Áttekintés

Dynkin, Evgenyij Boriszovics és Yushkevics, Alekszandr Adolfovics

Tételek és feladatok Markov folyamatokról

című könyvéről

Harmadik fejezet: Az optimális választás feladata.

Ez a fejezet egy az orosz irodalomban válogatós menyasszony, a magyar irodalomban Szindbád problémának nevezett feladat megoldásának az ismertetésével kezdődik. A feladat a következőképp szól.

Egy hölgy (Szindbád) n vőlegény (feleség)jelölt közül választhatja ki leendő férjét (feleségét). A jelöltek minőségének van egy sorrendje, van közöttük egy legjobb, egy második legjobb és így tovább, de a választani akaró hölgy (Szindbád) az egyes jelöltek jóságát kezdetben nem ismeri. Ő csak a jelöltek n számát tudja. A jelöltek véletlen sorrendben jelennek meg egymás után a hölgy (Szindbád) előtt, aki az éppen megjelent jelölt minőségét össze tudja hasonlítani a a korábban megjelentekével. Egy jelölt megjelenése után a hölgynek (Szindbádnak) azonnal el kell döntenie, hogy őt választja-e vagy pedig valamelyik később megjelenő jelöltet, és ezt a döntését később nem változtathatja meg. Tegyük fel, hogy a jelöltek megjelenésének minden lehetséges sorrendje egyformán valószínű. A hölgy (Szindbád) célja az, hogy minél nagyobb valószínűséggel a legjobb jelöltet válassza. Milyen stratégiát érdemes választania, és mekkora a siker valószínűsége az optimális stratégia választása esetén? Mi e valószínűség határértéke, ha $n \to \infty$?

A szerzők e fejezet első részében megoldják ezt a feladatot. Azt is megmutatják, hogy ez a feladat tárgyalható a következő probléma speciális eseteként. Rögzítsünk egy értékeit egy véges vagy megszámlálható sok elemet tartalmazó X halmazon felvevő Markov láncot valamely ismert $p(x, y)$, $x, y \in X$, átmenetvalószínűségekkel, és egy a Markov lánc minden $x \in X$ állapotában definiált $f(x)$ függvényt, amelyet nyereményfüggvénynek fogunk nevezni. A következő feladatot tárgyaljuk. Veszünk az X téren egy valamely $x \in X$ pontból kiinduló, $p(x, y)$ átmenetvalószínűségekkel rendelkező Markov láncot. Ha a Markov láncot egy véletlen időpontban megállítjuk, és a Markov lánc ebben az időpontban egy $u \in X$ állapotban tartózkodik, akkor $f(u)$ nyereményt kapunk. Célunk egy olyan optimális (véletlen időpontbeli) megállási stratégia megadása, amelynek alkalmazása esetén nyereményünk várható értéke a lehető legnagyobb. Ezenkívül szeretnénk kiszámítani a nyeremény várható értékét az optimális stratégia választása esetében.

E probléma vizsgálatában természetes módon megjelenik az első fejezetben bevezetett excesszív függvények fogalma, pontosabban az ott bevezetett fogalom természetes általánosítása arra az esetre, amikor nemcsak bolyongásokat tekintünk az l-dimenziós rácson, hanem általános Markov láncokat egy X állapottéren valamely $p(x, y)$, $x, y \in X$ átmenetvalószínűségekkel. Az excesszív függvények és azok tulajdonságai fontos szerepet játszanak az optimális megállási stratégiák megtalálásában és az optimális stratégiához tartozó nyeremény kiszámításában. Ezek az eredmények segítenek az előbb említett optimális párválasztási probléma megoldásában is.

E fejezet tartalmazza a fent megfogalmazott optimális megállási stratégiáról szóló feladat megoldását, illetve az excesszív függvények e feladat megoldásában felhasznált tulajdonságainak vizsgálatát. Végül a fejezet utolsó része egy olyan feladat megoldását tartalmazza, amely úgy tekinthető, mint az előbb megfogalmazott feladat folytonos idejű változatának egy speciális esete. A következő problémáról van szó. Tekintsünk egy $[0, a]$ intervallumot valamely $a > 0$ számmal, és egy valamely x, $0 \leq x \leq a$, pontból kiinduló $W(t)$ Wiener folyamatot a 0 és a pontokkal mint elnyelő falakkal. Legyen adva egy folytonos $f(x)$, $0 \leq x \leq a$, függvény a $[0, a]$ intervallumon. Határozzuk meg azt az optimális τ megállási szabályt erre a $W(t)$ Wiener folyamatra, amelyre az $Ef(W(\tau))$ várható érték maximális, és határozzuk meg ezt a várható értéket.

A kiinduló feladat megoldásában hasznos a következő eredmény.

3.1. Lemma. *Legyen adva n különböző $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ valós szám, és vegyük egyforma $\frac{1}{n!}$ valószínűséggel e számsorozat összes lehetséges $a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)}$ permutációját. Jelölje minden $1 \leq j \leq n$ számra ξ_j azt a valószínűségi változót, amely megmondja, hogy az $a_{\pi(j)}$ szám nagyság szerint hanyadik az $a_{\pi(1)}, a_{\pi(2)}, \dots, a_{\pi(j)}$ sorozatban, azaz legyen $\xi_j = 1$, ha ő a legnagyobb, $\xi_j = 2$, ha ő a második legnagyobb e számok között, és így tovább. Ekkor a $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók függetlenek egymástól, és $P(\xi_j = s) = \frac{1}{j}$ minden $1 \leq s \leq j$ számra és $1 \leq j \leq n$ indexre.*

Bizonyítás. Elég belátni, hogy $P(\xi_1 = s_1, \xi_2 = s_2, \dots, \xi_n = s_n) = \frac{1}{n!}$ minden olyan $s_1, \dots, s_n$ sorozatra, amelyre $1 \leq s_j \leq j$ minden $1 \leq j \leq n$ indexre. Ennek igazolásához elég megmutatni, hogy kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés létesíthető az ilyen tulajdonságú $s_1, \dots, s_n$ sorozatok és az $1, \dots, n$ számok $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ permutációi között a következő módon. Ha adva van egy $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ permutáció, akkor tekintjük az általa meghatározott $a_{\pi(1)}, \dots, a_{\pi(n)}$ sorozatot, majd az e sorozat segítségével a lemmában definiált $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók ezen permutációhoz tartozó $s_1, \dots, s_n$ értékeit. Ha a π permutációnak ezt az $s_1, \dots, s_n$ sorozatot feleltetjük meg, akkor a kívánt tulajdonságú kölcsönesen egyértelmű megfeleltetést hozunk létre. Valóban, minden $\pi = (\pi(1), \dots, \pi(n))$ permutációnak megfelel egy kívánt tulajdonságú $s_1, \dots, s_n$ sorozat, és különöző permutációk különböző sorozatokat határoznak meg. (Ezt például úgy lehet látni, hogy követjük a leképezés eredményeként kapott $s_n, s_{n-1}, \dots$ sorozat értékeit egymás után az indexek csökkenő sorrendjében.) Ezenkívül a $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ permutációk és $s_1, \dots, s_n$ sorozatok száma megegyezik. Mind a kettő értéke $n!$.

A későbbi tárgyalás érdekében felidézem a Markov lánc fogalmát. Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók sorozata, amelyek értékeiket valamely véges vagy megszámlálható sok elemet tartalmazó X térben veszik fel. Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók (stacionárius) Markov láncot alkotnak $p(x, y)$, $x, y \in X$, átmenetvalószínűségekkel, ha tetszőleges $n \geq 1$ számra, és $x_1, \dots, x_{n-1} \in X$ és $x, y \in X$ pontokra

$$P(X_{n+1} = y | X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1) = p(x, y).$$

Ezt az azonosságot megköveteljük minden olyan esetben, amikor $P(X_{n+1} = y, X_n = x, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_1 = x_1) > 0$.

Megjegyzem, hogy ebben a definicióban nem követeltük meg a $\sum_{y\in X} p(x,y)=1$ feltétel teljesülését. Elég megkövetelni azt, hogy $\sum_{y\in X} p(x,y)\le 1$ minden $x\in X$ pontban. Ez egyben azt jelenti, hogy megengedjük azt, hogy egy X_n valószínűségi változó ne legyen definiálva az egész $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, hanem csak annak egy 1-nél kisebb mértékű részhalmazán.

Érdemes a Markov láncok definicióját kissé általánosabban megadni. Az általánosabb definicióban megengedjük, hogy azokon az eseményeken kívül, hogy az X_n valószínűségi változók milyen értékeket vesznek fel más eseményeket is figyelembe vehessünk a vizsgált feltételes valószínűségek definiciójában szereplő feltételek között. De ezek az új események nem befolyásolják a vizsgált feltételes valószínűségeket.

Legyen adva egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn $X_1,X_2,\dots$ valószínűségi változók sorozata, amelyek értékeiket valamely véges vagy megszámlálható elemszámú X térben veszik fel. Legyen ezenkívül adva $\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\subset\cdots\subset\mathcal{A}$ σ-algebráknak olyan növekvő sorozata, amelyek részei az $\mathcal{A}$ σ-algebrának, és amelyekre igaz az, hogy X_n $\mathcal{F}_n$ mérhető valószínűségi változó minden $n=1,2,\dots$ indexre. (Most is megengedjük, hogy csak a $\sum_{y\in X} p(x,y)\le 1$ feltétel teljesüljön, és az X_n valószínűségi változó ne legyen definiálva az egész téren.) Azt mondjuk, hogy ezek a valószínűségi változók és σ-algebrák (stacionárius) Markov láncot alkotnak $p(x,y)$, $x,y\in X$, átmenetvalószínűségekkel, ha tetszőleges $n\ge 1$ számra, és $x,y\in X$ pontokra

$$P(X_{n+1}=y|\mathcal{F}_n)(\omega)=p(x,y),\quad \text{ha } X_n(\omega)=x. \tag{3.1}$$

A (3.1) pontban felírt azonosság úgy értendő, hogy az teljesül azon $\omega\in\Omega$ pontok halmazán, ahol definiálva van az $X_n(\omega)$ függvény.

Tekintsük a válogatós menyasszony problémát. Vegyük észre, hogy a 3.1 lemma alapján ezt a feladatot a következőképp is átfogalmazhatjuk. Adott $\xi_1,\dots,\xi_n$ független valószínűségi változók sorozata, amelyekre ξ_j az $1,\dots,j$ számok valamelyikét veszi fel, és $P(\xi_j=s)=\frac{1}{j}$ minden $1\le s\le j$ számra. Lehetőségünk van arra, hogy megfigyeljük egymás után a $\xi_1,\xi_2,\dots,\xi_n$ valószínűségi változókat. A megfigyelést azon j indexre szeretnénk befejezni, amelyre egyrészt $\xi_j=1$, másrészt $\xi_k\ge 2$ minden $k>j$ indexre. Hogyan tudjuk elérni, hogy úgy fejezzük be a megfigyelést, hogy ez az esemény minél nagyobb valószínűséggel következzen be? Értsük meg, hogy miért ezt a feladatot kell megoldanunk a válogatós menyasszony problémájának vizsgálatában.

Amikor az egyes jelöltek egymás után megjelennek, és összehasonlítjuk őket a korábban megjelentekkel, akkor azokat a ξ_j valószínűségi változókat figyeljük meg, amelyek megmondják, hogy az újonnan megjelent jelölt hanyadik az eddigi jelöltek között a jósági sorrendben. Az, hogy $\xi_j=1$ azt jelenti, hogy a j-ik jelölt minden korábbinál jobb. Az, hogy $\xi_k\ge 2$ minden $k>j$ indexre azt jelenti, hogy a későbbi jelöltek között sem jelenik meg a j-ik jelöltnél jobb jelölt. Tehát az, hogy sikerült az ilyen tulajdonságú j indexet megtalálni ekvivalens azzal, hogy megtaláltuk a legjobb jelöltet. Másrészt a 3.1 lemma alapján a ξ_j valószínűségi változóknak az általunk megadott együttes eloszlása van.

