STACIONÁRIUS SOROZATOK ELŐREJELZÉSE.

Ebben az előadásban a következő kérdést fogom tárgyalni: Tekintsük valószínűségi változók egy olyan $\dots, X_{-1}, X_0, X_1, \dots$ stacionárius Gauss sorozatát, amelyre $EX_n = 0$ (minden $n = 0 \pm 1, \pm 2, \dots$ indexre), és legyen megadva ennek a sorozatnak az $r(n) = EX_k X_{k+n}$ kovarianciafüggvénye, $n = 0, 1, 2, \dots$. Ha ismerjük e sorozat múltbeli viselkedését egy n időpontig, azaz az $X_j(\omega)$ valószínűségi változónak tudjuk az értékét minden $-\infty < j \le n$ indexre, akkor hogyan lehet megadni az X_{n+1} valószínűségi változó legjobb becslését ezen információk segítségével?

Először megfogalmazom a feladatot kissé pontosabban. Az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változóknak olyan $f(X_j, j \le n)$ függvényét keressük, amelyre az $E(X_{n+1} - f(X_j,\, j \le n))^2$ minimális. Más szavakkal az X_{n+1} valószínűségi változó legkisebb hibájú becslését keressük az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók segítségével, ahol a becslés hibáját úgy definiáljuk, mint a tekintett valószínűségi változó valódi és becsült értéke közötti különbség négyzetének a várható értékét.

1. A feladat átfogalmazása egy Hilbert terekről szóló problémára.

Vegyük észre, hogy a legjobb becslés megtalálásának a kérdése a feltételes várható érték tulajdonságai miatt megegyezik azzal a problémával, hogy találjuk meg a X_{n+1} valószínűségi változó feltételes várható értékét, feltéve az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók által generált σ-algebrát. Ez a feladat, a feltételes várható érték tulajdonságai miatt átfogalmazható a következő módon is. Tekintsük az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn azon ξ valószínűségi változók összességét, amelyekre $E\xi^2 < \infty$, és vezessük be közöttük a $(\xi, \eta) = E\xi\bar\eta$ skalárszorzatot. (A tekintett valószínűségi változók lehetnek komplex értékűek is, és $\bar\eta(\omega)$ az $\eta(\omega)$ komplex konjugáltját jelöli.) Ilyen módon bevezettük a négyzetesen integrálható valószínűségi változók által generált Hilbert teret, és az előbb megfogalmazott feladat ekvivalens módon úgyis átfogalmazható, hogy meg kell adnunk a Hilbert tér X_{n+1} elemének a vetületét a tekintett Hilbert térnek az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók által generált σ-algebra szerint mérhető négyzetesen integrálható valószínűségi változókból álló alterére. Ez a feladat a tekintett X_j valószínűségi változók (együttes) Gauss eloszlása miatt tovább egyszerűsíthető. A keresett feltételes várható érték megegyezik az X_{n+1} valószínűségi változó vetületével az X_j, $-\infty < j \le n$, valószínűségi változók (megszámlálható) lineáris kombinációiból álló altérre, azaz a keresett becslés az az $Y = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j X_{n-j}$ valószínűségi változó ($EY^2 < \infty$), amelyre $EX_j(X_{n+1} - Y) = 0$ minden $-\infty < j \le n$ indexre. (Lásd az alábbi feladatot.)

Feladat:

Legyenek Y és $X_1, X_2, \dots,$ együttesen normális eloszlású (nulla várható értékű) valószínűségi változók. Ekkor az Y valószínűségi változó Z vetülete az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók négyzetesen integrálható lineáris kombinációi által kifeszített altérre (a második momentummal rendelkező valószínűségi változókból álló Hilbert térben) merőleges minden az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók által generált σ-algebrára mérhető négyzetesen integrálható valószínűségi változóra. Ez azt jelenti, hogy ez a vetület megegyezik az $E(Y|X_1, X_2, \dots)$ feltételes várható értékkel.

Segítség: Vegyük észre, hogy az $Y - Z, X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók együttesen normális eloszlásúak, ezért az $E(Y-Z)X_j = 0$, $j = 1, 2, \dots$, relációkból következik, hogy az $Y-Z$ valószínűségi változó független az $(X_1, X_2, \dots)$ vektortól. Ezért $Y-Z$ független az X_j valószínűségi változók minden $f(X_1, X_2, \dots)$ függvényétől is. Továbbá $E(Y - Z) = 0$. Ez azt jelenti, hogy $E(Y - Z)f(X_1, X_2, \dots) = 0$ minden az $X_1, X_2, \dots$ valószínűségi változók által generált σ-algebrára mérhető második momentummal rendelkező $f(X_1, X_2, \dots)$ valószínűségi változóra.

A fentiek alapján a feladat átfogalmazható úgy, mint egy a kovarianciafüggvény segítségével felírható végtelen lineáris egyenletrendszer megoldása. (A X_{n+1} vektor $Y = \sum\limits_{j=0}^{\infty} c_j X_{n-j}$ vetületét meghatározó ismeretlen c_j együtthatókat kell megtalálni a

$$R(n+1-k) = EX_kX_{n+1} = EYX_k = \sum_{j=0}^{\infty} c_j EX_{n-j}X_k = \sum_{j=0}^{\infty} c_j R(n-j-k), \qquad -\infty < k \le n,$$

egyenletrendszer segítségével.) Annak érdekében, hogy a megoldásról hasznos információkat nyerhessünk, érdemes a feladatot más formában is tárgyalni. Először bevezetek néhány fogalmat és megadok néhány a Hilbert terek alapvető tulajdonságait felhasználó eredményt, amelyek bizonyítását a kiegészítésben fogom tárgyalni. Ezek az eredmények kissé pongyolán fogalmazva azt állítják, hogy a feladatot redukálni lehet két eset vizsgálatára, amelyek közül az első eset azt jelenti, hogy már a nagyon régi megfigyelések is egyértelműen meghatározzák a rendszer további viselkedését, a második eset pedig azt, hogy a nagyon régi megfigyelések szinte semmi információt nem adnak arra, hogy mi történik a jövőben.

Vezessük be a következő jelöléseket:

$$H = B(X_j,\, -\infty < j < \infty), \qquad H_n = B(X_j,\, -\infty < j \le n), \quad -\infty < n < \infty,$$
$$S = \bigcap_{n=-\infty}^{\infty} H_n. \tag{1.1}$$

A fenti jelölésekben $B(X_j,\, j \in T)$, ahol T az egész számok valamely részhalmaza, a T halmaz elemeivel indexelt X_j valószínűségi változók véges lineáris kombinációit tartalmazó legszükebb Hilbert teret jelöli, S pedig a legnagyobb minden H_n Hilbert tér által tartalmazott Hilbert tér.

Adva egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, 2, \dots$, stacionárius sorozat vezessük be a következő U shift operátort az X_n valószínűségi változók által kifeszített H Hilbert térben: $UX_n = X_{n+1}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, és ha $Y = f(X_n, -\infty < n < \infty) \in H$, akkor ennek UY eltoltját (shift-jét) az $UY = Uf(X_n, -\infty < n < \infty) = f(UX_n, -\infty < n < \infty) =$

$f(X_{n+1}, -\infty < n < \infty) \in H$ képlettel definiáljuk. (Mint a Bochner tétel jegyzetben megtárgyaltuk, ilyen módon egy jól definiált U unitér operátort vezettünk be a H Hilbert térben.) Bevezetjük a következő fogalmat is.

Valószínűségi változók stacionárius sorozatának alárendelt sorozat definiciója. *Legyen adva valószínűségi változóknak egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozata egy U shift transzformációval együtt. Valószínűségi változóknak egy Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatát akkor nevezzük az X_n sorozat alárendelt sorozatának, ha $Y_n \in H$, sőt az $Y_n \in H_n$ reláció is teljesül minden $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ indexre, ahol H_n az (1.1) formulában van definiálva, és $UY_n = Y_{n+1}$ minden $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ indexre.*

Könnyen látható, hogy egy Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, az X_n stacionárius sorozatnak alárendelt Y_n sorozat szintén stacionárius.

Reguláris stacionárius sorozat definiciója. *Egy Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ stacionárius (Gauss) sorozatot regulárisnak nevezünk, ha $S = \emptyset$. A $H = B(Y_j, -\infty < j < \infty)$, $H_n = B(Y_j, -\infty < j \le n)$, $S = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} H_n$ Hilbert tereket az (1.1) képlethez hasonlóan definiáljuk. Az egyetlen különbség az, hogy jelen esetben az Y_n sorozat segítségével definiáljuk a H, H_n és S Hilbert tereket.*

Szinguláris stacionárius sorozat definiciója. *Egy Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ stacionárius (Gauss) sorozatot szingulárisnak nevezünk, ha $S = H$. A $H = B(Z_j, -\infty < j < \infty)$, $H_n = B(Z_j, -\infty < j \le n)$, $S = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} H_n$ Hilbert tereket az (1.1) képlethez hasonlóan definiáljuk. Az egyetlen különbség az, hogy jelen esetben a Z_n sorozat segítségével definiáljuk a H, H_n és S Hilbert tereket.*

Érvényes a következő egy stacionárius (Gauss) sorozat felbontásáról szóló tétel.

1.1. Tétel. Tétel stacionárius sorozat felbontásáról a sorozatnak alárendelt reguláris és szinguláris sorozatok (ortogonális) direkt összegére. *Legyen adva egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius (Gauss) sorozat. Ennek a sorozatnak létezik olyan*

$$X_n = Y_n + Z_n, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{1.2}$$

előállítása valószínűségi változók két sorozatának az összegére, amelyre

a) Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatnak alárendelt reguláris, és Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatnak alárendelt szinguláris sorozat.

b) Az Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, és Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatok korrelálatlanok, azaz

$$\operatorname{Cov}(Y_n, Z_m) = 0 \quad \textit{minden } n, m = \dots, -1, 0, 1, \dots \textit{ számpárra.}$$

Az X_n sorozat felbontása az alábbi tulajdonságú sorozatok összegére egyértelmű.

Ha Z_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, szinguláris sorozat, akkor e sorozat tetszőleges Z_k eleme benne van a $H_{-N}(Z_j, -\infty < j \le -N)$ Hilbert térben bármilyen nagy N indexre. Ez azt jelenti, hogy az Z_n sorozat múltjának ismerete bármilyen régi időpontig elegendő ahhoz, hogy a Z_k valószínűségi változót pontosan rekonstruáljuk. Ha Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, reguláris sorozat, akkor valamely tetszőleges Y_k elemének a vetülete a $H_{-N}(Y_j, -\infty < j \le -N)$ Hilbert térbe nagy N indexekre tart nullához. Ez informálisan azt jelenti, hogy a nagyon régi megfigyelések alig adnak információt egy Y_k valószínűségi változó becslésére. Igaz a következő Wold felbontásnak nevezett eredmény.

1.2. Tétel. Reguláris stacionárius sorozatok Wold felbontása. *Legyen X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, reguláris stacionárius sorozat. Ekkor létezik olyan az X_n sorozatnak alárendelt V_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat és valós számok olyan c_k, $k = 0, 1, 2, \dots$ sorozata, amelyekre $EV_n = 0$, $EV_n^2 = 1$, $EV_nV_m = 0$, ha $n \ne m$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 = EX_1^2$, és*

$$X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k} \quad \textit{minden } n = \dots, -1, 0, 1, \dots \textit{ indexre.} \tag{1.3}$$

Megfordítva, ha az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozatnak létezik az adott tulajdonságú reprezentációja, akkor ez a sorozat reguláris.

1. feladat. Legyen egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat előállítható egy W_n, $W_n \in B(X_j, -\infty < j < \infty)$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, nulla várható értékű 1 szórásnégyzetű korrelálatlan elemekből álló stacionárius Gauss sorozat mozgó átlagaként, (egy ilyen tulajdonságokkal rendelkező W_n sorozat független, standard normális valószínűségi változókból áll), azaz létezzen valós számok olyan $d_0, d_1, \dots$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |d_n|^2 = EX_1^2 < \infty$, sorozata, amelyek segítségével az X_n sorozat tagjai előállíthatóak $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ alakban. Ekkor X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, reguláris stacionárius sorozat.

Segítség. Legyen $H_{n,W} = B(W_j, -\infty < j \le n)$, és $S_W = \bigcap\limits_{n=-\infty}^{\infty} H_{n,W}$. Elég megmutatni, hogy $S_W = \emptyset$, mert $H_n \subset H_{n,W}$ minden n indexre, ezért $S \subset S_W$. Viszont, ha $Y \in S_W$, akkor $(Y, W_n) = 0$ minden n indexre, sőt $(Y, Z) = 0$ minden $Z \in H_{n,W}$ vektorra. Ezért $(Y, Y) = 0$.

2. feladat. Legyen egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat előállítható egy W_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, nulla várható értékű 1 szórásnégyzetű korrelálatlan elemekből álló W_n stacionárius Gauss sorozat $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$ mozgóátlagaként. Ekkor $|d_0|$ egyenlő az X_1 vektor távolságával a $B(W_j, -\infty < j \le 0)$ altértől. Ezért, ha $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ alakú az X_n sorozat Wold felbontása, akkor $|d_0| \le |c_0|$.

3. feladat. Legyen W_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, független, nulla várható értékű 1 szórású valószínűségi változók sorozata, d_n, $n = 0, 1, \dots$, valós számok olyan sorozata, amelyre $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n^2 < \infty$. Ekkor a $\sum\limits_{n=0}^{\infty} d_n W_n$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál.

Segítség. Mutassuk meg a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével, hogy a $Z_N(\omega) = \sum\limits_{n=0}^{N} d_n W_n(\omega)$, $N = 0, 1, 2, \dots$, sorozat 1 valószínűséggel Cauchy sorozat.

A fenti eredmények bizonyításai a Hilbert terek általános tulajdonságait használják ki. Így például a Wold felbontásban szereplő V_k valószínűségi változókat és az (1.3) formulában szereplő felbontást úgy kapjuk meg, hogy minden n számra tekintjük a H_{n-1} Hilbert tér D_n ortogonális kiegészítőjét a H_n Hilbert térre, és veszünk ebben egy 1-re normált V_n vektort. Némi munkával meg lehet mutatni, hogy ezeket a V_n vektorokat választhatjuk úgy, hogy íly módon egy az X_n sorozatnak alárendelt (ortonormált elemekből álló) stacionárius sorozatot kapjunk, amelynek elemei egyben a H Hilbert tér ortonormált bázisát alkossák. Az X_n valószínűségi változók sorfejtéseként ezen bázis alapján megkapjuk az (1.3) formulát.

Bár az 1.1 Tétel bizonyítását egy stacionárius Gauss sorozat felbontásáról a Gauss sorozatnak alárendelt stacionárius reguláris és szinguláris sorozatok direkt összegére valamint az 1.2 Tétel bizonyítását reguláris stacionárius sorozatok Wold felbontásáról csak a kiegészítésben ismertetem, és ott is csak vázlatosan, röviden leírom az e tételeket teljesítő konstrukciókat. Az 1.1 Tételben vesszük a Gauss sorozat mindegyik X_n elemének az $X_n = Y_n + Z_n$ felbontását az X_n sorozat segítségével definiált S Hilbert térre vett Z_n vetületének és Y_n ortogonális vetületének direkt összegére. Ekkor az Y_n sorozat lesz a felbontás reguláris, a Z_n sorozat pedig a felbontás szinguláris komponense. Az 1.2 Tételben tekintjük minden $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ indexre az X_n sorozat által definiált H_{n-1} Hilbert tér D_n ortogonális kiegészítőjét a H_n Hilbert térre. Ekkor be lehet látni, hogy a H Hilbert tér D_n alterek ortogonális összege, az U shift transzformáció a D_n alteret a D_{n+1} altérbe viszi mindegyik n indexre, és a D_n alterek egy dimenziósak, (kivéve azt az elfajuló esetet, amikor az X_n valószínűségi változók egy valószínűséggel nullával egyenlőek). Véve a D_0 térben szereplő V_0 egy szórásnégyzetű valószínűségi változót, és annak $V_n = U_n V_0$ eltoltjait megkapjuk az (1.3) formulában szereplő V_{n-k} valószínűségi változókat. Ezután nem nehéz az (1.3) formulát kielégitő konstrukciót megtalálni.

A fő probléma az előbb vázolt konstrukcióban az, hogy az abban szereplő valószínűségi változókat nagyon nehéz kiszámítani. Ezért az 1.1 és 1.2 Tétel bizonyítását nem tekinthetjük konstruktívnak. A fő problémánk az, hogy konkrét modellekben az (1.2) és (1.3) formulákat effektiv módon szeretnénk megadni, speciálisan szeretnénk azt is eldönteni, hogy mikor teljesül az $S = \emptyset$ reláció. A továbbiakban az lesz a fő problémánk, hogy a kívánt konstrukciókat effektíve előállítsuk. Megjegyzem, hogy a Wold felbontás megtalálása nem pusztán az X_n sorozat (1.3) formulában megadott mozgóátlag alakú előállítását jelenti, hanem azt is biztosítani kell, hogy az ebben az előállításban felhasznált V_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozat az X_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozatnak alárendelt sorozat legyen. E konstrukciók megadásához az analízis, elsősorban a komplex függvénytan nagyon mély eredményeire lesz szükségünk.

Lássunk példákat szinguláris stacionárius sorozatokra. Ilyen példa, ha $X_n = Y$ minden $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ számra, ahol Y nulla várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó. Kissé bonyolultabb példa a következő. Rögzítsünk egy M pozitív egész számot, és legyenek $Y_1, \dots, Y_M$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Definiáljuk az X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sorozatot a következő módon: $X_n = Y_k$, ha $n = k$ moduló M. Ilyen módon egy szinguláris stacionárius sorozatot definiáltunk. Az alábbi példa kissé bonyolultabb.

