Áttekintés

Dynkin, Evgenyij Boriszovics és Yushkevics, Alekszandr Adolfovics

Tételek és feladatok Markov folyamatokról

című könyvéről

Negyedik fejezet: Határfeltételek folytonos idejű Markov folyamatokra, különös tekintettel a születési és halálozási folyamatokra.

A könyv negyedik fejezete olyan folytonos idejű Markov folyamatok minél teljesebb leírását próbálja megadni, amelyek véges idő alatt elérhetik a fázistér egyik határpontját. Folytonos idejű Markov folyamatokat általában a Markov folyamat infinitezimális operátorának vagy annak egy ebben a könyvben karakterisztikus operátornak nevezett változatának a segítségével írnak le. A Markov folyamatok néhány mély tétele biztosítja, hogy ha a Markov folyamat nem kerül véges idő alatt az állapottér egy határpontjába, akkor ez az operátor, 'amely infinitezimálisan megadja a Markov folyamat végtelen kis idő alatt történő változását', egyértelműen meghatározza egy adott kezdeti állapotból indított Markov folyamat eloszlását. De problémát okoz az, ha a Markov folyamat véges idő alatt elérheti az állapottér egy határpontját, mert ekkor nem világos, hogy mi történik ezután. E fejezet fő témája annak tárgyalása, hogy hogyan lehet folytatni egy Markov folyamatot egy határpont elérése után úgy, hogy az továbbra is Markov folyamat maradjon.

E kérdés vizsgálata komoly problémát jelent a legegyszerűbb esetekben is, amikor az infinitezimális vagy karakterisztikus operátort egyszerűen definiáljuk, és a Markov folyamatot könnyen meg tudjuk konstruálni az infinitezimális vagy karakterisztikus operátor segítségével addig a véletlen időpontig, amikor a Markov folyamat eléri az állapottér egy határpontját. A fejezet első alfejezete ismerteti bizonyítás nélkül azt, hogy hogyan tudjuk megadni az összes olyan Markov folyamatot a $(-\infty, 0]$ félegyenesen, amely Wiener folyamatként viselkedik a $(-\infty, 0)$ nyílt félegyenesen, és ha eléri a 0 határpontot, akkor úgy viselkedik, hogy továbbra is Markov folyamat maradjon. A könyv röviden megemlíti e probléma egy természetes egyszerű általánosítását is, azt az esetet, amikor Wiener folyamat helyett úgynevezett diffuziós folyamatot tekintünk. Ezután rátér az ebben a fejezetben részletesen tárgyalt úgynevezett születési és halálozási folyamatok vizsgálatára. Ez az előbb említett Wiener illetve diffuziós folyamat egy technikailag egyszerűbben vizsgálható 'diszkrét állapottérrel rendelkező' változata, amelyben az állapottér a nem negatív számok halmaza. Ez a modell hasonlóan viselkedik a Wiener folyamatokhoz, ezért ennek tárgyalása segít az elérhető határpontokkal rendelkező tartományokon definiált Wiener folyamatok viselkedésének a jobb megértésében is. A fejezet vizsgálatának fontos része ennek a hasonló viselkedésnek a megmutatása.

Leírom röviden, informális módon azt, hogy hogyan lehet jellemezni azokat a Markov folyamatokat, amelyek Wiener folyamatként viselkednek a $(-\infty, 0)$ félegyenesen, a 0 pont pedig határpontjuk. Lehetséges, hogy a Wiener folyamat 0 pontja elnyelő fal, azaz ha a részecske eléri a 0 pontot, akkor örökre ottmarad. Elképzelhető, hogy a 0 pont eltüntető (extinction) fal, azaz a részecske a 0 pontot elérése után eltűnik. Ez azt jelenti, hogy a 0 pont elérése után a Markov folyamat megszűnik létezni. Lehet, hogy a 0 pont tükröző fal, azaz a Markov folyamat a 0 pont elérése után úgy viselkedik, mint egy

$-|W(t)|$ sztochasztikus folyamat, ahol $W(t)$ egy Wiener folyamat a $(-\infty, \infty)$ egyenesen. Lehetséges továbbá, hogy a Markov folyamat egy ideig vár, és ez a véletlen várakozási idő exponenciális valamilyen $a > 0$ paraméterrel, (az exponenciális várakozási idő szükséges a Markov tulajdonság megőrzéséhez), majd véletlenszerűen a $(-\infty, 0)$ félegyenes valamely pontjába ugrik, ahonnan egy Wiener folyamatként folytatja a pályáját. Ebben az esetben egy technikai feltételt is teszünk az ugrás nagyságáról, ami azért szükséges, hogy kizárjuk a túlságosan szabálytalan Markov folyamatokat, amelyeknek a trajektóriái csúnyán viselkednek. Azt követeljük meg, hogy a Markov folyamat trajektóriái jobbról folytonos (continue à droite) függvények legyenek.

Ha a vizsgált Markov folyamat eléri a 0 pontot, akkor választhatjuk bizonyos valószínűséggel ezen lehetséges folytatások valamelyikét, és kissé pontatlanul fogalmazva azt mondhatjuk, hogy ezzel leírtuk az összes lehetőséget. Valójában a helyzet kissé bonyolultabb, mert a véletlen várakozási idő után bekövetkező véletlen ugrás lehetséges megvalósulása összetettebb jelenség. Ha a Markov folyamat egy t_0 időpontban meglátogatja a 0 pontot, akkor előfordulhat az is, hogy a 0 pont ezt követő látogatási időpontjai torlódnak ehhez a t_0 időponthoz, és e látogatások között a Markov folyamat kis ugrásokat végez. Az összes lehetőséget úgy tudjuk pontosan leírni, hogy megadjuk a Markov folyamat $\mathcal{U}$ karakterisztikus operátorának a hatását a $(-(\infty, 0]$ félegyenes minden pontjában, tehát az $x = 0$ pontban is. Emlékeztetek a karakterisztikus operátor definiciójára. Egy Markov folyamat állapotterén definiált függvények alkalmas osztályán definiált $\mathcal{U}$ karakterisztikus operátor a következő:

$$\mathcal{U}f(x) = \lim_{U \downarrow x} \frac{E_x f(x(\tau)) - f(x)}{E_x \tau} \tag{4.1}$$

ahol $U \downarrow x$ azt jelenti hogy nyílt halmazoknak az x pontra szűkülő sorozatát tekintjük, E_x az x pontból kiinduló Markov folyamatra vett várható érték, és τ az első időpont, amikor az x pontból kiinduló $x(t)$, $t \ge 0$, Markov folyamat kilép az U halmazból.

A keresett Markov folyamat karakterisztikus operátorára $\mathcal{U}f(x) = \frac{1}{2}\Delta f(x)$, ha $x < 0$. Definiálni kell még a $\mathcal{U}f(0)$ mennyiséget. Erre a következő formula érvényes.

$$\beta\mathcal{U}f(0) + \alpha f'(0) + \gamma f(0) + \int_{-\infty}^{0} [f(0) - f(y)]\pi(\,dy) = 0, \tag{4.2}$$

ahol α, β és γ nem negatív konstansok, π olyan mérték a $(-\infty, 0)$ félegyenesen, amelyre

$$\pi((-\infty, -1)) - \int_{-1}^{0} y\pi(\,dy) < \infty.$$

Az α, β, γ és $\delta = \pi(-\infty, 0)$ számok nem lehetnek egyszerre nullák.

Mint a könyv egy heurisztikus indoklásban megindokolja, ha $\alpha = \gamma = \delta = 0$, és $\beta \neq 0$, akkor ez a formula azt jelenti, hogy a 0 pont elnyelő fal, ha $\alpha \neq 0$, $\beta = \gamma = \delta = 0$, akkor a 0 pont tükröző fal, ha $\gamma \neq 0$, $\alpha = \beta = \delta = 0$, akkor a 0 pont eltüntető (extinction) fal, ha $\alpha = \beta = \gamma$, és $0 < \delta < \infty$, akkor egy véletlen ugrás történik π/δ

eloszlással. Hasonló, de bonyolultabb ugrás történik, ha $\alpha = \beta = \gamma = 0$, és $\delta = \infty$. Az általános esetben e hatások keveréke történik.

Ha Wiener folyamat helyett diffuziós folyamatot tekintünk a $(-\infty, 0)$ félegyenesen, aminek az infinitezimális operátora (a $\frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}$ operátor helyett)

$$L = a(x)\frac{d^2}{dx^2} + b(x)\frac{d}{dx},$$

akkor hasonló, de összetettebb jelenség lép fel. Speciálisan, ebben az esetben meg kell határozni azt is, hogy milyen $a(x)$ és $b(x)$ együtthatók esetén éri el a diffuziós folyamat véges idő alatt a 0 pontot.

A fejezet további részében a szerzők bevezetik a születési és halálozási folyamatokat, amelyek a diffuziós folyamatok diszkretizált változatának tekinthetők. Ezek a folyamatok a diffuziós folyamatokhoz hasonló viselkedést mutatnak, ezért segítenek megérteni azok viselkedését. Másrészt a születési és halálozási folyamatok tárgyalása egyszerűbb.

Ismertetem a születési és halálozási folyamat definicióját.

A születési és halálozási folyamat definiciója. *Legyen adva egy $p_0, p_1, \dots$ számsorozat, amelynek tagjaira $p_0 = 1$, $0 < p_n < 1$ minden $n = 1, 2, \dots$ számra, és legyen $q_n = 1 - p_n$ minden $n = 0, 1, 2, \dots$ számra. Legyen továbbá adva egy $a_0, a_1, \dots, a_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$ számsorozat. E számsorozatok segítségével a következőképpen definiáljuk az általuk meghatározott születési és halálozási folyamatot.*

Az $X(t)$ születési és halálozási folyamat olyan folytonos idejű Markov folyamat valamely $0 \le t < T(\omega)$ véletlen időintervallumban, $0 < T(\omega) \le \infty$, amely értékeit a nem negatív egész számok halmazán veszi fel, és a kővetkezőképp viselkedik. A Markov folyamat valamely k_0, $0 \le k_0 < \infty$, állapotból indul a $t = 0$ időpontban, azután átugrik egy k_1, $0 \le k_1 < \infty$ állapotba valamely véletlen idő múlva, és így tovább; ha eljutott valamely k állapotba, akkor véletlen ideig ott marad, majd átugrik egy új állapotba. Ezen véletlen ugrások helyét és időpontját a Markov folyamat a_n és p_n paraméterei a következőképp határozzák meg.

Ha a Markov folyamat valamely t időpontban jutott a k állapotba, és $k \ge 1$, akkor az véletlen a_k paraméterű exponenciális eloszlású időtartamig a k állapotban marad, (ez a véletlen időtartam független a Markov folyamat korábbi viselkedésétől), és utána p_k valószínűséggel a $k+1$, $q_k = 1 - p_k$ valószínűséggel a $k-1$ állapotba lép. Ha a Markov folyamat valamely t időpontban a 0 állapotba jutott, akkor véletlen a_0 paraméterű exponenciális eloszlású időtartamig a 0 állapotban marad, (ez az időtartam szintén független a Markov folyamat korábbi viselkedésétől), és utána $p_0 = 1$ valószínűséggel az 1 állapotba kerül.