Az előbbiekben megadtuk a válogatós menyasszony probléma egy ekvivalens megfogalmazását. A feladatot meg lehet oldani ebben a formában, de a könyv szerzői leírták a feladat egy olyan ekvivalens megfogalmazását alkalmas Markov láncok segítségével, amelyik kényelmesebben vizsgálható. Ismertetem ezt a megfogalmazást. Ehhez szükségünk van a következő eredményre.

3.2. Lemma. *Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók sorozata, amelyre $P(\xi_j = s) = \frac{1}{j}$, $1 \le s \le j$ minden $1 \le j \le n$ indexre. Definiáljuk a következő η_1, η_2, ... , valószínűségi változókat. $\eta_1(\omega) \equiv 1$, $\eta_2(\omega) = n_1(\omega)$, a legkisebb olyan $l = n_1(\omega) > 1$ index-szel, amelyre $\xi_l(\omega) = 1$, ha van ilyen l index. Ha nincs ilyen l index akkor sem az $\eta_2(\omega)$, sem az $\eta_k(\omega)$, $k > 2$, valószínűségi változókat nem definiáljuk az $\omega \in \Omega$ pontban. Ha az $\eta_j(\omega)$ valószínűségi változót már definiáltuk valamely j indexre egy $\omega \in \Omega$ pontban, akkor $\eta_{j+1}(\omega) = n_{j+1}(\omega)$ azzal a legkisebb $l = n_{j+1}(\omega) > \eta_j(\omega)$ index-szel, amelyre $\xi_l(\omega) = 1$, feltéve, hogy ilyen l index létezik. Ha ilyen l index nem létezik, akkor sem a $\eta_{j+1}(\omega)$ sem az $\eta_p(\omega)$, $p \ge j + 2$, valószínűségi változókat nem definiáljuk az $\omega \in \Omega$ pontban.*

Az így definiált $\eta_1, \eta_2, \dots$ valószínűségi változók Markov láncot alkotnak az $X = \{1, \dots, n\}$ halmazon felvett értékekkel és a következő átmenetvalószínűségekkel: $p(l|k) = P(\eta_{j+1} = l | \eta_j = k) = \frac{k}{(l-1)l}$, ha $1 \le k < l \le n$, és $p(l|k) = 0$ különben.

Definiáljuk minden j számra az $\mathcal{F}_j$ σ-algebrát, mint az $\{\omega\colon\ \xi_1(\omega) = s_1, \xi_2(\omega) = s_2, \dots, \xi_p(\omega) = s_p\}$ alakú események által generált σ-algebrát, ahol olyan $s_1, \dots, s_p$, $1 \le s_l \le l$ minden $1 \le l \le p$ sorozatokat tekintünk, amelyekre $p \le n$, és az $s_1, \dots, s_l$ sorozat $\eta_j(\omega)$ darab egyest tartalmaz. Az $(\eta_j, \mathcal{F}_j)$, $j = 1, 2, \dots$ sorozat szintén Markov lánc az előbb definiált $p(k|l)$ átmenetvalószínűségekkel.

Bizonyítás. Ki kell számolnunk a

$$\begin{aligned} &P(\eta_{j+1} = l | \eta_j = k, \eta_{j-1} = k_{j-1}, \eta_{j-2} = k_{j-2}, \dots, \eta_1 = k_1) \\ &\quad = \frac{P(\eta_{j+1} = l, \eta_j = k, \eta_{j-1} = k_{j-1}, \eta_{j-2} = k_{j-2}, \dots, \eta_1 = k_1)}{P(\eta_j = k, \eta_{j-1} = k_{j-1}, \eta_{j-2} = k_{j-2}, \dots, \eta_1 = k_1)} \end{aligned}$$

feltételes valószínűséget minden j indexre, és $n \ge l > k > k_{j-1} > k_{j-2} > \dots > k_1 = 1$ feltétel esetén. A fenti törtben szereplő valószínűségeket ki tudjuk számolni, mert olyan események valószínűségét kell kiszámolni, hogy az egymástól független ξ_p valószínűségi változók közül egyesek 1-gyel egyenlőek, mások pedig nem egyenlőek 1-gyel. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P(\eta_{j+1} = l, \eta_j = k, \eta_{j-1} = k_{j-1}, \eta_{j-2} = k_{j-2}, \dots, \eta_1 = k_1) \\ &\quad = \frac{1}{l} \cdot \frac{1}{k} \cdot \prod_{s=1}^{j-1} \frac{1}{k_s} \prod_{\substack{1 \le t \le l \\ t \notin \{l, k, k_j, k_{j-1}, \dots, k_1\}}} \frac{t-1}{t}, \end{aligned}$$

és hasonlóan

$$P(\eta_j = k, \eta_{j-1} = k_{j-1}, \eta_{j-2} = k_{j-2}, \dots, \eta_1 = k_1)$$
$$= \frac{1}{k} \cdot \prod_{s=1}^{j-1} \frac{1}{k_s} \prod_{\substack{1 \le t \le k \\ t \notin \{k, k_j, k_{j-1}, \dots, k_1\}}} \frac{t-1}{t}.$$

Ezért a keresett feltételes valószínűség

$$P(\eta_{j+1} = l | \eta_j = k, \eta_{j-1} = k_{j-1}, \eta_{j-2} = k_{j-2}, \dots, \eta_1 = k_1)$$
$$= \frac{1}{l} \prod_{k+1 \le t \le l-1} \frac{t-1}{t} = \frac{k}{(l-1)l}.$$

Így a kívánt azonosságot beláttuk minden olyan esetben, amikor $P(\eta_{j+1} = l, \eta_j = k, \eta_{j-1} = k_{j-1}, \eta_{j-2} = k_{j-2}, \dots, \eta_1 = k_1) > 0$.

A 3.2 lemma második felét arról az esetről, amikor a $\mathcal{F}_j$ σ-algebrákat is tekintjük hasonlóan látjuk be, csak akkor a jelölés kissé bonyolultabbá válik.

Jelenjenek meg a válogatós menyasszony problémájában az egyes jelöltek az 1, 2, 3, ... időpontokban. Jelölje η_1, η_2, ... azokat az időpontokat, amikor egy minden korábbinál jobb jelölt jelent meg. A 3.2 lemmában azt bizonyítottuk be, hogy ezek az η_j időpontok Markov láncot alkotnak, és megadtuk e Markov lánc átmenetvalószínűségeit. Világos, hogy csak valamelyik η_j időpontben megjelent jelöltet érdemes választani, ha az a célunk, hogy a legjobb jelöltet válasszuk minél nagyobb valószínűséggel. (Illetve az utolsó n-ik jelöltet kell választani akkor, amikor már nincs több választható jelölt.) Célunk annak meghatározása, hogy melyik η_j időpontban megjelent jelöltet érdemes választani. E kérdés megválaszolásához ad hasznos információt a 3.2 lemma. A lemma második felében megfogalmazott $\mathcal{F}_j$ σ-algebrákról szóló állításnak az a haszna, hogy segítségével be lehet látni, hogy az a plusz információ hogy tudjuk mi történt az η_j és η_{j+1} időpontok között, milyen sorrendben jelentek meg az eleve nem választható jelöltek, nem ad hasznos információt a kérdés megválaszolásához. Annak érdekében, hogy az optimális stratégiát megtaláljuk érdemes bebizonyítani a következő eredményt.

3.3. Lemma. *Legyen $\eta_1, \eta_2, \dots$ egy Markov lánc az $X = \{1, \dots, n\}$ halmazon felvett értékekkel a következő $p(l|k)$ átmenetvalószínűségekkel: $p(l|k) = P(\eta_{j+1} = l|\eta_j = k) = \frac{k}{(l-1)l}$, ha $1 \le k < l \le n$, és $p(l|k) = 0$ különben. Jelölje $q(k)$ annak feltételes valószínűségét, hogy nem létezik az η_{j+1} valószínűségi változó, feltéve azt, hogy $\eta_j = k$. Azaz $q(k)$ annak feltételes valószínűsége, hogy amennyiben a a j időpontban a Markov lánc a k pontban tartozkódik akkor onnan már nem lép sehová. Jelölje $q'(k)$ annak a feltételes valószínűségét, hogy a Markov láncban létezik az $\eta_{j+1} > \eta_j$ valószínűségi változó, de az $\eta_{j+2} > \eta_{j+1}$ valószínűségi változó már nem létezik, feltéve, hogy $\eta_j = k$. Ez annak a feltételes valószínűsége, hogy amennyiben a Markov lánc a j időpontban a k pontban tartózkodik, akkor az tesz még egy lépést a k pontból, de ez a Markov lánc utolsó lépése.*

Azt állítom, hogy $q(k) = \frac{k}{n}$, $1 \le k \le n$, *és*

$$q'(k) = \frac{k}{n}\left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k+1} + \cdots + \frac{1}{n-1}\right), \quad ha\ 1 \le k \le n-1, \tag{3.2}$$

és $q'(n) = 0$.

Bizonyítás. Felírhatjuk az $1 - q(k) = \sum\limits_{l=k+1}^{n} p(l|k)$ azonosságot, ami azért igaz, mert ha $\eta_j = k$ akkor annak komplementer eseménye, hogy az η_{j+1} valószínűségi változó nem létezik az, hogy $\eta_{j+1} = l$ valamilyen $k+1 \le l \le n$ számmal. Mivel $p(l|k) = \frac{k}{(l-1)l} = k(\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l})$ a 3.2 lemma alapján, ezért igaz az

$$1 - q(k) = \sum_{l=k+1}^{n} k\left(\frac{1}{l-1} - \frac{1}{l}\right) = k\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{k}{n}$$

azonosság, és ezt kellett belátni.

Igaz a $q'(k) = \sum\limits_{l=k+1}^{n} p(l|k)q(l) = \sum\limits_{l=k+1}^{n} \frac{k}{(l-1)l} \cdot \frac{l}{n}$ azonosság minden $1 \le k \le n-1$ számra, mert $p(l|k)q(l)$ annak a feltételes valószínűsége, hogy $\eta_{j+1} = l$, és az η_{j+2} valószínűségi változó nem létezik, feltéve, hogy $\eta_j = k$. Innen következik a (3.2) formula. A $q'(n) = 0$ azonosság nyilvánvaló.

Az eredeti válogatós menyasszony problémát a következő problémára vezettük vissza. Tekintsünk egy a 3.2. lemmában leírt $\eta_1, \eta_2, \dots$ Markov láncot. E Markov lánc elemeinek egymás utáni megfigyelése (és a $p(y|x)$ átmenetvalószínűségek ismeretében) próbáljuk e Markov lánc megfigyelését minél nagyobb valószínűséggel abban az időpontban befejezni, amikor e Markov lánc utolsó eleme megjelenik. (Ezt a Markov láncot úgy kaptuk, hogy az eredeti válogatós menyasszony problémában az η_j valószínűségi változót úgy definiáltuk, mint azt a számot, amely megmondta, hogy hányadik jelölt volt a j-ik olyan jelölt, amely az összes korábbi jelöltnél jobb volt. Az η_j definiciója úgy értendő, hogy amennyiben nem volt j-ik olyan jelölt, aki minden korábbi jelöltnél jobb volt, akkor az η_j valószínűségi változót nem definiáltuk. Az így definiált Markov láncban az $\eta_1 \equiv 1$ tulajdonság is teljesül.)

