ egy valószínűségi mező, és ezeket a következőképp definiáljuk. Az első valószínűségi mező a $C(a) = \{u\colon |u-a| = r\}$ gömbfelület, rajta a $\mathcal{B}$ Borel σ-algebrával és a μ_a egyre normált egyenletes eloszlással. A második valószínűségi mezőben a Wiener mértéket definiáljuk. Itt a B_∞ alaptér a $t \geq 0$ félegyenesen definiált, értéküket az R^l l-dimenziós Euklideszi téren felvevő folytonos függvények tere. Ebben bevezetjük a $\{v(\cdot)\colon v(\cdot) \in B_\infty, v(t) \in B\}$ alakú hengerhalmazok által generált $\mathcal{A}$ σ-algebrát, ahol $t \geq 0$ tetszőleges nem negatív valós szám, és B valamely Borel mérhető halmaz az R^l Euklideszi térben. Végül a P_W mérték az origóból kiinduló l-dimenziós Wiener folyamat eloszlása a $(B_\infty, \mathcal{A})$ térben.

A fenti szorzattérben definiálunk egy $\eta(u, v(\cdot))$ függvényt, ahol $u \in C(a)$, $v(\cdot) \in B_\infty$, az $\eta(u, v(\cdot))$ függvény értékét a ∂G halmazban veszi fel, és egyenlő azzal az $x \in \partial G$ ponttal, amelyet az $u + v(t)$ folytonos függvény először vesz fel a ∂G halmazon. Azaz vesszük azt a legkisebb $t \geq 0$ számot, amelyre $u + v(t) \in \partial G$, és $\eta(u, v(\cdot)) = u + v(t)$ ezzel a t számmal. Azokra az $(u, v(\cdot))$ argumentumokra, amelyekre nincs ilyen t szám, nem definiáljuk a $\eta(u, v(\cdot))$ függvényt. Ha adva van egy $\varphi(x)$ függvény a ∂G halmazon, akkor definiáljuk a $\varphi(\eta(u, v(\cdot)))$ függvényt is. Ezt azokra az $(u, v(\cdot))$ argumentumokra is definiálni akarjuk, amelyekre az $\eta(u, v(\cdot))$ függvényt nem definiáltuk. Ebben az esetben a $\varphi(\eta(u, v(\cdot))) = 0$ képlettel adjuk meg e függvény értékét.

Vegyük észre, hogy a 2.3 Tétel következményében definiált $X_a(\tau_G(a))$ valószínűségi változó teljesíti a $X_a(\tau_G(a))(\omega) = \eta(X(\tau_0)(\omega), Y(\cdot)(\omega))$ azonosságot, mert az azonosság jobboldalán levő kifejezés azzal az $x \in \partial G$ ponttal egyenlő, amelyet az $X_a(\tau_0)(\omega)$ pontból kiinduló $Y_a(t)(\omega) + X(\tau_0)(\omega)) = X_a(\tau_0 + t)(\omega)$, $t \geq 0$, trajektória először meglátogat. Másrészt a 2.3 Tétel alapján állíthatjuk, hogy a $T(\omega) = (X_a(\tau_0)(\omega), Y_a(\cdot)(\omega))$ leképezés mértéktartó leképezés az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőből az előbb definiált

$$(C(a) \times B_\infty, \mathcal{B} \times \mathcal{A}, \mu_a \times P_W)$$

szorzattérbe. Ezért

$$\begin{aligned} f(a) &= E(\varphi(X_a(\tau_G(a))) = E\varphi(\eta(X_a(\tau_0)(\omega), Y_a(\cdot)(\omega))) \\ &= \int_{C(a) \times B_\infty} \varphi(\eta(u, v(\cdot)))(\mu_a \times P_W)(\,du, dv(\cdot)). \end{aligned}$$

Másrészt felírhatjuk minden $u \in C(a)$ pontra, hogy

$$f(u) = \int_{B_\infty} \varphi(\eta(u, v(\cdot))) P_W(\,dv(\cdot)).$$

Ezért a Fubini tétel alapján

$$f(a) = \int_{C(a)} \left(\int_{B_\infty} \varphi(\eta(u, v(\cdot))) P_W(\,dv(\cdot)) \right) \mu_a(\,du) = \int_{C(a)} f(u) \mu_a(\,du),$$

és ezt az azonosságot kellett igazolnunk, ahhoz hogy belássuk, hogy az $f(\cdot)$ függvény harmonikus.

Röviden ismertetem az erős Markov tulajdonságot, amelynek speciális esetét felhasználtuk az előző eredmény bizonyításában. Előtte megfogalmazok egy egyszerű, a könyvben is bizonyított eredményt, amely szintén fel van használva a fenti bizonyítás részleteinek a kidolgozásában.

2.4 Tétel. *Tekintsünk egy az origóból kiinduló Wiener folyamatot, és legyen τ az a véletlen időpont, amikor ez a Wiener folyamat először eléri az origó középpontú R sugarú gömbfelületet valamely $R > 0$ számra. Ekkor $P(\tau < \infty) = 1$, sőt az $E\tau < \infty$ reláció is teljesül.*

Az erős Markov tulajdonság azt jelenti, hogy nemcsak rögzített T időpontokra igaz az, hogy a Markov folyamat T idő utáni viselkedésétől függő valószínűségi változók feltételes eloszlása feltéve a T idő előtti események σ-algebráját egyenlő azok feltételes eloszlásával, feltéve a T időpontbeli események σ-algebráját, hanem ez a tulajdonság érvényben marad az olyan véletlen T időpontokra is, amelyek nem tartalmaznak plusz információt a jövőre nézve. Annak érdekében, hogy ezt az állítást pontosan megfogalmazzuk először definiálni kell az ilyen tulajdonságú időpontokat. Ezeket az irodalomban megállási szabálynak (megállási szabály által meghatározott időpontnak) nevezik. Ezenkívül definiálni kell azt a σ-algebrát is, amely a véletlen T időpontig összegyüjtött információt tartalmazza. Ebben a jegyzetben az erős Markov tulajdonságot csak Wiener folyamatokra fogalmazom meg, és olyan definiciót ismertetek, amely kihasználja azt, hogy a Wiener folyamat független növekményű folyamat. Ilyen folyamatokra egyszerűbb az erős Markov tulajdonság megfogalmazása és bizonyítása. Megjegyzem azt is, hogy az itt megállási szabály által meghatározott időpontnak nevezett fogalmat a könyv Markov időpontnak hívja.