Jelölje $T_n = T_n(\omega)$ az n-ik ugrás időpontját az $X(t)$ folyamat értékében, és legyen

$$T = T(\omega) = \lim_{n \to \infty} T_n(\omega). \tag{4.3}$$

Az $X(t)$ folyamatot a $[0, T(\omega))$ intervallumban definiáljuk az előbb definiált $T(\omega)$ valószínűségi változóval.

Szemléletesen az előbb ismertetett Markov folyamat a következőt jelenti. Van egy populáció, amelyiknek létszáma időnként megváltozik, mert vagy meghal valaki vagy új egyed születik. E populáció létszámának időbeli változása Markov folyamatot alkot, és ennek a Markov folyamatnak a viselkedését vizsgáljuk. Ha a populáció létszáma egy adott időpontban n, akkor exponenciális ideig (a_n paraméterrel) kell várni, míg a pouláció létszáma megváltozik. Ekkor p_n valószínűséggel új egyed születik, és q_n valószínűséggel meghal valaki. Ha $n = 0$ akkor a helyzet kissé módosul, mert ekkor csak új egyed születhet. Előfordulhat, hogy a populáció létszáma véges idő alatt végtelenre növekszik. Az első kérdés az, hogy ez a Markov folyamat milyen p_n és a_n, $n = 0, 1, \dots$, paraméterei esetén következik be. Ha ez bekövetkezik akkor az egyik lehetőség az, hogy a Markov folyamatot ebben az időpontban megállítjuk. Ezért volt természetes a Markov folyamatot csak egy véletlen időpontig tekinteni. A születési és halálozási folyamat definiciójában szereplő $T(\omega)$ valószínűségi változó 1 valószínűséggel ezzel a véletlen időponttal egyenlő.

A második vizsgálandó kérdés az, hogy ha a Markov folyamat véges idő alatt végtelen nagyságúra növekszik (amit úgy is interpretálhatunk, hogy a Markov folyamat véges idő alatt eléri az állapottér ∞ határpontját), akkor hogyan folytathatjuk a Markov folyamatot (a ∞ ponttal kibővítve az állapotteret) úgy, hogy az így kapott sztochasztikus folyamat továbbra is Markov folyamat maradjon (ugyanazokkal az átmenetvalószínűségekkel, ha a kiinduló pont a $0, 1, \dots$ pontok valamelyike. A könyv e fejezetének fő témája ezen kérdések megválaszolása.

Megjegyzés: Annak érdekében, hogy valóban Markov folyamatot definiáljunk szükséges volt feltenni, hogy a várakozási idők egy születés vagy halálozás bekövetkeztéig exponenciális eloszlásúak. Feltettük, hogy $0 < p_n < 1$ minden $n \geq 1$ indexre szigorú egyenlőtlenséggel. Ennek a feltételezésnek technikai okai voltak.

Először azzal a kérdéssel foglalkozunk, hogy mikor éri el a Markov folyamat véges időn belül a ∞ határpontot. E kérdés megválaszolása érdekében első lépésben azt vizsgáljuk, hogy egy születési és halálozási folyamat mikor konvergál ∞-hez, ha a Markov folyamat lépéseinek száma tart a végtelenhez. E kérdés megválaszolásához érdemes tudni azt, hogy ha a Markov folyamatot elindítjuk egy $[a, b]$ intervallum belsejéből, akkor mi annak a valószínűsége, hogy a Markov folyamat kilép ebből az intervallumból, és a b jobboldali végpont irányában lép ki ezen intervallumból először.

Ha Wiener folyamatot tekintünk, akkor ismerjük az analóg kérdésre a választ. Ha adva van egy $[a, b]$ intervallum, és a Wiener folyamat egy x, $a < x < b$, pontból indul el, akkor annak valószínűsége, hogy a Wiener folyamat az a és b pontok közül először a b pontot éri el $\frac{x-a}{b-a}$, és annak a valószínűsége, hogy az a pontot éri el először $\frac{b-x}{b-a}$. Bevezetünk egy olyan úgynevezett kanonikus skálát egy születési és halálozási folyamat állapotterén, amelynek alkalmazása esetén ezen születési és halálozási folyamat kilépési valószínűségei egy adott intervallumból hasonló képleteket teljesítenek, mint a Wiener folyamat megfelelő valószínűségei. Pontosabban szólva a $\{0, 1, 2, \dots\}$ nem negatív egész számokból álló állapottéren definiált születési és halálozási folyamat helyett egy alkalmas $u_0, u_1, \dots$, $u_0 < u_1 < \dots$, pontokból álló állapotteren definiált szintén születési és halálozási folyamatnak nevezett Markov folyamatot tekintünk, amelyben egy lépésen belül az u_n állapotból vagy az u_{n+1} vagy az u_{n-1} állapotba juthatunk. Ezen állapotváltozás bekövetkezéséig exponenciális eloszlási várakozási idő telik el a_n paraméterrel, és p_n valószínűséggel jutunk az u_n pontból az u_{n+1} pontba, és q_n valószínűséggel az u_{n-1} pontba. E módosított és eredeti születési és halálozási folyamat között egyszerű kapcsolat van, és az u_n pontok (a kanonikus skála) választása esetén a minket érdeklő valószínűségek hasonlóan viselkednek, mint az analóg valószínűségek a Wiener folyamat esetében. A továbbiak ban a születési és halálozási folyamatokat úgy fogjuk tekinteni, hogy azok értékeiket a kanonikus skálán veszi fel, azaz lehetséges értékeik az $u_0, u_1, \dots$ számok a $0, 1, 2, \dots$ számok helyett.

Definiáljuk az u_n számokat a következő módon: Legyen $u_0 = 0$, $u_1 = 1$, és ezután definiáljuk rekurzív módon az u_n számokat a

$$q_n = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1} - u_{n-1}}, \quad p_n = \frac{u_n - u_{n-1}}{u_{n+1} - u_{n-1}}, \quad n \geq 1,$$

képletek segítségével. (Ez annak felel meg, hogy $[a, b] = [u_{n-1}, u_{n+1}]$, $x = u_n$ esetén a kilépési valószínűségekre olyan képleteket kapjunk, mint a Wiener folyamatok esetében.) Némi számolás azt adja, hogy ilyen választással

$$u_0 = 0, \ u_1 = 1, \ u_n = \delta_0 + \cdots \delta_{n-1} = 1 + \frac{q_1}{p_1} + \cdots + \frac{q_1 \cdots q_{n-1}}{p_1 \cdots p_{n-1}}, \quad n \geq 1, \tag{4.4}$$

ahol

$$\delta_k = \frac{q_1 \cdots q_k}{p_1 \cdots p_k}, \quad k \geq 1. \tag{4.5}$$

Legyen

$$r = \lim_{n\to\infty} u_n = 1 + \lim_{n\to\infty} \left(\frac{q_1}{p_1} + \cdots + \frac{q_1 \cdots q_{n-1}}{p_1 \cdots p_{n-1}} \right), \tag{4.6}$$

és nevezzük az $\mathcal{E} = \{u_0, u_1, \dots\}$ halmazt a Markov folyamat állapotterének, és az r pontot az állapottér határpontjának.

Tekintsünk egy $[a, b]$ intervallumot, és egy $a \leq u \leq b$ pontot, amelyekre $a = u_j$, $b = u_k$, $u = u_s$ valamely $u_j, u_k, u_s \in \mathcal{E}$ pontokkal. A következő tételben megadjuk annak valószínűségét, hogy az $u = u_s$ pontból kiinduló születési folyamat előbb éri el a b pontot, mint az a pontot, illetve annak valószínűségét, hogy az $a = u_0 = 0$ esetben valamikor eléri a b pontot. Ugyancsak megadjuk a megfelelő valószínűségeket akkor, ha $b = r$.

4.1. Tétel. *Legyen adva egy $X(t)$ születési és halálozási folyamat, a kanonikus skálázással. Tekintsünk egy $[a, b]$ intervallumot, és egy $a \leq u \leq b$ pontot, amelyekre $a = u_j$, $b = u_k$, $u = u_s$ valamely $u_j, u_k, u_s \in \mathcal{E}$ pontokkal. Jelölje $p(u; a, b)$ annak valószínűségét, hogy az $u = u_s$ pontból kiinduló születési folyamat előbb éri el a b pontot, mint az a pontot, és $q(u; a, b)$ annak valószínűségét, hogy előbb érje el az a pontot, mint a b pontot. Legyen $p(u; b)$ annak valószínűsége, hogy az u pontból kiinduló születési és halálozási folyamat valamikor eléri a b pontot, ahol $u = u_s$, $b = u_k$, $u_s, u_k \in \mathcal{E}$, és $u \leq b$. Ekkor a következő azonosságok érvényesek:*

$$p(u; a, b) = \frac{u - a}{b - a}, \quad q(u; a, b) = \frac{b - u}{b - a}, \quad p(u; b) = 1.$$

Ha $p(u;a,r)$ és $q(u;a,r)$ jelöli a $p(u;a,b)$ és $q(u;a,b)$ mennyiségeket abban az esetben, ha a $b=u_k$ paramétert a $b=r$ paraméterrel helyettesítjük, akkor az alábbi azonosságok érvényesek:

$$p(u;a,r)=\begin{cases}\dfrac{u-a}{r-a}, & \textit{ha } r<\infty\\ 0, & \textit{ha } r=\infty,\end{cases}$$

$$q(u;a,r)=\begin{cases}\dfrac{r-u}{r-a}, & \textit{ha } r<\infty\\ 1, & \textit{ha } r=\infty.\end{cases}$$

Röviden ismertetem 4.1. tétel bizonyításának a fő gondolatát. Ha $a=u_m$, és $b=u_n$, akkor minden $u=u_l$, $m<l<n$, számra felírhatjuk a

$$p(u_l)=q_l p(u_{l-1})+p_l p(u_{l+1})$$

azonosságot a $p(u_n)=1$, $p(u_m)=0$ határfeltételekkel, ahol $p(u)$, $u\in\mathcal{E}$, annak a valószínűségét jelöli, hogy az u pontból kiinduló születési és halálozási folyamat előbb éri el a b, mint az a pontot. Ennek az egyenletrendszernek a segítségével be lehet bizonyítani a $p(u;a,b)$ kifejezésre kapott formulát. A $q(u;a,b)$ kifejezésre adott formula hasonlóan bizonyítható. A $p(u;b)$ kifejezésre hasonló relációkat írhatunk fel $a=u_0=0$ választással. Az egyetlen különbség az, hogy a $p(a)=0$ határfeltétel eltűnik, helyette az $p(u_0)=p(u_1)$ azonosság jelenik meg. Innen kapjuk a kifejezést a $p(b;u)$ kifejezésre. A tétel többi állítását a tétel már bebizonyított részének a segítségével kapjuk $b\uparrow r$ határátmenet segítségével.