Annak érdekében, hogy ezt a feladatot megoldjuk vizsgáljuk először a következő kérdést. Tegyük fel, hogy a vizsgált Markov láncban az $\eta_j = k$, $1 \le k \le n$, esemény bekövetkezett valamilyen j index-szel, és nekünk el kell dönteni, hogy ezen esemény bekövetkezte után mikor fejezzük be e Markov lánc megfigyelését. Tekintsük a következő két lehetséges stratégiát. Az első stratégia az, hogy a j időpontban azonnal befejezzük a Markov lánc megfigyelését. A második stratégia az, hogy várunk az η_{j+1} valószínűségi változó megjelenésére, és ha ez megjelenik, akkor befejezzük a Markov lánc megfigyelését. (Ha nem jelenik meg az η_{j+1} valószínűségi változó, akkor nem sikerült a Markov lánc megfigyelését a megfelelő időpontban befejezni.) Számoljuk ki a siker valószínűségét e két stratégia alkalmazása esetén, és határozzuk meg, hogy mikor melyik a jobb.

A két stratégia sikerének a valószínűségét a 3.3. lemmában kiszámoltuk. Az első stratégia sikerének a valószínűsége az ott definiált $q(k)$, a másodiké az ott definiált $q'(k)$ mennyiség, és ezen mennyiségeket kiszámoltuk a 3.3. lemmában. Ezek az eredmények lehetővé teszik annak meghatározását is, hogy mikor melyik stratégia a jobb. A válasz megfogalmazása érdekében vezessük be azt a k_n pozitív egész számot, amely teljesíti az

$$\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\le 1<\frac{1}{k_n-1}+\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n+1}+\cdots+\frac{1}{n-1} \tag{3.3}$$

egyenlőtlenséget.

Ha $k\ge k_n$ akkor az első, ha $k<k_n$ akkor a második stratégia az előnyösebb. Ez az eredmény a következő képet sugallja. Ha $\eta_j=k$ egy viszonylag kis k számmal akkor nem érdemes a Markov lánc figyelését befejezni, hanem érdemes újabb η_{j+1} szám megjelenésére várni. Ha $\eta_j=k$ egy elég nagy k számra, akkor érdemes a Markov lánc megfigyelését azonnal befejezni. Sőt, azt is megsejthetjük, hogy a k_n szám a határ a kis és nagy számok között. Azaz, ha $k<k_n$, akkor az $\eta_j=k$ esemény megjelenésekor nem fejezzük be, és ha $k\ge k_n$, akkor az $\eta_j=k$ esemény megjelenésekor befejezzük a Markov lánc megfigyelését. Az alábbi eredményben ezt az állítást pontosabban is megfogalmazzuk.

3.4. Lemma. *Tekintsük a 3.2 Lemmában definiált $\eta_1,\eta_2,\dots$ Markov láncot és az $\eta_j=k$ eseményt valamilyen j és k számokkal. Határozzuk meg a Markov lánc j időpont utáni optimális megállási stratégiáját, amelynek alkalmazása esetén a legnagyobb a feltételes valószínűsége annak, hogy a Markov láncot az utolsó η_l valószínűségi változó megjelenésekor állítottuk meg, feltéve, hogy $\eta_j=k$. Számítsuk ki ezt a feltételes valószínűséget.*

Ha $k\ge k_n$, ahol k_n a (3.3) formulát teljesítő pozitív egész szám, akkor az optimális stratégia az azonnali, j időpontbeli megállás, és annak feltételes valószínűsége az $\eta_j=k$ feltétel mellett, hogy ez a jó megállási időpont a $\frac{k}{n}$ számmal egyenlő. Ha $k\le k_n-1$, akkor az optimális stratégia az, hogy megvárjuk az első olyan η_l valószínűségi változó megjelenését, amelyre $\eta_l=\bar k$ valamely $\bar k\ge k_n$ számmal. Ha ilyen η_l valószínűségi változó nem létezik, akkor nem sikerült a jó megállási időpontot megtalálni. A jó megállási időpont megtalálásának feltételes valószínűsége az $\eta_j=k$ feltétel mellett ebben az esetben

$$\frac{k_n-1}{n}\left(\frac{1}{k_n-1}+\frac{1}{k_n}+\frac{1}{k_n+1}+\cdots+\frac{1}{n-1}\right). \tag{3.4}$$

Következmény. Mivel a válogatós menyasszony probléma feladatának megoldását egy olyan a 3.2. lemmában definiált Markov lánc vizsgálatára vezettük vissza, amelyben $\eta_1\equiv 1$ a 3.4 lemma megadja az optimális stratégiát ebben a feladatban. A k_n időpontnál nem korábban megjelent jelöltek közül az első minden korábbinál jobb jelöltet kell választani. A sikeres választás valószínűségét ebben az esetben a (3.4) formula adja meg.

Megjegyzés. A 3.4 lemmában szereplő optimális választás feltételes valószínűsége nem függ az η_j valószínűségi változó j indexétől, csak annak k értékétől. Ez azzal függ össze, hogy az $\eta_1, \eta_2, \ldots$ sorozat stacionárius Markov lánc. A lemmát azért fogalmaztuk egy j index segítségével, mert ily módon olyan állítást tudtunk felírni, amelynek bizonyításában könnyebben végrehajtható az ott alkalmazott indukció. Valójában a 3.4 lemmát kissé általánosabban kellett volna megfogalmaznunk egy részletes és pontos bizonyításban. A 3.2 Lemma végén definiált $(\eta_j, \mathcal{F}_j)$ Markov lánccal kellett volna dolgoznunk annak érdekében, hogy megmutassuk: Az a plusz információ, hogy tudjuk milyen sorrendben érkeztek a nem választható jelöltek nem segít egy jobb stratégia kidolgozásában. A bizonyításban is egy formálisan általánosabb állítást kellett volna bizonyítani. Azt, hogy ha rögzítünk egy olyan eseményt, amelyik az $\mathcal{F}_j$ σ-algebra valamely az $\eta_j = k$ esemény által tartalmazott atomja, és a j időpont utáni optimális megállást keressük, és az optimális megállás feltételes valószínűségét akarjuk kiszámolni feltéve hogy ez az esemény bekövetkezett, akkor a lemmában az $\eta_j = k$ feltétel esetében kimondott állítások érvényesek. Ezen általánosabb állítás megfogalmazása és bizonyítása csak technikai komplikációt jelentett volna. Később tárgyalni fogjuk a válogatós menyasszony feladat egy másik, általános elveken alapuló megoldását is.

A 3.4. lemma bizonyítása. A lemmát a k szám szerinti backward indukcióval fogjuk bebizonyítani. A $k = n$ esetre igaz az állítás. Vegyünk egy $k \geq k_n$ számot, és tegyük fel, hogy az állítás igaz minden $n \geq \bar{k} > k$ számra. Ekkor vagy megállunk az $\eta_j = k$ pontban, és ekkor a siker (feltételes) valószínűsége $\frac{k}{n}$ a 3.3. lemma alapján, vagy teszünk egy lépést és ekkor $P(\eta_{j+1} = \bar{k} | \eta_j = k) = \frac{k}{(\bar{k}-1)\bar{k}}$ (feltételes) valószínűséggel jutunk a $\bar{k}$ pontba. Ha a $\bar{k}$ pontban vagyunk, akkor érdemes az onnan induló optimális stratégiát alkalmazni, ami indukciós feltevésünk szerint a megfigyelések befejezését jelenti, és a siker valószínűsége ekkor $\frac{\bar{k}}{n}$. Ez azt jelenti, hogy ha $\eta_j = k$ esemény után továbblépünk, és azután az optimális stratégiát alkalmazzuk, akkor a siker (feltételes) valószínűsége $\sum\limits_{\bar{k}=k+1}^{n} \frac{k}{(\bar{k}-1)\bar{k}} \cdot \frac{\bar{k}}{n} = \frac{k}{n} \sum\limits_{\bar{k}=k}^{n-1} \frac{1}{\bar{k}}$, ami $k \geq k_n$ esetén kisebb, mint $\frac{k}{n}$, azaz a siker feltételes valószínűsége az azonnali leállás esetében. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben az azonnali leállás az optimális stratégia.

Ha $k = k_n - 1$, azaz $\eta_j = k_n - 1$ akkor az előző érveléshez hasonlóan beláthatjuk, hogy az optimális stratégia az, hogy várunk az η_{j+1} valószínűségi változó megjelenésére, és utána alkalmazzuk az optimális stratégiát. Mivel $\eta_{j+1} \geq k_n$, az optimális stratégia ebben az esetben az η_{j+1} valószínűségi változó megjelenése utáni azonnali megállás. Ezt úgy is megfogalmazhatjuk ebben az esetben, hogy megvárjuk az első olyan η_l valószínűségi változó megjelenését, amelynek értéke legalább k_n. Backward indukcióval belátjuk, hogy ilyen az optimális stratégia $\eta_j = k$ esetén minden $k \leq k_n - 1$ számra. Valóban, adva egy $k < k_n - 1$ szám, tegyük fel, hogy ez az állítás igaz minden $\bar{k} > k$ számra. A 3.3 lemma eredményeiből következik, hogy $q'(k) \geq q(k)$, ha $k \leq k_n - 1$, ami azt jelenti, hogy ebben az esetben előnyösebb az, ha nem állítjuk meg a Markov lánc megfigyelését az η_j időpontban, hanem várunk az η_{j+1} valószínűségi változó megjelenésére, és azután fejezzük be a Markov lánc megfigyelését. Akkor viszont a legelőnyösebb stratégia az, ha várunk az η_{j+1} valószínűségi változó megjelenésére, és ha $\eta_{j+1} = l$, akkor az ehhez az eseményhez tartozó optimális stratégiát követjük. Innen az indukciós feltevés alapján következik, hogy a 3.4. lemmában leírt stratégia az optimális.

Szintén indukcióval látjuk be, hogy $k \le k_n - 1$ esetén a (3.4) formula adja meg az optimális stratégia sikerének a (feltételes) valószínűségét. Tegyük fel, hogy tudjuk ezt az állítást minden olyan $\bar{k}$ számra, amelyre $k < \bar{k} \le k_n - 1$. Ekkor, ha $s(l)$-lel jelöljük a siker feltételes valószínűségét az optimális stratégia esetén az $\eta_{j+1} = l$ feltétel teljesülése esetén, akkor azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} s(k) &= \sum_{l=k+1}^{n} \frac{k}{(l-1)l} s(l) = \sum_{l=k+1}^{k_n-1} \left(\frac{k}{(l-1)} - \frac{k}{l} \right) \frac{k_n - 1}{n} \left(\frac{1}{k_n - 1} + \frac{1}{k_n} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \\ &\quad + \sum_{l=k_n}^{n} \frac{k}{(l-1)l} \cdot \frac{l}{n} \\ &= \left[\left(\frac{k}{k} - \frac{k}{k_n - 1} \right) \frac{k_n - 1}{n} + \frac{k}{n} \right] \left(\frac{1}{k_n - 1} + \frac{1}{k_n} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right) \\ &= \frac{k_n - 1}{n} \left(\frac{1}{k_n - 1} + \frac{1}{k_n} + \cdots + \frac{1}{n-1} \right), \end{aligned}$$

és ezt kellett belátni.

Megadtuk az optimális stratégiát a válogatós menyasszony problémájában, és kiszámoltuk a siker valószínűségét is. Nem nehéz belátni, hogy $n \to \infty$ esetén $k_n \sim \frac{n}{e}$, és a siker valószínüsége az $\frac{1}{e}$ számhoz tart.

Rátérünk az általános Markov láncok optimális megállításának problémájára ismert nyereményfüggvény esetén. Először megfogalmazzuk a feladatot.