Feladat. Legyen adva egy olyan G spektrál mérték a $[-\pi, \pi]$ intervallumon, amelyik véges sok x_1, x_{-1}, x_2, x_{-2}, … x_k, x_{-k} pontba van koncentrálva úgy hogy, $x_j = -x_{-j}$, és $G(\{x_j\}) = G(\{x_{-j}\}) = 2p_j^2$, $j = 1, \dots, k$ valamely p_j számokkal. Jellemezzük a G spektrál mértékkel rendelkező stacionárius Gauss sorozatokat, és mutassuk meg, hogy ezek szinguláris stacionárius sorozatok.

Segítség. Adjunk meg elöször egy a G spektrál mértéknek megfelelő Z_G véletlen spektrál mértéket, és definiáljunk segítségével egy G spektrál mértékkel rendelkező X_n stacionárius Gauss folyamatot.

Legyenek U_j és V_j, $j = 1, \dots, k$, független standard normális valószínűségi változók, és $Z_G(\{x_j\}) = p_j(U_j + iV_j)$, $Z_G(\{-x_j\}) = p_j(U_j - iV_j)$, $j = 1, \dots, k$. Ekkor definiálhatjuk a keresett X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius Gauss folyamatot, mint

$$\begin{aligned}
X_n = \int e^{inx} Z_G(\,dx) &= \sum_{j=1}^{k} p_j(e^{inx_j}(U_j + iV_j) + e^{-inx_j}(U_j - iV_j)) \\
&= \sum_{j=1}^{k} p_j U_j (e^{inx_j} + e^{-inx_j}) + \sum_{j=1}^{k} i p_j V_j (e^{inx_j} - e^{-inx_j}) \\
&= \frac{1}{2} \mathrm{Re} \left(\sum_{j=-k}^{k} Z_j e^{inx_j} \right) = \frac{1}{2} \sum_{j=-k}^{k} Z_j e^{inx_j},
\end{aligned}$$

ahol $Z_j = p_j(U_j + iV_j)$, ha $1 \le j \le k$, $Z_j = p_j(U_j - iV_j)$, ha $-k \le j \le -1$, és $Z_0 = 0$.

Innen következik, véve az

$$X_n = \frac{1}{2} \sum_{1 \le |j| \le k} Z_j e^{inx_j}, \quad n_0 - 2k < n \le n_0, \tag{1.4}$$

lineáris egyenletrendszert (ahol Z_j, $1 \le |j| \le k$, az ismeretlen változók) és megmutatva, hogy ez az egyenletrendszer megoldható, hogy bármely (nagy abszolút értékű negatív n_0 számra) az $X_{n_0}, \dots, X_{n_0 - 2k+1}$ valószínűségi változók meghatározzák a Z_G véletlen spektrál mértéket, ezért a H_{n_0} és H Hilbert terek megegyeznek. Ezért X_n szinguláris stacionárius sorozat.

Meg kell még mutatnunk, hogy az (1.4) formulában felírt egyenletrendszer egyértelműen megoldható, azaz a megfelelő mátrix invertálható. (Ez igazolható felhasználva azt, hogy a Van der Monde determinánsokat ki tudjuk számolni.) Mivel X_n valós szám minden n indexre, ezért ha Z_j, $1 \le |j| \le k$ az (1.4) egyenlet megoldása, akkor $Z'_j = \overline{Z_{-j}}$, $1 \le |j| \le k$ szintén megoldása ennek az egyenletnek. Innen $Z_j = \overline{Z_{-j}}$.

2. Az előrejelzési probléma vizsgálata stacionárius folyamatok spektrál reprezentációjának a segítségével.

Az előző fejezetben kapott eredmények azért nem kielégítőek a számunkra, mert önmagukban nem elegendőek ahhoz, hogy megkapjuk a minket érdeklő predikciót. Nem nehéz belátni, hogy az X_n valószínűségi változó legjobb becslése az X_j, $j \le 0$, valószínűségi változók segítségével a Wold felbontás felhasználásávak definiálható $\sum\limits_{k=n}^{\infty} c_k V_{n-k}$ valószínűségi változó, de eddigi ismereteink nem elegendőek ahhoz, hogy explicit módon megadjuk a c_k együtthatókat és kiszámoljuk azt, hogy a V_n valószínűségi változók hogy fejezhetők ki az X_j valószínűségi változók lineáris kombinációjaként ebben a képletben. További probléma, hogy az eddigi eredmények nem mondják meg, hogy egy ismert kovarianciájú Gauss folyamat mikor reguláris, és ha nem reguláris, akkor hogyan lehet megtalálni a sorozat (1.2) formulában megadott felbontását.

Annak érdekében, hogy ezekre a kérdésekre legalább részleges válaszokat adhassunk, szükségünk van az analízis néhány klasszikus eredményére. Először felidézem a már tárgyalt Bochner tételt pozitív definit függvények jellemzéséről, amely lehetővé teszi annak megmutatását, hogy egy stacionárius sorozat kovariancia függvénye előállítható, mint egy úgynevezett spektrál mérték Fourier transzformáltja. Ezenkívül tárgyalom azokat a Bochner tételhez kapcsolódó szintén vizsgált eredményeket, amelyek egy stacionárius Gauss folyamat spektrál előállításáról szólnak. Ezek az eredmények is hasznosak lesznek számunkra. Definiáljuk először a pozitív definit függvényeket.

Pozitív definit függvények és sorozatok definiciója. *Azt mondjuk, hogy egy $f(t)$ függvény a számegyenesen pozitív definit, ha minden $t_1, \dots, t_N$ valós és $z_1, \dots, z_N$ komplex számokból álló szám n-esre teljesül a*

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} z_k \bar{z}_l f(t_k - t_l) \ge 0$$

egyenlőtlenség, ahol $\bar{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli.

Hasonlóan ha $a(n)$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots,$ az egész számokkal indexezett számsorozat, akkor ezt a sorozatot akkor és csak akkor nevezzük pozitív definitnek, ha minden $a_1, \dots, a_N$ egész és $z_1, \dots, z_N$ komplex számokból álló szám n-esre teljesül a

$$\sum_{k=1}^{N} \sum_{l=1}^{N} z_k \bar{z}_l a(n_k - n_l) \ge 0$$

egyenlőtlenség.

Feladat: Mutassuk meg, hogy az $f_t(x) = e^{itx}$, t valós szám, függvény pozitív definit függvény minden (valós) x paraméterre, $a_k(n) = e^{ikn}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, pozitív definit sorozat minden egész k számra.

A Bochner tétel a pozitív definit sorozatok és függvények jellemzését adja. Számunkra a következő egyszerű (a Bochner tétel jegyzetben szintén tárgyalt) lemma miatt érdekes ez az eredmény.

2.1. Lemma. *Ha $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, stacionárius sztochasztikus folyamat, akkor az $R(t) = EX(s)X(t+s)$ kovariancia függvény pozitív definit függvény, amelyre $R(t) = R(-t)$. Ha X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat, akkor $R(n) = EX_m X_{n+m}$ pozitív definit sorozat, amelyre $R(n) = R(-n)$.*

Megfordítva, ha $R(n)$ pozitív definit sorozat, amelyre $R(n) = R(-n)$, akkor létezik valószínűségi változók olyan X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sztochasztikus sorozata, amelynek ez az $R(n)$ sorozat az $R(n) = EX_k X_{k+n}$ kovarianciafüggvénye. Sőt, létezik az adott kovarianciafüggvénnyel rendelkező Gauss sorozat nulla várható értékű valószínűségi változókkal. Ez utóbbi esetben a sorozat véges dimenziós eloszlásait egyértelműen meghatározza a kovarianciafüggvény.

Bizonyítás. Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $EX(t) = 0$, Rögzítsünk valamely $t_1, \dots, t_N$ valós és $z_1, \dots, z_N$ komplex számokból álló szám n-es párt és tekintsük a $\sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l R(t_k - t_l)$ kifejezést. Vegyük észre, hogy $\sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l R(t_k - t_l) = \sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l EX(t_k)X(t_l) = E\left(\sum\limits_{k=1}^N z_k X(t_k)\right)\overline{\left(\sum\limits_{k=1}^N z_k X(t_k)\right)} \ge 0$. Másrészt $R(-t) = EX(s+t)X(s) = R(t)$.

Hasonlóan, rögzítve valamely $n_1, \dots, n_N$ egész és $z_1, \dots, z_N$ komplex számokból álló szám n-es párt. Ekkor felírhatjuk, hogy $\sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l R(n_k - n_l) = \sum\limits_{k=1}^N \sum\limits_{l=1}^N z_k \bar z_l EX_{n_k} X_{n_l} = E\left(\sum\limits_{k=1}^N z_k X_{n_k}\right)\overline{\left(\sum\limits_{k=1}^N z_k X_{n_k}\right)} \ge 0$, és $R(n) = R(-n)$.

A lemma utolsó állításának bizonyításához azt kell meggondolnunk, hogy ahhoz, hogy az adott $R(n)$ kovarianciafüggvényhez létezzen normális eloszlású valószínűségi változóknak olyan sorozata, amelynek $(X(k_1), \dots, X_(k_p))$ véges dimenziós eloszlásainak a kovarianciamátrixát az $D(j,l) = \operatorname{Cov}(X(k_j), X(k_l)) = R(k_j - k_l)$, $1 \le j \le p$, kovarianciamátrix adja meg az kell, hogy ez a kovarianciamátrix a $k_1, \dots, k_l$ egész számok tetszőleges választása esetén pozitív definit legyen. Viszont ezt a feltételt az biztosítja, hogy az $R(n)$ sorozat pozitív definit. Ezenkívül emlékezzünk arra, hogy egy normális eloszlású véletlen vektor eloszlását annak várható értéke és kovariancia mátrixa meghatározza.

Bochner tétel. *Legyen $f(x)$, $-\infty < x < \infty$, folytonos, pozitív definit függvény. Ekkor* *létezik olyan véges $\mu(\cdot)$ mérték a számegyenesen, amelyre*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \mu(\,dt), \quad -\infty < x < \infty. \tag{2.1}$$

A (2.1) képletben szereplő μ mértéket az $f(x)$ függvény egyértelműen meghatározza.

Legyen $a(n)$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, pozitív definit sorozat az egész számokon. Ekkor létezik olyan véges mérték a $[-\pi, \pi)$ szakaszon, amelyre

$$a(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itn} \mu(\,dt), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots$$

A μ mértéket az $a(n)$ sorozat egyértelműen meghatározza.

Következmény. *Legyen X_n, $EX_n = 0$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozat $R(n) = EX_k X_{k+n}$ kovarianciafüggvénnyel. Akkor létezik olyan egyértelműen meghatározott $G(\,dx)$ mérték a $-\pi \le x \le \pi$ intervallumon, amelyre*

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} G(\,dt), \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{2.2}$$

Speciálisan

$$EX_n^2 = R(0) = \int_{-\pi}^{\pi} G(\,dt) = G([-\pi, \pi]).$$

A G mérték teljesíti a $G(A) = G(-A)$ tulajdonságot is minden mérhető A halmazra.

Bizonyítás. Mivel az $R(n)$ sorozat pozitív definit a Bochner tételből következik az (2.2) formula. Továbbá, mivel $R(n) = R(-n)$, és az $R(n)$ sorozat egyértelműen meghatározza a $G(\,dt)$ mértéket, innen következik, hogy $G(A) = G(-A)$.

1. megjegyzés. Az (2.2) formulában szereplő G mértéket az $R(n)$ kovarianciafüggvény spektrál mértékének nevezik az irodalomban. Ha a G mérték abszolút folytonos a (Lebesgue mértékre nézve), akkor ennek $g(x) = \frac{dG}{dx}(x)$ deriváltját a kovarianciafüggvény spektrálsűrűségének nevezik. Ha létezik az $R(n)$ függvénynek $g(x)$ spektrál sűrűsége, akkor az (2.2) formula felírható a következő ekvivalens módon is:

$$R(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} g(t)\,dt, \quad n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{2.2$'$}$$

2. megjegyzés. Egy a $[-\pi, \pi]$ intervallumon definiált G mértéket, amelyre $G([-\pi, \pi]) < \infty$, $G(A) = G(-A)$ minden mérhető függvényre spektrál mértéknek is neveznek. Az elnevezés oka az, hogy létezik olyan X_n, $n = -\dots, -1, 0, 1, \dots$, Gauss eloszlású stacionárius sorozat, amelynek ez a G mérték a spektrál mértéke. Azt is feltehetjük, hogy e sorozat elemei teljesítik az $EX_n = 0$ feltételt. Valóban, ha az $EX_k X_{k+n} =$

$R(n)$ függvény segítségével meg tudjuk adni a keresett Gauss sorozat véges dimenziós eloszlásainak kovariancia mátrixát, így magukat a véges dimenziós eloszlásokat is.

A spektrál mérték bevezetése azért hasznos, mert ilyen módon a Fourier analízis módszereit tudjuk alkalmazni. Egy stacionárius sorozat kovarianciafüggvénye előáll, mint a spektrál mérték Fourier transzformáltja. A kovarianciafüggvény vagy a spektrál mérték megadása ekvivalens. Sok vizsgálatban hasznosabb a spektrál mértékkel dolgozni.

Legyen adva egy stacionárius Gauss folyamat valamely G spektrál mértékkel. Lehetséges, és érdemes konstruálni olyan úgynevezett véletlen (normális) spektrál mértéket, amelynek segítségével magát a sztochasztikus folyamatot is elő tudjuk állítani ezen véletlen spektrál mértéknek a Fourier transzformáltjaként. Ezt az eredményt, illetve a bizonyításban szükséges gondolatmenetet röviden ismertetem. Részletesebb tárgyalás található erről és a véletlen spektrál mérték szerinti integrálról a Bochner tétel jegyzetben. Először bevezetem a következő definiciót.

Véletlen (normális) spektrál mérték definiciója. *Legyen adva egy G spektrál mérték a $[-\pi, \pi]$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy egy véletlen Z_G mérték a G spektrál mértéknek megfelelő véletlen (normális) spektrál mérték, ha teljesíti a következő tulajdonságokat.*

(i.) *Minden mérhető $A \subset [-\pi, \pi]$ halmazra létezik egy komplex értékű*

$$Z_G(A) = \operatorname{Re} Z_G(A) + i \operatorname{Im} Z_G(A)$$

valószínűségi változó, amelyet az A halmaz véletlen mértékének nevezünk.

(ii.) *A $\operatorname{Re} Z_G(A)$, $\operatorname{Im} Z_G(A)$, $A \subset [-\pi, \pi]$ mérhető halmaz, valószínűségi változók együttesen Gauss eloszlásúak, azaz bármely véges sok valószínűségi változónak ezek közül az együttes eloszlása többdimenziós normális eloszlás.*

(iii.) $EZ_G(A) = 0$ *minden $A \subset [-\pi, \pi]$ mérhető halmazra.*

(iv.) $EZ_G(A)\overline{Z_G(B)} = G(A \cap B)$, *ahol $\bar{z}$ a z szám konjugáltját jelöli.*

(v.) $\sum\limits_{j=1}^{n} Z_G(A) = Z_G\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j\right)$, *ha $A_1, \dots, A_n$ diszjunkt halmazok.*

(vi.) $Z_G(-A) = \overline{Z_G(A)}$.

Észrevétel. A $\operatorname{Re} Z_G(A)$ és $\operatorname{Im} Z_G(B)$ valószínűségi változók függetlenek. Valóban, ehhez elég megmutatni a normális eloszlás miatt, hogy korrelálatlanok. Viszont

$$\begin{aligned}
E\operatorname{Re} Z_G(A)\operatorname{Im} Z_G(B) &= \frac{1}{4}E\left[(Z_G(A) + \overline{Z_G(A)})(Z_G(B) - \overline{Z_G(B)})\right] \\
&= \frac{1}{4}E\left[(Z_G(A) + Z_G(-A))(\overline{Z_G(-B)} - \overline{Z_G(B)})\right] \\
&= \frac{1}{4}\left(G(A \cap (-B)) - G(A \cap B) + G((-A) \cap (-B)) - G((-A) \cap B)\right) = 0.
\end{aligned}$$

Feladat: Ha $(A_1)\cup(-A_1)$, ..., $A_n\cup(-A_n)$ diszjunktak, akkor $Z_G(A_1),\dots Z_G(A_n)$ függetlenek. Ha $A\cap(-A)=\emptyset$, akkor $\mathrm{Var}\,(\mathrm{Re}\,Z_G(A))=\mathrm{Var}\,(\mathrm{Im}\,Z_G(A))=\frac{G(A)}{2}$. Továbbá, $\mathrm{Re}\,Z_G(A)=\mathrm{Re}\,Z_G(-A)$, $\mathrm{Im}\,Z_G(A)=-\mathrm{Im}\,Z_G(-A)$.
Segítség: Az első állítás bizonyításához azt kell megmutatni, hogy

$$E\mathrm{Re}\,Z_G(A_j)\mathrm{Re}\,Z_G(A_k)=0,\quad \text{és}\quad E\mathrm{Im}\,Z_G(A_j)\mathrm{Im}\,Z_G(A_k))=0,$$

ha $(A_j\cup(-A_j))\cap(A_k\cup(-A_k))=\emptyset$. Viszont

$$\begin{aligned}E\mathrm{Re}\,Z_G(A_j)\mathrm{Re}\,Z_G(A_k)&=\frac14 E(Z_G(A_j)+\overline{Z_G(A_j)})(Z_G(A_k)+\overline{Z_G(A_k)})\\&=\frac14\big(EZ_G(A_j)\overline{Z_G(-A_k)}+EZ_G(A_j)\overline{Z_G(A_k)}\\&\qquad+EZ_G(-A_j)\overline{Z_G(-A_k)}+EZ_G(-A_j)\overline{Z_G(A_k)}\big)=0\end{aligned}$$

az adott feltételek mellett, és az $E\mathrm{Im}\,Z_G(A_j)\mathrm{Im}\,Z_G(A_k))=0$ reláció hasonlóan bizonyítható.

Ha $A\cap(-A)=\emptyset$, akkor $E(\mathrm{Re}\,(Z_G(A))^2=\frac14 E(Z_G(A)+\overline{Z_G(-A)})^2=\frac{G(A)}{2}$. Hasonlóan $E(\mathrm{Re}\,(Z_G(-A))^2=\frac{G(A)}{2}$. Mivel $Z_G(-A)=\overline{Z_G(A)}$ az (vi) reláció szerint, innen következik a Feladat még nem tárgyalt állítása.