A 4.1. tétel eredménye lehetővé teszi annak megadását, hogy mikor rekurzív és mikor tranzitív az az $X_0,X_1,\dots$ Markov lánc, amelyet úgy kapunk, hogy feltüntetjük egy születési és halálozási folyamat állapotát az egymást követő ugrások után, de nem jegyezzük meg, hogy ezek az ugrások mely időponoktban következtek be. A következő eredményt kapjuk.

4.2. Tétel. *Tekintsünk egy születési és halálozási folyamatot a kanonikus skálázással, és definiáljuk azt az $X_0,X_1,\dots$ Markov láncot, amelyet úgy kapunk, hogy feltüntetjük e születési és halálozási folyamat állapotát az egymást követő ugrások után. Ha a születési és halálozási folyamat $\mathcal{E}$ állapotterének r határpontjára $r=\infty$, akkor egy valószínűséggel a Markov lánc a $\mathcal{E}$ állapottér minden pontját végtelen sokszor látogatja meg, ezért a Markov lánc nem konvergál az r ponthoz. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az r határpont a születési és halálozási folyamat taszító határpontja.*

Ha $r<\infty$, akkor egy valószínűséggel a Markov lánc a $\mathcal{E}$ állapottér minden pontját véges sokszor látogatja meg, ezért a Markov lánc konvergál az r ponthoz. Ilyenkor azt mondjuk, hogy az r határpont a születési és halálozási folyamat vonzó határpontja.

Meg kívánjuk határozni, hogy a születési és halálozási folyamat mikor éri el a fázistér r határpontját véges idő alatt. (Mint a későbbi eredményekből kiderül, ennek valószínűsége mindig vagy nulla vagy egy.) Ha $r = \infty$, és így az r pont a születési és halálozási folyamat taszító határpontja akkor ez nem történik meg. Ha $r < \infty$, azaz r a születési és halálozási folyamat vonzó határpontja akkor a kérdés megválaszolása további vizsgálatokat igényel. Ebben az esetben a válasz az egyes ugrások között eltelt időt meghatározó a_n paraméterektől is függ. Annak érdekében, hogy a kérdést megválaszoljuk, érdemes meghatározni annak az időnek a várható értékét, ami ahhoz szükséges, hogy egy valamilyen $u \in [a, b]$ pontból induló születési és halálozási folyamat kilépjen az $[a, b]$ intervallumból.

E várható érték kiszámolása esetében is érdemes megvizsgálni a Wiener folyamatokra megfogalmazható analóg problémát, és megkeresni a hasonlóságot a két feladat megoldása között.

Legyen adva egy $[a, b]$ intervallum, indítsunk el egy Wiener folyamatot az $[a, b]$ intervallum valamely u, $a \le u \le b$ pontjából, és számítsuk ki annak az időnek a várható értékét, ami ahhoz szükséges, hogy a Wiener folyamat elérje az $[a, b]$ intervallum valamelyik végpontját. Be lehet látni, hogy ez a várható érték $-(u - a)(u - b)$-vel egyenlő.

Ennek az eredménynek lehet a következő geometriai interpretációt adni: Tekintsük a $-x^2$ parabolát, és azt az egyenest, amelyik e parabola $(a, -a^2)$ és $(b, -b^2)$ pontjait köti össze. Ekkor a minket érdeklő valószínűség megegyezik az $x = u$ egyenesnek e parabola és egyenes közé eső szakaszának a hosszával. Azért érdemes ezt a geometriai képet megfogalmazni, mert a születési és halálozási folyamatra megfogalmazott analóg kérdésre hasonló, geometriailag megfogalmazható állítás érvényes, csak ott a parabola szerepét egy másik, a könyvben az $x(t)$ születési és halálozási folyamat karakterisztikájának nevezett $S(u)$ függvény veszi át. Definiáljuk ezt a függvényt.

Az $S(u)$ függvény megtalálása érdekében vezessük be az $m(u_n) = m(u_n; a, b)$ függvényt valamely $a = u_k$ és $b = u_l$ paraméterekre, amelyik egyenlő annak a $\tau(a, b)$ időnek a várható értékével, ami ahhoz kell hogy az u_n pontból kiinduló születési és halálozási folyamat elérje vagy az a vagy a b pontot.

A könyv belátja, hogy $m(u_n) < \infty$ minden $u_k \le u_n \le u_l$ számpárra. Nem nehéz belátni, hogy az $m(u_n)$ függvény teljesíti az

$$m(u_n) = \frac{1}{a_n} + q_n m(u_{n-1}) + p_n m(u_{n+1}) \tag{4.7}$$

egyenletet és az $m(a) = m(b) = 0$ határfeltételeket.

Ahhoz, hogy a (4.7) képletet felírhassuk, és számolni tudjunk vele meg kell mutatni, hogy $m(a, b) = E_{u_n}\tau(a, b) < \infty$. Ennek érdekében a szerzők bebizonyítják a következő, későbbi vizsgálatokban is használt eredményt.

4.3. Lemma. *Legyen adva egy Markov lánc valamely E állapottéren, és legyen $I \subset E$ ezen állapottér egy (véges vagy végtelen) részhalmaza. Jelölje τ az I halmazból való első kilépés időpontját. Ha léteznek olyan $t < \infty$ és $\alpha > 0$ számok, amelyekre*

$$P_u(\tau < t) \ge \alpha \quad \textit{minden } u \in I \textit{ pontban,}$$

akkor

$$P_u(\tau < \infty) = 1, \quad \textit{és} \quad E_u\tau < \infty$$

minden $u \in I$ pontban.

Az $S_n = S(u_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ sorozatot a (4.4) formulához hasonlóan definiáljuk azzal a különbséggel, hogy minden $u_n \in \mathcal{E}$ pontban definiáljuk, és az

$$S_0 = S(u_0) = 0$$

határfeltételt választjuk, és bevezetjük az $S_{-1} = 0$ mennyiséget is. Ekkor az

$$(S_{n+1} - S_n)p_n = (S_n - S_{n-1})q_n - \frac{1}{a_n}, \quad n \geq 1, \quad \text{és } S_1 = -\frac{1}{a_0},$$

azonosságot írhatjuk fel. Ezt az azonosságot érdemes átírni a (4.5) formulában definiált δ_k mennyiségek segítségével. Ekkor azt kapjuk, hogy

$$p_n = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-1} + \delta_n}, \quad q_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1} + \delta_n},$$

és

$$\frac{S_n - S_{n-1}}{\delta_n} = \frac{S_n - S_{n-1}}{\delta_{n-1}} - \frac{1}{a_n} \frac{\delta_{n-1} + \delta_n}{\delta_{n-1}\delta_n}. \tag{4.8}$$

Tekintsük a $v_n = -\frac{S_{n+1} - S_n}{\delta_n}$, $n = 1, 2, \dots$, és $v_0 = \frac{1}{a_n}$ sorozatot. Ekkor a (4.8) formula alapján

$$v_n = v_{n-1} + 2\mu_n \quad n \geq 1, \quad v_0 = 2\mu_0, \tag{4.9}$$

ahol

$$2\mu_n = \frac{1}{a_n} \frac{\delta_{n-1} + \delta_n}{\delta_{n-1}\delta_n}, \quad n \geq 1, \quad \text{és } 2\mu_0 = \frac{1}{a_n}. \tag{4.10}$$

Megjegyzem, hogy az S_n és v_n számokat ki lehet fejezni a születési és halálozási folyamat p_n, $q_n = 1 - p_n$ és a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ paraméterei segítségével a következő módon:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} \mu_k = \frac{1}{a_0} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k} \frac{p_1 \cdots p_{k-1}}{q_1 \cdots q_k}, \quad n \geq 0,$$

$$S_n = -\sum_{m=0}^{n-1} v_m \delta_m = -\sum_{0 \leq k \leq m \leq n-1} \frac{1}{a_k} \frac{q_{k+1} \cdots q_m}{p_k \cdots p_m}, \quad n \geq 1.$$

Definiáljuk az előbb bevezetett S_n és v_n sorozat segítségével a következő $S(u)$ és $v(u)$ függvényeket. Az $S(u)$ függvényt a $0 \leq t < r$ intervallumon definiáljuk, ahol az r számot a (4.6) formulában vezettük be, az $S(u) = \frac{u_{n+1} - u}{u_{n+1} - u_n} S_n + \frac{u - u_n}{u_{n+1} - u_n} S_{n+1}$, ha $u_n \leq u \leq u_{n+1}$, $n = 0, 1, \dots$ A képlet segïtségével. Azaz $S(u_n) = S_n$, és az $S(u)$ függvény lineáris az $[u_n, u_{n+1}]$ intervallumokban. A $v(u)$ függvényt a $\bigcup_{n=0}^{\infty} (u_n, u_{n+1})$ halmazon definiáljuk a $v(u) = v_n$ képlet segítségével az $u_n \leq u < u_{n+1}$ intervallumban.

Adva egy $z(u_n)$ sorozat, $A \le n \le B+1$, valamely $0 \le A \le B \le \infty$ számokkal az $\mathcal{E}$ halmaz egy részhalmazán, definiáljuk annak $D_u z(u)$ deriváltját a $\bigcup\limits_{n=A}^{B}(u_n, u_{n+1})$ halmazon a

$$D_u z(u) = \frac{z(u_{n+1}) - z(u_n)}{u_{n+1} - u_n}, \quad \text{ha } u_n < u < u_{n+1} \tag{4.11}$$

képlet segítségével. Ekkor a v_n sorozat definiciója miatt

$$D_u S(u) = -v(u), \tag{4.12}$$

ha $u \in (u_n, u_{n+1})$ minden (u_n, u_{n+1}) intervallumban. Nem nehéz belátni, hogy a $v(u)$ függvény szigorúan mononton növekvő, és az $S(u)$ függvény monoton csökkenő, konkáv függvény a $[0, r)$ intervallumban. Az $S(u)$ függvényt kiterjeszthetjük a zárt $[0, r]$ intervallumra is az $S(r) = \lim\limits_{u \to r} S(u)$ képlet segítségével. Ezt az $S(u)$ függvényt nevezzük az $x(t)$ születési és halálozási folyamat karakterisztikájának.

Jelölje $m(u; a, b)$ annak az időnek a várható értékét, ami ahhoz szükséges, hogy az u pontból kiinduló születési és halálozási folyamat elérje az a vagy b pont valamelyikét $m(u; b)$ annak az időnek a várható értékét, ami ahhoz szükséges, hogy az u pontból kiinduló születési és halálozási folyamat elérje a b pontot, ahol $a = u_k$, $b = u_l$, $u = u_s$, és $a \le u \le b$. Hasonlóan definiáljuk az $m(u; a, r)$, és $m(u; r)$ mennyiségeket, ha a $b = u_l$ számot a $b = r$ számmal helyettesítjük. Mind az S_n mind az $m(u_n; a, b)$ és $m(u_n; b)$ sorozatok teljesítik a (4.7) formulát. Két olyan sorozatnak az $m(u_n)$-nel jelölt különbsége, amely teljesíti a (4.7) formulát teljesíti az

$$m(u_n) = q_n m(u_{n-1}) + p_n m(u_{n+1})$$

azonosságot. Az ilyen relációt teljesítő sorozatok egyszerűen jellemezhetőek. Ezt a tényt felhasználva a könyv bebizonyítja, hogy az előbb definiált mennyiségek teljesítik az alábbi azonosságot.