A megállási szabály fogalmának definiciója. *Legyen adva $\mathcal{F}_t$, $t \ge 0$, σ-algebráknak a pozitív félegyenes pontjaival indexezett növekvő családja, azaz legyen $\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t$, ha $t \ge s$, és legyenek ezek a σ-algebrák rész σ-algebrái egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező $\mathcal{A}$ σ-algebrájának. Egy τ nem negatív értékeket felvevő valószínűségi változót megállási szabálynak nevezünk az $\mathcal{F}_t$ σ-algebra rendszerre nézve, ha minden $t \ge 0$ számra $\{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$. Kényelmi okokból megengedjük azt is, hogy a τ valószínűségi változó ne legyen mindenütt definiálva, azaz lehetséges az is, hogy $P(\tau < \infty) < 1$.*

Legyen adva egy $X(t)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy τ nem negatív értékeket felvevő valószínűségi változó megállási szabály erre a sztochasztikus folyamatra nézve, ha az megállási szabály az $\mathcal{F}_t = \sigma(X(s),\ s \le t)$, $t \ge 0$, növekvő σ-algebra családra nézve.

Egy megállási szabály által meghatározott időpontig összegyüjtött információt tartalmazó σ-algebra definiciója. *Legyen τ megállási szabály egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn egy $\mathcal{F}_t$, $t \ge 0$, növekvő σ-algebra rendszerre vagy egy $X(t)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamatra nézve. Ekkor az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrát, amelynek szemléletes tartalma az, hogy ez a τ időpontig összegyüjtött információt tartalmazó σ-algebra, a következőképp* *definiáljuk. Egy az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőben levő B esemény akkor és csak akkor teljesíti a $B \in \mathcal{F}_\tau$ relációt, ha $B \cap \{\tau \le t\} \in \mathcal{F}_t$ minden $t \ge 0$ számra.*

Megjegyzés. Nem nehéz belátni, hogy a fenti definicióban megadott $\mathcal{F}_\tau$ halmazrendszer valóban σ-algebra.

A fenti fogalmak segítségével meg tudjuk fogalmazni az erős Markov tulajdonságot Wiener folyamatokra.

2.5 Tétel az erős Markov tulajdonság érvényességéről Wiener folyamatokra. *Legyen $X_x(t)$, $t \ge 0$, (l-dimenziós) Wiener folyamat (valamely x kezdőponttal), és legyen τ megállási szabály erre a Wiener folyamatra nézve. Ekkor az $Y_x(t) = X_x(\tau+t) - X_x(\tau)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat egy az origóból kiinduló Wiener folyamat, amely független az $\mathcal{F}_\tau$ σ-algebrától.*

Ahhoz, hogy ezt az eredményt az általunk vizsgált esetben alkalmazni tudjuk be kell még látnunk az alábbi heurisztikusan magától értetődő, de bizonyításra szoruló állitást is.

2.6 Tétel. *Legyen $X_x(t)$, $t \ge 0$, l-dimenziós Wiener folyamat valamely x kezdőponttal, és G egy nyílt halmaz az R^l l-dimenziós Euklideszi térben. Jelölje τ azt a legkisebb $t \ge 0$ számot, amelyre $X(t) \in \partial G$, ahol ∂G a G halmaz határa. Ekkor τ megállási szabály, és $X_x(\tau)$ egy $\mathcal{F}_\tau$ mérhető valószínűségi változó. Abban a speciális esetben, amikor G egy x középpontú r sugarú gömb $X_x(\tau)$ egyenletes eloszlású valószínűségi változó az x középpontú és r sugarú gömbfelületen.*

Nem tárgyalom a 2.6 Tétel bizonyítását, csak néhány megjegyzést teszek annak fő gondolatáról. Tekintsük az $X_x(s)$ valószínűségi változókat az olyan s argumentumokra, amelyek racionális számok. Írjuk fel ezen (megszámlálható számosságú) valószínűségi változó segítségével az $\{\omega\colon\ \tau(\omega) \le t\}$ és $\{\omega\colon\ X_x(\tau)(\omega) \in F\}$ eseményeket minden $t \ge 0$ számra és zárt $F \subset \partial G$ halmazra alkalmas módon ezen valószínűségi változók segítségével. Alkalmas reprezentáció segítségével be tudjuk bizonyítani, hogy τ megállási szabály, és $X_x(\tau)$ egy $\mathcal{F}_\tau$ mérhető valószínűségi változó. A reprezentáció megkeresése során kihasználjuk azt, hogy az $X_x(\cdot)(\omega)$ trajektóriák folytonos függvények. A 2.6 Tétel utolsó állításának bizonyításában azt érdemes felhasználni, hogy ha G egy x középpontú és r sugarú gömb, akkor az $X_x(\tau) - x$ valószínűségi változó értékeit az origó középpontú és r sugarú gömbön veszi fel, és eloszlása invariáns az R^l Euklideszi tér minden unitér transzformációjára nézve. Ezenkívül a 2.4 Tétel szerint $P(\tau < \infty) = 1$.