A fent megadott definició bár technikainak látszik természetes. Ha egy Z_G véletlen mérték teljesíti a fenti tulajdonságokat, akkor definiálhatjuk az $\int f(t)Z_G(\,dt)$ mértéket a következő módon. Először definiáljuk ezt az integrált természetes módon $f(t)=\sum\limits_{j=1}^n c_jI_{A_j}(t)$ alakú elemi függvényekre, ahol $A_1,\dots,A_n$ mérhető diszjunkt részhalmazai a $[-\pi,\pi]$ intervallumnak, és $I_A(\cdot)$ az A halmaz indikátorfüggvénye. A definiciót az

$$\int\left(\sum_{j=1}^n c_jI_{A_j}(t)\right)Z_G(\,dt)=\sum_{j=1}^n c_jZ_G(A_j)$$

képlettel adjuk meg. Nem nehéz belátni, hogy teljesül az

$$E\left(\int f(t)Z_G(\,dt)\overline{\int h(t)Z_G(\,dt)}\right)=\int f(t)\overline{h(t)}G(\,dt) \tag{2.3}$$

elemi függvények minden $(f(t),h(t))$ párjára. Valóban, legyen $f(t)=\sum\limits_{j=1}^M c_jI_{A_j}(t)$, $h(t)=\sum\limits_{k=1}^N d_kI_{B_k}(t)$, ahol $A_1,\dots,A_M$ és $B_1,\dots,B_N$ a $[-\pi,\pi)$ intervallum particiói, c_j, $j=1,\dots,M$, d_k, $k=1,\dots,N$, komplex számok. Ekkor

$$\begin{aligned}&E\left(\int f(t)Z_G(\,dt)\overline{\int h(t)Z_G(\,dt)}\right)=E\left(\sum_{j=1}^M c_jZ_G(A_j)\right)\left(\overline{\sum_{k=1}^N d_kZ_G(B_k)}\right)\\&=\sum_{j=1}^M\sum_{k=1}^N c_j\bar d_kEZ_G(A_j)\overline{Z_G(B_k)}=\sum_{j=1}^M\sum_{k=1}^N c_j\bar d_kG(A_j\cap B_k)=\int f(t)\overline{h(t)}G(\,dt).\end{aligned}$$

A lépcsős függvényekre már igazolt (2.3) tulajdonságot felhasználva az $\int f(t)Z_G(\,dt)$ integrált az L_2 izomorfia segítségével ki tudjuk terjeszteni minden olyan f függvényre, amelyre $\int |f(t)|^2 G(\,dt) < \infty$ úgy, hogy a (2.3) reláció továbbra is érvényben maradjon. Ez a kiterjesztés egyértelmű. Vegyük észre, hogy igaz a következő

Észrevétel. Ha $f(t)$ olyan $f \in L_2([-\pi,\pi),\mathcal{B},G)$ függvény, amelyre $f(-t) = \overline{f(t)}$, akkor az $\int f(t)Z_G(\,dt)$ véletlen integrál 1 valószínűséggel valós értékű valószínűségi változó.

Valóban, a fenti észrevétel igaz lépcsős függvényekre, és alkalmas határátmenettel megkapjuk az állítást tetszőleges adott tulajdonságú f függvényre.

Érdemes megjegyezni, hogy az $f(-t) = \overline{f}(t)$ azonosság jellemzi a valós értékű függvények, illetve valós értékű előjeles mértékek Fourier transzformáltját. Definiáljuk az

$$X_n = \int e^{int} Z_G(\,dt), \quad n = \dots,-1,0,1,\dots, \tag{2.4}$$

integrálokat. Az X_n valószínűségi változók valós értékűek, és a (2.3) reláció alapján $EX_kX_{k+n} = EX_{n+k}\overline{X_k} = \int e^{int}G(\,dt)$. Ez azt jelenti, hogy az e^{int} függvényeknek $n = \dots,-1,0,1,\dots$, a Z_G véletlen spektrál mérték szerinti integráljának a segítségével elő tudtunk állítani egy olyan stacionárius Gauss sorozatot, amelynek spektrál mértéke a G mérték. Némi plusz munkával be lehet látni, hogy egy adott G spektrál mértékű stacionárius Gauss sorozathoz lehet konstruálni olyan véletlen spektrál mértéket, amely magát az eredeti sorozatot állítja elő. Ezt fogalmazom meg az alábbi eredményben.

2.2. Tétel. *Legyen X_n, $n = \dots,-1,0,1,\dots$, normális eloszlású stacionárius Gauss sorozat nulla várható értékű valószínűségi változókkal valamely G spektrál mértékkel. Ekkor lehet konstruálni a G spektrál mértéknek megfelelő normális véletlen Z_G spektrál mértéket úgy, hogy az e véletlen mérték szerinti integrál teljesíti a (2.4) képletet, azaz a (2.4) képlet jobb oldala egyenlő a kiindulásként megadott X_n, $n = \dots,-1,0,1,\dots$, sorozat megfelelő tagjával.*

Megjegyzés. E tétel (részletesebb) bizonyítása megtalálható a Bochner tétel jegyzetben.

Bizonyítás. Tekintsük a H teret, azaz az X_n, $n = 0,\pm1,\pm2,\dots$, valószínűségi változók négyzetesen integrálható lineáris kombinációiból álló Hilbert teret, és definiáljuk a H tér J leképezését az $L_2([-\pi,\pi),\mathcal{B},G(\,dt))$ térre, (ahol $\mathcal{B}$ jelöli a Borel σ-algebrát a $[-\pi,\pi)$ intervallum részhalmazain) a következő módon: Legyen $J\left(\sum\limits_{j=-N}^{N} c_j e^{ijt}\right) = \sum\limits_{j=-N}^{N} c_j X_j$ minden véges lineáris kombinációra. Nem nehéz belátni, hogy J normatartó leképezés. Ezért a fenti J leképezést ki tudjuk terjeszteni a véges lineáris kombinációkról azok lezártjára is. Ez a J leképezés az $L_2([-\pi,\pi),\mathcal{B},G(\,dt))$ és a H tér között L_2 izomorfiát létesít. (Azt kell tudnunk, hogy a véges $\sum\limits_{j=-N}^{N} c_j e^{ijt}$ lineáris kombinációk az $L_2([-\pi,\pi),\mathcal{B},G(\,dt))$ tér mindenütt sűrű részhalmazát alkotják.)

Definiáljuk a $Z_G(A)$ valószínűségi változót a $Z_G(A) = J(I_A(t))$ képlet segítségével, ahol $I_A(t)$ az A halmaz indikátor függvényét jelöli. A $Z_G(\cdot)$ valószínűségi változók teljesítik az (i.)–(vi.) tulajdonságokat. Az (i), (ii), (iii) és (v) tulajdonságok teljesülése nyílvánvaló, a (iv) reláció következik az L_2 izomorfiából, a (vi) tulajdonság pedig a $J(-f) = \overline{J(f)}$ relációból. Továbbá a J transzformáció L_2 izomorfiája és a (2.3) reláció alapján $J(f) = \int f(t) Z_G(\,dt)$ minden $f \in L_2([-\pi,\pi), \mathcal{B}, G)$ függvényre. Tehát speciálisan $X_n = J(e^{int}) = \int e^{int} Z_G(\,dt)$.

Szükségünk lesz későbbi számolásainkban egy technikai jellegű lemmára, amely tekinthető úgy is, mint véletlen spektrál mértékek szerinti integrálok helyettesítési szabálya.

2.3. Lemma. Lemma véletlen spektrál mérték szerinti integrálok helyettesítési szabályáról. *Legyen adva egy G spektrál mérték, egy a G spektrál mértéknek megfelelő Z_G véletlen mérték a $[-\pi,\pi)$ intervallumon, valamint egy olyan $u(t)$ függvény, amelyre $u(-t) = \overline{u(t)}$, és $\int |u^2(t)| G(\,dt) < \infty$. Ekkor a $Z_{G,u}$,*

$$Z_{G,u}(A) = \int u(t) I_A(t) Z_G(\,dt), \quad A \in \mathcal{B},$$

kifejezés, ahol $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra a $[-\pi,\pi)$ intervallumon, és $I_A(\cdot)$ az A halmaz indikátor függvénye annak a G_u, spektrál mértéknek megfelelő véletlen spektrál mérték, amelyet a $G_u(A) = \int_A |u^2(t)| G(\,dt)$ képlet határoz meg minden $A \in \mathcal{B}$, $A \in [-\pi,\pi)$, halmazra. Továbbá

$$\int f(t) Z_{G,u}(\,dt) = \int f(t) u(t) Z_G(\,dt) \tag{2.5}$$

minden a G_u spektrál mérték szerint négyzetesen integrálható f függvényre.

Bizonyítás. Nem nehéz belátni a (2.3) tulajdonság segítségével, hogy a Lemmában a $G_u(A) = \int_A |u^2(t)| G(\,dt)$ képlet segítségével definiált G_u mérték spektrál mérték, azaz $G_u(A) = G_u(-A)$ minden mérhető A halmazra, $G_u([-\pi,\pi]) < \infty$, és a $Z_{G,u}$ véletlen mérték a G_u spektrál mértéknek megfelelő, az (i)–(vi) tulajdonságok mindegyikét teljesítő véletlen spektrál mérték.

Tekintsük az $J_1(f) = \int f(t) Z_{G,u}(\,dt)$ és $J_2(f) = \int f(t) u(t) Z_G(\,dt)$ véletlen integrálokat minden olyan f függvényre, amelyre $\int |f^2(t)| G_u(\,dt) < \infty$. (Ilyen függvényekre $\int |f(t)u(t)|^2 G(\,dt) = \int |f^2(t)| G_u(\,dt) < \infty$, ezért mind a két tekintett integrál létezik.) Vegyük észre, hogy minden $A \in \mathcal{B}$ halmazra $J_1(I_A(t)) = J_2(I_A(t)) = Z_{G,u}(A)$, továbbá tetszőleges f_1 és f_2 a G_u mérték szerint négyzetesen integrálható függvénypárra $EJ_1(f_1)\overline{J_1(f_2)} = EJ_2(f_1)\overline{J_2(f_2)} = \int f_1(t)\overline{f_2(t)} G_u(\,dt)$. Mind J_1 mind J_2 korlátos lineáris leképezése a G_u mérték szerint négyzetesen integrálható függvények terének a második momentummal rendelkező valószínűségi változók Hilbert terébe, és az $I_A(t)$ alakú függvények lineáris kombinációi e leképezések értelmezési tartományának mindenütt sűrű részhalmazát alkotják. Innen következik a Lemma állítása.

3. A feladat átfogalmazása komplex függvénytan segítségével.

A stacionárius sorozatok spektrál reprezentációja lehetővé teszi, hogy a komplex függvénytan néhány mély eredményeinek a segítségével megoldjuk a predikciós problémát. Vegyük észre, hogy e feladat megoldásához elegendő a Wold felbontást effektív leírása, azaz elég explicit módon megadni az (1.3) képletben szereplő c_k konstansokat és V_k valószínűségi változókat. (Lásd az alábbi feldatatot.)

Feladat: Legyen megadva egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, (reguláris) stacionárius Gauss sorozat $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}$ Wold féle felbontása. Ekkor egy X_m, $m \ge 1$ valószínűségi változó optimális becslése az X_n, $n \le 0$, valószínűségi változók segítségével, azaz X_m ortogonális vetülete a $B(X_n,\, n \ge 0)$ altérre egyenlő az $\hat{X}_m = \sum\limits_{k=m}^{\infty} c_k V_{m-k}$ valószínűségi változóval, a becslés szórásnégyzete pedig $\sum\limits_{k=0}^{m-1} c_k^2$.

Segítség: Vegyük észre, hogy a Wold felbontás tulajdonságai alapján $B(X_n,\, n \le 0) = B(V_n,\, n \le 0)$.

Reguláris, stacionárius Gauss folyamatok előállítását keressük, $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, mozgóátlag alakban, és azt is szeretnénk meghatározni, hogy hogyan tudjuk jellemezni a reguláris, stacionárius sorozatokat e sorozatok kovariancia függvényének vagy spektrál mértékének a segítségével. Külön érdekel minket egy reguláris stacionárius sorozat Wold felbontása. Részletesebb jelölésekkel a következő feladatot vizsgáljuk.

Legyen X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, egy stacionárius Gauss sorozat. Célunk az ilyen sorozatok előállítása $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$ alakú mozgó átlag formában, — feltéve, hogy ez lehetséges, — ahol W_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, független standard normális eloszlású valószínűségi változók, a d_k együtthatók pedig valós számok. E mozgó átlag előállítások közül különösen a Wold felbontás érdekel minket. Nem nehéz belátni, hogy minden mozgó átlagként előállítható stacionárius sorozat reguláris. Másrészt, minden reguláris stacionárius sorozat előállítható ilyen alakban. Ez az állítás következik a korábban kimondott, de csak a kiegészítésben bizonyított eredményből a Wold felbontás létezéséről. Viszont egyelőre nincs jellemzésünk a reguláris stacionárius folyamatokról. Így egyik célunk valójában az, hogy jellemezzük a reguláris stacionárius folyamatokat. Később fogunk ilyen jellemzést adni a stacionárius folyamatok spektrál mértéke segítségével.

A fenti feladat vizsgálatában érdemes bevezetni az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ L_2-teret, ahol $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra és λ a Lebesgue mérték a $[-\pi,\pi)$ intervallumon. Definiáljuk e térnek egy természetes, az X_n stacionárius sorozat mozgó átlag felbontását jellemző izomorfiáját a $B(X_n,\, -\infty < n < \infty)$ Hilbert térbe. Ennek érdekében vezessük be az $e_k(t) = e^{ikt}$, $-\pi \le t < \pi$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ függvényeket az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ téren, és e tér $J(e_k(t)) = J(e^{ikt}) = W_k$,

$$J\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k e_k(t)\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} u_k W_k, \qquad \sum_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 < \infty,$$

leképezését a $B(W_n, -\infty < n < \infty)$ Hilbert-térbe, ahol a W_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, valószínűségi változók megegyeznek a vizsgált X_n stacionárius Gauss sorozatnak $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$ alakú előállításában szereplő W_n független, standard normális eloszlású valószínűségi változókkal. Nem nehéz belátni, hogy ez a J transzformáció az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ L_2 tér és a $B(W_n, -\infty < n < \infty) \supset B(X_n, -\infty < n < \infty)$ Hilbert tér egy izomorfiája. (Vegyük észre, hogy az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ L_2 tér elemei a $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} u_k e^{ikt}$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$, alakú függvények, mert az $e_k(t) = e^{ikt}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak az $L_2\left([-\pi,\pi), \mathcal{B}, \frac{\lambda}{2\pi}\right)$ L_2 térben. Másrészt a W_k, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, valószínűségi változók ortonormált bázist alkotnak a $B(W_n, -\infty < n < \infty)$ térben. Ezért e tér elemei felírhatóak egyértelmű módon $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} u_k W_k$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} |u_k|^2 < \infty$ alakban.)

Célunk először az, hogy az $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k} = J\left(\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e_{n-k}(t)\right)$ jellemzésben meghatározzuk a d_k konstansokat. Ha ezt megadjuk, akkor képesek leszünk véletlen integrálok segítségével magát a mozgó átlagot is előállítani. E vizsgálatok segítségével képesek leszünk a lehetséges mozgó átlagok jó leírására, speciálisan a Wold felbontás megadására.

Tekintsük egy X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, (reguláris) stacionárius sorozat egy $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$ mozgó átlag előállítását, és vegyük az ezen mozgóátlag reprezentáció segítségével definiálható

$$h(t) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{itk}, \quad \sum_{k=0}^{\infty} |d_k|^2 < \infty, \quad -\pi \le t \le \pi, \tag{a1}$$

függvényt. Mivel a d_k együtthatók valósak ezért teljesül a

$$h(-t) = \overline{h(t)} \quad \text{minden } -\pi \le t \le \pi \text{ számra} \tag{a2}$$

azonosság. Továbbá vegyük észre, hogy a mozgó átlag tulajdonság és a Parseval azonosság alapján, bevezetve a $d_k = 0$, ha $k < 0$ jelölést az (a1) formulában szereplő együtthatók kiterjesztéseként, az alábbi azonosságot kapjuk: (Tekintsük csak az $n \ge 0$ esetet.)

$$\begin{aligned} EX_jX_{n+j} = EX_0X_n &= E\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}\right)\overline{\left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{-k}\right)} \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} d_{n+k}\bar{d}_k = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} h(t)\bar{h}(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{int}|h(t)|^2\,dt \end{aligned} \tag{3.1}$$

minden $n \geq 0$ egész számra. Az (a2) tulajdonság alapján $|h^2(t)| = |h^2(-t)|$. Ezen tény, a (3.1) formula valamint egy stacionárius sorozat spektrál mértékének egyértelműségéből következik, hogy a mozgó átlag formában előállított stacionárius sorozatnak létezik spektrál sűrűség függvénye, és az megadható $g(t) = \frac{|h^2(t)|}{2\pi}$, $-\pi \leq t \leq \pi$, alakban. Tehát azt kaptuk, hogy az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozatnak létezik $g(t) = \frac{dG(t)}{dt}$ spektrál sűrűségfüggvénye, és

$$\frac{|h^2(t)|}{2\pi} = g(t), \quad \text{ahol } g(t) \text{ az } X_n,\ n = 0 \pm 1, \dots, \text{ sorozat spektrál sűrűség függvénye.} \tag{a3}$$

Az alábbi lemmában összefoglaljuk a fenti érvelés segítségével kapott eredményeket.