4.4. Tétel. *Egy születési és halálozási folyamatra az előbb definiált $m(u; a, b)$, $m(u, b)$, $m(u; a, r)$ és $m(u; r)$ várható értékek teljesítik a következő azonosságokat.*

$$\begin{aligned}
m(u; a, b) &= S(u) - \frac{(b-u)S(a) + (u-a)S(b)}{b-a}, \\
m(u; b) &= S(u) - S(b), \\
m(u; a, r) &= S(u) - \frac{(r-u)S(a) + (u-a)S(r)}{r-a}, \quad \textit{ha } r < \infty, \\
m(u; r) &= S(u) - S(r), \quad \textit{ha } r < \infty.
\end{aligned}$$

Megjegyzés. Ki tudnánk számolni az $m(u; a, r)$ és $m(u; r)$ mennyiségeket az $r = \infty$ esetben is, de erre nincs szükségünk.

A 4.4. tétel azt mondja ki, hogy egy születési és halálozási folyamat esetén egy intervallum határának eléréséhez szükséges idő várható értékét egy hasonló geometriai képpel interpretálható képlet fejezi ki, mint a Wiener folyamat esetén, csak ebben az esetben a $-x^2$ függvény szerepét az $S(u)$ függvény veszi át, amelyet karakterisztikának nevezünk. A két eset közötti hasonlóságot még jobban ki tudjuk fejezni a következő fogalmak bevezetésének a segítségével.

Vezessük be a μ mértéket a számegyenesen, amely az $\mathcal{E} = \{u_0, u_1, \dots\}$ halmazra van koncentrálva, és $\mu(u_n) = \mu_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$ a (4.10) képletben definiált μ_n számokkal. Definiáljuk egy olyan a $\bigcup\limits_{n=0}^{\infty}(u_n, u_{n+1})$ halmazon definiált $z(u)$ függvény deriváltját a μ mérték szerint, amelyik minden (u_n, u_{n+1}) intervallumon konstans, a következő módon. A $D_\mu(z)$ derivált egy olyan a $\mathcal{E} = \{u_0, u_1, \dots\}$ halmazon definiált függvény, amelynek értékeit a

$$
\begin{aligned}
D_\mu z(u_n) &= \frac{z(u'') - z(u')}{\mu_n}, \quad u' \in (u_{n-1}, u_n), \;\; u'' \in (u_n, u_{n+1}), \; n \geq 1, \\
D_\mu z(u_0) &= \frac{z(u'')}{\mu_0}, \qquad\qquad\quad u'' \in (u_0, u_1)
\end{aligned}
\tag{4.13}
$$

képlet adja meg.

Ekkor a (4.9) formula felírható $D_\mu v = 2$ alakban, és a (4.12) formula szerint

$$D_\mu D_u S(u) = -2.$$

Tekintsük a 4.4. Tétel megfogalmazása előtt bevezetett $m(u; a, b)$, $m(u; b)$, $m(u; a, r)$ és $m(u; r)$ mennyiségeket, amelyeket bizonyos $u = u_s$, $u_s \in \mathcal{E}$ paraméterekre definiáltunk. Rögzített a, b vagy r paraméterre jelölje $m(u_n)$ az így definiált mennyiségeket (azon u_n paraméterekre, amelyekre ezeknek értelme van). Erre a sorozatra is teljesül a

$$D_\mu D_u m(u) = -2$$

azonosság.

Ez az azonosság érdekes hasonlóságot mutat a határ eléréséhez szükséges idő várható értékével a Wiener folyamat esetén. Jelölje ebben az esetben is $m(u)$ annak az időnek a várható értékét, ami ahhoz szükséges, hogy az u pontból kiinduló Wiener folyamat elérje az $[a, b]$ intervallum valamely határértékét. Ezt úgy is felírhatjuk, mint a $\frac{d^2}{du^2} m(u) = -2$, $m(a) = 0$, $m(b) = 0$ egyenlet megoldását. Ez hasonló a születési és halálozási folyamat viselkedéséhez, csak itt a $\frac{d^2}{du^2}$, (az egydimenziós Laplace) operátor játszik olyan szerepet, mint a $D_\mu D_u$ operátor a születési és halálozási folyamatok esetében. A Laplace operátor $\frac{1}{2}$-del szorozva, azaz a $\frac{\Delta}{2}$ operátor a karakterisztikus (vagy infinitezimális) operátor a Wiener folyamatok esetében. Mint a későbbi vizsgálatokból kiderül a az $\frac{1}{2} D_\mu D_u$ operátor a karakterisztikus operátor a születési és halálozási folyamatok esetében. A könyv azt is megmutatja, hogy a diffuziós folyamatok esetében is hasonló eredmények igazak.

A $D_\mu D_u$ operátort fel tudtuk írni az $S(u)$ függvény segítségével, amit a születési és halálozási folyamat karakterisztikájának nevezünk. Az $S(u)$ függvényt meghatározzák a p_n, a_n, $n = 0, 1, 2, \dots$ paraméterek, de ez az állítás megfordítható. Az $S(u)$ függvény meghatározza ezeket a paramétereket. Ezért egy születési és halálozási folyamatot meghatároz annak $S(u)$ karakterisztikája, és ez az ilyen folyamatok természetes megadási módja.

A már ismertetett eredmények segítenek azon kérdés megválaszolásában, hogy mikor éri el egy felújítási folyamat véges időn belül az állapottér r határpontját. A következő tétel jellemzi azt, hogy mikor teljesül 1 illetve 0 valószínűséggel a $T(\omega) = \infty$ esemény a (4.3) formulában definiált $T(\omega)$ valószínűségi változóra.

4.5. Tétel. *Tekintsünk egy születési és halálozási folyamatot valamely $S(u)$ karakterisztikával. Az, hogy $T(\omega) < \infty$ vagy $T(\omega) = \infty$ attól függ, hogy $S(r) < \infty$ vagy $S(r) = \infty$. Pontosabban,*

$$P_u(T(\omega) < \infty) \quad \text{és } E_u T(\omega) < \infty \quad \text{minden } u \in \mathcal{E} \text{ pontra,}$$

ha $S(r) > -\infty$, és

$$P_u(T(\omega) = \infty) \quad \text{minden } u \in \mathcal{E} \text{ pontra,}$$

ha $S(r) = -\infty$.

Egy születési és halálozási folyamat r határpontját elérhetőnek mondjuk, ha ezt a folyamatot bármely $u \in \mathcal{E}$ pontból indítva $P_u(T(\omega) < \infty) = 1$, és nem elérhetőnek, ha bármely $u \in \mathcal{E}$ pontra $P_u(T(\omega) = \infty) = 1$.

A következő tétel tekinthető a 4.5. tétel egy változatának.

4.5′. Tétel. *Tekintsünk egy $x(t)$ születési és halálozási folyamatot valamely $S(u)$ karakterisztikával. A következő lehetősegek vannak.*

(i) $r < \infty$, és $S(r) > -\infty$. Ekkor $P_u(T(\omega) < \infty) = 1$, és $\lim\limits_{t \uparrow T} x(t) = r$ egy valószínűséggel minden $u \in \mathcal{E}$ pontra. (Születési és halálozási folyamat, elérhető, vonzó $r < \infty$ határponttal.)

(ii) $r < \infty$, és $S(r) = -\infty$. Ekkor $P_u(T(\omega) = \infty) = 1$, és $\lim\limits_{t \uparrow T} x(t) = r$ egy valószínűséggel minden $u \in \mathcal{E}$ pontra. (Születési és halálozási folyamat, nem elérhető, vonzó $r < \infty$ határponttal.)

(iii) $r = \infty$, és $S(r) = \infty$. Ekkor $P_u(T(\omega) = \infty) = 1$, és $T \to \infty$ esetén a születési és halálozási folyamat minden állapotot végtelen sokszor meglátogat egy valószínűséggel minden $u \in \mathcal{E}$ pontra. (Születési és halálozási folyamat, nem elérhető, taszító $r = \infty$ határponttal.)

A további vizsgálatok fő kérdése az, hogy az (i) esetben, amikor $r < \infty$, és $S(r) > -\infty$, hogyan tudjuk a születési és halálozási folyamatot a $T(\omega)$ időpont után úgy folytatni, hogy az továbbra is Markov folyamat maradjon. Először ezt a kérdést pontosabban meg kell fogalmaznunk. A pontosabb megfogalmazásban definiáljuk a születési és halálozási folyamatok A osztályba tartozó folytatásait, és célunk az lesz, hogy jellemezzük az összes A osztályba tartozó sztochasztikus folyamatot.

Egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó folytatásai olyan Markov folyamatok, amelyek ennek a születési és halálozási folyamatnak folytatásai bizonyos $t > T$ időpontokra, és állapotterük az $\mathcal{E}$ halmaz kibővítése a születési és halálozási folyamat r határpontjával. Teljesítik nemcsak a Markov, hanem az erős Markov tulajdonságot is. A leglényegesebb új feltétel az, hogy egy A osztályba tartozó sztochasztikus folyamat trajekóriái minden pontjukban jobbról folytonos függvények. Ez azt jelenti, hogy az r határpont elérése után a trajektória nem viselkedhet nagyon szabálytalanul. Ez bizonyos, a többi feltételnek eleget tevő Markov folyamatokat kizár az A osztályba tartozó sztochasztikus folyamatok közül. Megadjuk az A osztályba tartozó sztochasztikus folyamatok pontos definicióját.

Születési és halálozási folyamatok A osztályba tartozó folytatásainak a definiciója. *Legyen adva egy $\bar{x}(t)$, $0 \le t < T$, születési és halálozási folyamat elérhetö és vonzó határponttal, amely értékeit a kanonikus skálán veszi fel. Azt mondjuk, hogy egy $x(t)$ sztochasztikus folyamat az $\bar{x}(t)$ születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó folytatása, ha teljesíti a következő feltételeket.*

(1) Az $x(t)$ sztochasztikus folyamat trajektóriái az $\bar{x}(t)$ folyamat $[0, T(\omega))$ intervallumban megadott trajektóriáinak a folytatásai valamely $[0, \zeta(\omega))$ intervallumba, $T(\omega) \le \zeta(\omega) \le \infty$. Az $x(t)$ folyamat trajektóriáinak adott időpontbeli értékei az $u_n \in \mathcal{E}$ számok valamelyike vagy az $\mathcal{E}$ halmaz állapottér r határpontja.

(2) Az $x(t)$ sztochasztikus folyamat trajektóriáinak P_u, $u \in \mathcal{E}$, eloszlása, (ha az $x(t)$ születési és halálozási folyamat az u pontból indul) egy bővebb halmazrendszeren definiált valószínűségi mérték, mint az u pontból kiinduló $\bar{x}(t)$ folyamat eloszlása. Azon események valószínűsége, amelyek a sztochasztikus folyamat $T(\omega)$ idejéig bekövetkezett eseményeitől függenek megegyezik a két esetben. Emellett elő van írva az $x(t)$ sztochasztikus folyamat P_r eloszlása abban az esetben is, ha az $x(t)$ sztochasztikus folyamat az r pontból indul.