Rátérek a Dirichlet feladatban szereplő másik feltétel vizsgálatára, annak a kérdésnek a tanulmányozására, hogy miért igaz az, hogy egy szép határral rendelkező G tartomány és a határon definiált folytonos és korlátos φ függvény esetében a 2.3 Tétel következményében definiált $f(u) = \varphi(X_u(\tau_G(u)))$, $u \in G$, függvény teljesíti a $\lim\limits_{u \to x} f(u) = \varphi(x)$ azonosságot is minden $x \in \partial G$ pontban.

Bevezetjük a későbbiekben hasznosnak bizonyult reguláris pont fogalmát.

Reguláris pont definiciója. *Legyen adva egy G nyílt halmaz az R^l Euklideszi térben. Azt mondjuk, hogy a G halmaz egy $a \in \partial G$ határpontja reguláris, ha minden $h > 0$*

számra

$$P(\hat{\tau}_G(u) > h) \to 0 \quad ha\ u \to a,$$

ahol $\hat{\tau}_G(u) = \inf\{t\colon\ t \ge 0,\ X_u(t) \notin G\}$*, és* $X_u(t)$ *az* u *pontból kiinduló Wiener folyamatot jelöli.*

Megjegyzés. Ha $u \in G$, akkor $\hat{\tau}_G(u) = \tau_G(u)$ a 2.3 Tétel következményében definiált $\tau_G(u)$ valószínűségi változóval, és ha $u \notin G$ akkor $\hat{\tau}_G(u) = 0$. Kényelmi okok miatt volt érdemes volt bevezetni a $\hat{\tau}_G(u)$ valószínűségi változót. Ezzel kényelmesebb dolgozni, mint a $\tau_G(u)$ valószínűségi változóval, mert ez minden $u \in R^l$ paraméterre definiálva van.

A könyv bebizonyítja a következő eredményt.

2.7 Tétel. *Ha az* a *pont a* ∂G *halmaz reguláris pontja, a* $\varphi(\cdot)$ *függvény korlátos a* ∂G *halmazon, és folytonos az* a *pontban, akkor a 2.3 Tétel következményében konstruált* $f(u) = E\varphi(X_u(\tau_G(u)))$*,* $u \in G$*, függvény teljesíti a* $\lim\limits_{u \to a} f(u) = \varphi(a)$ *azonosságot is az* a *pontban.*

A 2.7 Tétel viszonylag egyszerű bizonyítása azon alapul, hogy a

$$Z(h) = \sup_{0 \le t \le h} |X_u(t) - X_u(0)|$$

valószínűségi változó eloszlása, ahol $X_u(t)$, $t \ge 0$, egy az u pontból kiinduló Wiener folyamat, nem függ az u számtól, és $Z(h)$ sztochasztikusan konvergál nullához, ha $h \to 0$.

Szeretnénk a 2.7 Tétel feltételében szereplő reguláris pontnak egy egyszerűbb, jobb jellemzését adni. Ilyen jellegű eredmény a következő, a könyvben bizonyított állítás, amelyet a 2.8 Tételben fogalmazok meg.

2.8 Tétel. *Tekintsünk egy* G *nyílt halmazt az* R^l *Euklideszi térben, valamint a* G *halmaz egy* $a \in \partial G$ *határpontját és egy az* a *pontból induló* $X_a(t)$*,* $t \ge 0$*, Wiener folyamatot. Definiáljuk a* $\sigma = \sigma(a)$ *valószínűségi változót a* $\sigma(a) = \inf\{t\colon\ t > 0,\ X_a(t) \notin G\}$ *képlet segítségével. Ha* $P(\sigma(a)(\omega) = 0) = 1$*, akkor a* a *a* ∂G *halmaz reguláris pontja.*

A $\sigma(a)(\omega) = 0$ esemény azt jelenti, hogy nemcsak $X_a(0, \omega) = a \notin G$, hanem azon $t > 0$ időpontoknak, amelyekre $X_a(t, \omega) \notin G$ a 0 pont torlódási pontja. Bár a könyv fő része (amelybe nem tartoznak bele a feladatok) nem bizonyítja, a szerzők megjegyzik, hogy a fenti állítások megfordíthatóak a következő értelemben. Ha teljesül a $\lim\limits_{u \to a} f(u) = \varphi(a)$ azonosság minden a ∂G halmazon definiált korlátos és az a pontban folytonos $\varphi(\cdot)$ függvényre a 2.3 Tétel következményében definiált (a φ függvénytől függő és a G halmazon definiált) $f(u)$ függvénnyel, akkor az a pont reguláris, és teljesül a $P(\sigma(a)(\omega) = 0) = 1$ azonosság is.

Ha el akarjuk dönteni, hogy teljesül-e a 2.8 Tétel feltételében szereplő $P(\sigma(a)(\omega) = 0) = 1$ azonosság, akkor hasznos lehet a következő nulla–egy törvény, amelynek eredeti alakját Blumenthal bizonyította be.

2.9 Tétel a Blumenthal-féle nulla–egy törvényről. *A 2.8 Tételben definiált $\sigma(a)$ valószínűségi változó teljesíti a $P(\sigma(a)(\omega)=0)=1$ vagy $P(\sigma(a)(\omega)=0)=0$ azonosságok valamelyikét.*

Kissé általánosabban a következőt állíthatjuk. Legyen adva egy $X(t)$, $t\ge 0$, (l-változós) Wiener folyamat, és definiáljuk az $\mathcal{F}_t=\sigma(X(u), 0\le u\le t)$ σ-algebrákat minden $t>0$ számra, és definiáljuk az $\mathcal{F}_{0+}=\bigcap\limits_{t>0}\mathcal{F}_t$ σ-algebrát is. Ekkor minden $A\in\mathcal{F}_{0+}$ eseményre $P(A)=0$ vagy $P(A)=1$. Továbbá, $\{\omega\colon \sigma(a)(\omega)=0\}\in\mathcal{F}_{0+}$.