3.1. Lemma. *Létezzen egy X_n stacionárius sorozatnak egy $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, alakú mozgó átlag reprezentációja, ahol W_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, független standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata, és a d_n, $n = 0, 1, 2 \dots$ együtthatók valós számok. Ekkor az X_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius sorozatnak létezik $g(t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$, spektrál sűrűség függvénye, és létezik egy komplex szám értékű $h(t)$ függvény, amely teljesíti az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságokat ezzel a $g(t)$ függvénnyel.*

A 3.1. Lemma szükséges feltételt adott arra, hogy egy stacionárius sorozat előállítható legyen mozgó átlag formában valamely d_n, $n = 0, 1, 2, \dots$, együtthatók segítségével. Be fogunk látni egy 3.2. Lemmát, amely azt állítja, hogy a fent megfogalmazott feltételek egyben elégségesek is ahhoz, hogy egy stacionárius sorozatot előállíthassunk adott tulajdonságú mozgó átlag formájában, sőt véletlen spektrál mértékek szerinti integrálok segítségével meg is ad egy ilyen reprezentációt.

Hangsúlyozni szeretném, hogy a $h(t)$ függvény (a1) előállításában speciális alakú Fourier sor szerepel, olyan amelyik csak $k \geq 0$ paraméterű e^{ikt} alakú trigonometrikus függvényeket tartalmaz. Ez az a tulajdonság, amely miatt az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságokat teljesítő $h(t)$ függvények megkeresésében a komplex függvénytan módszerei nagyon hasznosnak bizonyultak. Emlékeztetni szeretnék továbbá arra, hogy mint azt a Wold felbontás létezését kimondó tétel után megfogalmazott 2. feladatban megfogalmaztam, a Wold felbontásnak megvan az az extremum tulajdonsága egy stacionárius sorozat mozgó átlag előállításai között, hogy ennek a legnagyobb a konstans együtthatója. Mint látni fogjuk, ez a tény segít a Wold felbontás megtalálásában.

Megjegyzés. Nem nehéz belátni a 3.1. Lemma olyan változatát, amely annak adja meg a szükséges (valójában szükséges és elégséges) feltételét, hogy egy X_n stacionárius Gauss folyamat megadható legyen $X_n = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} d_k W_{n-k}$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} d_k^2 < \infty$, alakban. Ilyen reprezentáció megadható, ha az X_n stacionárius sorozatnak létezik $g(t)$, $-\pi \leq t \leq \pi$, spektrál sűrűségfüggvénye, és az teljesíti az (a2) és (a3) feltételeket a $h(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} d_k e^{ikt}$ függvénnyel. A lényeges különbség ezen állítás és a 3.1. Lemma között az, hogy most nem tesszük fel az (a1) feltételt, és a $h(t)$ függvény definiciójában $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}$ összegezést alkalmaztunk a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ összegezés helyett. Az, hogy az (a1) formulában $\sum\limits_{k=0}^{\infty}$ összegezést alkalmaztunk nagyon lényeges. Egyrészt ennek biztosítása fogja okozni a fő nehézséget későbbi vizsgálatainkban, másrészt ez az oka annak, hogy komplex függvénytani módszereket alkalmazhatunk.

Az alábbi 3.2. Lemmában megfogalmazom azt az állítást, amely szerint egy stacionárius sorozat mozgó átlag előállításának a 3.1. Lemmábban megfogalmazott szükséges feltétele egyben elégséges feltétel is.

3.2. Lemma. *Legyen X_n, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, stacionárius Gauss sorozat 0 várható értékű valószínűségi változókkal, amelynek van $g(t)$, $-\pi\le t\le\pi$, spektrál sűrűség függvénye, és létezik az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságokat teljesítő $h(t)$ függvény és d_k, $k=0,1,2,\dots$, számsorozat. Jelölje $G(\cdot)$ a $g(t)$ spektrál sűrűség függvényhez tartozó spektrál mértéket, és tekintsük az X_n stacionárius sorozat $X_n=\int e^{int}Z_G(\,dt)$, $n=\dots,-1,0,1,\dots$, alakú előállítását alkalmas az X_n sorozat G spektrál mértékének megfelelő Z_G véletlen spektrál mérték szerinti integrál segítségével. (Tudjuk, hogy ilyen előállítás lehetséges.) Vegyük az $u(t)=\frac{1}{\overline{h(t)}}$ függvényt, és a véletlen spektrál mérték szerinti integrálok helyettesítési szabályáról szóló 2.3. lemmában definiált $Z_{G,u}$ véletlen spektrál mértéket, ahol $h(t)$ az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságot teljesítő függvény. Ekkor definiálhatjuk a*

$$W_n=\int e^{int}Z_{G,u}(\,dt)=\int\frac{e^{int}}{\overline{h(t)}}Z_G(\,dt),\quad n=\dots,-1,0,1,\dots,\quad u(t)=\frac{1}{\overline{h(t)}}\tag{3.2}$$

valószínűségi változókat, és azok függetlenek és standard normális eloszlásúak. Ezenkívül az X_n sorozat előállítható

$$X_n=\sum_{k=0}^{\infty}d_kW_{n-k},\quad n=\dots,-1,0,1,\dots\tag{3.3}$$

alakban, ahol d_k, $k=0,1,2,\dots$, az (a1) formulában szereplő (valós) számok sorozata.

Bizonyítás: Fel fogom használni egy a 3.3. tételben megfogalmazott fontos komplex függvénytani eredménynek azt a következményét, amely szerint egy az (a1) tulajdonságot teljesítő $h(t)$ függvény a $[-\pi,\pi]$ intervallumon majdnem mindenütt különbözik nullától. Ezért véve az $u(t)=\frac{1}{\overline{h(t)}}$ függvényt, teljesül a $G_u(A)=\int_A\frac{1}{|h^2(t)|}G(\,dt)=\frac{1}{2\pi}\lambda(A)$ azonosság minden $A\in\mathcal{B}$, $A\subset[-\pi,\pi]$ halmazra az (a3) tulajdonság alapján. Ezért létezik a G_u spektrál mérték, és $G_u=\frac{1}{2\pi}\lambda$, ahol λ a Lebesgue mértéket jelöli a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. Innen, és a (2.5) képlet alkalmazásából $f(t)=e^{int}$ választással következik a (3.2) formula, és az hogy az e formulában definiált (együttesen) normális eloszlású, nulla várható értékű W_n valószínűségi változók 1 szórásúak, és korrelálatlanok. Ezért a (3.2) képletben valóban egy független standard normális eloszlású valószínűségi változókból álló sorozatot definiáltunk.

Az (a2) tulajdonságból következik, hogy a d_k számok valósak. (Vegyük azt is észre, hogy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k^2 < \infty$, mivel $\int |h^2(t)|\, dt = \int g(t)\, dt < \infty$.) A (3.2) képletből következik, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k} = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \int \frac{e^{i(n-k)t}}{\overline{h(t)}} Z_G(\,dt) = \int \frac{e^{int}}{\overline{h(t)}} \left(\sum_{k=0}^{\infty} d_k e^{-ikt} \right) Z_G(\,dt).$$

(Az utolsó formulában alkalmazott végtelen összegzés is jogos, ha az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn tekintett L_2 normában vett konvergenciát tekintjük.) Az utolsó azonosságból, valamint az (a1) és (a2) képletből kapjuk, hogy

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k} = \int e^{int} \frac{h(-t)}{\overline{h(t)}} Z_G(\,dt) = \int e^{int} Z_G(\,dt) = X_n.$$

Innen következik a (3.3) formula. A Lemma bizonyítását befejeztük.

1. megjegyzés. A (3.3) formulából látszik, hogy a Lemmában megkonstruált mozgóátlagban szereplő W_n valószínűségi változók teljesítik a $W_n \in B(X_j,\, -\infty < j < \infty)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$ tulajdonságot. A Wold felbontást az tünteti ki a többi mozgó átlag reprezentáció közül, hogy a benne szereplő V_n valószínűségi változók még az erősebb $V_n \in B(X_j,\, -\infty < j \le n)$ tulajdonságot is teljesítik.

2. megjegyzés. Az X_n sorozat 3.2. lemmában megadott mozgóátlag előállításban szereplő W_n valószínűségi változók definiciója nem annyira ad hoc jellegű, mint ahogy az első pillanatban gondolnánk. Valóban, írjuk fel a mozgó átlag alakban előállítani kivánt stacionárius sorozat elemeit $X_n = \int e^{int} Z_G(\,dt)$ $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ véletlen spektrál mérték szerinti integrál alakban, és keressük a W_n független standard normális valószínűségi változókat $W_n = \int e^{int} Z_0(\,dt)$ alakban, ahol Z_0 alkalmas a $[-\pi, \pi]$ intervallumon tekintett $\frac{1}{2\pi}\lambda$ spektrál mértékhez tartozó véletlen spektrál mérték. Ekkor az $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k W_{n-k}$ azonosság felírható $\int e^{int} Z_G(\,dt) = \int e^{int} h(-t) Z_0(\,dt)$, $h(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e^{ikt}$ alakban is. Ennek az azonosságnak minden $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ indexre teljesülnie kell. Be lehet látni, hogy ezt csak $Z_G(\,dt) = h(-t) Z_0(\,dt) = \overline{h(t)} Z_0(\,dt)$ választással érhető el. Ezt a választást alkalmaztuk a (3.3) formulában.

Az ismertetett eredmények alapján a predikciós feladat legfontosabbb része az (a1), (a2) és (a3) feltételeket teljesítő $h(t)$, $-\pi \le t \le \pi$ függvények megtalálása, illetve ezek közül azoké a függvényeké, amelyekre a konstans tag $|d_0|$ abszolút értéke a maximumot veszi fel. Ez utóbbi feladat megoldása a Wold felbontás megtalálása érdekében szükséges. Tudjuk az eddigiek alapján is, hogy ez a maximum felvétetik, de nem tudjuk, hogy ez az előírás egyértelműen meghatározza-e a $h(t)$ függvényt.

A feladat megoldása érdekében egy az (a1), (a2), (a3) feltételt teljesítő $h(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e^{ikt}$ függvényhez társítsuk a $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d^k z^k$ a $\{z\colon\ |z| < 1\}$ egységkörön analitikus függvényt, és vezessük be a $h(t)$ függvény $\tilde{h}(\varphi)$ "feltekerését" a $\{z = e^{i\varphi}, -\pi \le$

$\varphi < \pi\}$ körvonalra a $\tilde{h}(e^{i\varphi}) = h(\varphi)$ képlettel. Hasonlóan definiáljuk egy stacionárius sorozat $g(t)$ spektrál sűrűségének (feltéve, hogy létezik ez a spektrál sűrűség) a $\tilde{g}(e^{i\varphi}) = g(\varphi)$, $-\pi \le \varphi < \pi$, "feltekerését" az egységkörre. A komplex függvénytan bizonyos eredményeiből következik, hogy a $H(z)$, $|z| < 1$, függvény $\lim\limits_{r\to 1} H(re^{i\varphi})$ radiális limesze majdnem minden $-\pi \le \varphi < \pi$ számra létezik, és egyenlő a $h(\varphi) = \tilde{h}(e^{i\varphi})$ függvénnyel. Ez azt jelenti, hogy elég a $h(t)$ függvények helyett a $H(z)$ függvényeket megtalálni. Ez utóbbi feladatot a komplex függvénytan módszereivel egyszerűbb megoldani.

Szeretném hangsúlyozni, hogy a $H(z)$ függvény radiális limeszének létezéséről előbb megfogalmazott állítás nem nyílvánvaló, hanem külön indoklásra szorul. Az eredeti feltételek csak azt biztosítják, hogy a $H(z)$ függvény az egységkör belsejében analitikus. Az, hogy egy az egységkör belsejében analitikus függvény hogyan viselkedik az egységkör határán a komplex függvénytan nehéz kérdéseihez tartozik. Jelen esetben az az észrevétel könnyítheti meg a probléma vizsgálatát, hogy az adott tulajdonsággal rendelkező analitikus függvények a $\mathcal{H}_2$ Hardy osztályba tartoznak, amelyről sokat lehet tudni. Bár számunkra csak a $\mathcal{H}_2$ osztály jellemzése lesz érdekes, megadom a $\mathcal{H}_p$ osztályok definicióját tetszőleges $0 < p \le \infty$ paraméterre.

Hardy függvényosztályok definiciója. *A $\mathcal{H}_p$ függvényosztály, $0 < p \le \infty$, azokból a $\{z\colon |z| < 1\}$ egységkörön analitikus $H(z)$ függvényekből áll, amelyekre*

$$\|H_p\|^p \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{r<1} \|H(re^{i\varphi})\|_p^p = \sup_{r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |H(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi < \infty, \quad \text{ha } 0 < p < \infty,$$

és

$$\|H_\infty\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{r<1} \|H(re^{i\varphi})\|_\infty = \sup_{r<1,\, -\pi\le\varphi<\pi} |H(re^{i\varphi})| < \infty, \quad \text{ha } p = \infty.$$

Nem nehéz belátni, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k|^2 < \infty$ feltétel miatt $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ eleme a $\mathcal{H}_2$ függvény osztálynak. Számunkra a következő komplex függvénytani tétel lesz különösen hasznos. Ennek bizonyítását egy kiegészítésben ismertetem, ahol néhány további komplex függvénytani magyarázatot is teszek.

3.3. Tétel. Tétel Hardy féle $\mathcal{H}_2$ függvényosztályok jellemzéséről. *Egy $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ hatványsorral megadott analitikus függvény akkor és csak akkor van a $\mathcal{H}_2$ Hardy függvényosztályban, ha teljesül a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k|^2 < \infty$ feltétel. Tekintsünk egy $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k|^2 < \infty$, a $\mathcal{H}_2$ függvényosztályba tartozó függvényt, valamint a $h(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e^{ik\varphi}$, $-\pi \le \varphi \le \pi$, függvényt. Ekkor*

(i) $\lim\limits_{r\to 1} H(re^{i\varphi}) = h(\varphi)$ majdnem minden $-\pi \le \varphi \le \pi$ számra. Továbbá a $H_r(\varphi) = H(re^{i\varphi})$ függvények a (Lebesgue mérték szerinti) L_2 normában is konvergálnak a $h(\varphi)$ függvényhez, ha $r \to 1$. (Az (i) pont állítását úgy is megfogalmazhatjuk, hogy

a $H(z)$ függvény radiális limesze létezik, és egyenlő a $h(\varphi)$ függvénnyel mind a majdnem mindenütt mind az L_2 norma szerint.)

(ii) Ha a $H(z)$ függvény nem azonosan nulla, akkor $\int_{-\pi}^{\pi} |\log|h(\varphi)||\,d\varphi < \infty$. Speciálisan, ebben az esetben a $h(\varphi)$ függvény csak nulla mértékű halmazon lehet nulla.

Megjegyzés. A fenti tétel (ii) pontjából az is következik, hogy egy az (a1) tulajdonságot teljesítő $h(t)$ függvény csak null mértékű halmazon nulla. Ezt a tényt használtuk fel a 3.2. Lemma bizonyításában.

Szeretnénk jellemezni azokat a $[-\pi,\pi)$ intervallumon definiált (négyzetesen integrálható) $h(\varphi)$ függvényeket, amelyek $h(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e^{ik\varphi}$, $\sum\limits_{k=-0}^{\infty} |d_k^2| < \infty$, alakban írhatóak. Megfogalmazom a Hardy féle $\mathcal{H}_2$ osztályok jellemzéséről szóló tétel alábbi következményét, amely az ilyen függvényeknek számunkra hasznos jellemzését adja a $\mathcal{H}_2$ függvény osztály segítségével.

Következmény. *Egy a $[-\pi,\pi)$ intervallumon definiált (négyzetesen integrálható) $h(\varphi)$ függvény akkor és csak akkor írható $h(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e^{ik\varphi}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k^2| < \infty$, alakban, ha létezik olyan $H(z) \in \mathcal{H}_2$ függvény a $\{z\colon |z| < 1\}$ egységkörben, amelyre $\lim\limits_{r\to 1} H(re^{i\varphi}) = h(\varphi)$ majdnem mindenütt (és ebben az esetben az L_2 normában is). A $h(\varphi)$ függvény egyértelműen meghatározza a $H(z)$ függvényt, és az $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ hatványsor formában írható ugyanazokkal a d_k együtthatókkal, amelyek a $h(\varphi)$ függvény $h(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e^{ik\varphi}$ Fourier előállításában szerepelnek.*

Bizonyítás. Ha a $h(\varphi)$ függvény $h(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e^{ik\varphi}$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k^2| < \infty$, alakban írható, akkor a $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$ függvényre $H \in \mathcal{H}_2$, és $\lim\limits_{r\to 1} H(re^{i\varphi)} = h(\varphi)$ a 3.3. tétel alapján. Megfordítva, ha $h(\varphi) = \lim\limits_{r\to 1} H(re^{i\varphi})$ valamely $H \in \mathcal{H}_2$ függvényre, akkor ez a H függvény $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |d_k^2| < \infty$ alakban írható, és $H(re^{i\varphi}) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k r^k e^{ik\varphi}$. Vegyük a $H(re^{i\varphi})$ függvények L_2 limeszét $r \to 1$ határátmenettel. Ez a limesz a $h(\varphi) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k e^{ik\varphi}$ függvény.

Megjegyzés. Néhány vizsgálatban szükségünk lesz annak megmutatására, hogy bizonyos az egységkör belsejében definiált analitikus $H(z)$ függvények a $\mathcal{H}_2$ osztályba tartoznak. Tudjuk, hogy ez a tulajdonság ekvivalens azzal, hogy $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z^k$, és $\sum\limits_{k=10}^{\infty} |d_k^2| < \infty$. De vannak olyan esetek, amikor nem érdemes a $H(z)$ függvény Taylor sorának az együtthatóit vizsgálni, ehelyett egyszerűbb a $H \in \mathcal{H}_2$ relációt úgy bebizonyítani, hogy igazoljuk a $\mathcal{H}_2$ osztály elemeinek definiciójában szereplő $\sup\limits_{r<1}\int_{-\pi}^{\pi}|H(re^{i\varphi})|^2\,d\varphi<\infty$ relációt. Megjegyzem, hogy e szuprémum végessége egyszerűen következik a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}|d_k|^2<\infty$ egyenlőtlenségből. Az is igaz, hogy a szuprémum végességéből következik a fenti egyenlőtlenség, de ennek bizonyítása nehezebb.