Markov láncok optimális megállításának problémája. *Legyen adva egy értékeit egy X állapottéren felvevő valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn defininiált $X_0(\omega)$, $X_1(\omega)$, … Markov lánc ismert $p(x,y)$, $x, y \in X$, átmenetvalószínűségekkel, és egy szintén ismert, korlátos $f(u)$, $u \in X$, nyereményfüggvény az X téren. Tekintsünk egy olyan $p(x,y)$ átmenetvalószínűségekkel rendelkező $X_0(\omega), X_1(\omega), \dots$ Markov láncot, amely egy rögzített $x \in X$ pontból indul, azaz $P(X_0(\omega) = x) = 1$, és tekintsük e Markov lánc $f(X_{\tau(\omega)}(\omega))$ nyereményét a Markov lánc minden lehetséges $\tau(\omega)$ megállási szabálya esetén. Ha nem definiáltuk a $\tau(\omega) < \infty$ számot egy ω pontban, amit úgy is megfogalmazhatunk, hogy $\tau(\omega) = \infty$, akkor definició szerint $f(X_{\tau(\omega)}(\omega)) = 0$. Számítsuk ki a $v(x) = \sup\limits_{\tau} E_x f(X_{\tau(\omega)}(\omega))$ mennyiséget, ahol a szuprémumot a Markov lánc összes lehetséges τ megállási szabályára vesszük. Határozzunk meg egy optimális τ megállási szabályt, amelyre $E_x f(X_{\tau(\omega)}(\omega)) = v(x)$, feltéve, hogy ilyen τ megállási szabály létezik. Ha ilyen megállási szabály nem létezik, akkor találjunk minden $\varepsilon > 0$ számra olyan τ ε-optimális megállási szabályt, amelyre $E_x f(X_{\tau(\omega)}(\omega)) \ge v(x) - \varepsilon$.*

A most megfogalmazott probléma megfogalmazásában szerepelt a megállási szabály fogalma. Ezt a fogalmat bevezettük a könyv 2. fejezetének ismertetésében. De ott ezt a fogalmat csak időben folytonos sztochasztikus folyamatok esetében definiáltuk. A teljesség kedvéért itt megadjuk e fogalom diszkrét időre vonatkozó természetes megfelelőjét.

A megállási szabály fogalmának definiciója. *Legyen adva $\mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, \dots$, σ-algebráknak nem-negatív egész számokkal indexezett növekvő családja, azaz legyen $\mathcal{F}_m \subset \mathcal{F}_n$, ha $m \le n$, és legyenek ezek a σ-algebrák rész σ-algebrái egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező $\mathcal{A}$ σ-algebrájának. Egy nem-negatív egész értékeket felvevő τ valószínűségi változót megállási szabálynak nevezünk az $\mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, \dots$, σ-algebra rendszerre nézve, ha minden $n \ge 0$ egész számra $\{\tau = n\} \in \mathcal{F}_n$. Megengedjük azt is, hogy a τ valószínűségi változó ne legyen mindenütt definiálva, azaz lehetséges az is, hogy $P(\tau < \infty) < 1$.*

Legyen adva egy X_n, $n = 0, 1, \dots$, sztochasztikus folyamat egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Azt mondjuk, hogy egy nem-negatív egész értékeket felvevő τ valószínűségi változó megállási szabály erre a sztochasztikus folyamatra nézve, ha az megállási szabály az $\mathcal{F}_n = \sigma(X_m,\, m \le n)$, $n = 0, 1 \dots$, növekvő σ-algebra családra nézve.

A Markov láncoknak e fejezetben ismertetett fogalmát fogjuk használni, azaz nem követeljük meg a $\sum\limits_{y \in X} p(x, y) = 1$, hanem csak a $\sum\limits_{y \in X} p(x, y) \le 1$ reláció teljesülését minden $x \in X$ pontra. A később tárgyalandó eredményeket lehetséges általánosítani a szintén definiált $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots$, valószínűségi változó és σ-algebra párokból álló Markov láncokra is. Itt és a továbbiakban E_x és P_x egy olyan Markov lánc esetén fog várható értéket és valószínűséget jelölni, amely egy valószínűséggel az x pontból indul.

Az előbb megfogalmazott feladat megoldásában fontos szerepet játszanak az úgynevezett excesszív függvények. A könyv első fejezetének ismertetésében bevezettük ezt a fogalmat egy speciális esetben. Most definiáljuk ezt általános Markov láncok esetében is.

Excesszív függvények definiciója. *Legyen $p(x, y)$, $x, y \in X$, egy az értékeit az X állapottéren felvevő Markov lánc átmenetvalószínűségfüggvénye. Definiáljuk azt az ezen $p(x, y)$ átmenetvalószínűségfüggvényhez tartozó P leképezést, amely egy az X téren definiált $f(x)$ függvénynek egy szintén az X téren értelmezett Pf függvényt feleltet meg a $Pf(x) = \sum\limits_{y \in X} p(x, y) f(y)$, $x \in X$, képlet segítségével. Egy az X téren definiált $f(x)$, $x \in X$, függvény excesszív (a $p(x, y)$ átmenetvalószínűségekre nézve), ha $f(x) \ge 0$, és $f(x) \ge Pf(x)$ minden $x \in X$ pontra.*

Mint később be fogjuk bizonyítani fogjuk, ha a nyereményfüggvény excesszív, akkor az optimális megállási szabály a $\tau(\omega) \equiv 0$ azonnali megállás, bármely x pontból indultunk ki. Ez heurisztikus szinten könnyen magyarázható. Ugyanis az $f(x) \ge Pf(x)$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy nem érdemes a lépéseket későbbre halasztani, az $f(x) \ge 0$ egyenlőtlenség pedig azt, hogy nem érdemes a soha meg nem állás stratégiáját választani. Annak érdekében, hogy jól tudjunk dolgozni érdemes megadni az excesszív függvények egy jó jellemzését.

Az első fejezet ismertetésében egy speciális Markov lánc esetében felírtuk az excesszív függvényeket $f(x) = G\varphi(x) + C$ alakban, ahol $G = \sum\limits_{n=0}^{\infty} P^n \varphi$, $\varphi(x) = f(x) - Pf(x) \ge 0$ minden $x \in X$ pontban, és $C \ge 0$ alkalmas konstans. Az általános esetben az excesszív függvényeket kissé módosított formában fogjuk felírni. Ennek érdekében definiáljuk a G_a operátort minden $0 < a < 1$ számra és korlátos φ függvényre a

$$G_a\varphi(x) = \varphi(x) + aP\varphi(x) + a^2P^2\varphi(x) + \cdots \tag{3.5}$$

képlet segítségével, és vizsgálni fogjuk ennek viselkedését $a \to 1$ esetén. Ehhez hasonló módszert (egy $0 < a < 1$ paraméter bevezetését, majd az $a \to 1$ határátmenet alkalmazását) gyakran használják a Markov folyamatok elméletében.

Adva egy korlátos $f(x)$ függvény és egy $0 < a < 1$ szám, definiáljuk a $\varphi_a(x) = f(x) - aPf(x)$ függvényt. Nem nehéz belátni, hogy $f(x) = G_a\varphi_a(x)$ minden $x \in X$ pontban. Ezen azonosság igazolásához az $a^nP^n\varphi(x) = a^nP^nf(x) - a^{n+1}P^{n+1}f(x)$ azonosságot adjuk össze minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ számra. Ha a korlátos $f(x)$ függvény excesszív, akkor $\varphi_a(x) \geq 0$ minden $x \in X$ pontban. Ezen két reláció segítségével belátjuk a következő lemmát az excesszív függvények tulajdonságairól.

3.5. Lemma. *Legyen adva egy $X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots$ Markov lánc egy X téren valamely $p(x, y)$, $x, y \in X$, átmenetvalószínűségekkel és egy $f(x)$ korlátos, excesszív függvény ezen az X téren. Tegyük fel, hogy a Markov lánc az x pontból indul, azaz $P(X_0(\omega) = x) = 1$. Ekkor a Markov lánc tetszőleges τ megállási szabályára $f(x) \geq E_xf(X_{\tau(\omega)}(\omega))$, sőt ha τ_1 és τ_2 két olyan megállási szabály, amelyekre $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega)$ minden $\omega \in \Omega$ pontban, akkor $E_xf(X_{\tau_1(\omega)}(\omega)) \geq E_xf(X_{\tau_2(\omega)}(\omega))$.*

Véve az X halmaz egy tetszőleges $A \subset X$ részhalmazát és egy tetszőleges $x \in X$ pontból kiinduló $X_0(\omega), X_1(\omega), \ldots$ Markov láncot, definiálhatjuk azt a továbbiakban τ_A-val jelölt valószínűségi változót, amelynek értéke az a legkisebb (az ω ponttól függő) n nem-negatív egész szám, amelyre $X_n(\omega) \in A$. Ekkor $\tau_A(\omega)$ a Markov lánc megállási szabálya. Ha $f(x)$ korlátos, excesszív függvény, akkor $h_A(x) = E_xf(X_{\tau_A(\omega)}(\omega))$, $x \in X$, szintén korlátos, excesszív függvény.

A 3.5. lemma bizonyítása. A bizonyításban fel fogjuk használni, hogy a lemmában bevezetett P operátor teljesíti az $E_x\varphi(X_n(\omega)) = P_n\varphi(x)$ azonosságot minden $n = 0, 1, \ldots$ indexre és korlátos $\varphi(\cdot)$ függvényre. Ezért minden $0 < a < 1$ számra és korlátos és az X téren definiált korlátos $f(x)$ függvényre

$$f(x) = G_a\varphi_a(x) = \varphi_a(x) + aP\varphi_a(x) + a^2P^2\varphi_a(x) + \cdots = E_x\left(\sum_{n=0}^{\infty} a^n\varphi_a(X_n(\omega))\right),$$

ahol $\varphi_a(x) = f(x) - aPf(x)$. Némi számolással azt kapjuk, hogy minden τ megállási szabályra, $y \in X$ pontra, $0 < a < 1$ számra és $N = 0, 1, 2, \ldots$ indexre

$$E_x\left(a^{\tau(\omega)}f(X_{\tau(\omega)}(\omega))|\tau = N,\, X_N(\omega) = y\right) = \sum_{n=N}^{\infty} a^nE_y\varphi_a(X_n(\omega)).$$

Ezt az azonosságot összegezve először az $y \in X$ pontokra, majd az $N = 0, 1, 2, \ldots$ számokra azt kapjuk, hogy

$$E_xa^{\tau(\omega)}f(X_{\tau(\omega)}(\omega)) = E_x\left(\sum_{n=\tau(\omega)}^{\infty} a^n\varphi_a(X_n(\omega))\right)$$

minden τ megállási szabályra.

Ha az f függvény excesszív akkor $\varphi_a(x) \geq 0$ minden $0 < a < 1$ számra, és $x \in X$ pontra. Ezért a fenti relációkból következik, hogy $f(x) \geq E_x a^{\tau(\omega)} f(X_{\tau(\omega)})$, és $E_x a^{\tau_1(\omega)(\omega)} f(X_{\tau_1(\omega)}(\omega)) \geq E_x a^{\tau_2(\omega)} f(X_{\tau_2(\omega)})$, ha $\tau_1(\omega) \leq \tau_2(\omega)$ minden $0 < a < 1$ számra. Alkalmazva az $a \to 1$ határátmenetet megkapjuk a lemma első paragrafusának állításait.

Annak érdekében, hogy belássuk a lemma utolsó állítását is, definiáljuk azt a $\tau'_A(\omega)$ valószínűségi változót, amelynek értéke az a legkisebb $n \geq 1$ szám, amelyre $X_n(\omega) \in A$. Ez a $\tau'_A(\omega)$ valószínűségi változó szintén a Markov lánc megállási szabálya, és mivel $\tau'_A(\omega) \geq \tau_A(\omega)$ minden $\omega \in \Omega$ pontban ezért a lemma már bebizonyított része alapján egy korlátos, excesszív $f(\cdot)$ függvényre $E_x f(X_{\tau_A(\omega)}(\omega)) \geq E_x f(X_{\tau'_A(\omega)}(\omega))$. Másrészt $E_x f(X_{\tau_A(\omega)}(\omega)) = h_A(x)$, és

$$E_x f(X_{\tau'_A(\omega)}(\omega)) = \sum_{y \in A} p(x,y) E_y f(X_{\tau_A(\omega)}(\omega)) = \sum_{y \in X} p(x,y) h(y) = P h_A(x).$$

Ezért a fenti egyenlőtlenségből következik, hogy $h_A(x) \geq P h_A(x)$ minden $x \in X$ pontban. A $h_A(x) \geq 0$ egyenlőtlenség nyilvánvaló. Ezért $h_A(\cdot)$ excesszív függvény. A 3.5. lemmát beláttuk.