A fenti nulla-egy törvény segítségével sok érdekes esetben be lehet bizonyítani, hogy egy G halmaz valamely $a\in\partial G$ határpontja reguláris. Például, ha két-dimenziós esetben egy G tartományt tekintünk, és tudjuk egy $a\in\partial G$ pontról, hogy van olyan K háromszög, amelynek egyik csúcspontja az a pont, és teljes egészében a G tartományon kívül van, akkor azt is tudjuk, hogy a reguláris pont. Ehhez elegendő a nulla-egy törvény alapján azt megmutatni, hogy $P(\sigma(a)(\omega)>0)<1$. Viszont ellenkező esetben az a pontból kiinduló Wiener folyamat 1 valószínűséggel pozitív ideig a G halmazban tartózkodna, és addig nem látogatná meg a K háromszög belsejét. De ekkor a Wiener folyamat szimmetriája miatt 1 valószínűséggel pozitív ideig nem látogatná meg a K háromszög semmilyen a pont körüli elforgatottját. De mivel az a pont kis környezete véges sok ilyen elforgatott háromszöggel lefedhető, ez ellentmondáshoz vezetne.

Legyen adva egy G tartomány olyan ∂G határral, amelynek minden pontja reguláris, és legyen adva egy a ∂G határon egy folytonos és korlátos $\varphi(\cdot)$ függvény. Wiener folyamatok segítségével megadtuk a $\Delta f(u)=0$, ha $u\in G$, és $\lim\limits_{u\to x} f(u)=\varphi(x)$, ha $x\in\partial G$ egyenletnek, azaz a Dirichlet problémának egy megoldását. Felmerül a kérdés, hogy ennek az egyenletnek egyértelmű-e a megoldása. A válasz igenlő abban az esetben, ha G korlátos halmaz, így annak lezártja kompakt. Ugyanis a Laplace operátorra érvényes maximum elv szerint, ha egy összefüggő, nyílt halmazon harmonikus függvénynek van maximuma, akkor az konstanssal egyenlő. Ez egyébként könnyen látható a harmonikus függvények 2.1 Tételben megadott jellemzése alapján. Ezt a tényt felhasználva könnyen bebizonyíthatjuk a Dirichlet feladat megoldásának egyértelműségét ebben az esetben.

Ha a tartomány nem korlátos, akkor előfordulhat, hogy a Dirichlet feladat megoldása nem egyértelmű. Tekintsük például a két-dimenziós tér $\{(x,y)\colon x\ge 0\}$ félsíkján az $f_1(x,y)=e^x\cos y$, és $f_2(x,y)=e^{-x}\cos y$ függvényeket. Ez két harmonikus függvény, amelyek megegyeznek a tartomány $x=0$ egyenes által meghatározott határán. Mind a két függvény értéke $\cos y$ ezen a határon. (Egyébként ezeket a függvényeket úgy könnyű megtalálni, mint az e^z és e^{-z} analitikus függvények reális részét, mivel az ilyen függvények harmonikusak.) Egy másik ilyen példa az $f_1(x,y)=\log(x^2+y^2)$ és $f_2(x,y)\equiv 0$ függvények a $G=\{(x,y)\colon x^2+y^2>0\}$ tartományon, azaz az origó középpontú egységkör külsejében. Ezen függvénypárokban az $f_1(x,y)$ függvény nem korlátos. Viszont magasabb dimenzióban példát mutatok arra, hogy nem korlátos tartományokban előfordulhat az is, hogy a Dirichlet problémának két különböző, korlátos megoldása van.

Vegyük három dimenzióban a $G=\{(x,y,z)\colon x^2+y^2+z^2>1\}$ tartományt és azon az $f_1(x,y,z)=(x^2+y^2+z^2)^{-1/2}$ és az $f_2(x,y,z)\equiv 1$ függvényeket. Ez két a G

tartományon, korlátos és harmonikus függvény, amelyeknek az értéke a határon 1-gyel egyenlő.

Mint láttuk, a Dirichlet feladat megoldása nem korlátos tartományokban nem feltétlenül egyértelmű. Viszont az itt tárgyalt valószínűségszámítási megoldásnak mindig megvan a következő minimum tulajdonsága.

2.10 Tétel a Dirichlet feladat valószínűségszámítási megoldásának minimum tulajdonságáról. *Tekintsük a $\Delta f(u) = 0$, ha $u \in G$, és $\lim\limits_{u \to x} f(u) = \varphi(x)$, ha $x \in G$ egyenletet egy olyan nem feltétlenül korlátos G tartományban, amelynek minden határpontja reguláris egy olyan a ∂G határon folytonos és korlátos φ függvénnyel, amelyre $\varphi(x) \geq 0$ minden $x \in \partial G$ pontban. Ekkor a 2.3 Tétel következményében definiált $f(u) = E\varphi(X_u(\tau_G(u)))$, $u \in G$, függvény ennek a feladatnak minimális megoldása a feladat nem-negatív megoldásai között, azaz, ha valamely $f_1(u)$ függvény szintén megoldása ennek a feladatnak, és ezenkívül $f_1(u) \geq 0$ minden $u \in G$ pontban, akkor $f(u) \leq f_1(u)$ minden $u \in G$ pontban.*