Az a probléma érdekel minket, hogy egy stacionárius Gauss sorozat lehetséges $X_n=\sum\limits_{k=0}^{\infty}d_kW_{n-k}$ mozgó átlag előállításában milyen d_k, $k=0,1,\dots$, együtthatósorozatok szerepelnek. Külön érdekel minket az a kérdés, hogy milyen együtthatók szerepelnek a Wold felbontásban. A vizsgálandó probléma része az is, hogy milyen spektrál sűrűséggel rendelkező stacionárius folyamatoknak létezik a sorozat mozgóátlag előállítása. Ez a kérdés úgy is megfogalmazható, hogy milyen spektrál sűrűséggel rendelkező stacionárius folyamatok regulárisak. (A 3.1. Lemmából következik, hogy egy reguláris stacionárius sorozatnak van spektrál sűrűség függvénye.) Láttuk, hogy a felvetett probléma ekvivalens azzal a kérdéssel, hogy egy adott $g(t)$ spektrál sűrűsség függvény esetén, melyek az (a1), (a2) és (a3) tulajdonságokkal rendelkező és a d_k, $k=0,1,\dots$, Fourier együtthatók segítségével definiált $h(t)$ függvények. Az előbb megfogalmazott a Hardy féle $\mathcal{H}_2$ osztályok jellemzéséről szóló tétel segítségével át tudjuk fogalmazni ezt a kérdést egy komplex függvénytani problémává. Az alábbi FELADAT A-ban ezt az átfogalmazást adom meg. Ezután a FELADAT A megoldásával, illetve az ehhez szükséges komplex függvénytani ismeretekkel fogok foglalkozni.

FELADAT A. *Legyen adva egy $g(t)$ spektrál sűrűség függvény. Jellemezzük azokat a komplex számsík egységkörén definiált, a $\mathcal{H}_2$ Hardy osztályba tartozó valós együtthatós $H(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}d_kz^k$ hatványsorokat, amelyeknek $h(\varphi)=\lim\limits_{R\to1}H(Re^{i\varphi})$ radiális limesze teljesíti az $|h^2(\varphi)|=g(\varphi)$, $-\pi\le\varphi\le\pi$, azonosságot majdnem minden $-\pi\le\varphi\le\pi$ számra. Keressük meg az ilyen tulajdonságú függvények közül azokat, amelyekre az origóban felvett érték abszolút értéke maximális. Mely $g(\varphi)$ spektrál sűrűség esetén lesz a fenti tulajdonságokkal rendelkező függvények osztálya nem üres?*

Röviden ismertetem, milyen eredményt fogunk kapni a FELADAT A megoldására, és az milyen lehetőséget ad egy $g(t)$ spektrál sűrűség függvénnyel rendelkező stacionárius Gauss sorozat Wold felbontásának megtalálására. A Wold felbontás megtalálása egyben a predikciós probléma megoldását is jelenti.

A Hardy féle $\mathcal{H}_2$ osztályok jellemzéséről szóló tétel (ii) pontja alapján csak akkor van a FELADAT A-nak megoldása egy $g(\varphi)$ spektrál sűrűség függvény választása esetén, ha teljesül az $\int_{-\pi}^{\pi}|\log|g(\varphi)||\,d\varphi<\infty$ feltétel. Ekkor viszont, mint meg fogjuk mutatni, létezik e feladatnak megoldása, és a (4.5) képletben fel fogjuk explicit módon azt a $H_0(z)$ megoldást, amelyre az origóban felvett érték maximális. Ez egyben meghatározza e függvény keresett $h(\varphi)=\lim\limits_{R\to1}H_0(Re^{i\varphi})$ (radiális) limeszét is. Ezután a $H_0(z)$ függvény hatványsorba fejtésével, illetve a 3.2. lemma, pontosabban a (3.2) formula segítségével a $h(\varphi)$ függvény ismeretében fel tudjuk írni a keresett Wold felbontást. Valójában, a feladat ennél nehezebb, mert a (3.2) formulában felírt véletlen integrál effektív kiszámolása nehézséget okozhat. Ezzel a kérdéssel néhány fontos speciális esetben részletesebben is fogunk foglalkozni. Ez lesz a 6. fejezet legfontosabb témája.

Végül megjegyzem, hogy egy adott $g(\varphi)$ spektrál sűrűség függvény esetén meg lehet adni a FELADAT A-t teljesítő függvényosztály pontos leírását. Ezt az eredményt, noha jelen vizsgálatainkban nem lesz rá szükségünk, ismertetni fogom az 5. fejezetben.

4. A vizsgált komplex függvénytani probléma megoldása.

Elsősorban azt a *FELADAT A*-t teljesítő $H(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} d_k z_k$ függvényt szeretnénk megtalálni, amely az origóban maximális abszolút értéket vesz fel, mert ez adja meg a keresett Wold felbontást. Az a tény, hogy a Wold felbontás létezik, implikálja azt is, hogy a FELADAT A-ban megfogalmazott maximum felvétetik. Az origóban maximális abszolút értéket felvevő az adott osztályban levő függvény megtalálásában hasznos lesz számunkra a következő lemma.

4.1. Lemma. *Legyen $H(z)$ olyan analitikus függvény az egységkörben, amelyiknek van nullhelye valahol az egységkör belsejében. Ekkor létezik olyan $\bar{H}(z)$ analitikus függvény az egységkörben, amely abszolút értékének a radiális limesze megegyezik a $H(z)$ függvény abszolút értékének a radiális limeszével minden olyan pontban, ahol az utóbbi létezik, és teljesíti a $|\bar{H}(0)| > |H(0)|$ szigorú egyenlőtlenséget. Ha a $H(z)$ függvény Taylor sorának minden együtthatója valós szám, akkor a $\bar{H}(z)$ függvény megválasztható úgy, hogy az szintén teljesítse ezt a tulajdonságot.*

Bizonyítás. Ha $H(z_0) = 0$ valamely $|z_0| < 1$ pontban, akkor definiáljuk az $A(z) = \frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}$ függvényt. Ez olyan az egységkört önmagába képző racionális törtfüggvény, amelyik az egységkört önmagába viszi, ezért abszolút értéke a körvonal határán 1, a körvonal belsejében pedig szigorúan kisebb, mint 1. Ezért a $\bar{H}(z) = \frac{H(z)}{A(z)}$ olyan analitikus függvény, amely abszolút értékének a radiális limesze megegyezik a $H(z)$ függvény radiális limeszével az egységkör határának minden olyan pontjában, ahol ez a radiális limesz létezik. Mivel $|A(0)| < 1$, ezért $|\bar{H}(0)| > |H(0)|$. Az, hogy a $H(z)$ függvény Taylor sorának együtthatói valós számok ekvivalens azzal, hogy $\overline{H(z)} = H(\bar{z})$. Ebben az esetben a $H(z_0) = 0$ azonosságból következik, hogy $H(\bar{z}_0) = 0$. Ha $\operatorname{Im} z_0 \neq 0$, akkor vezessük be az előbb definiált $A(z)$ függvény mellett az $\bar{A}(z) = \frac{z-\bar{z}_0}{1-zz_0}$ függvényt is, és legyen $\bar{H}(z) = \frac{H(z)}{A(z)\bar{A}(z)}$, ha $H(z)$ valós együtthatós Taylor sor. Ez a függvény teljesíti a Lemmában előírt feltételeket. A lemmát bebizonyítottuk.

Feltehetjük, hogy az $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, Wold felbontásnak megfelelő $H_0(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ a FELADAT A-ban keresett függvény olyan, hogy $c_0 > 0$, azaz az origóban maximális abszolút értéket felvevő függvény az origóban pozitív értéket vesz fel. Valóban, ha a $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_k$ Wold felbontásban $c_0 < 0$ lenne akkor a Wold felbontást felírhatjuk $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-c_k)(-V_k)$ alakban is $-c_0 > 0$ együtthatóval. A $c_0 = 0$

eset nem lehetséges, hiszen mint az előző lemmában láttuk a $H_0(z)$ függvény sehol sem tűnik el az egységkörben. Továbbá azt is tudjuk a Hardy féle $\mathcal{H}_2$ osztályok jellemzéséről szóló tétel (ii) pontja alapján, hogy a FELADAT A-ban fel kell tenni, hogy az abban tekintett $g(\vartheta)$ spektrál sűrűségnek teljesíti az $\int_{-\pi}^{\pi} |\log g(\vartheta)|\,d\vartheta < \infty$ relációt. Ellenkező esetben nincsen a FELADAT A-ban előírt tulajdonságokat teljesítő függvény.

Felírom, felhasználva a komplex függvénytan néhány klasszikus eredményét egy olyan $H_0(z)$ függvény képletét, amely természetes jelölt arra a függvényre, amely teljesíti a FELADAT A feltételeit, és a FELADAT A feltételeit teljesítő függvények origóban felvett értékeinek a maximuma egyenlő ennek a $H_0(z)$ függvénynek az értékével az origóban. Tudjuk az előző lemma alapján, hogy olyan $H_0(z)$ függvényt kell megadnunk, amely sehol sem tűnik el az egységkör belsejében. Ilyen függvénynek létezik logaritmusa, ezért lehetséges a keresett $H_0(z)$ függvény helyett először annak logaritmusát a $\log H_0(z)$ függvényt definiálni. Idézzük fel, hogy egy $z = Re^{i\varphi} \neq 0$ komplex számra $\log z = \log R + i\varphi$. A φ szám csak moduló 2π van meghatározva, de egy a komplex egységkörön definiált sehol sem eltünő analitikus $f(z)$ függvény $\log f(z)$ logaritmusát definiálhatjuk úgy, a nem egyértelműen meghatározott imaginárius rész alkalmas megadásával, hogy a $\log f(z)$ függvény is analitikus legyen. Az analitikus $\log H_0(z) = u(z) + iv(z)$ függvény $u(z)$ valós része harmonikus függvény. (Egy $u(x, y)$ függvény harmonikus egy G tartományon, ha a tartomány minden $(x, y) \in G$ pontjában teljesül a $\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 0$ azonosság.)

Az elmondottak alapján olyan $H_0(z)$ függvényt keresünk, amelynek $\log H_0(z) = u(z) + iv(z)$ logaritmusának $u(z) = \operatorname{Re} \log H(z) = \log |H(z)|$ reális része teljesíti a $\lim\limits_{R\to 1} u(Re^{i\varphi}) = \frac{1}{2} \log g(\varphi)$ feltételt. Ezenkívül az $u(z)$ függvény harmonikus. Olyan $H_0(z)$ függvényt keresünk, amelyre $H_0(0)$ valós szám, és $H_0(0) > 0$. Ez azt jelenti, hogy $\operatorname{Im} \log H_0(0) = v(0) = 0$, ha a $\log H_0(z)$ logaritmusnak a megfelelő ágát vesszük. Ennek alapján felírunk egy olyan $u_0(z)$ harmonikus függvényt az egységkörön, amelynek határértéke a peremen a $u(e^{i\varphi}) = \frac{1}{2} \log g(\varphi)$ függvény, majd definiáljuk ennek azt az egyértelmű analitikus $\log H_0(z) = u(z)+iv(z)$ analitikus kiegészítését, amelyre $v(0) = 0$. Annak érdekében, hogy megadjunk egy ilyen tulajdonságú függvényt, felidézek néhány fontos komplex függvénytani eredményt. Elsősorban a következő tételre lesz szükségünk.

4.2. Tétel. Tétel az egységkör határán előírt értéket felvevő harmonikus függvények előállításáról és azok analitikus kiegészítéséről. *Legyen adva egy $u_0(\vartheta)$, $-\pi \leq \vartheta \leq \pi$, a $[-\pi, \pi]$ intervallumon integrálható függvény. Ekkor a $\{z\colon z = Re^{i\varphi}, 0 \leq R < 1\}$ egységkörön definiált*

$$\begin{aligned} u(z) = u(Re^{i\varphi}) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} \right) u_0(\vartheta)\, d\vartheta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - R^2}{1 + R^2 - 2R\cos(\vartheta - \varphi)} u_0(\vartheta)\, d\vartheta \end{aligned} \tag{4.1}$$

függvény, amelyet azonosítunk az $u(x, y) = u(x+iy) = u(z)$, ha $z = x+iy$, függvénnyel harmonikus függvény a komplex egységkörön, és ennek radiális limesze teljesíti a

$$\lim_{R\to 1} u(Re^{i\vartheta}) = u_0(\vartheta) \quad \textit{majdnem minden } -\pi \leq \vartheta \leq \pi \textit{ számra} \tag{4.2}$$

feltételt. Ha $u_0(\vartheta)$ valós értékű függvény, akkor azt az egyértelműen meghatározott $F(z) = u(z) + iv(z)$ analitikus függvényt, amelynek valós része megegyzik a fenti $u(z)$ függvénnyel, és imaginárius része teljesíti az $\operatorname{Im} F(0) = v(0) = 0$ feltételt az

$$F(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z} u_0(\vartheta)\, d\vartheta \tag{4.3}$$

képlet adja meg.

E fejezetben nem tárgyalom a fenti tétel bizonyításának a részleteit, csak felidézem azokat az alapvető eredményeket, amelyeken e tétel bizonyítása alapul. Annak bizonyítása, hogy a (4.1) formulában definiált $u(z)$ függvény harmonikus azon a tényen alapul, hogy a (4.1) formula integráljában szereplő magfüggvény, azaz a $P(R,\varphi) = \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi)}$ úgynevezett Poisson féle magfüggvény teljesíti a következő tulajdonságokat.

4.3. Tétel. Tétel a Poisson féle magfüggvény tulajdonságairól. *A $P(R,\varphi) = \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi)}$, $0 \le R < 1$, $-\pi \le \varphi \le \pi$, Poisson féle magfüggvény, amely megadható $P(R,\varphi) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} R^{|n|} e^{in\varphi}$ alakban is, teljesíti a következő tulajdonságokat:*

(i) A $\bar{P}(x,y) = P(R,\varphi)$, ahol az $R = R(x,y)$, $\varphi = \varphi(x,y)$ számokat az $x + iy = Re^{i\varphi}$ reláció határozza meg, harmonikus függvény az $\{(x,y)\colon x^2 + y^2 < 1\}$ egységkörön.

ii) $P(R,\varphi) > 0$ minden $0 \le R < 1$, $-\pi \le \varphi \le \pi$, argumentumra.

(iii) $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P(R,\varphi)\, d\varphi = 1$ minden $0 \le R < 1$ számra.

(iv) $\lim\limits_{R\to 1} P(R,\varphi) = 0$, ha $\varphi \ne 0$, és a konvergencia egyenletes a $\delta \le |\varphi| \le \pi$ halmazon minden $\delta > 0$ számra.

(v) $\frac{1-R}{1+R} \le P(R,\varphi) \le \frac{1+R}{1-R}$ minden $0 \le R < 1$ számra.

A fenti eredmény segítségével belátható, hogy a (4.1) formulában definiált $u(z)$ függvény valóban harmonikus. Az a tény, hogy e függvény radiális limesze az $u_0(\vartheta)$ függvénnyel egyezik meg majdnem minden ϑ számra következik az alábbi az irodalomban Fatou tételnek nevezett fontos eredményből, amelyet szintén bizonyítás nélkül ismertetek.

4.4. Tétel. Fatou tétel. *Legyen μ korlátos változású mérték a $[-\pi,\pi]$ intervallum Borel mérhető halmazain. Akkor az*

$$u(Re^{i\varphi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - R^2}{1 + R^2 - 2R\cos(\vartheta - \varphi)} \mu(\, d\vartheta) \tag{4.4}$$

(Poisson) integrál, amely harmonikus függvény az egységkörben, teljesíti a

$$\lim_{R\to 1} u(Re^{i\varphi}) = \mu'(\varphi)$$

relációt a $\mu'(\varphi) = \lim \frac{\mu(I)}{\lambda(I)}$ határértékkel, ahol az I intervallumrendszer tetszőleges a φ pontra húzódó intervallumok rendszere, minden olyan φ pontban, amelyikben a fenti $\mu'(\varphi)$ határérték létezik. (A korlátos változású függvények definiciója megtalálható a Kiegészítés b) részében.)

Speciálisan, ha $g(\vartheta)$ integrálható függvény a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, akkor a (4.4) formulát alkalmazva a $\mu(d\vartheta) = g(\vartheta)\,d\vartheta$ mérték választással azt kapjuk, hogy ebben az esetben $\lim\limits_{R\to 1} u(Re^{i\varphi}) = g(\varphi)$ majdnem minden φ argumentumra.

Nem a (4.1) formulával definiált függvény az egyetlen egységkörön harmonikus függvény, amely teljesíti a (4.2) feltételt. Valóban, ha tekintünk tetszőleges az egységkörvonalon definiált korlátos változású szinguláris μ mértéket, akkor nem nehéz belátni a Fatou tétel segítségével, hogy

$$v(z) = u(z) + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - R^2}{1 + R^2 - 2R\cos(\vartheta - \varphi)} \mu(\,d\vartheta)$$

szintén a (4.2) feltételt teljesítő harmonikus függvény. Célunk annak megmutatása, hogy amennyiben a (4.1) formulában definiált $u(z)$ függvényt tekintjük $u_0(\vartheta) = \frac{1}{2}\log g_0(\vartheta)$ választással, majd ennek a (4.3) formulában bevezetett analitikus kiegészítését, akkor ez a függvény választható annak a $H_0(z)$ függvény $\log H_0(z)$ logaritmusának, amely teljesíti a FELADAT A feltételeit, sőt az is igaz rá, hogy az origóban felvett értéke egyenlő azon függvények origóban vett értékei abszolút értékének a maximumával, amelyek teljesítik a FELADAT A feltételeit. Ez azt jelenti, hogy a (4.1) formulában definiált függvényhez hozzáadhatnánk még a Poisson magfüggvénynek egy szinguláris mérték szerinti integrálját, és ilyen módon is egy a FELADAT A feltételeit teljesítő függvényt kapnánk, de ezt nem érdemes tenni.