A következő lemma jellemzi egy adott Markov lánchoz és nyereményfüggvényhez tartozó optimális megállási stratégia nyereményének várható értékét.

3.6. Lemma. *Rögzítsük egy Markov lánc $p(x,y)$, $x, y \in X$, átmenetvalószínűségeit és egy $f(x)$, $x \in X$, korlátos nyereményfüggvényt ezen a téren. Vegyünk minden $x \in X$ pontra egy x pontból kiinduló, és $p(x,y)$ átmenetvalószínűségekkel rendelkező $X_0(\omega), X_1(\omega), \dots$, $P(X_0(\omega) = x) = 1$, Markov láncot, és tekintsük az $f(x)$ nyereményfüggvényhez tartozó nyeremény várható értékének a szuprémumát az összes lehetséges megállás esetén, azaz a $v(x) = \sup\limits_{\tau} E_x f(X_{\tau(\omega)}(\omega))$ függvényt, ahol a szuprémumot a Markov lánc összes lehetséges τ megállási szabályára vesszük. Az így definiált $v(x)$ függvény az $f(x)$ függvényt majorizáló minimális excesszív függvény, azaz $v(x) \geq f(x)$ minden $x \in X$ pontban, $v(x)$ excesszív függvény, és ha $h(x)$ olyan excesszív függvény, amelyre $h(x) \geq f(x)$ minden $x \in X$ pontban, akkor $h(x) \geq v(x)$ minden $x \in X$ pontban.*

Megjegyzés. Nem magától értetődő, hogy egy korlátos $f(x)$ függvényre létezik egy azt majorizáló minimális excesszív függvény. Az, hogy ilyen függvény létezik a lemma egyik következménye.

A 3.6. lemma bizonyítása. Az nyilvánvaló, hogy $v(x) \geq f(x)$, és $v(x) \geq 0$. (Ez utóbbi állítás azért igaz, mert ha azt a τ megállási szabályt alkalmazzuk, hogy sehol sem állunk meg, akkor nyereményünk értéke 0. Annak érdekében, hogy belássuk a $v(x) \geq Pv(x)$ egyenlőtlenséget definiáljunk minden $\varepsilon > 0$ számra és $y \in X$ pontra olyan egy y pontból kiinduló Markov láncra vonatkozó $\tau_y(\omega) = \tau_{y,\varepsilon}(\omega)$ megállási szabályt, amelyre $E_y f(X_{\tau_y(\omega)}(\omega)) > v(y) - \varepsilon$. Alkalmazzuk az x pontból kiinduló Markov láncra azt a τ

megállási szabályt, hogy teszünk egy lépést, és ha $X_1(\omega) = y$, akkor az $X_1(\omega), X_2(\omega), \dots$ sorozat értékeinek figyelembe vételével a τ_y megállási szabályt alkalmazzuk. Ekkor

$$E_x f(X(\tau(\omega)(\omega)) = \sum_{y\in X} p(x,y) E_y f(X_{\tau_y(\omega)}(\omega)) \ge \sum_{y\in X} p(x,y)[v(y)-\varepsilon] \ge Pv(x) - \varepsilon.$$

Innen következik, hogy $v(x) \ge Pv(x) - \varepsilon$, és mivel ez az állítás minden $\varepsilon > 0$ számra igaz, $v(x) \ge Pv(x)$.

Legyen $h(x)$ olyan excesszív függvény, amelyre $h(x) \ge f(x)$. Ekkor a 3.5. lemma alapján tetszőleges τ megállási szabályra $h(x) \ge E_x h(X_{\tau(\omega)}(\omega)) \ge E_x f(X_{\tau(\omega)}(\omega))$. Ezért $h(x) \ge \sup\limits_{\tau} E_x f(X_{\tau(\omega)}(\omega)) = v(x)$, ahol a szuprémumot az összes lehetséges τ megállási szabályra vettük. A 3.6 lemmát bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A 3.6. lemma alapján egy véges sok elemből álló X állapottér esetén a $v(x)$ nyereményfüggvény értékének meghatározása megfogalmazható, mint a következő lineáris programozási feladat. Oldjuk meg a $v(x)$, $x \in X$, változókra a következő lineáris programozási feladatot.

$$v(x) \ge f(x) \quad \text{minden } x \in X \text{ pontban.}$$
$$v(x) \ge 0 \quad \text{minden } x \in X \text{ pontban.}$$
$$v(x) \ge \sum_{y\in X} p(x,y)v(y) \quad \text{minden } x \in X \text{ pontban.}$$
$$\min \sum_{x\in X} v(x)$$

A következő eredményben megadunk egy optimális és egy ε-optimális megállási stratégiát.

3.7. Lemma. *Tekintsünk egy $X_0(\omega), X_1(\omega), \dots$ Markov láncot egy X állapottéren valamilyen $x \in X$, $P(X_0(\omega) = x) = 1$ kezdőponttal és egy korlátos $f(x)$, $x \in X$, nyereményfüggvénnyel. Célunk egy optimális $\tau(\omega)$ megállási szabályt találni, amely maximalizálja az $E_x f(X_{\tau(\omega)}(\omega))$ várható értéket. Ennek meghatározása érdekében definiáljuk a $v(x) = \sup\limits_{\tau} E_x f(X_{\tau(\omega)}(\omega))$ függvényt, ahol a szuprémumot a Markov lánc összes lehetséges τ megállási szabályára vesszük. Ha az X halmaz véges, akkor a következő stratégia optimális. Definiáljuk a következő $A \subset X$ halmazt. $A = \{u\colon f(u) = v(u)\}$. Legyen $\tau_A(\omega)$ az a legkisebb $n \ge 0$ index, amelyre $X_n(\omega) \in A$. Ez a $\tau_A(\omega)$ valószínűségi változó optimális megállási szabály, azaz $E_x f(X_{\tau_A(\omega)}(\omega)) = v(x)$.*

Ha az X állapottér megszámlálható, akkor nem feltétlenül van optimális megállási szabály, de az alábbi módon minden $\varepsilon > 0$ számra definiálni lehet egy ε-optimális megállási szabályt. Definiáljuk az $A_\varepsilon = \{u\colon u \in X,\ f(u) > v(u) - \varepsilon\}$ halmazt, és legyen $\tau_{A_\varepsilon}(\omega)$ az a legkisebb $n \ge 0$ index, amelyre $X_n(\omega) \in A_\varepsilon$. Ez a $\tau_{A_\varepsilon}(\omega)$ valószínűségi változó ε-optimális megállási szabály, azaz $E_x f(X_{\tau_{A_\varepsilon}(\omega)}(\omega)) \ge v(x) - \varepsilon$.

1. megjegyzés. A könyv példát mutat egy olyan Markov láncra és nyereményfüggvényre, amelyekre nincs optimális megállás. A példa a következő. Legyen az állapottér az $X = \{0, 1, 2, \dots\}$ halmaz, az átmenetvalószínűségek legyenek $p(0, 0) = 1$, $p(n, 0) = \frac{1}{n^2}$, $p(n, n+1) = 1 - \frac{1}{n^2}$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, és legyen a nyereményfüggvény $f(0) = 1$, és $f(n) = 1 - \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$. Ezzel a választással $v(u) \equiv 1$, $A = \{0\}$, ezért a $\tau_A(\omega)$ megállási szabály úgy adható meg, hogy a Markov láncot akkor állítjuk meg, amikor az eléri a 0 pontot. De, mint azt némi, a könyvben is elvégzett számolás mutatja, ha a Markov lánc egy távoli n pontból indul, akkor ezt a stratégiát választva a Markov láncot nagy valószínűséggel sehol sem állítjuk meg, és ekkor a nyereményünk 0. Általánosabban, nincs olyan megállási stratégia, amelynek alkalmazásával egy $n \neq 0$ pontból kiindulva elérhetnénk azt, hogy a nyereményünk várható értéke 1 legyen.

2. megjegyzés. Egyszerű és természetes magyarázata van annak, hogy miért érdemes egy Markov lánc optimális és majdnem optimális megállási szabályát a 3.7. lemmában megadott módon keresni. A Markov tulajdonság alapján természetes azt várni, hogy csak az $x \in X$ pont értékétől függ, hogy ebben az x pontban érdemes-e megállni. Tehát nincs jelentősége annak, hogy milyen útvonalon és hanyadik lépésben jutottunk oda. Akkor érdemes megállni, ha az optimális megállás $v(x)$ nyereménye egyenlő az azonnali megállás $f(x)$ nyereményével. Ellenkező esetben tovább megyünk egész addig, míg egy megállásra érdemes pontba, azaz egy olyan $x \in X$ pontba nem jutunk, amelyre $f(x) = v(x)$. Ha majdnem optimális stratégiát keresünk, akkor hasonlóan érvelhetünk. Csak ebben az esetben már akkor is érdemes megállni, ha $f(x) > v(x) - \varepsilon$.

A 3.7. lemma bizonyítása. Tekintsük először azt az esetet, amikor az X állapottér véges. Tekintsük a $h(x) = E_x f(X_{\tau_A(\omega)}(\omega))$ függvényt. A $\tau_A(\omega)$ valószínűségi változó definiciója miatt $h(x) = E_x v(X_{\tau_A(\omega)}(\omega))$, ezért a 3.5 és 3.6 lemma szerint $h(x)$ excesszív függvény. (A 3.6 lemmára azért hivatkoztunk, mert ez biztosítja azt, hogy $v(x)$ excesszív függvény.) Azt akarjuk belátni, hogy $h(x) \geq v(x)$ minden $x \in X$ pontban. Ehhez a 3.6 lemma szerint elegendő azt belátni, hogy $h(x) \geq f(x)$ minden $x \in X$ pontban.

Tegyük fel indirekt módon, hogy $\max\limits_{x \in X} [f(x) - h(x)] = c > 0$. Ekkor létezik olyan $a \in X$ pont, amelyre $f(a) - h(a) = c > 0$. Erre az a pontra és a 3.7. lemmában definiált A halmazra $a \notin A$, ugyanis minden $x \in A$ pontra $\tau_A(x) = 0$, ezért $f(x) = h(x)$. Másrészt $h_1(x) = h(x) + c$ olyan excesszív függvény, amelyre $h_1(x) \geq f(x)$ minden $x \in X$ pontban. Valóban, $h_1(\cdot)$ excesszív függvény, mert egy excesszív függvény plusz egy pozitív konstans, és $h_1(x) \geq h(x) + [f(x) - h(x)] = f(x)$ minden $x \in X$ pontban. Ebből következik, hogy $h_1(x) \geq v(x)$ minden $x \in X$ pontban, speciálisan $h_1(a) \geq v(a)$. De $h_1(a) = h(a) + [f(a) - h(a)] = f(a)$. Ezért $f(a) = h_1(a) \geq v(a)$, ahonnan $f(a) = v(a)$, és $a \in A$ a 3.7. lemmában definiált A halmazra. Így az a feltételezés, hogy létezik olyan $x \in X$ pont, amelyre $h(x) < f(x)$ ellentmondásra vezetett, ezért $f(x) \leq h(x)$ minden $x \in X$ pontban.