Ismertetem e tétel bizonyításának az alapgondolatát, mert annak más érdekes következménye is van. Tekintsük egy origó középpontú R sugarú gömb belsejét, és annak metszetét a G tartománnyal. Vegyük az $f_1(u)$ függvény $f_{1,R}(u)$ megszorítását erre a tartományra, mint a Laplace egyenlet (egyértelmű) megoldását ebben a tartományban, és azt a módosított feladatot, amelyben ugyanezt a parciális differenciálegyenletet tekintjük csak a határfeltételt az R-sugarú gömb határán megváltoztatjuk, azt ott nullának vesszük. Felírjuk ennek az egyenletnek az $f_R(u)$ valószínűségszámítási megoldását. Nem nehéz belátni, hogy $f_R(u) \leq f_{1,R}(u)$ e tartomány minden u pontjában, és $R \to \infty$ határátmenettel megkapjuk a 2.10 Tétel bizonyítását.

Alaposabb vizsgálattal ezen gondolatmenet további következményeit is bebizonyíthatjuk. Így például láthatjuk, hogy a Dirichlet feladat egy korlátos, azaz egy az egész tartományban egy univerzális konstansnál kisebb megoldása csak akkor különbözhet a feladat általunk megadott valószínűségszámítási megoldásától, ha a G tartománynak van olyan pontja, ahonnan kiindulva a Wiener folyamat egynél kisebb valószínűséggel látogatja meg a G tartomány ∂G határát. Vegyük észre, hogy ez magyarázza meg a Dirichlet feladat nem egyértelmű megoldására adott két és három-dimenziós példánk viselkedésének a különbséget. Két-dimenziós esetben egy tetszőleges pontból kiinduló Wiener folyamat egy valószínűséggel meglátogatja egy kis gömb belsejét, míg a három és magasabb dimenziós esetben az analóg állítás nem igaz. Egyébként a megkonstruált példák a az origón kívül harmonikus függvények legfontosabb példáján alapultak. Ez a függvény a két dimenziós esetben a $\log |x|$, míg a $l \geq 3$ dimenziós esetben ez az $|x|^{(l-2)}$ függvény.

A könyv tárgyalja néhány valószínűségszámítási probléma megoldását. Ezen feladatok megoldásában összehasonlítja a Dirichlet feladat valószínűségszámítási megoldását a feladat bizonyos esetekben jól ismert megoldásával.

A könyv tekinti többek a következő problémát. Legyen adva két origó középpontú r és R sugarú gömbfelület az l-dimenziós Euklideszi térben, $r < R$. Tekintsünk egy a két gömbfelület által határolt gömbgyűrű belsejében levő x pontot, és indítsunk el abból egy Wiener folyamatot. Számoljuk ki annak valószínűségét, hogy ez a Wiener folyamat előbb éri el az r sugarú gömbfelületet, mint az R sugarút.

E feladat megoldása érdekében tekintsük a következő feladatot. Találjuk meg azt a harmonikus függvényt ebben a gömbgyűrűben, amelynek a határértéke az r sugarú gömbfelületen 1, és az R sugarú gömbfelületen 0. Az eddigi eredményekből következik, hogy e függvény értéke az x helyen egyenlő a keresett valószínűséggel. Viszont a vizsgált egyenlet megoldását meg tudjuk találni, mert az $f(x) = C_1 \log |x| + C_2$ alakú függvények harmonikusak a két-dimenziós, az $f(x) = C_1|x|^{-(l-2)} + C_2$ alakú függvények pedig harmonikusak az $l \geq 3$ dimenziós tér origót nem tartalmazó halmazain. Továbbá a C_1 és C_2 konstansok alkalmas megválasztásával azt is biztosítani tudjuk, hogy a határfeltételek teljesüljenek.

Az így kapott eredménynek van néhány érdekes következménye. Ha alkalmas módon vizsgáljuk ennek az eredménynek a viselkedését az $R \to \infty$ és $r \to 0$ határátmenetek esetén, akkor be tudjuk látni a következő állításokat is. Annak valószínűsége, hogy egy Wiener folyamat meglátogasson egy előre rögzített pontot nulla, annak valószínűsége, hogy meglátogasson egy olyan gömböt, amely nem tartalmazza a Wiener folyamat kezdőpontját a két-dimenziós esetben egy, a három vagy magasabb dimenziós esetben pozitív, de szigorúan kisebb, mint egy.

A könyv tekinti a következő feladatot is. Tekintsünk a két-dimenziós térben egy szögtartományt, amelynek határai egy O pontból kiinduló OA és OB félegyenes, és e két félegyenes által közbezárt szög ϑ. Vegyünk egy X pontot a szögtartomány belsejében, és számoljuk ki annak a valószínűségét, hogy egy az X pontból kiinduló Wiener folyamat előbb éri el az OA félegyenest, mint az OB félegyenest.

Legyen α az OA és OX félegyenesek által közbezárt szög. A könyv bebizonyítja, hogy a keresett valószínűség egyenlő az $f(\alpha) = \frac{\alpha}{\vartheta}$ számmal. Ennek érdekében először azt veszi észre, hogy egy annak valószínűsége, hogy az X pontból kiinduló Wiener folyamat valamikor eléri a tartomány határát, azaz vagy az OA vagy az OB egyenest, és az nem az O pontban történik. Nyílvánvaló, hogy $f(0) = 0$ és $f(\vartheta) = 1$. Azt sem nehéz belátni szimmetria meggondolások segítségével, hogy ha $f(\alpha_1) = \frac{\alpha_1}{\vartheta}$ és $f(\alpha_2) = \frac{\alpha_2}{\vartheta}$ valamely $0 \leq \alpha_1, \alpha_2 \leq \vartheta$, szögekre, azaz igaz a bizonyítandó állítás abban az esetben, ha az OA és OX félegyenesek α_1 vagy α_2 szöget zárnak be, akkor $f(\frac{\alpha_1+\alpha_2}{2}) = \frac{\alpha_1+\alpha_2}{2\vartheta}$. Ezen összefüggés segítségével be lehet látni a feladat állítását az általános esetben is.