Azt kívánjuk belátni, hogy az $\int_{-\pi}^{\pi} |\log g(\vartheta)|\,d\vartheta < \infty$ feltétel teljesülése esetén a

$$H_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta} + z}{e^{i\vartheta} - z}\frac{1}{2}\log g(\vartheta)\,d\vartheta\right\} \tag{4.5}$$

függvény teljesíti a FELADAT A feltételeit, és ez az optimális megoldás, azaz $H_0(0) \geq |H(0)|$ tetszőleges a FELADAT A feltételeit teljesítő $H(z)$ függvényre.

Először azt kell megmutatni, hogy a (4.5) formulában definiált $H_0(z)$ függvény teljesíti a FELADAT A feltételeit. A függvény konstrukciójából világos, hogy $H_0(z)$ az egységkörön analitikus függvény, amelyre teljesül a $\lim\limits_{R\to 1} |H_0(Re^{i\vartheta})|^2 = g(\vartheta)$ reláció. E lépésben felhasználjuk azt, hogy alkalmazhatjuk az előírt határfeltételt teljesítő analitikus függvények (4.3) formulában megadott előállítását $u_0(\vartheta) = \frac{1}{2}\log g(\vartheta)$ választással, mert feltettük, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} |\log g(\vartheta)|\,d\vartheta < \infty$.

Továbbá, abból hogy $g(\vartheta) = g(-\vartheta)$ következik, hogy $\log H_0(\bar z) = \overline{\log H_0(z)}$, ahonnan $H_0(\bar z) = \overline{H_0(z)}$, és $H_0(z)$ Taylor sorának együtthatói valós számok. Be kell még látnunk azt, hogy a (4.5) formulában definiált $H_0(z)$ függvény eleme a $\mathcal{H}_2$ Hardy osztálynak. Ennek az állításnak a helyességét mondja ki az alábbi Lemma.

4.5. Lemma. *Legyen $g(\vartheta)$ olyan függvény a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, amely majdnem mindenütt nagyobb, mint nulla, $\int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta)\,d\vartheta<\infty$, és $\int_{-\pi}^{\pi} |\log g(\vartheta)|\,d\vartheta<\infty$. Ekkor a (4.5) képletben definiált $H_0(z)$ függvény teljesíti az*

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} |H_0(Re^{i\varphi})|^2\,d\varphi &= \int_{-\pi}^{\pi} \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}\log g(\vartheta)\,d\vartheta\right\}d\varphi\\ &\le \int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta)\,d\vartheta \qquad (4.6)\end{aligned}$$

egyenlőtlenséget minden $0<R<1$ számra. Ezért $H_0(z)\in\mathcal{H}_2$.

Bizonyítás. Lássuk először be a (4.6) formulában szereplő azonosságot.

A (4.5) formula alapján

$$|H_0(z)|^2 = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\right)\log g(\vartheta)\,d\vartheta\right\}.$$

Másrészt, ha $z=Re^{i\varphi}$, akkor

$$\operatorname{Re}\left(\frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\right) = \frac{\operatorname{Re}\left[(e^{i\vartheta}+Re^{i\varphi})(e^{-i\vartheta}-Re^{-i\varphi})\right]}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)} = \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}.$$

Ezt az azonosságot beírva a $|H_0(z)|^2=|H_0(Re^{i\varphi})|^2$ mennyiséget kifejező formulába, majd integrálva a φ változó szerint megkapjuk a kívánt azonosságot.

Annak érdekében, hogy a (4.6) formulában szereplő egyenlőtlenséget is belássuk definiáljuk először rögzített $-\pi\le\varphi\le\pi$ és $0<R<1$ számokra a $\mu(\,d\vartheta)=\mu_{\varphi,R}(\,d\vartheta)=\frac{1}{2\pi}\frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}\,d\vartheta$ mértéket a $[-\pi,\pi]$ intervallumon. A Poisson féle magfüggvény tulajdonságairól szóló tétel (iii) pontja szerint μ valószínűségi mérték. Ezért alkalmazva az $\exp\{\int f(\vartheta)\,d\mu(\vartheta)\}\le\int\exp\{f(\vartheta)\}\,d\mu(\vartheta)$, ha μ valószínűségi mérték, Jensen egyenlőtlenséget a (konvex) exponenciális és az $f(\vartheta)=\log g(\vartheta)$ függvényre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}\log g(\vartheta)\,d\vartheta\right\}\\ &\qquad\le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}g(\vartheta)\,d\vartheta, \quad -\pi\le\varphi\le\pi. \qquad (+)\end{aligned}$$

Integrálva ezt az egyenlőtlenséget φ szerint kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_0(Re^{i\varphi})|^2\,d\varphi \le \int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}g(\vartheta)\,d\vartheta\,d\varphi.$$

Felcserélve az integrálás sorrendjét az utolsó egyenlőtlenség jobboldalán, és felhasználva, hogy $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\varphi-\vartheta)}\,d\varphi=1$ minden $-\pi\le\vartheta\le\pi$ számra, kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} |H_0(Re^{i\varphi})|^2\,d\varphi \le \int_{-\pi}^{\pi} g(\vartheta)\,d\vartheta \quad \text{minden } 0<R<1 \text{ számra},$$

és ezt kellett bizonyítani.

Láttuk, hogy a (4.5) formulában definiált $H_0(z)$ függvény teljesíti a FELADAT A feltételeit. Ezenkívül ebből a formulából következik az is, hogy

$$\log|H_0(0)| = \log H_0(0) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|g(\vartheta)|\,d\vartheta. \tag{4.7}$$

Felhasználjuk ezenkívül a következő fontos komplex függvénytani eredményt, a Szegő tételt, amelynek hátterét a kiegészítésben ismertetem.

4.6. Tétel. Szegő tétel. *Legyen $f(z)$, $|z|<1$, egy a $\mathcal{H}_2$ (vagy általánosabban egy $\mathcal{H}_p$, $0<p\le\infty$,) Hardy osztályban szereplő analitikus függvény, és legyen $\tilde f(\vartheta) = \lim\limits_{R\to1} f(Re^{i\vartheta})$ e függvény radiális limesze. Ekkor teljesül a*

$$\log|f(0)| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log|\tilde f(\vartheta)|\,d\vartheta, \tag{4.8}$$

illetve általánosabban a

$$\log|f(Re^{i\varphi})| \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{1-R^2}{1+R^2-2R\cos(\vartheta-\varphi)} \log|\tilde f(\vartheta)|\,d\vartheta \tag{4.9}$$

egyenlőtlenség.

Mivel a FELADAT A-ban olyan $\mathcal{H}_2$ osztálybeli függvényeket kerestünk, amelyek radiális limeszeinek abszolút értéke $|g(\vartheta)|^{1/2}$, ezért összehasonlítva a (4.7) és (4.8) formulákat, kapjuk, hogy $|f(0)| \le H_0(0)$ minden a FELADAT A feltételeit teljesítő $f(z)$ függvényre. Ez azt jelenti, hogy a (4.5) formulában definiált $H_0(z)$ függvény Taylor sorának együtthatói adják meg az $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}$, $n = \dots,-1,0,1,\dots$, Wold felbontásban szereplő c_k együtthatókat. Ezután a 3.2. lemma felhasználásával meg lehet adni magát a Wold felbontást is egy véletlen spektrál mérték szerinti integrál segítségével, bár felmerül a kérdés, hogy nincsen-e egyszerűbb, jobban használható eljárás a Wold felbontás kiszámítására.

Megkaptuk annak szükséges és elégséges feltételét is, hogy mikor oldható meg a FELADAT A. Ez egyben megadja annak szükséges és elégséges feltételét is, hogy egy stacionárius sorozat reguláris legyen. Így megkaptuk a következő eredményt is.

4.7. Tétel. Tétel reguláris stacionárius sorozatok jellemzéséről. *Egy X_n, $n = 0,\pm1,\pm2,\dots$, stacionárius (Gauss) sorozat akkor és csak akkor reguláris, ha létezik $g(\vartheta)$ spektrál sűrűség függvénye, és az teljesíti az*

$$\int_{-\pi}^{\pi} |\log g(\vartheta)|\,d\vartheta < \infty$$

egyenlőtlenséget.

Az, hogy a fenti tételben megfogalmazott feltétel szükséges ahhoz, hogy az X_n sorozat reguláris legyen következik a 3.1. Lemmából, amely szerint egy reguláris stacionárius sorozatnak létezik $g(\varphi)$ spektrál sűrűség függvénye, és az teljesíti a 3.1. Lemmában megfogalmazott (a1), (a2) és (a3) tulajdonságokat, valamint a Hardy féle $\mathcal{H}_2$ függvényosztályokat jellemző tétel (ii) pontjából. (Vegyük észre, hogy egy az (a3) tulajdonságot teljesítő $h(\varphi)$ függvényre $\log|h(\varphi)| = \frac{1}{2}\log g(\varphi)$.) Az, hogy a tételben szereplő integrál végessége egyben elégséges feltétele is annak, hogy a tekintett stacionárius Gauss folyamat reguláris legyen következik abból, hogy ezen feltétel teljesülése esetén elő tudtuk állítani a keresett Wold felbontást.

Megjegyzem, hogy általában a fenti tétel feltételében szereplő integrál végességét a vele ekvivalens $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\,d\vartheta > -\infty$ alakban szokták kimondani. Az $\int g(\vartheta)\,d\vartheta = EX_1^2 < \infty$, $g(\vartheta) \ge 0$ relációk alapján könnyen látható, hogy a két feltétel ekvivalens.

Érvényes a fenti tétel következő élesítése is, amely megadja egy adott spektrál mértékkel rendelkező stacionárius Gauss folyamat felbontását a sorozatnak alárendelt ortogonális reguláris és szinguláris stacionárius sorozatok összegére.

4.8. Tétel. Tétel stacionárius sorozatok felbontására reguláris és szinguláris komponensekre. *Tekintsük egy X_n, $n = \dots,-1,0,1,\dots,$ stacionárius sorozat G spektrál mértékének $G = G_1 + G_2$, felbontását abszolút folytonos és szinguláris komponensek összegére, ahol G_1 a G mérték abszolút folytonos komponense $g(\vartheta) = \frac{dG_1(\vartheta)}{d\vartheta}$ sűrűség függvénnyel, és G_2 a G mérték szinguláris komponense, azaz olyan (véges) mérték, amely egy null Lebesgue mértékű halmazba van koncentrálva. Jelölje $A = D(G_2) \subset [-\pi,\pi]$ a G_2 szinguláris mérték tartóját, azaz azt a legszűkebb (nulla Lebesgue mértékű) zárt halmazt, amelyre $G_2(D) = G_2([-\pi,\pi])$.*

Az X_n stacionárius sorozat szinguláris, ha $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\,d\vartheta = -\infty$. A másik esetben, ha $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\,d\vartheta > -\infty$, akkor az X_n sorozatot előállító Z_G véletlen spektrál mérték szerinti integrál segítségével az X_n sorozat felírható $X_n = U_n + V_n$, $n = 0,\pm1,\dots,$ alakban, ahol U_n, $n = 0,\pm1,\dots,$ reguláris és V_n, $n = \dots,-1,0,1,\dots,$ szinguláris, az X_n sorozatnak alárendelt stacionárius sorozat, és az U_n és V_n sorozatok ortogonálisak, azaz $EU_mV_n = 0$, $n,m = 0,\pm1,\dots.$ Ez a felírás a következő: Ha $X_n = \int e^{in\vartheta} Z_G(\,d\vartheta)$, $n = 0,\pm1,\dots,$ akkor $U_n = \int e^{in\vartheta} I_{[-\pi,\pi]\setminus D}(t) Z_G(\,d\vartheta)$, $V_n = \int e^{in\vartheta} I_D(t) Z_G(\,d\vartheta)$, $n = 0,\pm1,\dots,$ ahol $I_A(t)$ egy A halmaz indikátor függvényét jelöli.

E fenti tétel bizonyításának nem dolgozom ki minden részletét. Az a reguláris stacionárius sorozatok jellemzéséről valamint a stacionárius sorozatok a sorozatnak alárendelt reguláris és szinguláris sorozatok összegére való felbontásáról szóló tételek, illetve ez utóbbi tételben szereplő felbontás (csak a kiegészítésben ismertetett, egyszerű, de nem konstruktív) előállításán alapul.

Ha egy X_n stacionárius sorozat G spektrál mértéke olyan, hogy az abszolút folytonos komponens $g(\vartheta)$ spektrál sűrűségére az $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\,d\vartheta = -\infty$ reláció érvényes, akkor tekintve e sorozat tetszőleges $X_n = U_n + V_n$, $n = 0,\pm1,\dots,$ felbontását két független (Gauss) stacionárius sorozat összegére valamely $G^{(1)}$ és $G^{(2)}$ (nem zéró) spektrál mértékkel azt kapjuk, hogy ezen spektrál mértékeknek létezik $g^{(1)}(\vartheta)$ és $g^{(2)}(\vartheta)$ sűrűség függvénye, és azok teljesítik a $g(\vartheta) = g^{(1)}(\vartheta) + g^{(2)}(\vartheta)$ azonosságot. Innen következik, hogy mind $g^{(1)}(\vartheta)$ mind $g^{(2)}(\vartheta)$ kisebb, mint $g(\vartheta)$, ezért sem U_n sem V_n sem lehet reguláris stacionárius sorozat. Így a stacionárius sorozatok a sorozatnak alárendelt reguláris és szinguláris sorozatok összegére való felbontásáról szóló tétel alapján az X_n stacionárius sorozat ebben az esetben szinguláris, mivel nincs reguláris komponense.

Az előbb felírt azonosság azért igaz, mert ha U_n és V_n két egymástól független stacionárius sorozat $G^{(1)}$ és $G^{(2)}$ spektrál mértékkel, akkor mint némi számolás segítségével megmutatható, az $U_n + V_n$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozat stacionárius $G = G^{(1)} + G^{(2)}$ spektrál mértékkel. Ezért, ha a G spektrál mértéknek van $g(\vartheta)$ spektrál sűrűség függvénye, akkor a $G^{(1)}$ és $G^{(2)}$ spektrál mértékeknak is van $g^{(1)}(\vartheta)$ és $g^{(2)}(\vartheta)$ spektrál sűrűség függvénye, és teljesül a $g(\vartheta) = g^{(1)}(\vartheta) + g^{(2)}(\vartheta)$ azonosság.

Ha az X_n sorozat G spektrál mértéke olyan, hogy $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\vartheta)\, d\vartheta > -\infty$, akkor nem nehéz belátni, hogy a tételben megadott $X_n = U_n + V_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$ azonosság az X_n sorozat felbontását adja két korrelálatlan stacionárius sorozat összegére, amelyek közül az U_n sorozat reguláris, a V_n sorozat szinguláris. A V_n sorozat szinguláris, mert mint az előző érvelés némi módosítása mutatja a V_n sorozatnak nincsen reguláris komponense. Viszont meg kell mutatni azt is, hogy az U_n és V_n sorozatok alá vannak rendelve az X_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozatnak. Ennek indoklásában alkalmazzuk azt a (csak a kiegészítésben ismertetett) konstrukciót, amely lehetővé teszi egy stacionárius sorozatnak a felbontását az e sorozatnak alárendelt reguláris és szinguláris sorozatok összegére.

Tekintsük az X_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, valószínűségi változók lineáris kombinációi által kifeszített az (1.1) formulában definiált H Hilbert teret, illetve ennek ugyanebben a formulában definiált S alterét. Vegyük mindegyik X_n valószínűségi változó S altérre vett vetületének $\tilde{U}_n$ ortogonális kiegészítőjét. Ekkor be lehet látni, (ez az említett tétel bizonyításának a kulcslépése), hogy az $\tilde{U}_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozat az X_n sorozatnak alárendelt reguláris stacionárius sorozat. Ezenkívül a H Hilbert térnek az $\tilde{U}_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozat elemei által generált altere megegyezik az S altér H Hilbert tér-beli ortogonális kiegészítésével. Be lehet látni, felhasználva azt, hogy mivel $\tilde{U}_n$ az X_n sorozatnak alá van rendelve, és 'ugyanaz a shift operátor hat rá', ezért felírható $\tilde{U}_n = \int e^{in\vartheta} h(\vartheta) Z_G(\,d\vartheta)$, $n = 0, \pm 1, \dots$, alakban alkalmas $h(\vartheta)$ magfüggvénnyel. (Ezen állítás indoklásában felhasználhatjuk a Bochner tétel jegyzetben a véletlen spektrál mérték tulajdonságairól bizonyított eredményeket, nevezetesen azt, hogy a H Hilbert tér minden elemét elő tudjuk állítani alkalmas magfüggvénynek a véletlen spektrál mérték szerinti integráljaként. Ezenkívül tudjuk, hogy hogyan számolható ki a shift operátor hatása véletlen integrálokkal kifejezett mennyiségekre.) Mivel a (reguláris) $\tilde{U}_n$ sorozatnak van spektrál sűrűség függvénye, ezért a $h(\vartheta)$ magfüggvény a $[-\pi, \pi] \setminus D$ halmazba van koncentrálva, így az $\tilde{U}_n$ és V_n, $n = 0, 1, \dots$, stacionárius sorozatok ortogonálisak. Innen következik, hogy a V_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sorozat elemei az S altérben vannak. Innen, illetve az S altér definiciójából következik, hogy az V_n, $n - 0, \pm 1, \dots$, sorozat alá van rendelve az X_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozatnak. Akkor viszont ugyanez igaz a $U_n = X_n - V_n$, $n = 0, \pm 1, \dots$, sorozatra is. A tétel bizonyítását befejeztük.