A lemma második felét, amikor az X állapottér tartalmazhat megszámlálhatóan végtelen sok pontot hasonlóan bizonyítjuk. Ebben az esetben a $h(x) = E_x v(X_{\tau_A(\omega)}(\omega))$ függvényt tekintjük (tehát a $v(\cdot)$ és nem az $f(\cdot)$ függvénnyel dolgozunk), és ez a függvény hasonlóan az előző részben tekintett esethez excesszív. Elegendő azt belátni, hogy

$h(x) \geq f(x)$ minden $x \in X$ pontban, mert innen következik, hogy $h(x) \geq v(x)$ minden $x \in X$ pontban, és a τ_{A_ε} valószínűségi változó definiciója szerint

$$E_x f(X_{\tau_{A_\varepsilon}(\omega)}(\omega)) \geq E_x[v(X_{\tau_{A_\varepsilon}(\omega)}(\omega)) - \varepsilon] = h(x) - \varepsilon \geq v(x) - \varepsilon$$

minden $x \in X$ pontban.

Tegyük fel indirekt módon, hogy $\sup\limits_{x \in X}[f(x) - h(x)] = c > 0$. Ekkor létezik olyan $a \in X$ pont, amelyre $f(a) - h(a) > 0$, és $f(a) - h(a) > c - \varepsilon$. Minden $x \in A_\varepsilon$ pontra $\tau_{A_\varepsilon}(\omega) \equiv 0$, ezért $h(x) = E_x v(\tau_{A_\varepsilon}(\omega)) = v(x) \geq f(x)$. Mivel $h(a) < f(a)$ innen következik, hogy $a \notin A_\varepsilon$. Másrészt $h(x) + c \geq f(x)$, és $h(x)$ excesszív függvény, ahonnan következik, hogy $h(x) + c \geq v(x)$. Ezért $f(a) > h(a) + c - \varepsilon \geq v(a) - \varepsilon$, tehát $a \in A_\varepsilon$. Feltételezésünk ellentmondáshoz vezetett, ezért $f(x) \leq h(x)$ minden $x \in X$ pontban. A 3.7. lemmát bebizonyítottuk.

A könyv két példát mutat a fenti eredmények alkalmazására. Az első példa a válogatós menyasszony problémája. A könyv azt tárgyalja, hogy hogyan lehet megtalálni az optimális stratégiát ebben a feladatban a korábbi eredmények segítségével.

A fejezet korábbi részében a szerzők megmutatták, hogy a feladat visszavezethető a következő problémára. Legyen adva egy $\eta_1, \eta_2, \dots$ Markov lánc az $X = \{1, 2, \dots, n\}$ állapottéren $p(k,l) = P(\eta_{j+1} = l | \eta_j = k) = \frac{k}{(l-1)l}$ átmenetvalószínűségekkel, ha $1 \leq k < l \leq n$, és $p(k,l) = 0$ átmenetvalószínűségekkel egyébként. Legyen adva e Markov lánc X állapotterén az $f(k) = \frac{k}{n}$, $1 \leq k \leq n$, nyereményfüggvény, és határozzuk meg az optimális megállási szabályt és a hozzátartozó nyereményfüggvényt.

E feladat megoldásához ki kell számolnunk az $f(k)$, $1 \leq k \leq n$, függvényt majorizáló legkisebb $v(k)$, $1 \leq k \leq n$, excesszív függvényt. Az, hogy $v(k)$, $1 \leq k \leq n$, az $f(k)$ függvényt majorizáló excesszív függvény azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} v(k) &\geq \frac{k}{n}, \quad 1 \leq k \leq n, \\ v(k) &\geq \sum_{l=k+1}^{n} \frac{k}{(l-1)l} v(l), \quad 1 \leq k \leq n-1. \end{aligned}$$

Nem nehéz belátni, hogy a kívánt tulajdonságú, minimális $v(\cdot)$ függvényt a

$$v(n) = 1, \quad v(k) = \max\left\{\frac{k}{n}, k \sum_{l=k+1}^{n} \frac{v(l)}{(l-1)l}\right\}, \quad 1 \leq k \leq n-1,$$

képlettel lehet megadni. Innen backward indukcióval következik, hogy $v(k) = \frac{k}{n}$, ha $k \geq k_n$, a (3.3) formulában definiált k_n számmal, és $v(k) = k \sum\limits_{l=k+1}^{n} \frac{v(l)}{(l-1)l}$, ha $k < k_n$. Innen a 3.4. lemma bizonyításának végén végzett számolás mutatja, hogy a $v(k)$ függvényt a $k < k_n$ számokra a (3.4) képlettel lehet megadni. Végül tudjuk, hogy az optimális stratégiát úgy adhatjuk, meg, hogy az első olyan k szám megjelenésénél kell megállni, amelyre $v(k) = f(k)$. Ez jelen esetben azt jelenti, hogy akkor állunk meg, ha a Markov lánc meglátogatta a $\{k_n, k_n + 1, \dots, n\}$ halmazt.

A másik itt tárgyalt probléma a következő. Tekintsük az $X = \{0, 1, \dots, n\}$ halmazt, és rajta egy bolyongást a határon elnyelő falakkal, azaz tekintsünk egy Markov láncot a következő átmenetvalószínűségekkel. Legyen $p(j, j-1) = p(j, j+1) = \frac{1}{2}$, ha $1 \le j \le n-1$, és $p(0,0) = 1$, $P(n,n) = 1$. Legyen adva egy $f(j)$, $1 \le j \le n-1$, nyereményfüggvény az X halmazon, és számítsuk ki az optimális megállási stratégiát ebben a modellben.

Ezt a feladatot a következő módon oldhatjuk meg a könyv eredményeinek ismeretében. Azt kell meghatározni, hogy melyek az e feladatban szereplő Markov lánc átmenetvalószínűségei szerint excesszív függvények. Egy $v(k)$, $0 \le k \le n$, függvény akkor és csak akkor excesszív ezen átmenetvalószínűségek szerint, ha $\frac{v(j-1)+v(j+1)}{2} \le v(j)$ minden $1 \le j \le n-1$ számra, és $v(j) \ge 0$, ha $0 \le j \le n$. Nem nehéz belátni, (és a könyvben ezt megteszik), hogy az e Markov lánchoz tartozó excesszív függvények megegyeznak a $\{0, 1, \dots, n\}$ halmazon definiált nem-negatív konkáv függvényekkel. Az eredeti feladatot úgy tudjuk megoldani, hogy megkeressük az $f(\cdot)$ függvény nem-negatív, konkáv burkolóját, azaz azt a legkisebb nem-negatív, konkáv $v(\cdot)$ függvényt, amely nagyobb vagy egyenlő minden pontban, mint a feladatban megadott $f(\cdot)$ függvény. Ezután meg kell határozni az $A = \{x\colon f(x) = v(x)\}$ halmazt, és az optimális stratégia az, hogy akkor állítjuk meg a Markov folyamatot, amikor az először meglátogatta ezt az A halmazt.

A korábban vizsgált problémákban olyan Markov láncokat tekintettünk, amelyekben az X állapottér véges vagy megszámlálhatóan végtelen számosságú, az idő pedig diszkrét, $t = 0, 1, 2, \dots$. Természetesen felmerül a kérdés, hogy mit lehet mondani az általános esetben, amikor egy értékeit egy általános X állapottérben felvevő Markov folyamatot tekintünk, és az idő folytonosan is változhat, azaz az időpontok minden $t \ge 0$ értéket is felvehetnek. Az az eset, amikor az idő diszkrét, de az X állapottér egy általános halmaz lehet, hasonlóan tárgyalható a korábban vizsgált problémákhoz. Ugyanez elmondható a folytonos idejű Markov folyamatok vizsgálatáról is, de ekkor sok új, nehéz és a Markov folyamatok általános elméletéhez tartozó probléma is megjelenik. Az alábbiakban egy speciális, időben folytonos Markov folyamatot vizsgálunk, de ez segít az általános esetben megjelenő problémák megértésében is. A következő feladatot tárgyaljuk.

Tekintsünk egy 0 és a pontokban elnyelő határfalakkal rendelkező, valamely x, $0 \le x \le a$, pontból kiinduló $W(t, \omega)$, $t \ge 0$, Wiener folyamatot, azaz egy olyan $W(t, \omega)$, $t \ge 0$, sztochasztikus folyamatot, amely úgy viselkedik, mint egy Wiener folyamat mindaddig, amíg el nem éri a 0 vagy a határpontot, utána pedig örökké ebben a pontban marad. Azaz, ha $W(T, \omega) = 0$ valamely $T \ge 0$ időpontban, akkor $W(t, \omega) = 0$ minden $t \ge T$ időpontban, és ha $W(T, \omega) = a$, akkor $W(t, \omega) = a$ minden $t \ge T$ időpontban. Legyen adva egy folytonos $f(u)$, $0 \le u \le a$, nyereményfüggvény a $[0, a]$ intervallumban, és határozzuk meg a most definiált elnyelő határfalakkal rendelkező Wiener folyamatnak azt a τ megállási szabályát, amelyre az $E_x f(W(\tau(\omega), \omega))$ várható érték a lehető legnagyobb.

Az alábbi feladat vizsgálatában kulcsszerepet játszik a következő eredmény.

3.8. Lemma. *Legyen $W(t,\omega)$, $t \ge 0$, egy valamely x, $0 \le x \le a$, pontból kiinduló Wiener folyamat 0 és a pontbeli elnyelő határfalakkal. Egy korlátos $g(u)$, $0 \le u \le a$, függvény akkor és csak akkor teljesíti minden $0 \le x \le a$ pontra és τ megállási szabályra a $g(x) \ge E_x g(W(\tau(\omega),\omega))$ egyenlőtlenséget, ha $g(\cdot)$ olyan konkáv függvény, amelyre $g(u) \ge 0$ minden $0 \le u \le a$ számra.*

Emlékeztetek arra, hogy $\tau(\omega) = \infty$ esetén definició szerint $g(W(\tau(\omega),\omega)) = 0$. A 3.8. lemma azt jelenti, hogy az e problémában vizsgált folytonos idejű Wiener folyamatban a nem-negatív, konkáv függvények játsszák az excesszív függvények szerepét. A 3.8. lemma e fejezet legnehezebben bizonyítható eredménye. A fejezet utolsó alfejezete, a 3.8 pont ezen eredmény bizonyításával foglalkozik. A fejezet ismertetésének a végén fogom ismertetni e bizonyítás vázát és legfontosabb gondolatait.

A Wiener folyamatokkal kapcsolatos eredmények bizonyításában fontos szerepet játszik az alábbi eredmény.

3.9. Lemma. *Tekintsünk egy valamely $[a,b]$ intervallum belsejében levő $x \in [a,b]$ pontból kiinduló Wiener folyamatot, és definiáljuk a $\tau_{a,b}$ megállási szabályt, amelyiknek értéke az a legkisebb $t \ge 0$ szám, amelyre $W(t) = a$ vagy $W(t) = b$. Ekkor*

$$P(W(\tau_{a,b}(\omega),\omega) = a) = \frac{b-x}{b-a}, \quad \textit{és} \quad P(W(\tau_{a,b}(\omega),\omega) = b) = \frac{x-a}{b-a}.$$

A 3.9. lemma bizonyítása. A lemma e könyvben ismertetett bizonyítása azon alapul, hogy a 2. fejezet eredményei alapján a $P(W(\tau_{a,b}(\omega)) = a)$ valószínűséget megkaphatjuk, mint annak az 1-dimenziós esetben vizsgált harmonikus (tehát lineáris) függvénynek az x helyen felvett értékét, amelyre $f(a) = 1$, és $f(b) = 0$. A másik valószínűséget hasonlóan számolhatjuk ki.

A következő eredményben megfogalmazzuk a Wiener folyamatok optimális megállításáról szóló kérdésre adott választ.