Ezen feladat megoldásának is van érdekes következménye. Így például kiszámolhatjuk annak a valószínűségét, hogy az a pont, ahol a felső félsik egy $X = (x_1, x_2)$ pontjából kiinduló Wiener folyamat először eléri az abszcissza tengelyt a $(-\infty, y)$ intervallumban van valamely y számmal. Tekintsük ugyanis azt a 180 fokos szögtartományt, ahol a szögtartomány csúcspontja az $O = (y, 0)$ pont, az OA félegyenes az abszcissza $(-\infty, y)$, az OB félegyenes pedig az abszcissza (y, ∞) félegyenese. Tekintve az OA és OX félegyenesek szögét az előző feladat eredménye alapján ki tudjuk számolni a keresett valószínűséget. Ezen számolások alapján ki lehet számolni az $X = (x_1, x_2)$ pontból kiinduló Wiener folyamat és az abszcissza tengely első metszéspontjának az eloszlását. Azt kapjuk, hogy ezen eloszlás sűrűségfüggvénye a $p(x_1, x_2, y) = \frac{1}{\pi} \frac{x_1}{x_2^2 + (y - x_1)^1}$.

A fenti eredmény lehetővé teszi a Dirichlet probléma megoldását a félsíkon. Azután néhány komplex függvénytani eredmény lehetővé teszi a Dirichlet feladat megoldását egy kör belsejében. Az így kapott formula az irodalomban Poisson formula néven ismeretes.

Rátérek a Poisson egyenlet vizsgálatára. Ebben a következő eredmény hasznos.

2.11 Tétel. *Tekintsünk egy $x \in R^l$ pontot az l-dimenziós Euklideszi térben, valamint egy az x pontból kiinduló $X_x(t)$, $t \ge 0$, l-dimenziós Wiener folyamatot és az x középpontú r sugarú S gömbfelületet valamely r sugárral az R^l l-dimenziós Euklideszi térben. Legyen τ az az első (véletlen) időpont, amikor a Wiener folyamat eléri az S gömbfelületet. Ekkor $E\tau = \frac{1}{l}r^2$.*

A 2.4 Tétel alapján tudjuk, hogy $E\tau < \infty$. A könyv megmutatja ezen tény, és a Wiener folyamat homogenitása alapján (ez azt jelenti, hogy a $W(t) - EW(0)$ és $a^{-1/2}(W(at) - W(0))$ sztochasztikus folyamatok eloszlása minden $a > 0$ számra megegyezik), hogy $E\tau = cr^2$ minden $r > 0$ számra valamilyen $c > 0$ együtthatóval. De a $c > 0$ együttható értékét csak néhány a könyv feladataiban szereplő állítás segítségével bizonyítja be. Ugyanakkor tanulságos lehet felidézni a Wiener folyamatok egy nagyon fontos, Paul Lévytől származó jellemzését, amely magyarázatot ad arra is, hogy miért $\frac{1}{l}$ ez a c konstans az l-dimenziós esetben. Valójában nekünk ennek a tételnek csak az egyszerűbb felére van szükségünk, és nem Paul Lévy tartalmasabb és nehezebben bizonyíthtó eredményére.

2.12 Tétel Paul Lévy Wiener folyamatok tulajdonságairól adott jellemzéséről. *Legyen $X(t)$, $t \ge 0$, egyváltozós (az origóból kiinduló) Wiener folyamat. Ekkor $X(t)$ és $X^2(t) - t$, $t \ge 0$, martingálok.*

Megfordítva, ha egy $X(t)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat olyan, hogy mind $X(t)$ mind $X^2(t) - t$, $t \ge 0$, martingál, és ezenkívül a sztochasztikus folyamat $X(\cdot, \omega)$ trajektóriái folytonosak, akkor az $X(t)$ sztochasztikus folyamat egy (az origóból kiinduló) Wiener folyamat.

Nem nehéz belátni, hogy nemcsak az igaz, hogy egy egy-dimenziós $X(t)$ Wiener folyamatra $X^2(t) - t$ egy martingál, hanem az is, hogy ha veszünk egy l-dimenziós valamely $x = (x_1, \dots, x_l) \in R^l$ pontból kiinduló $X_x(t) = (X_1(t), \dots, X_l(t))$, l-dimenziós Wiener folyamatot, és definiáljuk segítségével a $Z(t) = \sum\limits_{j=1}^{l} (X_j(t) - x_j)^2 - lt$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamatot, akkor $Z(t)$ (az $\mathcal{F}_t = \sigma(X_x(s), 0 \le s \le t)$ σ-algebrával) martingál. Tudjuk, hogy nagyon általános feltételek mellett egy $Z(t)$ martingálra és egy τ megállási szabályra érvényes az $EZ(\tau) = EZ_0$ azonosság. Ez az azonosság a most definiált $Z(t)$ martingálra és a 2.11 Tétel megfogalmazásában definiált τ megállási szabályra is érvényes. Ezért $0 = EZ(\tau) = E\left(\sum\limits_{j=1}^{l} X_j^2(\tau)\right) - lE\tau = r^2 - lE\tau$. Innen következik a 2.11 Tétel állítása.

Megfogalmazom a Poisson egyenlet valószínűségszámítási megoldásáról szóló eredményt.