5. A vizsgált komplex függvénytani feladat általános megoldása.

Röviden beszélek a FELADAT A általános megoldásáról. Ha összehasonlítjuk a (4.5) formulát a Szegő tételben szereplő (4.9) képlettel, azt kapjuk, hogy a FELADAT A tetszőleges $f(z)$ megoldása teljesíti az $|f(Re^{i\vartheta})| \le |H_0(Re^{i\vartheta})|$ egyenletet minden $0 \le R < 1$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$, paraméterre. Ebből, illetve abból a tényből, hogy a $H_0(z)$ függvény sehol sem tűnik el az egységkör belsejében következik, hogy a FELADAT A minden megoldása felírható $f(z) = H_0(z)g(z)$ alakban, ahol $H_0(z)$, amelyet a (feladat feltételeit teljesítő) külső függvénynek neveznek a (4.5) képletben van megadva, míg a $g(z)$ függvény, amelyet belső függvénynek neveznek, olyan függvény, amelynek abszolút értéke az egységkör belsejében kisebb, mint 1, az egységkörvonalon vett határértéke pedig 1. A maximum elv segítségével be lehet látni, hogy ha $g(z)$ nem egyenlő egy 1 abszolút értékű konstanssal minden z számra, akkor $g(z)$ abszolút értéke szigorúan kisebb, mint 1 az egységkör minden belső pontjában. Innen az is következik, hogy az origóban maximális abszolút értéket felvevő a FELADAT A feltételeit teljesítő függvény egy esetleges (-1) számmal való szorzást nem tekintve egyértelműen meg van határozva. Ezért $H_0(z)$ valóban a stacionárius sorozat Wold felbontásának felel meg.

A belső függvényeket és ezáltal a FELADAT A teljes megoldásrendszerét pontosan le lehet írni. E fejezetben csak heurisztikusan magyarázom el, hogy milyen alakú lehet egy belső függvény. A kiegészítésben részletesebben tárgyalom ezt a kérdést.

Egy tipikus belső függvény olyan $g(z) = \frac{z-z_0}{1-z\bar{z}_0}$, $|z_0| < 1$, racionális törtfüggvény, amely az egységkört önmagába képezi. Tekinthetjük ilyen függvények szorzatát is. Tudjuk, hogy egy nem azonosan nulla analitikus függvény null-helyeinek nem lehet torlódási pontja az értelmezési tartomány belsejében. Viszont a null-helyek torlódhatnak az értelmezési tartomány (jelen esetben az egységkör) valamely határpontjához. Ezt a lehetőséget kihasználva lehet végtelen, úgynevezett Blaschke szorzatok segítségével definiálni belső függvényeket.

Más tipusú belső függvényt kaphatunk úgy, hogy egy $R(z) = c\frac{z+e^{i\vartheta}}{z-e^{i\vartheta}}$, $c > 0$, alakú függvényt veszünk, azaz az egységkör egy racionális törtfüggvény leképezését tekintjük a $\{z\colon \operatorname{Re} z < 0\}$ félsíkra, majd definiáljuk a $h(z) = e^{R(z)}$ függvényt. A $h(z)$ függvény az egységkör olyan leképezése önmagába, amelynek egyetlen pontban nincsen radiális limesze, az $R(z)$ racionális törtfüggvénynek az egységkörvonal határán levő $z = e^{i\vartheta}$ szinguláris pontjában. A $h(z)$ függvény az egységkör olyan leképezése önmagára, amely az egységkör belsejében sehol sem tűnik el. Ilyen függvények szorzataként, illetve a szorzatok limeszét véve további belső függvényeket tudunk definiálni. Ilyen módon

$$g(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{z+e^{i\vartheta}}{z-e^{i\vartheta}}\,d\mu(\vartheta)\right\} \tag{5.1}$$

alakú belső függvényeket kapunk, ahol μ szinguláris mérték. Az, hogy az ilyen függvények abszolút értékének a radiális limesze majdnem minden pontban 1 megmutatható a Fatou tétel segítségével. Az ilyen alakú belső függvényeket szinguláris belső függvénynek nevezik. Be lehet látni, hogy tetszőleges belső függvény előállítható egy Blaschke szorzat és egy szinguláris belső függvény szorzataként, és ez az előállítás egy 1 abszolút értékű tényező erejéig egyértelmű.

A Wold felbontást felírhatjuk $X_n = \sum_{k=0}^{\infty} c_k W_{n-k}$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, alakban, ahol a c_k együtthatók az előbb tárgyalt $H_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k z^k$ függvény Taylor együtthatói, a W_k valószínűségi változókat pedig a (3.2) képlet definiálja, azzal a kiegészítéssel, hogy a képletben szereplő $h(t)$ függvény a $H_0(z)$ függvény $H_0(e^{it})$, $-\pi \le t \le \pi$, radiális limesze. Felmerülhet az igény, hogy a (3.2) képletben definiált véletlen integrál kiszámítására találjunk egyszerűbb, jobban számolható módszert. Érdemes észrevenni, hogy mivel a $H_0(z)$ függvény nem tűnik el az egységkör belsejében, ennek reciproka szintén analitikus függvény az egységkörben, amely felírható $\frac{1}{H_0(z)} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k z^k$ alakban, és az $\frac{1}{h(t)}$ ennek a függvénynek a radiális limesze. Ez azt sugallja, hogy $\frac{1}{h(t)}$ függvény felírható $\frac{1}{h(t)} = \sum_{k=0}^{\infty} D_k e^{ikt}$ alakban, ezért a (3.2) formula alapján

$$W_n = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{h(t)} e^{int} Z_G(dt) = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} D_k e^{i(n-k)t} Z_G(dt) = \sum_{k=0}^{\infty} D_k X_{n-k}.$$

Az előbbi számolás megadja, legalábbis formális szinten azt, hogy hogyan lehet kiszámolni a Wold felbontásban szereplő W_n valószínűségi változókat az ismert X_j, $j \le n$, valószínűségi változók segítségével. Vegyük észre, hogy ebben a számolásban is kihasználtuk, hogy a $H_0(z)$ függvény nem tűnik el az egységkör belsejében. Ez biztosítja azt, hogy az $\frac{1}{H_0(z)}$ függvény analitikus az egységkör belsejében, és a radiális limesze az egységkör határán megegyezik az $\frac{1}{h(t)}$ függvénnyel.

Valójában a probléma nehezebb, és a fenti gondolatmenet csak heurisztikus érvelésnek tekinthető. A probléma az, hogy az $\lim\limits_{R \to 1} \frac{1}{H_0(Re^{i\vartheta})} = \frac{1}{h_0(e^{i\vartheta})}$ relációt csak a majdnem minden konvergencia értelemben tudjuk, míg az előbbi közelítés Wold felbontásban szereplő valószínűségi változóhoz való konvergenciának igazolásához a

$$\lim_{R \to 1} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{H_0(Re^{i\vartheta})} - \frac{1}{h_0(e^{i\vartheta})} \right|^2 g(\vartheta)\, d\vartheta = 0$$

reláció igazolására lenne szükségünk. (Ekkor a sztochasztikus integrálok L_2 izomorfiájából következik az állítás.) A következő fejezetben egy speciális modellt, az úgynevezett moving average és ARMA folyamatokat fogjuk vizsgálni. Megmutatjuk, hogy ebben a speciális esetben a fenti azonosság érvényes, ezért az általa sugallt közelítés segítségével megkaphatjuk a példában szereplő stacionárius folyamat Wold felbontását. Ezzel a módszerrel elő lehet állítani reguláris stacionárius sorozat Wold felbontását más esetekben is, de meg lehet mutatni, hogy van olyan reguláris stacionárius sorozat, amelynek a Wold felbontását nem lehet ilyen módon megkapni. Ilyen esetekben a Wold felbontást csak egy bonyolultabb eljárás segítségével kaphatjuk meg.

6. Moving average és ARMA folyamatok vizsgálata.

Külön foglalkozom két különböző gyakorlati alkalmazásokban fontos speciális stacionárius folyamattal, a 'Moving Average' (mozgó átlag) és 'ARMA' (autoregressive moving average) folyamattal. Ezen folyamatok spektrál sűrűsége speciális alakban írható fel. A $g(t)$ spektrál sűrűség ezekben a modellekben az e^{it} függvény speciális alakú függvénye. Ez a speciális alakú függvény egy polinom, illetve egy racionális törtfüggvény abszolút értékének a négyzetével egyenlő. Ez a polinom, illetve racionális törtfüggvény nincs egyértelműen meghatározva, és érdemes megkeresni annak legjobban használható alakját. A 'Moving Average' és 'ARMA' folyamat spektrál sűrűségének speciális alakja miatt e modellekben viszonylag egyszerűen megoldható a FELADAT A-ban megfogalmazott probléma, ezért ebben az esetben a predikciós probléma vizsgálata kevésbé nehéz.

Megadom a Moving Average és ARMA folyamatok definicióját, és kiszámolom ezek spektrál sűrűségfüggvényét.

Moving average folyamatok definiciója. *Legyen* $\dots,\varepsilon_{-1},\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots$ *független standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata, és rögzítsük* $a_0,a_1,\dots,a_k$ *valós számok egy sorozatát. Az*

$$X_n=\sum_{p=0}^k a_p\varepsilon_{n-p},\qquad n=\dots,-1,0,1,\dots \tag{6.1}$$

sorozatot k*-ad rendű mozgó átlagnak nevezzük.*

(Ebben a definicióban a korábban bevezetett mozgó átlag fogalom speciális esetét tekintettük, mert a (6.1) formulában csak véges összegeket vettünk.) Az X_n, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, sorozat $g(t)$ spektrál sűrűség függvényét megadhatjuk $g(t)=\frac1{2\pi}|P(e^{it})|^2$, $-\pi\le t\le\pi$, alakban, ahol $P(z)=\sum\limits_{p=0}^k a_pz^p$. E képlet bizonyítását az alábbi (tulajdonképp már általánosabb esetben elvégzett) számolás adja.

$$\begin{aligned}
EX_lX_{l+n}&=\sum_{p=0}^k\sum_{p'=0}^k a_pa_{p'}E\varepsilon_{l-p}\varepsilon_{n+l-p'}=E\left(\sum_{p=0}^k a_p\varepsilon_{l-p}\right)\left(\sum_{p'-0}^k a_{p'}\varepsilon_{n+l-p'}\right)\\
&=\frac1{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\sum_{p=0}^k a_pe^{-i(l-p)t}\right)\left(\sum_{p'=0}^k a_{p'}e^{i(n+l-p')t}\right)\,dt\\
&=\frac1{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}\left|\sum_{p=0}^k a_pe^{i(l-p)t}\right|^2\,dt=\frac1{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}\left|\sum_{p=0}^k a_pe^{ipt}\right|^2\,dt\\
&=\frac1{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{int}|P(e^{it})|^2\,dt,
\end{aligned}$$

és $g(t)=g(-t)$ a $g(t)=\frac1{2\pi}|P(e^{it})|^2$ függvényre.

Bevezetem az ARMA folyamatok definicióját is.

ARMA folyamatok definiciója. *Legyen megadva a Moving Average folyamatok definiciójában szereplő* $\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ *független standard normális eloszlású valószínűségi változók és az* $a_0, a_1, \dots, a_k$ *valós számok sorozatán kívül valós számok egy másik* $b_1, \dots, b_l$ *sorozata is. Azt mondjuk, hogy az (együttesen) normális eloszlású* Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, *valószínűségi változók stacionárius sorozata* (k, l) *rendű ARMA folyamat, ha teljesíti a*

$$\sum_{q=0}^{l} b_q Y_{n-q} = \sum_{p=0}^{k} a_p \varepsilon_{n-p}, \quad , n = \dots, -1, 0, 1, \dots \tag{6.2}$$

azonosságot.

Próbáljuk meg kiszámolni az Y_n stacionárius sorozat $g(\lambda)$ spektrál sűrűség függvényét (feltéve, hogy létezik az adott tulajdonságú stacionárius sorozat, és annak van spektrál sűrűség függvénye). Vezessük be a $Z_n = \sum\limits_{q=0}^{l} b_q Y_{n-q}$, $n = \dots, -1, 0, 1 \dots$, stacionárius sorozatot. Az előző számoláshoz hasonlóan felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} EZ_s Z_{s+n} = EZ_0 Z_n &= \sum_{q=0}^{l} \sum_{q'=0}^{l} b_q b_{q'} EY_{-q} Y_{n-q'} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{q=0}^{l} b_q e^{iqt} \right) \left(\sum_{q'=0}^{k} b_{q'} e^{i(n-q')t} \right) g(t)\, dt \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} \left| \sum_{q=0}^{l} b_q e^{iqt} \right|^2 g(t)\, dt = \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} |R(e^{it})|^2 g(t)\, dt, \end{aligned}$$

ahol $R(z) = \sum\limits_{q=0}^{l} b_q z^q$.

Összehasonlítva a (6.2) formula bal és jobb oldalán szereplő kifejezések kovariancia függvényére kapott kifejezéseket azt kapjuk, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{int} |R(e^{it})|^2 g(t)\, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{int} |P(e^{it})|^2\, dt.$$

Mivel ennek az azonosságnak minden $n = 0, \pm 1, \dots$ számra teljesülnie kell, innen következik, hogy $g(t) = \frac{1}{2\pi} \left| \frac{P(e^{it})}{R(e^{it})} \right|^2$, $-\pi \le t \le \pi$.

Felírtuk a moving average és ARMA folyamat spektrál sűrűségét $g(\lambda) = |P(e^{i\lambda})|^2$, illetve $g(\lambda) = \left| \frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})} \right|^2$, $-\pi \le \lambda \le \pi$, alakban. Az ezekben a kifejezésekben szereplő polinomoknak lehet gyökük az egységkör belsejében is. A következő lemmában megadjuk egy ilyen alakú spektrál sűrűség függvény egy esetleg különböző előállítását, amelyben olyan polinomok szerepelnek, amelyeknek nincs gyökük az egységkör belsejében. Ez lehetővé teszi, hogy egyszerű módon előállítsuk azt a (4.5) formulában definiált, a $g(\lambda)$ spektrál sűrűség függvénytől függő $H_0(z)$ függvényt, amely megadja egy $g(\lambda)$ spektrál sűrűséggel rendelkező stacionárius sorozat Wold felbontásában szereplő együtthatókat.

6.1. Lemma. Lemma Moving Average és ARMA folyamatok spektrál sűrűség függvényének reprezentációjáról. *Vegyünk egy olyan stacionárius sorozatot, amelynek $g(\lambda)$ spektrál sűrűség függvénye felírható $g(\lambda) = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2$ alakban alkalmas $P(z)$ és $R(z)$ polinomokkal. Ekkor léteznek olyan $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomok, amelyeknek nincs gyökük a $\{z\colon |z| < 1\}$ komplex egységkörben, és $g(\lambda) = \left|\frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})}{\tilde{R}(e^{i\lambda})}\right|^2$. A $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomok együtthatói valós számok, és feltehető, hogy $0 < \frac{\tilde{P}(0)}{\tilde{R}(0)} < \infty$. A $g(\lambda)$ spektrál sűrűség függvényhez tartozó FELADAT A-nak a (4.5) formulában megadott extremális megoldása a $H_0(z) = \frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ függvény.*

Megjegyzés. Egy feladatban megmutatjuk azt, hogy ha egy spektrál sűrűség függvény felírható a 6.1. lemmában megadott $g(\lambda) = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2$ alakban, akkor létezik olyan ARMA folyamat is, amelynek ez a spektrál sűrűség függvénye.

Bizonyítás. Legyenek a $g(\lambda)$ spektrál sűrűség függvényének előállításaban szereplő $P(z)$ és $R(z)$ polinomok nem zéró gyökei $v_1, \dots, v_m$ és $w_1, \dots, w_n$. Ekkor

$$g(\lambda) = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2 = \frac{P(e^{i\lambda})\overline{P(e^{i\lambda})}}{R(e^{i\lambda})\overline{R(e^{i\lambda})}} = C^2 \frac{\prod\limits_{k=1}^{m}(e^{i\lambda} - v_k)(e^{-i\lambda} - \bar{v}_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(e^{i\lambda} - w_k)(e^{-i\lambda} - \bar{w}_k)} \tag{6.3}$$

valamely alkalmas $C > 0$ számmal. A (6.3) formulában levő $C > 0$ számot úgy kapjuk meg, hogy tekintjük a $P(z)$ és $R(z)$ polinomok fő együtthatóinak a hányadosát, és vesszük annak abszolút értékét, azaz $C = |\frac{a_k}{b_l}|$. (A $P(z)$ és $R(z)$ polinomok zéró gyökeit figyelmen kívül hagyhattuk a (6.3) formulában, mert ezek az $e^{i\lambda} \cdot e^{-i\lambda} \equiv 1$ faktort adnák ebben a kifejezésben.)

Definálljuk a $\tilde{v}_k = v_k$, ha $|v_k| \ge 1$, $\tilde{v}_k = \frac{1}{\bar{v}_k}$, ha $|v_k| < 1$, $1 \le k \le m$, számokat és a $\tilde{P}(z) = \frac{1}{A}\prod\limits_{k=1}^{m}(z - \tilde{v}_k)$ polinomot, ahol $A = \prod\limits_{k\colon |v_k|<1} |v_k|$. Definiáljuk hasonló módon a $\tilde{w}_k = w_k$, ha $|w_k| \ge 1$, $\tilde{w}_k = \frac{1}{\bar{w}_k}$, ha $|w_k| < 1$, $1 \le k \le n$, számokat és a $\tilde{R}(z) = \frac{1}{B}\prod\limits_{k=1}^{m}(z - \tilde{w}_k)$ polinomot, ahol $B = \prod\limits_{k\colon |w_k|<1} |w_k|$. Pontosabban a $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomokat úgy definiáljuk, hogy az előbb bevezetett $\tilde{P}(z)$ illetve $\tilde{R}(z)$ polinomokból elhagyjuk azokat a $(z - \tilde{v}_k)$ és $(z - \tilde{w}_k)$ tényezőket, amelyekre $\tilde{v}_k = \tilde{w}_k$. Ilyen módon a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ racionális törtfüggvény értékét nem változtattuk meg. (Ebben a definicióban olyan (v_k, w_k) gyökpárokra is egyszerűsítettük a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ racionális törtfüggvényt, amelyekre $v_k = \frac{1}{\bar{w}_k}$.)