(3) Az $x(t)$ sztochasztikus folyamat teljesíti az erős Markov tulajdonságot, azaz, tetszőleges $\tau(\omega)$ $\tau(\omega) < \zeta(\omega)$, megállási szabályra, az $y(t) = x(t+\tau)$ sztochasztikus folyamat feltételes eloszlása feltéve az $x(t)$ sztochasztikus folyamat τ időpontig történő viselkedése által generált σ-algebrát csak az $x(\tau(\omega)) = u \in \mathcal{E} \cup \{r\}$ számtól függ, és megegyezik a P_u valószínűségi mértékkel.

(4) Az $x(t)$ folyamat trajektóriái jobbról folytonosak, azaz $x(t+h, \omega) \to x(t, \omega)$ ha $h \downarrow 0$ minden ω elemi eseményre és $0 \le t < \zeta(\omega)$ számra. (Ez azt jelenti, hogy ha $x(t) = u$ és $u \ne r$, a kkor $x(\cdot)$ a t időpont után egy rövid ideig az u pontban marad, és ha $x(t) = r$, akkor kis idő alatt a trajektória csak kevéssé tud eltávolodni az r ponttól.)

(5) $x(T(\omega), \omega) = r$. (Ez a reláció akkor érvényes, ha $\zeta(\omega) > T(\omega)$, azaz $x(T(\omega))$ definiálva van.)

Célunk egy $\bar{x}(t)$ születési és halálozási folyamat összes A tulajdonságú folytatásának megtalálása. A Markov folyamatok általános elméletének eredményeiből következik, hogy e folyamatok jellemzéséhez elég megadni azoknak a (4.1) formulában definiált $\mathcal{U}$ karakterisztikus operátorát. A könyv ezt a karakterisztikus operátort megadja explicit alakban. Tegyünk először néhány megjegyzést a (4.1) képlet pontos értelmezéséről. Előfordulhat, hogy az $x(t)$ Markov folyamat soha nem lép ki az U tartományból. Ekkor definició szerint $\tau(\omega) = \zeta(\omega)$ a (4.1) képlet nevezőjében szereplő $E_x\tau$ definiciójában. A számlálóban szereplő $Ef(x(\tau))$ definiciójában viszont a $\tau = \zeta$ eseményt nem vesszük figyelembe. He $E_x(\tau) = \infty$ az x pont minden U környezetére, akkor $\mathcal{U}f(x) = 0$.

A $\mathcal{U}f(u)$ mennyiséget egyszerű kiszámolni egy születési és halálozási folyamatban, illetve annak A tulajdonságú kiterjesztésében minden $u \in \mathcal{E}$ pontban. Erről szól a következő eredmény.

4.6. Tétel. *Tekintsük egy születési és halálozási folyamatnak vagy annak A tulajdonságú folytatásának az $\mathcal{U}$ karakterisztikus operátorát. Ez teljesíti a*

$$\mathcal{U}f(u) = \frac{1}{2}D_\mu D_u f(u) \quad \textit{minden } u \in \mathcal{E} \textit{ pontban.}$$

relációt, ahol a D_u és D_μ operátorokat a (4.11) és (4.13) képletekben definiáltuk.

Bizonyítás. Számoljuk ki a $\mathcal{U}$ operátort egy $u \in \mathcal{E}$ pontban. Nem nehéz belátni, hogy ha az $u_n \in \mathcal{E}$ pont U környezete elég kicsi, akkor az csak az u_n pontot tartalmazza. Ezért

$$\mathcal{U}f(u_n) = \frac{q_n f(u_{n-1}) + p_n f(u_{n+1}) - f(u_n)}{\frac{1}{a_n}}.$$

Másrészt $q_n = \frac{\delta_n}{\delta_{n-1}+\delta_n}$ és $p_n = \frac{\delta_{n-1}}{\delta_{n-1}+\delta_n}$, ezért

$$\begin{aligned}\mathcal{U}f(u_n) &= \frac{\frac{f(u_{n+1})-f(u_n)}{\delta_n} - \frac{f(u_n)-f(u_{n-1})}{\delta_{n-1}}}{\frac{1}{a_n}\frac{\delta_{n-1}+\delta_n}{\delta_{n-1}\delta_n}} \\ &= \frac{D_u f(u'') - D_u f(u')}{\frac{1}{a_n}\frac{\delta_{n-1}+\delta_n}{\delta_{n-1}\delta_n}} = \frac{D_u f(u'') - D_u f(u')}{2\mu_n} = \frac{1}{2}D_\mu D_u f(u_n),\end{aligned}$$

ahol $u' \in (u_{n-1}, u_n)$, és $u'' \in (u_n, u_{n+1})$.

Az A tulajdonságú folytatások megtalálásának fő nehézsége a hozzájuk tartozó $\mathcal{U}f(r)$ mennyiség meghatározása. E feladat megoldásának érdekében tekintsük a következő problémákat.

Minden $y = u_n \in \mathcal{E}$ pontra definiáljuk az r pont U_y környezetét, mint az $U_y = \{u_{n+1}, u_{n+2}, \dots\} \cup \{r\}$ halmazt. Jelölje τ_y azt az első időpontot, amikor egy az r pontból kiinduló születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó folytatása az U_y halmazból kilép, azaz az első olyan időpontot, amikor ez a sztochasztikus folyamat vagy az u_0, u_1, $\dots$ u_n értékek valamelyikét veszi fel, vagy eltűnik. Az első feladat az $x(t)$ sztochasztikus folyamat eloszlásának megadása a $t = \tau_y$ időpontban. Mint látni fogjuk ez az eloszlás a születési és halálozási folyamat p_n és a_n paraméterein kívül e folyamat A osztályba tartozó folytatásainak további paramétereitől is függ. A következő feladat az, hogy amennyiben ezeket (és esetleg más paramétereket is) rögzítünk, akkor számoljuk ki az $E_r\tau_y$ várható értéket is. Ha e feladatokat megoldottuk, akkor ki tudjuk számolni az $\mathcal{U}f(r)$ mennyiséget, azaz a karakterisztikus operátor hatásának az értéket az r pontban is.

A fenti problémák megoldását érdemes a következő megjegyzéssel kezdeni. Abban az esetben, ha $x(t)$ egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó folytatása, és az r pont ennek elnyelő pontja, azaz ha az $x(t)$ folyamat az r pont meglátogatása után örökké ott marad, akkor $P_r(\tau_y = \infty) = 1$, és $E_r\tau_y = \infty$. Ellenkező esetben a következő eredmény érvényes.

4.7. Lemma. *Ha $x(t)$ egy születési és halálozási folyamat olyan A osztályba tartozó folytatása, amelynek az r pont nem elnyelő pontja, akkor*

$$P_r(\tau_y < \infty) = 1, \quad \textit{és} \quad E_r\tau_y < \infty$$

minden $y \in \mathcal{E}$ pontra.

Megjegyzem, hogy a 4.7. lemma igazolásában fontos szerepet játszik a 4.3. lemma alkalmazása.

Ezután a könyv tekinti egy születési és halálozási folyamat $x(t)$ A osztályba tartozó folytatását, és azt vizsgálja, hogy milyen lehet az $x(\tau_y)$ valószínűségi változó P_r mérték szerinti eloszlása, ahol τ_y az az első időpont, amikor az r pontból indított $x(t)$ Markov folyamat először kilép az U_y halmazból. Itt $y \in \mathcal{E}$ tetszőlegesen választott pont.

A könyv először megoldja ezt a feladatot egy természetes speciális esetben. Akkor, ha az $x(t)$ Markov folyamat az r határpontba érve úgy visekedik, hogy ot exponenciális eloszlású ideig vár, majd $\pi(u_k)$ valószínűséggel az u_k pontba ugrik, $u_k \in \mathcal{E}$, és $\sum\limits_{k=-1}^{\infty} \pi(u_k) = 1$. Itt a könyv a következő, a jelölést kissé leegyszerűsítő konvenciót vezeti be. Azt az eseményt, hogy a részecske eltűnik, úgy interpretálja, hogy a részecske az $u_{-1} = -1$ állapotba kerül, és onnan már többé nem lép ki. Ennek a valószínűségét $\pi(-1)$-nel jelöli. A szerzők megmutatják, hogy ebben az esetben a $\pi_y(u) = P_r(x(\tau_y) = u)$ valószínűségek, ahol $u = u_k$, $-1 \le k \le n$, ha $y = u_n$, a következőképp adhatóak meg.

$$\pi_y(u) = \frac{\pi(u)}{\sum\limits_{u \le y} \pi(u) + \alpha(y)}, \quad \text{ha } u < y, \tag{4.14}$$

és

$$\pi_y(y) = \frac{\pi(y) + \alpha(y)}{\sum\limits_{u \le y} \pi(u) + \alpha(y)}, \tag{4.15}$$

ahol

$$\alpha(y) = \frac{1}{r-y} \sum_{y<z<r} (r-z)\pi(z). \tag{4.16}$$

A most említett formula megadja a $\pi_y(u)$, $u \le y$, eloszlást egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartózó bővítéseinek egy nagy családjára, de nem írja le az összes lehetőséget. A tekintett példában ugyanis olyan modelleket tekintettünk, amelyekben az r határpont valamely t időpontbeli elérése után van egy következő időpont, amikor a folyamat az r pontból valamelyik u_n pontba ugrik. De nem minden modellben van ilyen tulajdonságú 'következő időpont'. Előfordulhat az is, hogy az r pontból történő ugrások időpontjai (jobbról) konvergálnak a t időponthoz. A következő tételben ismertetett eredményben megadjuk az összes lehetséges $\pi_y(\cdot)$ eloszlást egy születési és halálozási folyamat valamely A osztályba tartozó $x(t)$ folytatásának az esetében. Ezek az eloszlások a születési és halálozási folyamat paraméterein kívül függnek még egy $\pi = (\pi(u_{-1}), \pi(u_0), \pi(u_1), \dots)$ nem negatív számokból álló sorozattól, amit az ugrás mértékének és egy $\alpha \ge 0$ számtól, amit tükrözési együtthatónak neveznek. Ha a π vektort és α számot megszorozzuk ugyanazzal a pozitív számmal akkor azok ugyanazt a π_y eloszlást fogják definiálni, minden $y \in \mathcal{E}$ pontra, de ettől a pozitív együtthatóval való szorzástól eltekintve különböző (π, α) párok különböző eloszlásokat definiálnak. A $\sum\limits_n \pi(u_n)$ összeg lehet divergens. Érdemes megjegyezni, hogy a 4.7. lemma szerint $\pi_y(\cdot)$ egy valódi eloszlás a $\{u_{-1}, u_0, \dots, y\}$ halmazon minden $y \in \mathcal{E}$ pontra, ha r az $x(t)$ sztochasztikus folyamatnak nem elnyelő fala, míg az ellenkező esetben $\pi_y(u) = 0$ minden $u \in \{u_{-1}, u_0, \dots, y\}$ pontban. A pontos eredmény a következőt állítja.