2.13 Tétel a Poisson egyenlet valószínűségszámítási megoldásáról. *Legyen G egy korlátos, nyílt halmaz az R^l l-dimenziós Euklideszi téren reguláris ∂G határral. Tekintsünk minden $u \in G$ pontra egy u pontból kiinduló $X_u(t)$, $t \ge 0$, Wiener folyamatot, és legyen $\tau_G(u)$ az a véletlen időpont, amikor ez a Wiener folyamat először eléri a G tartomány ∂G határát. Definiáljuk az $f(u) = E\tau_G(u)$ függvényt. Ekkor $f(u) < \infty$, és az $f(u)$ függvény teljesíti a Poisson egyenletet, azaz $\Delta f(u) = -2$ minden $u \in G$ pontban, és $\lim\limits_{u \to x} f(u) = 0$ minden $x \in \partial G$ pontban.*

A 2.13 Tétel bizonyítása. Az $f(u) < \infty$ tulajdonság teljesül a 2.4 Tétel alapján, mivel a korlátos G halmaz része egy gömbnek. Tekintsünk egy $a \in G$ pontot és egy olyan a középpontú és r sugarú $C(a) = C(a, r)$ gömbfelületet, amelynek a belseje is része a G halmaznak. A Wiener folyamat erős Markov tulajdonsága és a 2.11 Tétel alapján felírhatjuk a 2.3 Tétel bizonyításához hasonlóan az

$$f(a) = \int_{C(a)} f(u)\mu_a(\,du) + \frac{1}{l}r^2$$

azonosságot, ahol μ_a az egyenletes eloszlás a $C(a)$ gömbfelületen.

Valóban, ez az azonosság azért igaz, mert a ∂G határ eléréséhez szükséges idő egyenlő a $C(a)$ gömbfelület eléréséhez szükséges τ_0 időnek és annak az időnek az összegével, ami ahhoz kell, hogy a $C(a)$ gömbfelület első meglátogatott pontjából elérjük a ∂G határt. Ezen összeg tagjainak a várható értékét ki tudjuk számolni. A Dirichlet probléma vizsgálatában alkalmazott módszerhez hasonlóan be tudjuk látni, hogy a második tag várható értéke az $\int_{C(a)} f(u)\mu_a(\,du)$ kifejezéssel egyenlő. Azt a tényt kell felhasználni, hogy a $C(a)$ halmaz első meglátogatott pontja, azaz az $X_u(\tau_0)$ valószínűségi változó értéke egyenletes eloszlású a $C(a)$ halmazon, és az $Y_u(t) = X_u(\tau_0+t) - X(\tau_0)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamat a $(\tau_0, X_u(\tau_0))$ véletlen vektortól független Wiener folyamat a Wiener folyamatok erős Markov tulajdonsága miatt. (Valójában elég csak $Y_u(t)$, $t \ge 0$, és $X_u(\tau_0)$ függetlenségét tudni e formula kiszámolásához.) Az első tag várható értéke $E\tau_0 = \frac{1}{l}r^2$ a 2.11 Tétel alapján. Ezen relációkból következik az előbb felírt azonosság.

Definiáljuk a $g(u) = f(u) + \frac{1}{l}u^2$ függvényt. A bizonyítandó $\Delta f(u) = -2$ azonosság ekvivalens a $\Delta g(u) = 0$ azonossággal minden $u \in G$ pontra. A harmonikus függvények 2.1 Tételben adott jellemzése alapján ez ekvivalens a

$$g(a) = f(a) + \frac{1}{l}a^2 = \int_{C(a)} \left(f(u) + \frac{1}{l}u^2\right)\mu_a(\,du) = \int_{C(a)} g(u)\mu_a(\,du)$$

azonossággal minden $a \in G$ pontra és olyan a középpontú, r sugarú gömbfelületre, amelynek a belsejét is tartalmazza a G halmaz.

Ez utóbbi állítás igaz az $f(a)$ kifejezésre bebizonyított azonosság és az

$$\int_{C(a)} |u|^2\mu_a(\,du) = |a|^2 + r^2$$

reláció alapján. Az utolsó reláció következik az

$$\int_{C(a)} |u|^2 \mu_a(\,du) = \int_{C(a)} |u-a|^2 \mu_a(\,du) + |a|^2 + 2\sum_{j=1}^{l} \int_{C(a)} (u_j - aj)\mu_a(\,du) = r^2 + |a|^2$$

azonosságból. E számolásban kihasználtuk, hogy szimmetria okok alapján $\int_{C(a)}(u_j - aj)\mu_a(\,du) = 0$ minden $1 \le j \le l$ indexre.

Annak a bizonyítása, hogy korlátos, és reguláris határral rendelkező G tartományra $\lim\limits_{u\to x} f(u) = 0$, ha $u \to x \in \partial G$ hasonló a Dirichlet feladat analóg állításának a bizonyításához. Annak a valószínűsége, hogy egy reguláris $x \in \partial G$ ponthoz közeli pontból induló Wiener folyamat nagyon hamar eléri a ∂G határt majdnem 1, és a határ eléréséhez szükséges idő feltételes várható értéke, feltéve, hogy a Wiener folyamat nem érte el a határt egy adott időpontig korlátos.

Érdemes megjegyezni, hogy annak az időnek a várható értéke, ami ahhoz szükséges, hogy egy olyan l-dimenziós Wiener folyamat, amely két r és R sugarú koncentrikus gömbfelület közötti gömbgyűrű valamely u pontjából indul elérje a gömbgyűrű határát hasonlóan kiszámítható, mint annak valószínűsége, hogy ez az u pontból kiinduló Wiener folyamat a belső gömbfelületet korábban éri el, mint a külsőt. Ha $f(u)$-val jelöljük ezt a várható értéket, akkor $f(u) - \frac{1}{l}|u|^2$ olyan harmonikus függvény a gömbgyűrűben, amelynek értéke a körgyűrűt határoló r illetve R sugarú határ gömbfelületen $-\frac{r}{l}$ illetve $-\frac{R}{l}$.