3.10. Lemma. *Tekintsünk egy a 0 és a pontban elnyelő határfalakkal rendelkező, valamely x, $0 \le x \le a$, pontból kiinduló $W(t,\omega)$, $t \ge 0$, Wiener folyamatot, és egy korlátos $f(u)$, $0 \le u \le a$, nyereményfüggvényt a $[0,a]$ intervallumban. Definiáljuk a $v(x) = \sup\limits_{\tau} E_x f(W(\tau(\omega),\omega))$ függvényt, ahol a szuprémumot ezen elnyelő határfalakkal rendelkező Wiener folyamat összes megállási szabályára vesszük. Ez a $v(x)$ függvény az $f(x)$ függvény nem-negatív konkáv burkolója, azaz $v(x)$, $0 \le x \le a$, olyan konkáv függvény, amelyre $v(x) \ge \max(0, f(x))$ minden $0 \le x \le a$ számra,és $v(x) \le g(x)$ minden $0 \le x \le a$ számra, ha $g(\cdot)$ olyan a $[0,a]$ intervallumban konkáv függvény, amelyre $g(x) \ge \max(0, f(x))$ minden $0 \le x \le a$ számra.*

Ha az $f(x)$ nyereményfüggvény nemcsak korlátos, hanem folytonos is, akkor az alább definiált $\bar\tau$ valószínűségi változó az elnyelő határfalakkal rendelkező Wiener folyamatra vett optimális megállási szabály az $f(\cdot)$ nyereményfüggvénnyel, azaz ez a $\bar\tau(\omega)$

valószínűségi változó megállási szabály, és $v(x) = E_x f(W(\bar\tau(\omega),\omega))$*. Definiáljuk a* $\Gamma \subset [0,a]$ *halmazt a* $\Gamma = \{x\colon\ x \in [0,a],\ f(x) = v(x)\}$ *képlet segítségével. A* Γ *halmaz zárt, és definiálhatjuk a* $\bar\tau(\omega) = \min\{t\colon\ W(t,\omega) \in \Gamma\}$ *valószínűségi változót. Ez a* $\bar\tau(\omega))$ *valószínűségi változó a keresett optimális megállási szabály, azaz* $v(x) = E_x f(W(\bar\tau(\omega),\omega))$*.*

Megjegyzés. A könyv egy (egyszerű) példát mutat arra, hogy ha az $f(x)$ nyereményfüggvény nem folytonos, akkor lehetséges, hogy a 3.10 lemmában definiált $\bar\tau$ valószínűségi változó nem optimális megállási szabály.

A 3.10 lemma bizonyítása. A bizonyítás sok hasonlóságot mutat a feladat diszkrét megfelelőjének a bizonyításával.

Először belátjuk a 3.9 lemma és a Wiener folyamat erős Markov tulajdonsága segítségével, hogy $v(x)$ konkáv függvény. Ennek érdekében, ha adva van egy x pontból kiinduló Wiener folyamat elnyelő falakkal a 0 és a pontban, akkor tekintünk tetszőleges olyan p és q pontokat, amelyekre $0 \le p \le x \le q \le a$, és definiálunk a p illetve q pontból kiinduló elnyelő falú határral rendelkező Wiener folyamatokhoz olyan τ_p és τ_q megállási szabályt, amelyekre $E_p f(W(\tau_p(\omega),\omega)) \ge v(p) - \varepsilon$, és $E_q f(W(\tau_q(\omega),\omega)) \ge v(q) - \varepsilon$ valamely előre rögzített kis $\varepsilon > 0$ számmal. Definiáljuk egy x pontból induló elnyelő falakkal rendelkező Wiener folyamatra a következő $\tau(\omega)$ megállási szabályt. Elindítjuk a Wiener folyamatot az x pontból, és megvárjuk, hogy az vagy a p vagy a q pontot elérje. Ha a p pontot éri el előbb, akkor a Wiener folyamat p pontból kiinduló darabjára a τ_p, ha a q pontot éri el előbb akkor a Wiener folyamat q pontból kiinduló darabjára τ_q megállási szabályt alkalmazzuk. Ekkor

$$\begin{aligned} v(x) &\ge E_x f(W(\tau(\omega),\omega)) = \frac{q-x}{q-p} E_p f(W(\tau_p(\omega)) + \frac{x-p}{q-p} E_q f(W(\tau_q(\omega)) \\ &\ge \frac{q-x}{q-p}[v(p)-\varepsilon] + \frac{x-p}{q-p}[v(q)-\varepsilon] = \frac{q-x}{q-p} v(p) + \frac{x-p}{q-p} v(q) - \varepsilon \end{aligned}$$

a (3.9) lemma és az erős Markov tulajdonság miatt. Mivel ez minden $\varepsilon > 0$ számra igaz, ezért $v(x) \ge \frac{q-x}{q-p} v(p) + \frac{x-p}{q-p} v(q)$. Ezért a $v(x)$, $0 \le x \le a$ függvény konkáv. Másrészt $v(x) \ge 0$, minden $0 \le x \le a$ számra, mert alkalmazhatjuk a soha meg nem állás $\tau(\omega) \equiv \infty$ stratégiáját.

Másrészt, ha $g(x)$ olyan konkáv függvény a $[0,a]$ intervallumban, amelyre $g(x) \ge \max(0, f(x))$ minden $0 \le x \le a$ számra, akkor a 3.8 lemma alapján

$$g(x) \ge E_x g((W(\tau(\omega),\omega)) \ge E_x f((W(\tau(\omega),\omega))$$

minden $0 \le x \le a$ pontra és τ megállási szabályra. Ezért

$$g(x) \ge \sup_\tau E_x f((W(\tau(\omega),\omega)) = v(x)$$

minden $0 \le x \le a$ számra, azaz $v(x)$ az $f(x)$ függvény nem-negatív konkáv burkolója.

A 3.10. lemma második felének bizonyítását annak igazolásával kezdjük, hogy $v(x)$ folytonos függvény. Mivel $v(x)$ konkáv, ezért ez a függvény folytonos a $(0,a)$ nyílt intervallum minden pontjában, de az intervallum végpontjaiban csak azt tudjuk eredetileg, hogy $\lim\limits_{x\to 0} v(x) \ge v(0)$, és $\lim\limits_{x\to a} v(x) \ge v(a)$. Ezért az kell belátni, hogy $\lim\limits_{x\to 0} v(x) \le v(0)$, és $\lim\limits_{x\to a} v(x) \le v(a)$. Tekintsük a megfelelő állítást a 0 pontban, és vezessük be a $c(u) = \max\limits_{0\le x\le u} f(x)$, $0 \le u \le a$ függvényt. A $c(u)$ függvény folytonos. Rögzítsünk egy $0 < u < a$ pontot, és tekintsük minden $0 \le x \le u$ pontra az x pontból kiinduló $W(t,\omega)$ Wiener folyamatot, és egy τ megállási szabályt erre a Wiener folyamatra. A 3.9 lemma alapján $P_x(W(\tau(\omega)) \ge u) \le \frac{x}{u}$, mert a $W(\tau(\omega)) \ge u$ esemény csak úgy következhet be, ha az x pontból kiinduló Wiener folyamat előbb éri el az u mint a 0 pontot. Másrészt $W(f(W(\tau(\omega),\omega)) \le c(u)$, ha $\tau(\omega) \le u$, és $W(f(W(\tau(\omega),\omega)) \le c(a)$ mindig. Ezért

$$E_x f(W(\tau(\omega),\omega)) \le \max[c(u),0] + \frac{x}{u}\max[c(a),0]$$

minden τ megállási szabályra. Ezért

$$v(x) \le \max[c(u),0] + \frac{x}{u}\max[c(a),0],$$

és $x \to 0$ határátmenettel

$$\lim_{x\to 0} v(x) \le \max[c(u),0]$$

minden $u > 0$ számra. Ezután véve az $u \to 0$ határátmenetet, és felhasználva a $\lim\limits_{u\to 0} c(u) = f(0)$ relációt azt kapjuk, hogy

$$\lim_{x\to 0} v(x) \le \max\left[\lim_{u\to 0} c(u), 0\right] = \max[f(0),0] \le v(0).$$

A $\lim\limits_{x\to a} v(x) \le v(a)$ relációt hasonlóan bizonyíthatjuk.

Mivel, mind $f(x)$ mind $v(x)$ folytonos függvény, ezért a $\Gamma = \{x\colon\ x \in [0,a],\ f(x) = v(x)\}$ halmaz zárt, és a $\bar\tau(\omega) = \min\{t\colon\ W(t,\omega) \in \Gamma\}$ valószínűségi változó jól van definiálva (jogunk volt mimimumot írni a definicióban), és megállási szabály. A bizonyítás következő lépésében azt mutatjuk meg, hogy $h(x) = E_x f(W(\bar\tau(\omega),\omega)) = E_x v(W(\bar\tau(\omega),\omega))$ nem-negatív, konkáv függvény. Az indoklásban a konkáv függvényeknek néhány szemléletesen nyilvánvaló és a könyv kiegészítésében bizonyított tulajdonságára hivatkozunk.

A $h(x)$ függvény megszorítása a Γ halmazra megegyezik a nem-negatív, konkáv $v(x)$ függvény értékével. A komplementer nyílt halmaz nyílt intervallumok uniója, és ezen intervallumok végpontjai a Γ halmaz pontjai, és lehet még végpont a 0 vagy az a pont, amelyek nem feltétlenül elemei a Γ halmaznak. Ha egy $x \notin \Gamma$ pontra p és q az x pontot tartalmazó nyílt intervallum végpontjai, $p < q$, akkor a 3.9. lemma alapján $h(x) = \frac{q-x}{q-p} v(p) + \frac{x-p}{q-p} v(q)$, azaz a $h(x)$ függvény a $[p,q]$ intervallumon megegyezik a p pontban $v(p)$ és q pontban $v(q)$ értéket felvevő lineáris függvénnyel. Ha az x pontot tartalmazó nyílt intervallum egyik végpontja a 0 vagy a pont, akkor a kép kissé módosul.

Ha például x a $[0,q]$ intervallumban van, $0 \neq \Gamma$ és $q \in \Gamma$, akkor $h(x) = \frac{x}{q}v(q)$ és $h(0) = 0$. (Lehetséges, hogy $v(0) > 0$ ebben az esetben.) A könyv kiegészítésének egyik eredménye alapján egy ilyen tulajdonságú $h(x)$ függvény konkáv, folytonos, és nem-negatív.

A bizonyítást befejezzük, ha megmutatjuk, hogy $h(x) = v(x)$. Ennek bizonyítása hasonló a 3.7. lemma első felének bizonyításához. Elég azt megmutatni, hogy $h(x) \geq f(x)$ minden $x \in [0,a]$ pontban, mert $h(x)$ nem-negatív, konkáv függvény, ezért a lemma már bebizonyított része alapján innen következik, hogy $h(x) \geq v(x)$ minden $x \in [0,a]$ pontban. Másrészt a $h(x)$ és $v(x)$ függvények definiciója alapján $h(x) \leq v(x)$.

Tegyük fel indirekt módon, hogy $c = \min_{u\in[0,a]}[f(u) - h(u)] > 0$. Ekkor létezik olyan $s \in [0,a]$ pont, melyre $f(s) - h(s) = c > 0$. Egyrészt $s \notin \Gamma$, mert egy $s \in \Gamma$ pontból kiinduló Wiener folyamat esetében $\bar{\tau}(\omega) \equiv 0$, és $f(s) - h(s) = 0$. Másrészt $h(x) + c$ nem-negatív, konkáv függvény, és $h(x) + c \geq f(x)$ minden $x \in [0,a]$ pontban. Ezért $h(x) + c \geq v(x)$ minden $x \in [a,b]$ pontban. Speciálisan $h(s) + c = f(s) \geq v(s)$, ahonnan $s \in \Gamma$, ami ellentmondás. A 3.10. lemma bizonyítását befejeztük.