4.8. Tétel. *Legyen adva egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó $x(t)$ folytatása. Akkor létezik egy olyan multiplikativ faktor erejéig egyértelműen meghatározott $\alpha \ge 0$ tükrözési együtthatónak nevezett konstans és $\pi = (\pi(u_{-1}), \pi(u_0), \pi(u_1), \dots)$ nem negatív számokból álló a*

$$\sum_u (r-u)\pi(u) < \infty \tag{4.17}$$

feltételt teljesítő, az ugrás mértékének nevezett sorozat, amelyek rendelkeznek a következő tulajdonságokkal.

(1) Az $x(t)$ folyamat által meghatározott α szám és π vektor elemei akkor és csak akkor egyenlőek mind nullával, ha r az $x(t)$ sztochasztikus folyamat elnyelő pontja.

(2) Ha az α szám és a π vektor elemei közül legalább egy nem egyenlő nullával, akkor minden $y \in \mathcal{E}$ pontra az $x(t)$ sztochasztikus folyamat által meghatározott π_y eloszlást a (4.14), (4.15) valamint az

$$\alpha(y) = \frac{1}{r-y}\left[\alpha + \sum_{y<z<r} (r-z)\pi(z)\right] \tag{4.18}$$

képletek határozzák meg ezzel az α számmal és π vektorral.

Csak röviden vázolom ezen eredmény bizonyításának fő gondolatait. Azt, hogy az először tekintett viszonylag egyszerű modellben a $\pi_y(u)$, $u \le y$, valószínűségeket a (4.14)—(4.16) képletek segítségével lehet megadni a 4.1. Tétel segítségével bizonyíthatjuk. Ez ugyanis lehetővé teszi ezen valószínűségek kiszámítását felhasználva azt, hogy tudjuk, hogy ha egy z, $x < z < r$, pontba kerülünk, akkor milyen valószínűséggel jutunk innen az x és r pontok közül először az x, illetve az r pontba. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\pi_y(u) &= \pi(u) + \sum_{y<z<r} \pi(z)\frac{z-y}{r-y}\pi_y(u), \quad \text{ha } u < y, \\
\pi_y(y) &= \pi(y) + \sum_{y<z<r} \pi(z)\left[\frac{z-y}{r-y}\pi_y(y) + \frac{r-z}{r-y}\right],
\end{aligned}$$

azaz

$$\begin{aligned}
\pi_y(u) &= \frac{\pi(u)}{1 - \frac{1}{r-y}\sum\limits_{y<z<r}(z-y)\pi(z)}, \quad \text{ha } u < y, \\
\pi_y(y) &= \frac{\pi(y) + \alpha(y)}{1 - \frac{1}{r-y}\sum\limits_{y<z<r}(z-y)\pi(z)},
\end{aligned}$$

Innen megkapjuk a (4.14) és (4.15) formulákat, ha felhasználjuk az

$$\begin{aligned}
1 - \frac{1}{r-y}\sum_{y<z<r}(z-y)\pi(z) &= \sum_{z<r}\pi(z) - \frac{1}{r-y}\sum_{y<z<r}(z-y)\pi(z) \\
&= \sum_{z\le y}\pi(z) + \frac{1}{r-y}\sum_{y<z<r}(r-z)\pi(z) = \sum_{z\le y}\pi(z) + \alpha(y)
\end{aligned}$$

azonosságot.

A 4.8. tétel bizonyítása nehezebb. E tétel bizonyításában a π ugrás mérték sorozatot, illetve az α tükrözési együtthatót is meg kell találni. Ebben az esetben a bizonyítás kiinduló lépése az, hogy az $y \in \mathcal{E}$ ponton kívül rögzítünk egy $x \in \mathcal{E}$, $x > y$, pontot is, és az előző esethez hasonlóan a $\pi_y(u)$, $u < y$, valószínűségeket kiszámoljuk a $\pi_x(u)$, $u < x$, valószínűségek segítségével. Ekkor a $\pi_y(u)$, $u \le y$, valószínűségeket a következő, a (4.14)—(4.16) formulákhoz nagyon hasonló képletek segítségével lehet kifejezni:

$$\begin{aligned}
\pi_y(u) &= \frac{\pi_x(u)}{\sum\limits_{u\le y}\pi_x(u) + \alpha_x(y)}, \quad \text{ha } u < y, \\
\pi_y(y) &= \frac{\pi_x(y) + \alpha_x(y)}{\sum\limits_{u\le y}\pi_x(u) + \alpha_x(y)},
\end{aligned}$$

ahol

$$\alpha_x(y) = \frac{1}{r-y}\sum_{y<z\le x}(r-z)\pi_x(z). \tag{4.19}$$

Ezután az $x \to r$ határátmenet segítségével be lehet látni a kívánt formulát.

A részletek kidolgozása során a bizonyítás egyik fontos lépése annak igazolása, hogy létezik egy olyan $\pi = (\pi(u_{-1}), \pi(u_0), \pi(u_1), \dots)$ nem negatív számokból álló sorozat, amelyre igaz, hogy tetszőleges $y \in \mathcal{E}$ pontra a $\{\pi_y(u)\colon\ u < y,\ u \in \mathcal{E} \cup \{u_{-1}\}\}$ vektor ennek a π vektor $\mathcal{E} \cup \{u_{-1}\}$ halmazra való megszorításának a konstansszorosa. Jelölje $\lambda(x)$ azt a számot, amellyel a $\pi_x(u)$, $u < x$, vektort beszorozva megkapjuk a π vektornak az u_{-1}, u_0, u_1, $\dots$ $u_n = x$ paraméterekhez tartozó koordinátáit. A $\pi_y(u)$, $u < y$, és $\pi_y(y)$-ra kapott kifejezésekbe behelyettesítve a $\pi_x(u) = \frac{\pi(u)}{\lambda(x)}$ azonosságokat azt kapjuk, hogy a (4.14) és (4.15) formulák érvényesek az

$$\alpha(y) = \alpha_x(y)\lambda(x), \quad (x > y), \tag{4.20}$$

konstanssal. Az utolsó formula azt is jelenti, hogy az ott felírt azonosság jobboldala nem függ az x paramétertől. Továbbá a (4.14) formula segítségévek kapjuk, hogy a $\lambda(y)$ számok, $y \in \mathcal{E}$, teljesítik a

$$\lambda(y) = \sum_{u \le y} \pi(y) + \alpha(y) \tag{4.21}$$

relációt.

Ilyen módon megtaláltuk azt az $\alpha(y)$ számot, amellyel érvényesek a (4.14) és (4.15) relációk, de még meg kell mutatnunk, hogy ez az $\alpha(y)$ szám kifejezhető a π vektor és az (eddig még nem definiált) α tüközési együttható segítségével a (4.18) formulában megadott módon. Ennek érdekében először megmutatjuk a (4.20), (4.19) és (4.14), (4.15), (4.21) azonosságok segítségével (az utolsó három azonosságot az x és nem az y paraméterre alkalmazva), hogy teljesül az

$$\alpha(y) = \frac{1}{r - y}\left[\alpha(x)(r - x) + \sum_{y < z \le x} \pi(z)(r - z)\right]$$

azonosság is. Speciálisan ezen azonosság jobboldala nem függ az x paramétertől. Alkalmazva ebben a képletben az $x \to r$ határátmenetet megkapjuk először a (4.17) egyenlőtlenséget, majd a (4.18) azonosságot $\alpha = \lim\limits_{x \to r} \alpha(x)(r - x)$ választással. Speciálisan ez a limesz létezik, és ez lehetővé teszi (a π vektor ismeretében) az α tükrözési együttható definicióját is.

A 4. fejezet 4.8. tételt bizonyító alfejezete tartalmaz néhány megjegyzést a tételben szereplő paraméterek jelentéséről. Ha $\alpha = 0$, és $\sum \pi(u) < \infty$, akkor feltehetjük azt is, hogy $\sum \pi(u) = 1$. Ez megegyezik az elsőként tárgyalt speciális esettel. Ha $\pi(u_n) = 0$ minden u_n indexre, és $\alpha > 0$, akkor $\pi_y(y) = 1$, és $\pi_y(u) = 0$ minden $u < y$ állapotra. Ekkor végtelen sok ugrás történik, mielőtt a részecske eléri az y pontot, de ezek az ugrások kicsik. A rendszer viselkedése ekkor hasonlít a Wiener folyamathoz, amely tükröződik a határpontban, ezért az itt megjelenő viselkedést tükrözésnek nevezzük.

Ha $\alpha = 0$, és $\sum \pi(u) = \infty$ akkor is végtelen sok ugrás következik be, mielőtt a részecske elér egy y pontot. Ez részben hasonlít a tükrözés esetéhez, de ilyenkor viszonylag nagy ugrások is történhetnek. Viszont annak érdekében, hogy a A osztályba tartozó folyamatok (4) tulajdonsága is teljesüljön az ugrások nagyságára bizonyos korlátot is fel kell tenni. Ilyen feltétel a (4.17) reláció. Az általános eset, amikor $\alpha > 0$ és $\pi > 0$ egyszerre lehetséges akkor a folyamat egy tükrözés és ugrás keveréke. Ezt a kérdést tárgyalja a fejezet után megadott Feladatok rész.

A következő vizsgált kérdés az, hogy egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó $x(t)$ folytatása esetén hogyan tudjuk kiszámolni az $E_r\tau_y$ várható értéket. Vegyük észre, hogy ha az r pont az $x(t)$ sztochasztikus folyamat elnyelő pontja akkor $E\tau_y = \infty$ minden $y \in \mathcal{E}$ pontra. Másrészt a 4.7. lemma alapján $E\tau_y < \infty$ minden $y \in \mathcal{E}$ pontra, ha az r pont nem elnyelő pontja az $x(t)$ sztochasztikus folyamatnak. Az alábbiakban ismertetem azt az eredményt, amely megadja az $x(t)$ folyamat által meghatározott τ_y valószínűségi változó $m(y) = E_r\tau_y$ várható értékét minden $y \in \mathcal{E}$ pontban. Ez a várható érték függ a kiinduló $\bar{x}(t)$ születési és halálozási folyamat p_n és a_n paramétereitől, az $x(t)$ folyamatot jellemző és a 4.8. tételben bevezetett $\alpha \geq 0$ tükrözési együtthatótól, a $\pi = (\pi(u_{-1}), \pi(u_0), \pi(u_1), \dots)$ nem negatív számokból álló és ugrás mértéknek nevezett sorozattól, valamint egy új abszorpciós együtthatónak nevezett $\beta \geq 0$ konstanstól. Ha az α, és β számokat és a π vektort beszorozzuk ugyanazzal a pozitív konstanssal, akkor azok ugyanazt az $m(y) = E_r\tau_y$ várható értéket határozzák meg.