A könyv második fejezete néhány olyan megjegyzéssel zárul, amelyekben a szerzők röviden elmagyarázzák, hogy a Wiener folyamatok és parciális differenciálegyenletekről kifejtett gondolatok alaposabb kidolgozása milyen általánosabb problémák vizsgálatában nyújt segítséget. E magyarázatok nem tartalmazzák a nehezebb részletek kidolgozását.

Röviden tárgyalják a folytonos idejű (stacionárius) Markov folyamatok elméletében fontos szerepet játszó infinitezimális operátorok fogalmát. Ez a következőt jelenti. Bevezetjük egy $X(t)$, $t \ge 0$, folytonos idejű Markov folyamat állapotterén definiált f (valós értékű) függvények egy alkalmas $\mathcal{F}$ osztályát, és arra vagyunk kiváncsiak, hogy ha a 0 időpontban elindítjuk a Markov folyamatot egy x kezdőpontból, akkor hogyan fejlődik kis t paraméterre az $Ef(X(t))$ várható érték az $f \in \mathcal{F}$ függvényekre. Pontosabban, az

$$Af(x) = \lim_{t\to 0} \frac{Ef(X(t)) - f(x)}{t}, \quad f \in \mathcal{F},$$

úgynevezett infinitezimális operátort tekintjük. Pontosabb definició esetén meg kell mondanunk azt is, hogy hogyan definiáljuk a $\mathcal{F}$ függvényosztályt, sőt azt is, hogy az infinitezimális operátor definiciójában szereplő limeszt hogyan értelmezzük.

Egy folytonos idejű Markov folyamatot egyértelműen meghatároz kezdeti, 0 időpontbeli eloszlása és infinitezimális operátora. Sőt a Markov folyamat finomabb tulajdonságait annak infinitezimális operátora segítségével tudjuk jól tanulmányozni. A

Wiener folyamat infinitezimális operátora az $\frac{1}{2}\Delta$ operátor, és az, hogy a Laplace operátort a Wiener folyamat segítségével tudtuk jól tanulmányozni szoros kapcsolatban van ezzel a ténnyel.

A könyv második fejezete röviden tárgyal egy másik, az infinitezimális operátorhoz hasonló operátort, amelyet karakterisztikus operátornak neveznek. Ebben a Markov folyamat viselkedését nem egy rövid fix időintervallumban vizsgáljuk, hanem egy kis véletlen időintervallumban. Azt az időintervallumot vesszük, ami ahhoz szükséges, hogy a Markov folyamat kilépjen egy x pont kis U környezetéből. Pontosabban, az

$$\mathcal{U}f(x) = \lim_{U\to x} \frac{Ef(X(\tau)) - f(x)}{EX(\tau)}$$

kifejezést tekintjük, ahol az x pontnak erre a pontra húzodó kis, nyílt U környezeteit vesszük, és τ az a véletlen idő, ami ahhoz kell, hogy a Markov folyamat kilépjen az U halmazból. A Wiener folyamat karakterisztikus operátora, hasonlóan annak infinitezimális operátorához $\frac{1}{2}\Delta$-val egyenlő.

Felmerül a kérdés, hogy milyen operátorok jelenhetnek meg, mint alkalmas Markov folyamatok infinitezimális operátorai, és a Markov folyamatok milyen differenciáloperátorok vizsgálatában nyújtanak segítséget. Tekintsük először azokat a Markov folyamatokat, amelyek előállnak, mint egy több változós Wiener folyamat lineáris transzformációi, azaz felírhatók a következő formában:

$$Y_j(t) = X_j(0) + c_{j,1}(X_1(t) - X_1(0)) + \cdots + c_{j,l}(X_l(t) - X_l(0)) + b_j t, \quad 1 \le j \le l,$$

ahol $(X_1(t), \dots, X_l(t))$ egy l-dimenziós Wiener folyamat, és a $c_{j,s}$ és b_j számok, $1 \le j, s \le l$, tetszőleges konstansok.

Ennek a Markov folyamatnak az infinitezimális (vagy karakterisztikus) operátora a következő differenciáloperátor:

$$L = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{l} \sum_{s=1}^{l} a_{j,s} \frac{\partial^2}{\partial x_j \partial x_s} + \sum_{j=1}^{l} b_j \frac{\partial}{\partial x_j}.$$

ahol az $A = (a_{j,s})$, $1 \le j, s \le l$, mátrix $A = CC^*$ alakban írható a $C = (c_{j,s})$, $1 \le j, s \le l$, mátrix segítségével, és C^* a C mátrix adjungáltja. Könnyen látható, hogy a fenti formulában definiált A mátrix pozitív szemidefinit.

Be lehet látni, hogy léteznek olyan Markov folyamatok is, amelyeknek infinitezimális operátorai hasonlóak az előbb definiált L operátorhoz, de a benne szereplő $a_{j,s}$ és b_j együtthatók nem feltétlenül konstansok, hanem sima függvények az R^l téren. Az általuk definiált A mátrix továbbra is pozitív szemidefinit minden $x \in R^l$ argumentum esetén. Az ilyen infinitezimális operátorral rendelkező Markov folyamatokat diffuziós folyamatoknak hívják. Egy mélyebb apparátus kidolgozásával a diffuziós folyamatok infinitezimális operátorainak vizsgálatára lehet kidolgozni jó valószínűségszámítási módszereket.