Ismertetem a 3.8 lemma bizonyításának legfontosabb gondolatait. Ez hasonló elveken alapul, mint a 3.5. lemma bizonyítása. A 3.5. lemma úgy tekinthető, mint a 3.8. lemma diszkrét idejű megfelelője. Ennek bizonyításában bevezettünk egy P operátort, amely az állapottéren definiált korlátos függvények terét képezi önmagára, és ennek, illetve ezen operátor hatványainak a segítségével definiáltunk minden $0 < a < 1$ paraméterre egy ettől a paramétertől függő G_a operátort, (lásd a (3.5) formulát), amely a Markov folyamatok elméletében használt potenciál alkalmas módosítása. Ezen G_a operátorok segítségével az excesszív függvényeket olyan alakban tudtuk megadni, amely egyszerűvé tette a 3.5. lemma bizonyítását egy $a \to 1$ határátmenet alkalmazásával.

Megpróbáljuk ezt a módszert adaptálni folytonos idejű Markov folyamatok vizsgálatára. Ennek érdekében bevezetjük a P és G_α operátorok természetes megfelelőit folytonos idejű Markov folyamatokra, és bebizonyítjuk ezen operátorok legfontosabb tulajdonságait. Nem tudjuk közvetlenül adaptálni a diszkrét idejű Markov láncok vizsgálatában alkalmazott módszert, de egy hasonló, bár bonyolultabb eljárás segítségével célhoz érünk. Alább részletesebben ismertetem ezt a módszert.

A 3.8 lemma bizonyításának váza. Az, hogy a $g(x) \geq E_x g(W(\tau(\omega),\omega))$ egyenlőtlenségekből (minden $0 \leq x \leq a$ számra es τ megállási szabályra) következik, hogy $g(x)$ nem-negatív, konkáv függvény könnyen igazolható a 3.9. lemma segítségével. Elég minden $0 \leq x \leq a$ pontra és olyan $[p,q]$ intervallumra, amelyre $x \in [p,q] \subset [0,a]$ az x pontból kiinduló Wiener folyamatot és azt a megállási szabályt tekinteni, amely szerint akkor állunk meg, amikor először elértük a $[p,q]$ intervallum valamelyik végpontját. Ezután felírjuk a megfelelő egyenlőtlenséget erre a Wiener folyamatra és megállási szabályra és a $g(x)$ függvényre a 3.9. lemma segítségével. Ezenkívül tekintjük a $\tau(\omega) \equiv \infty$ megállási szabályt, annak érdekében, hogy lássuk, $g(x) \geq 0$.

A másik irányú állítás bizonyítása érdekében vezessük be először a P_t, $t \geq 0$, operátorokat a

$$P_t f(x) = E_x f(W(t,\omega)) = \int_0^a f(y)\mu_{x,t}(\,dy), \quad 0 \leq x \leq a,$$

képlet segítségével a $[0,a]$ intervallumon definiált korlátos függvények terén, ahol $\mu_{x,t}$ az x pontból kiinduló, a 0 és a pontban elnyelő határfalakkal rendelkező Wiener folyamat t időpontbeli értékének az eloszlása.

Nem nehéz belátni a P_t, $t \ge 0$, operátorok következő tulajdonságait. $P_s P_t = P_{s+t}$. A P_t operátorok pozitívak a következő értelemben. Ha $f(x) \ge 0$ minden x pontban, akkor $P_t f(x) \ge 0$ minden x pontban. Ezért, ha $f(x) \ge g(x)$ minden x pontban, akkor $P_t f(x) \ge P_t g(x)$ minden x pontban. Továbbá létezik a $P_\infty = \lim\limits_{t\to\infty} P_t$ operátor, azaz létezik a $\lim\limits_{t\to\infty} P_t f(x) = P_\infty f(x)$ határérték minden korlátos f függvényre és x pontra. Meg lehet adni a P_∞ operátort explicit módon a $P_\infty f(x) = \frac{a-x}{a} f(0) + \frac{x}{a} f(a)$ képlet segítégével. E reláció bizonyítása azon múlik, hogy egy x pontból kiinduló a 0 és a pontban elnyelő falú Wiener folyamatra $\lim\limits_{t\to\infty} P(W(t,\omega)=0) = \frac{a-x}{a}$ és $\lim\limits_{t\to\infty} P(W(t,\omega)=a) = \frac{x}{a}$.

A $[0,a]$ intervallumban lineáris függvények fixpontjai a P_∞ operátoroknak. Innen és a P_t operátorok monotonitásából (azaz a $P_t \ge P_s$, ha $t > s$ következik, hogy az $f(x) = ax+b$ függvényekre $P_t f(x) = f(x)$ minden x pontra. Továbbá e relációból, a P_t operátorok pozitívitásából, és a konkáv függvények alkalmas jellemzéséből következik az, hogy ha $f(x)$ korlátos konkáv függvény, akkor $P_t f(x) \le f(x)$ minden $t \ge 0$ és $0 \le x \le a$ számpárra. Ez a tulajdonság a konkavitás olyan következménye (valójában jellemzése) a Markov folyamatok nyelvén, amely fontos szerepet játszik a bizonyításban.

A bizonyítás következő lépésében bevezetjük a (3.5) képletben definiált P_a operátor folytonos változatát. Definiáljuk minden $0 \le \alpha < 1$ számra és a $[0,a]$ intervallumon definiált, nem-negatív, korlátos korlátos $g(x)$ függvényre a

$$G_\alpha g(x) = \int_0^\infty \alpha^t P_t g(x)\,dt = E_x \int_0^\infty \alpha^t g(W(t,\omega))\,dt$$

operátort. Emlékeztetek arra, hogy a 3.5. lemma bizonyításának fontos lépése volt az excesszív függvények következő jellemzése. Ha $f(x)$ excesszív függvény, akkor az felírható $f(x) = G_a g_a(x)$ alakban tetszőleges $0 \le a < 1$ számra a (3.5) képletben definiált G_a operátorral és alkalmas $g_a(x) \ge 0$ függvénnyel. A nem-negatív konvex függvények hasonló jellemzését szeretnénk megadni a most definiált G_α operátor segítségével.

Csak egy valamivel gyengébb állítást tudunk belátni, de az is elegendő lesz számunkra. Nem tudunk minden nem-negatív függvényt ilyen alakban felírni, de elő tudjuk őket állítani ilyen alakú függvények alkalmas tulajdonságokkal rendelkező limeszeként, és a kívánt állítást be tudjuk bizonyítani ennek az eredménynek a segítségével. Felhasználjuk, hogy a $[0,a]$ intervallumban nem-negatív, korlátos, konkáv $f(x)$ függvények olyan nem-negatív, korlátos $f(x)$ függvények, amelyek folytonosak a $(0,a)$ nyílt intervallumban, és teljesítik a $P_t f(x) \le f(x)$ tulajdonságot minden $x \in [0,a]$ és $t \ge 0$ számra.

Rögzítsünk egy $0 \le \alpha < 1$ számot. Belátjuk, hogy ha $f(x)$ olyan a $[0,a]$ intervallumon definiált nem-negatív, korlátos a $(0,a)$ nyílt intervallumban folytonos függvény, amelyre $P_t f(x) \le f(x)$, $t \ge 0$, $x \in [0,a]$, akkor felírható $f(x) = \lim\limits_{s\to 0} h_s(x)$ alakban, ahol a $h_s(x)$ függvények monoton csökkenő módon konvergálnak a $f(x)$ függvényhez minden

x pontban, és $h_s(x) = G_\alpha g_s(x)$ az előbb definiált G_α operátorral és alkalmas $g_s(x) \geq 0$ függvénnyel. Ismertetem, hogyan lehet az $f(x)$ függvény egy kívánt előállítását megtalálni, de a bizonyítás részleteit, (ami megtalálható a könyvben) elhagyom.

Legyen $h_s(x) = \frac{1}{s}\int_0^s \alpha^t P_t f(x)\,dt$. Akkor igazolható, hogy $f(x) = \lim\limits_{s\to 0} h_s(x)$, és az, hogy e formulában monoton konvergencia érvényes. A $h_s(x)$ függvények alkalmas reprezentációját a következő számolással kaphatjuk meg:

$$\begin{aligned} h_s(x) &= \frac{1}{s}\int_0^\infty \alpha^t P_t f(x)\,dt - \frac{1}{s}\int_s^\infty \alpha^t P_t f(x)\,dt = \int_0^\infty \frac{(\alpha^t P_t f(x) - \alpha^{t+s} P_{t+s} f(x))}{s}\,dt \\ &= \int_0^\infty \alpha^t P_t \left(\frac{f(x) - \alpha^s P_s f(x)}{s}\right) dt = G_\alpha g_s(x), \end{aligned}$$

ahol $g_s(x) = \frac{f(x) - P_s f(x)}{s}$. Mivel $f(x) \geq P_s f(x)$ ezért $g_s(x) \geq 0$, és megkaptuk az f függvény kívánt előállítását.

A bizonyítás következő lépésében belátjuk, felhasználva a $h_s(x) = G_\alpha g_s(x)$ és $g_s(x) \geq 0$ formulát, hogy $h_s(x) \geq E_x \alpha^{\tau(\omega)} h_s(W(\tau(\omega), \omega))$ tetszőleges τ megállási szabályra. E formula bizonyítása hasonló a 3.5 lemma bizonyításának megfelelő részéhez, bár technikailag nehezebb, mert általános mezőkön értelmezett feltételes várható értékekkel kell dolgoznunk. A bizonyítás azon alapul, hogy az erős Markov tulajdonság felhasználásával be tudjuk bizonyítani, hogy

$$E_x \alpha^{\tau(\omega)} h_s(W(\tau(\omega), \omega)) = E_x \int_{\tau(\omega)}^\infty \alpha^t g_s(W(t, \omega))\,dt,$$

míg $h_s(x) = G_\alpha g_s(x) = E_x \int_0^\infty \alpha^t g_s(W(t, \omega))\,dt$.

Ezután felhasználva a $\lim\limits_{s\to 0} h_s(x) = f(x)$ relációt be tudjuk bizonyítani az $f(x) \geq E_x \alpha^\tau f(W(\tau(\omega), \omega))$ egyenlőtlenséget tetszőleges $0 \leq \alpha < 1$ számra, majd $\alpha \to 1$ határátmenettel megkapjuk a 3.8. lemma bizonyítását.

Felmerülhet a kérdés, hogyan lehet a 3.8. lemma eredményét általános, folytonos idejű Markov folyamatokra általánosítani. E kérdés vizsgálatában érdemes bevezetni az excesszív függvény definicióját folytonos idejű Markov folyamatokra.

Excesszív függvény definiciója. *Legyen $X(t, \omega)$, $t \geq 0$ egy értékeit valamely $(X, \mathcal{X})$ téren felvevő Markov folyamat, és definiáljuk az X téren definiált korlátos, mérhető függvények terén a $P_t f(x) = E_x f(X(t, \omega))$ operátort minden $t \geq 0$ számra. Egy az X téren definiált korlátos, mérhető $f(x)$ függvény excesszív e Markov folyamatra nézve, ha*

$$f(x) \geq 0, \quad P_t f(x) \leq f(x), \quad \text{és } \lim_{t\to 0} P_t f(x) = f(x)$$

minden $x \in X$ pontra és $t \geq 0$ számra.

Az előző bizonyítás módszerével be lehet bizonyítani a 3.8 lemma megfelelőjét egy az erős Markov tulajdonsággal is rendelkező Markov folyamatra nézve excesszív függvényre. Azt, hogy ha $f(x)$ korlátos, excesszív függvény egy az erős Markov tulajdonsággal rendelkező $X(t, \omega)$, $t \geq 0$, Markov folyamatra nézve, akkor $E_x f(X(\tau(\omega), \omega)) \leq f(x)$ minden $x \in X$ pontra és a Markov folyamat minden τ megállási szabályára. Az elmélet fő nehézsége az excesszív függvények jellemzése.