4.9. Tétel. *Legyen adva egy $\bar{x}(t)$ születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó $x(t)$ folytatása, és tekintsük minden $y \in \mathcal{E}$ pontra a korábban definiált τ_y valószínűségi változót és annak $m(y) = E_r(\tau_y)$ várható értékét. Létezik egy olyan $\beta \geq 0$ konstans, amelyik nem egyenlő nullával akkor, ha $\alpha = 0$ és $\pi = 0$ a 4.8. tételben meghatározott α számmal és π vektorral, és amelyikkel érvényes az*

$$m(y) = E_r(\tau_y) = \frac{\beta + \alpha v(r) + \sum\limits_{y<z<r} \pi(z)[S(z) - S(r)] - \alpha(y)[S(y) - S(r)]}{\lambda(y)}, \tag{4.22}$$

azonosság minden $y \in \mathcal{E}$ pontban, ahol a (4.22) formulában szereplő kifejezések a következőképp vannak definiálva. $S(\cdot)$ az $\bar{x}(t)$ születési és halálozási folyamat karakterisztikájának nevezett függvény, $v(r) = \lim\limits_{u \to r} v(u)$ a $-S(t)$ függvény (monoton növekvő, nem negatív) a (4.11) és (4.12) formulákban definiált deriváltjának a limesze az r pontban, α a 4.8. tételben bevezetett tükrözési együttható, $\pi(z)$ a 4.8. tételben bevezetett π ugrás mértéknek nevezett sorozat megfelelő koordinátája, az $\alpha(y)$ és $\lambda(y)$ számok e mennyiségek segítségével a (4.18) és (4.21) formulákban vannak kifejezve. E képletben az $\alpha v(r)$ kifejezést az $\alpha = 0$, $v(r) = \infty$ esetben az

$$\alpha v(r) = 0, \quad \textit{ha} \quad \alpha = 0 \textit{ és } v(r) = 0$$

képlettel definiáljuk.

Az $x(t)$ folyamat vizsgálatában megjelent α, $v(r)$ számok, $S(t)$ karakterisztika és a π az ugrás mértéknek nevezett sorozat teljesítik az

$$\alpha v(r) < \infty \tag{4.23}$$

és
$$\sum_u \pi(u)[S(u)-S(r)]<\infty \tag{4.24}$$
egyenlőtlenségeket.

Ha $\alpha=0$ és $\pi=0$, azaz, ha r elnyelő pontja az $x(t)$ sztochasztikus folyamatnak akkor a (4.22) képletben meghatározott $m(y)$ mennyiségre $m(y)=\infty$. A többi esetben $m(y)<\infty$. Vegyük észre, hogy, ha az α és β számokat és v vektort megszorozzuk ugyanazzal a pozitív számmal, akkor a (4.22) formula jobboldalán szereplő kifejezés értéke nem változik. Ez azt jelenti, hogy az (α,β,π) vektor csak egy pozitív konstans szorzó erejéig van meghatározva.

A 4.9. tétel bizonyításának nem tárgyalom minden részletét, csak néhány megjegyzést teszek a bizonyítással kapcsolatban.

A 4.9. tétel bizonyításában hasonlóan a 4.8. tétel bizonyításához, veszünk két $x,y\in\mathcal{E}$, $y<x$ pontot, és először az $m(x)$ és $m(y)$ várható értéket hasonlítjuk össze, és megvizsgáljuk mit kapunk az $x\to r$ határátmenet végrehajtása esetén. Jelen esetben a kívánt formulák bizonyításának érdekében a 4.4. és 4.3. tételek eredményeit érdemes alkalmazni. A 4.4. tétel megadja azon idő $m(z;y,r)$ várható értékét, ami ahhoz szükséges, hogy a z pontból kiinduló születési és halálozási folyamat elérje az y és r pont valamelyikét, $(y<z<r)$. Részletesebben kifejtve, a 4.4. tétel 3. formulája alapján felírhatjuk, hogy

$$m(z;y,r)=S(z)-\frac{(r-z)S(y)+(z-y)S(r)}{r-y}=[S(z)-S(r)]-\frac{r-z}{r-y}[S(y)-S(r)],$$

és mivel egy z pontból kiindulva, $y<z<r$, az y és r pontok közül $\frac{r-z}{r-y}$ valószínűséggel először az y pontot és $\frac{z-y}{r-y}$ valószínűséggel először az r pontot érjük el, ezért

$$m(y)=m(x)+\sum_{y<z\le x}\pi_x(z)\left[m(z;y,r)+\frac{z-y}{r-y}m(y)\right].$$

Ezek a formulák, továbbá a korábban a $p_x(z)$ valószínűségekre kapott kifejezések lehetővé teszik, hogy egy alkalmas formulát írjunk fel az $m(x)$ és $m(y)$ várható értékek kapcsolatáról. Néhány korántsem triviális átalakítást végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\lambda(y)m(y)+\alpha(y)[S(y)-S(r)]\\ &\qquad=\lambda(x)m(x)+\alpha(x)[S(x)-S(r)]+\sum_{y<z\le x}\pi(z)[S(z)-S(r)].\end{aligned}$$

Azt kell tanulmányozni, mit kapunk ezen azonosság segítségével az $x\to r$ határátmenet végrehajtása esetén. Mivel az azonosság baloldala nem függ az x számtól, nem nehéz belátni ilyen módon a (4.24) egyenlőtlenséget. Másrészt vizsgálnunk kell az $\alpha(x)[S(x)-$

$S(r)]$ kifejezés limeszét $x \to r$ határátmenet esetén. Némi nem triviális számolás azt adja, felhasználva az $S(\cdot)$ függvény tulajdonságait, hogy

$$\lim_{x \uparrow r} \alpha(x)[S(x) - S(r)] = \alpha v(r).$$

Ennek segítségével be lehet látni a (4.22) formulát a

$$\beta = \lim_{x \uparrow r} \lambda(x) m(x) \tag{4.25}$$

választással. Speciálisan az is következik ebből a gondolatmenetből, hogy a β számot definiáló limesz valóban létezik. Végül a (4.23) formula következik a (4.22) formulából.

A szerzők ismertetnek egy olyan eredményt is, amely egyben megmagyarázza, hogy a (4.22) formulában szereplő β számot miért hívják abszorpciós együtthatónak. Azt vizsgálják, hogy az $x(t)$ sztochasztikus folyamat mennyi időt tölt az r határpontban azelőtt hogy az az r pontból először kilép egy U_y halmazból. Bebizonyítják a következő tételt.

4.10. Tétel. *A 4.9. tételben tekintett $x(t)$ sztochasztikus folyamat az ott használt jelölésekkel teljesíti minden $y \in \mathcal{E}$ pontban az*

$$E_r \xi_y = \frac{\beta}{\lambda(y)}$$

relációt, ahol ξ_y jelöli azt annak az időnek a (Lebesgue) mértékét, amelyet az r pontból kiinduló $x(t)$ folyamat az r határpontban töltött, mielőtt kilépett az U_y halmazból.

Ez azt jelenti, hogy az az idő, amit az r pontból kiinduló $x(t)$ folyamat az r pontban tölt, mielőtt először kilép az r pont egy U_y környezetéből arányos a β számmal.

Nem nehéz belátni a (4.18) és (4.21) képletek segítségével, hogy

$$\lim_{y \uparrow r} \lambda(y) = \begin{cases} \sum\limits_u \pi(u) & \text{ha } \alpha = 0 \\ \infty & \text{ha } \alpha > 0, \end{cases}$$

és ez a limesz véges, ha $\alpha = 0$ és $\sum\limits_u \pi(u) < \infty$, és végtelen, ha $\alpha > 0$ vagy $\sum\limits_u \pi(u) = \infty$. Az első esetben van egy véges időintervallum, ameddig az r pontban tartózkodó $x(t)$ folyamat az r pontban marad, míg a második esetben azon időpontok halmaza, amikor az $x(t)$ folyamat az r pontban tartózkodik nem tartalmaz intervallumot. Viszont be lehet látni, hogy ebben az esetben azon t időpontok halmaza, amelyet az r pontból kiinduló $x(t)$ folyamat az U_y ból való kilépés előtt az r pontban tölt a P_r mérték szerint egy valószínűséggel pozitív mértékű Cantor halmaz, és e halmaz mértéke arányos a β paraméterrel.

Láttuk, hogy egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó folytatásának teljesítenie kell a (4.17) és (4.23) egyenlőtlenséget. Be lehet viszont látni, felhasználva az $S(t)$ függvény tulajdonságait, hogy a (4.23) egyenlőtlenségből következik a (4.17) egyenlőtlenség. Bizonyos esetekben ez a két egyenlőtlenség ekvivalens. Az ilyen esetek megadásának érdekében bevezetjük a következő fogalmat. Egy születési és halálozási folyamat r határpontját belülről elérhetőnek nevezzük, ha $v(r) < \infty$. Ebben az esetben a (4.17) és (4.23) egyenlőtlenségek ekvivalensek. Ez az állítás viszont nem feltétlenül igaz akkor, ha az r pont nem belülről elérhető.

Az eddig tárgyalt eredmények lehetővé teszik hogy kiszámítsuk az $\mathcal{U}f(r)$ mennyiséget, azaz a karakterisztikus operátor értékét az r pontban. Az általános feladat az, hogy írjuk le a születési és halálozási folyamatok A osztályba tartozó folytatásának $\mathcal{U}$ karakterisztikus operátorait. Azt már láttuk, hogy egy ilyen sztochasztikus folyamatra $\mathcal{U}f(y) = \frac{1}{2}D_\mu D_u f(y)$, ha $y \in \mathcal{E}$, (megadtuk a D_μ és D_u operátorok pontos leírását), de hiányzik még a $\mathcal{U}f(r)$-nek a megadása. Ez a születési és halálozási folyamat $S(u)$ karakterisztikáján kívül függ egy α tükrözési, β abszorpciós együtthatótól és és egy $\pi = (\pi(u_{-1}), \pi(u_0), \pi(u_1), \dots)$ ugrás mértékének nevezett sorozattól. A továbbiakban bevezetjük a $\gamma = \pi(u_{-1}) = \pi(-1)$ jelölést, és a π vektor koordinátái közül elhagyjuk ezt az elemet. A $\gamma \geq 0$ számot eltűnési (extinction) együtthatónak fogjuk hívni. Megfogalmazom a $\mathcal{U}$ karakterisztikus operátort leíró tételt, aztán teszek néhány megjegyzést ezzel kapcsolatban, végül elmagyarázom a tétel bizonyításának fő lépéseit.

4.11. Tétel. *Egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó $x(t)$ folytatását a következőképp adhatjuk meg. Veszünk egy p_n, $n = 0, 1, \dots$, $p_0 = 1$, $0 < p_n < 1$, ha $n \geq 1$, a_n, $a_n > 0$, $n = 0, 1, 2, \dots$, sorozatot, tekintünk egy e paraméterek által meghatározott $\bar{x}(t)$ születési és halálozási folyamatot, definiáljuk e folyamat $S(u)$, $0 \leq u \leq r$, karakterisztikáját, annak $v(u)$ deriváltját és az általa meghatározott D_u és D_μ operátorokat a már leírt módon. E születési és halálozási folyamat egy $x(t)$ A osztályba tartozó folytatását olyan $\alpha \geq 0$ tükrözési, $\beta \geq 0$ abszorpciós, $\gamma \geq 0$ tükrözési együtthatók és $\pi = (\pi(u_0), \pi(u_1), \dots)$, $\pi(u_n) \geq 0$, $n = 0, 1, \dots$, ugrás mértékének nevezett sorozat segítségével adjuk meg. Ezek a mennyiségek teljesítik a (4.23), (4.24) és $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \sum\limits_u \pi(u)^2 > 0$ feltételeket. (A (4.23) feltétel értelmezésében az $\alpha v(r) = 0$, ha $\alpha = 0$ és $v(r) = \infty$ konvenciót alkalmazzuk.) Az $x(t)$ sztochasztikus folyamatot annak $\mathcal{U}$ karakterisztikus operátorának a segítségével adjuk meg, amelyet a következőképp definiálunk.*

$$\mathcal{U}f(u) = \frac{1}{2}D_\mu D_u f(u) \quad \textit{ha } u \in \mathcal{E},$$

és

$$\beta \mathcal{U}f(r) + \alpha f'(r) + \gamma f(r) + \sum_u \pi(u)[f(r) - f(u)] = 0 \tag{4.26}$$

egy olyan $f(u)$, $u \in \mathcal{E} \cup \{r\}$ sorozatra, amely tekinthető egy a $[0, r]$ intervallumon definiált, az r pontban differenciálható függvény megszorításának erre a halmazra. A (4.26) formula úgy értelmezhető, hogy egy $f(u)$, $u \in \mathcal{E} \cup \{r\}$, sorozatot azonosítunk egy ilyen a $[0, r]$ halmazon definiált $f(u)$ függvénnyel, és csak olyan sorozatokat tekintünk, amelyekre ez az $f(u)$ függvény az r pontban differenciálható. Az $x(t)$ folyamat jellemzésében szereplő α, β és γ konstansok, illetve π vektor egy pozitív konstanssal való szorzás erejéig egyértelműen meg vannak határozva.

A könyvben az van bebizonyítva, hogy egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó folytatása csak ilyen alakú lehet. Annak a kérdésnek a megválaszolása, hogy egy ilyen karakterisztikus operátor valóban definiál-e egy kívánt tulajdonságú Markov folyamatot, más e könyvben nem tárgyalt módszerek kidolgozását igényli. Ezért a könyv bizonyítás nélkül ismerteti a választ erre a kérdésre. Viszont az utolsó alfejezetben bebizonyítja, hogy az így definiált $\mathcal{U}$ karakterisztikus operátor egyértelműen meghatározza a születési és halálozási folyamat $x(t)$ A osztályba tartozó folytatásának az eloszlását. Érdemes megjegyezni, hogy a (4.26) formula nagyon hasonlít a $[-\infty, 0]$ félegyenesen definiált Wiener folyamat karakterisztikus operátorának a 0 határpontbeli értékét megadó (4.2) képlethez.

Az általános, de a könyvben nem ismertetett elméletből következik, hogy a 4.9. tételben megadott $\mathcal{U}$ operátor mindig definiál egy Markov folyamatot. Ez egyben egy születési és halálozási folyamatnak az A osztályba tartozó folytatása, kivéve azt az esetet, ha

$$\alpha = \beta = 0, \quad \text{és} \quad \sum_u \pi(u) < \infty.$$

Ekkor ugyanis az A osztályba tartozó folytatás definiciójának (4) és (5) pontban megfogalmazott, a sztochasztikus folyamat trajektóriáinak T időpontbeli jobboldali folytonosságát előíró feltétele nem teljesül. Érdemes megjegyezni, hogy ez az eset hasonló a 4.8. tétel tárgyalása előtt vizsgált speciális esethez. A lényeges különbség közöttük az, hogy ott az r határpontból való valamely $u \in \mathcal{E}$ pontba történő ugrás bekövetkezéséhez exponenciális eloszlású ideig várni kell, míg az itt említett esetben a $\beta = 0$ feltétel azt jelenti, hogy azonnal megtörténik az ugrás. A kívánt folytonossági tulajdonság ezért nem teljesül az adott esetben.

A 4.10. tétel bizonyításához először fel kell írni a karakterisztikus operátor értékét az r pontban, azaz azt az $\mathcal{U}f(r)$ kifejezést, amit vizsgálni akarunk. Ez a $\mathcal{U}$ operátor definiciója, illetve (4.14), (4.15) és (4.21) formula alapján így írható fel:

$$\mathcal{U}f(r) = \lim_{y \uparrow r} \frac{\sum\limits_{0<u\le y} \pi(u)f(u) + \alpha(y)f(y) - \lambda(y)f(r)}{\lambda(y)m(y)}.$$

Illetve mivel $\lambda(y)$ a (4.21) formula és a $\gamma = \pi(u(-1)$ jelölés bevezetése miatt

$$\lambda(y) = \sum_{-1\le u\le y} \pi(u) + \alpha(y) = \gamma + \sum_{0\le u\le y} \pi(u) + \alpha(y)$$

ezt a formulát átírhatjuk, mint

$$\mathcal{U}f(r) = \lim_{y \uparrow r} \frac{\sum\limits_{0<u\le y} \pi(u)[f(u) - f(r)] + \alpha(y)[f(y) - f(r)] - \gamma f(r)}{\lambda(y)m(y)}. \tag{4.27}$$

A (4.27) kifejezésben szereplő tört nevezőjére a (4.25) reláció szerint igaz a

$$\lim_{y \uparrow r} \lambda(y)m(y) = \beta$$

azonosság. Némi vizsgálat azt mutatja, hogy amennyiben az $f(u)$ függvény deriválható az r pontban, akkor e tört számlálója konvergál a

$$\sum_u \pi(u)[f(u) - f(r)] + \alpha f'(r) - \gamma f(r)$$

kifejezéshez, ha $y \uparrow r$. Ezen állítás igazolásához azt kell megmutatni, hogy a

$$\sum_{0<u\leq y} \pi(u)[f(u) - f(r)]$$

összeg az adott esetben konvergál a $\sum\limits_u \pi(u)[f(u) - f(r)]$ végtelen összeghez, ha $y \uparrow r$, és az utóbbi összeg véges. Ez azonban könnyen igazolható a (4.17) formula és az $f(u) - f(r) \sim f'(r)(u - r)$, ha $u \uparrow r$ reláció segítségével.

A fenti, a (4.27) formula számlálójára és nevezőjére kapott aszimptotikus relációk implikálják a (4.26) formulát a $\beta > 0$ esetben. A $\beta = 0$ esetben ezt a határátmenetet nincs jogunk elvégezni. De akkor mondhatjuk azt, hogy a $\mathcal{U}f(r)$ formulát megadó limesz csak akkor létezik, ha a számláló tart a nullához $u \uparrow r$ esetén, azaz, ha

$$\sum_u \pi(u)[f(u) - f(r)] + \alpha f'(r) - \gamma f(r) = 0.$$

Ez viszont megegyezik a (4.26) formulával a $\beta = 0$ esetben. Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{U}f(r)$ kifejezés, (ha egyáltalán létezik) teljesíti a (4.26) formulát. Itt meg kell jegyezni azt is, hogy abban az esetben, ha r elnyelő állapot, (ezt az esetet nem tárgyaltuk az előző vizsgálatokban), akkor $\alpha = \gamma = \pi = \mathcal{U} = 0$, $\beta > 0$, tehát a (4.26) formula ebben az esetben is érvényes.

A fenti érvelés azt bizonyítja, hogy a karakterisztikus operátor csak olyan lehet, amelynek az értéke az r pontban teljesíti a (4.26) formulát. Az, hogy egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó folytatása valóban létezik ilyen karakterisztikus operátorral (enyhe megszorítások esetén), más e könyvben nem tárgyalt vizsgálatokból következik.

A könyv még tartalmazza annak bizonyítását, hogy a karakterisztikus operátor egyértelműen meghatározza egy születési és halálozási folyamat A osztályba tartozó folytatásának az eloszlását. Röviden ismertetem, ezen állítás bizonyításának legfontosabb gondolatait. Ezek a Markov folyamatok elméletének néhány fontos módszerének az alkalmazásán alapulnak.

Azt kell belátni, hogy a megadott $\mathcal{U}f$ operátor értékei, ha az $\mathcal{U}$ operátort az $\mathcal{E} \cup \{r\}$ halmazon folytonos függvények terén alkalmazzuk meghatározzák a $p(t, u, v) = P_u(x(t) = v)$ és $P(\zeta > t)$ valószínűségeket. Ezt az állítást az analízis eredményei alapján vissza lehet vezetni annak bizonyítására hogy a $\mathcal{U}$ operátor hatása a folytonos függvények terére egyértelműen meghatározza az úgynevezett rezolvenst, azaz a

$$R_\lambda f(u) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} E_u f(x(t))\, dt$$

függvényt minden folytonos f függvényre és $\lambda > 0$ számra. Ez a képlet úgy értendő, hogy a $t \ge \zeta$ esetében, vagyis akkor, ha $x(t)$ nincs definiálva, $f(x(t)) = 0$. Érvényes a rezolvens következő jellemzése is:

$$R_\lambda = \int_0^\infty e^{-\lambda t} P_t \, dt,$$

ahol P_t, $t \ge 0$, a Markov folyamat korábban is tárgyalt félcsoportja.

A könyv belátja, hogy amennyiben f folytonos függvény akkor az $F(u) = F_\lambda(u) = R_\lambda f(u)$ függvény is folytonos minden $\lambda > 0$ számra. Ezenkívül igaz az alábbi (a rezolvensek elméletében nagyon általános feltételek mellett érvényes) azonosság.

$$R_\lambda - R_\mu = (\mu - \lambda) R_\mu R_\lambda \quad \text{minden } \lambda > 0,\ \mu > 0 \text{ számpárra.}$$

Ezen összefüggések segítségével a könyv belátja a következő lemmát.

4.12. Lemma. *Ha f folytonos függvény az $\mathcal{E} \cup \{u\}$ halmazon, akkor minden $\lambda > 0$ paraméterre az $F(u) = F_\lambda(u) = R_\lambda f(u)$ függvény olyan folytonos függvény az $\mathcal{E} \cup \{u\}$ halmazon, amely teljesíti a*

$$f = \lambda F - \mathcal{U} F \tag{4.28}$$

azonosságot.

Ezen eredmény alapján a kívánt egyértelműség bizonyításához elég megmutatni azt, hogy rögzített folytonos F függvényre a (4.28) egyenletet egyetlen (folytonos) f függvény elégíti ki. Ezt a következőképp láthatjuk be. Elég megmutatni, hogy a $\lambda F - \mathcal{U} F \equiv 0$ egyenletet egyedül az $F \equiv 0$ függvény elégíti ki a folytonos függvények terében. Ha ez nem teljesülne, akkor létezne olyan folytonos F megoldása ennek az egyenletnek, amely bizonyos pontokban szigorúan pozítiv, sőt létezne olyan u pont, amelyre $F(u) = \max F(v) = M > 0$, azaz az F függvény maximuma felvétetik. De az $\mathcal{U}$ operátor definiciója szerint $\mathcal{U} F(u) \le 0$, ezért $F(u) = \frac{1}{\lambda} \mathcal{U} F(u) \le 0$ ebben az u pontban. Viszont $F(u) = M > 0$ az u pontban, és ez ellentmondás.