A $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomoknak nincs gyökük a komplex egységkör belsejében. Azt állítom, hogy a $\left|\frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})}{\tilde{R}(e^{i\lambda})}\right|^2 = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2 = g(\lambda)$, $-\pi \le \lambda \le \pi$, azonosság is teljesül. Valóban,

$$\left|\frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})}{\tilde{R}(e^{i\lambda})}\right|^2 = \frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{i\lambda})}}{\tilde{R}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{i\lambda})}} = \frac{B^2C^2}{A^2} \frac{\prod\limits_{k=1}^{m}(e^{i\lambda} - \tilde{v}_k)(e^{-i\lambda} - \bar{\tilde{v}}_k)}{\prod\limits_{k=1}^{n}(e^{i\lambda} - \tilde{w}_k)(e^{-i\lambda} - \bar{\tilde{w}}_k)}, \tag{6.4}$$

ezért a kívánt összefüggést megkapjuk összehasonlítva a (6.3) és 6.4 formulákat és bebizonyítva az $(e^{i\lambda} - \tilde{v}_k)(e^{-i\lambda} - \bar{\tilde{v}}_k) = \frac{1}{|v_k|^2}(e^{i\lambda} - v_k)(e^{-i\lambda} - \bar{v}_k)$, ha $|v_k| < 1$, illetve $(e^{i\lambda} - \tilde{w}_k)(e^{-i\lambda} - \bar{\tilde{w}}_k) = \frac{1}{|w_k|^2}(e^{i\lambda} - w_k)(e^{-i\lambda} - \bar{w}_k)$, ha $|w_k| < 1$ azonosságokat.

Viszont

$$\begin{aligned}(e^{i\lambda} - \tilde{v}_k)(e^{-i\lambda} - \bar{\tilde{v}}_k) &= \left(e^{i\lambda} - \frac{1}{\bar{v}_k}\right)\left(e^{-i\lambda} - \frac{1}{v_k}\right) = \frac{1}{|v_k|^2}(\bar{v}_k e^{i\lambda} - 1)(v_k e^{-i\lambda} - 1) \\ &= \frac{1}{|v_k|^2}|\bar{v}_k e^{i\lambda} - 1|^2 = \frac{1}{|v_k|^2}|\bar{v}_k - e^{-i\lambda}|^2 \\ &= \frac{1}{|v_k|^2}|e^{i\lambda} - v_k|^2 = \frac{1}{|v_k|^2}(e^{i\lambda} - v_k)(e^{-i\lambda} - \bar{v}_k),\end{aligned}$$

ha $|v_k| \le 1$. A másik bizonyítandó azonosság hasonlóan igazolható.

Megjegyzés. A fentebb tárgyalt eljárás, amelyben a $P(z)$ és $R(z)$ polinomokat a $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomokkal helyettesítettük, tekinthető úgy is, mint a 4.1. lemmában használt módszer adaptációja a most tárgyalt problémára. A 4.1. lemmában alkalmas racionális törtfüggvényekkel való szorzással eltüntettük egy az egységkör belsejében analitikus függvény nullhelyeit úgy, hogy az analitikus függvény radiális limeszének az abszolút értéke az egységkör határán nem változott. Jelen esetben is hasonló procedurát folytattunk. A minket érdeklő $g(\lambda) = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2$ függvény egy az egységkör belsejében analitikus függvény (radiális) limesze az egységkör határán. (E függvénynek esetleg lehet véges sok szingularitása az egységkör belsejében.) Ennek v_k nullhelyei az egységkör belsejében megegyeznek a $P(z)$ polinom v_k, $|v_k| < 1$, gyökeivel. Ezeket eltüntethetjük úgy, hogy a $P(z)$ polinomot elosztjuk a megfelelő $A_{v_k}(z) = \frac{z - v_k}{1 - z\bar{v}_k} = -\frac{1}{\bar{v}_k}\frac{z - v_k}{z - \frac{1}{\bar{v}_k}}$ racionális törtfüggvények szorzatával. Ezen eljárás hatására a $|\frac{P(z)}{Q(z)}|$ függvény értéke nem változik meg az egységkör határán. A $P(z)$ polinom helyettesítése a $\tilde{P}(z)$ függvénnyel ennek a procedurának felel meg. (A (-1)-gyel való szorzás elhagyása nem okoz problémát.) Hasonló módon az $R(z)$ függvény helyettesítése az $\tilde{R}(z)$ függvénnyel lehetővé teszi az egységkör belsejében levő szingularitások eltüntetését.

Belátjuk, hogy a $g(\lambda)$ spektrál sűrűség függvény $g(\lambda) = g(-\lambda)$ szimmetriájából következik, hogy $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ valós együtthatós polinomok. A bizonyítás ezen lépésében nem használjuk fel azt, hogy a $g(\lambda)$ spektrál sűrűség függvény definiciójában szereplő polinomokat hogyan definiáltuk. Azt mutatjuk meg, hogy abból a tényből, hogy $g(\lambda)$ spektrál sűrűség függvény következnek a $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomoknak a lemmában megfogalmazott tulajdonságai. Ennek érdekében először azt látjuk be, hogy az adott feltételből következik, hogy

$$\tilde{P}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{i\lambda})} = \tilde{P}(e^{-i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{-i\lambda})}, \qquad \tilde{R}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{i\lambda})} = \tilde{R}(e^{-i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{-i\lambda})}.$$

Illetve belátjuk a (formálisan) kissé általánosabb

$$\tilde{P}(z)\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{P}\left(\frac{1}{z}\right)\hat{P}(z), \qquad \tilde{R}(z)\hat{R}\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{R}\left(\frac{1}{z}\right)\hat{R}(z) \tag{6.5}$$

egyenlőtlenséget, ahol $\hat{P}(z) = \prod\limits_{k=1}^{m}(z - \bar{\tilde{v}}_k)$, $\hat{R}(z) = \prod\limits_{k=1}^{n}(z - \bar{\tilde{w}}_k)$, és a $\tilde{v}_1, \dots \tilde{v}_m$ számok a $\tilde{P}(z)$, a $\tilde{w}_1, \dots \tilde{w}_n$ számok pedig a $\tilde{R}(z)$ polinom gyökei.

A $g(\lambda) = \frac{\tilde{P}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{i\lambda})}}{\tilde{R}(e^{i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{i\lambda})}} = \frac{\tilde{P}(e^{-i\lambda})\overline{\tilde{P}(e^{-i\lambda})}}{\tilde{R}(e^{-i\lambda})\overline{\tilde{R}(e^{-i\lambda})}} = g(-\lambda)$ azonosságból analitikus kiterjesztéssel azt kapjuk, hogy $\frac{\tilde{P}(z)\hat{P}(\frac{1}{z})}{\tilde{R}(z)\hat{R}(\frac{1}{z})} = \frac{\tilde{P}(\frac{1}{z})\hat{P}(z)}{\tilde{R}(\frac{1}{z})\hat{R}(z)}$. (Ezen azonosság igazolása érdekében vegyük észre, hogy egy $z = e^{i\lambda}$ számra, ahol λ valós szám, és a $\tilde{P}(z)$ polinom egy $\tilde{v}_j$ gyökére $\overline{z - \tilde{v}_j} = e^{-i\lambda} - \bar{\tilde{v}}_j = \frac{1}{z} - \bar{\tilde{v}}_j$, és ezt az azonosságot összeszorozva a $\tilde{P}(z)$ polinom minden v_j gyökére azt kapjuk, hogy $\overline{\tilde{P}(z)} = C\hat{P}(\frac{1}{z})$ alkalmas C konstanssal. Hasonló azonosságot tudunk felírni az $\tilde{R}(z)$ polinonomra is.) A (6.5) képlet első azonosságának két oldalán szereplő kifejezések gyökhelyei a

$$\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m, \frac{1}{\bar{\tilde{v}}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{\tilde{v}}_m} \quad \text{illetve az} \quad \frac{1}{\tilde{v}_1}, \dots, \frac{1}{\tilde{v}_m}, \bar{\tilde{v}}_1, \dots, \bar{\tilde{v}}_m$$

számok. Igaz az is, hogy a $\{\tilde{v}_1, \dots, \tilde{v}_m, \frac{1}{\bar{\tilde{v}}_m}, \dots, \frac{1}{\bar{\tilde{v}}_m}\}$ és $\{\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n, \frac{1}{\bar{\tilde{w}}_1}, \dots, \frac{1}{\bar{\tilde{w}}_n}\}$, halmazok diszjunktak, azaz a vizsgált kifejezések gyökei és pólusai különböznek, és a felsorolt gyökök valóban megjelennek. Innen következik, hogy $\tilde{P}(z)\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right) = \tilde{P}(\frac{1}{z})\hat{P}(z)$, azaz érvényes a (6.5) formula első relációja. De akkor igaz a (6.5) formula második relációja is.

A $\tilde{P}(z)\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény gyökhelyei közül a $\tilde{P}(z)$ polinom tartalmazza az 1-nél nagyobb, a $\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény az 1-nél kisebb abszolút értékűeket. Ezért (6.5) azonosságból, illetve az azonosság két oldalán szereplő polinomok gyökeinek viselkedéséből következik, hogy $\tilde{P}(z)$ és $\hat{P}(z)$ 1-nél nagyobb abszolút értékű gyökei megegyeznek, és e polinomoknak nincsenek 1-nél kisebb abszolút értékű gyökei.

Ellenőrizni kell még az 1 abszolút értékű gyökök viselkedését. Ha egy v számra $|v| = 1$, és a v szám nullhelye vagy a $\tilde{P}(z)$ vagy a $\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ függvénynek, akkor ez a $v = \frac{1}{\bar{v}}$ szám gyöke a másik függvénynek is, mégpedig ugyanolyan multiplicitással.

Ebből következik, hogy a $\tilde{P}(z)\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ függvény rögzített, 1 abszolút értékű gyökei párba állíthatóak úgy, hogy egyikük a $\tilde{P}(z)$, a másikuk pedig a $\hat{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ függvénynek a gyöke. Hasonló tulajdonsága van a $\tilde{P}\left(\frac{1}{z}\right)\hat{P}(z)$ függvénynek is. Ez azt jelenti, hogy a (6.5) formula alapján a $\tilde{P}(z)$ és $\hat{P}(z)$ polinomnak ugyanazok a gyökei. Innen az is következik, hogy a $\tilde{P}(z)$ polinom megszorítása a valós számegyenesre teljesíti a $\tilde{P}(y)=\overline{\tilde{P}(y)}$ azonosságot, ezért $\tilde{P}(z)$ valós együtthatós polinom. Hasonlóan látható, hogy az $\tilde{R}(z)$ polinom valós együtthatós. Esetleges (-1)-gyel való szorzással elérhetjük azt is, hogy $0<\frac{\tilde{P}(0)}{\tilde{R}(0)}<\infty$.

Láttuk, hogy $h_0(z)=\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ olyan valós együtthatós analitikus függvény a komplex egységkörben, (a $h_0(z)$ függvény azért analitikus, mert az $\tilde{R}(z)$ függvénynek nincs gyöke az egységkör belsejében), amelynek létezik olyan $h_0(e^{i\vartheta})$ radiális limesze, amely teljesíti az $|h_0(e^{i\vartheta})|^2=g(\vartheta)$ azonosságot. Be lehet látni közvetlenül, hogy a $h_0(z)$ függvény eleme a $\mathcal{H}_2$ Hardy osztálynak. Innen következik, hogy ez a $h_0(z)$ függvény a FELADAT A egyik megoldása. Egy ennél tartalmasabb állítást fogunk igazolni. Megmutatjuk, hogy $h_0(z)=\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ megegyezik a (4.5) relációban a $\frac{1}{2}\log g(\vartheta)=\log|\tilde{P}(e^{i\vartheta})|-\log|\tilde{R}(e^{i\vartheta})|$, $-\pi\le\vartheta\le\pi$, függvény segítségével definiált $H_0(z)$ függvénnyel. Ebből az állításból az is következik, hogy a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ a FELADAT A optimális, a Wold felbontásnak megfelelő megoldása. (Ennek az optimális megoldásnak a megtalálása érdekében biztosítanunk kellett, hogy a $\tilde{P}(z)$ polinomnak nincs gyöke az egységkör belsejében.)

Azt kell megmutatnunk, hogy a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ racionális törtfüggvény teljesíti a (4.5) relációban felírt azonosságot az $\frac{1}{2}\log g(\vartheta)=\log|\tilde{P}(e^{i\vartheta})|-\log|\tilde{R}(e^{i\vartheta})|$, $-\pi\le\vartheta\le\pi$, függvénnyel. Először megmutatom, hogy a kívánt összefüggés következik az

$$\log\left(\frac{Re^{i\varphi}-z_0}{-z_0}\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\vartheta}+Re^{i\varphi}}{e^{i\vartheta}-Re^{i\varphi}}\log\left|\frac{e^{i\vartheta}-z_0}{-z_0}\right|d\vartheta,\quad \text{ha } 0\le R<1 \tag{6.6}$$

azonosságból, amely érvényes minden olyan z_0 számra, amelyre $|z_0|\ge 1$. (A (6.6) reláció érvényességének érdekében fel kell tennünk, hogy $|z_0|\ge 1$.) Ezután bebizonyítjuk a (6.6) azonosságot.

Összegezzük a (6.6) formulát minden $z_0=\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_m$ illetve minden $z_0=\tilde{w}_1,\dots,$ $\tilde{w}_n$ számra, ahol $\tilde{v}_1,\dots,\tilde{v}_m$, illetve $\tilde{w}_1,\dots,\tilde{w}_n$, a $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinom gyökei. Vonjuk ki a két azonosságot egymásból. Ezután némi átalakítással azt kapjuk, hogy

$$\frac{P(Re^{i\varphi})}{R(Re^{i\varphi})}=\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\vartheta}+Re^{i\varphi}}{e^{i\vartheta}-Re^{i\varphi}}\frac{1}{2}\log g(\vartheta)\,d\vartheta\right\},\quad \text{ha } 0\le R<1. \tag{6.7}$$

A (6.7) azonosság igazolásában felhasználjuk az $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{i\vartheta}+Re^{i\varphi}}{e^{i\vartheta}-Re^{i\varphi}}\,d\vartheta=1$, ha $0\le R<1$ azonosságot is. (Ez a 6.6) formulához hasonló, de egyszerűbben bizonyítható reláció.) Ezenkívül azt kell észrevenni, hogy a $\frac{\tilde{v}_1\cdots\tilde{v}_m\tilde{w}_1^{-1}\cdots\tilde{w}_n^{-1}}{|\tilde{v}_1\cdots\tilde{v}_m\tilde{w}_1^{-1}\cdots\tilde{w}_n^{-1}|}$ tört értéke $+1$ vagy -1, mert mind a $\tilde{v}_1\cdots\tilde{v}_m$, mind a $\tilde{w}_1\cdots\tilde{w}_n$ szorzat valós szám annak következtében, hogy a $\tilde{P}(z)$ és $\tilde{R}(z)$ polinomok együthatói valós számok. Mivel a $\frac{\tilde{P}(z)}{\tilde{R}(z)}$ függvényt egy esetleges

-1-gyel való szorzás segítségével úgy választottuk, hogy $\frac{\tilde P(0)}{\tilde R(0)} > 0$, ezért ez a tényező kiesik a számolás során. Ez azt jelenti, hogy a (6.7) formula érvényes, azaz a $\frac{\tilde P(z)}{\tilde R(z)}$ függvény teljesíti a (4.5) formulát. Hátra van még a (6.6) azonosság igazolása.

Ha $|z_0| > 1$, akkor a (6.6) formula baloldalán szereplő kifejezés analitikus függvény a $\{z\colon |z| < |z_0|\}$ körben, ezért az analitikus függvények Herglotz–integrál előállításáról szóló tétel alapján (lásd például a Petruska György komplex függvénytan jegyzet (9.2.10) tételét), a (6.6) azonosság érvényes. Valóban, a képlet mind a két oldalán analitikus függvény szerepel, és a harmonikus függvények előállításáról szóló formula alapján látható, hogy e kifejezések reális részei egyenlőek. Ezért elég azt ellenőrizni, hogy mind a két kifejezés nullával egyenlő, ha $Re^{i\varphi} = 0$. Ekkor a jobboldali kifejezés értéke $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \log\left|\frac{e^{i\vartheta}-z_0}{-z_0}\right| d\vartheta = \oint_{|r|=1} \log\left|\frac{r-z_0}{-z_0}\right| dr = \log\left|\frac{-z_0}{-z_0}\right| = 0$, mert a $\log\left|\frac{z-z_0}{-z_0}\right| = \operatorname{Re}\log\left(\frac{z-z_0}{-z_0}\right)$ függvény harmonikus a $\{z\colon |z| < |z_0|\}$ tartományban, és ezért e függvény körintegrálja az egységkörön egyenlő e függvény értékével az origóban. A baloldal értéke szintén 0 ebben az esetben.

Ha $|z_0| = 1$, akkor válasszunk olyan z_n, $|z_n| > 1$, $n = 1, 2, \dots$, sorozatot, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z_0$. Ekkor felírva a (6.6) azonosságot, mindenütt z_n-et írva z_0 helyett, $n \to \infty$ határátmenettel megkapjuk a (6.6) azonosságot ezzel a z_0 számmal is. (Vegyük észre, hogy a jobboldalon tekintett integrál $\frac{e^{i\vartheta}+Re^{i\varphi}}{e^{i\vartheta}-Re^{i\varphi}}$ magfüggvényének az abszolút értéke egyenletesen korlátos, ha $R < 1$. Ez segít a határátmenet jogosságának az indoklásában.) A 6.1 Lemma bizonyítását befejeztük.

Eredményeinkből az is következik, hogy amennyiben egy stacionárius sorozat $g(\lambda)$ spektrál sűrűségfüggvénye $g(\lambda) = \left|\frac{P(e^{i\lambda})}{R(e^{i\lambda})}\right|^2$ alakban adható meg egy racionális törtfüggvény segítségével, akkor a stacionárius sorozat reguláris. Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy az $\int_{-\pi}^{\pi} \log g(\lambda)\, d\lambda > -\infty$ feltétel teljesül. Ez a feltétel teljesül, bár a $g(\lambda)$ spektrál sűrűség függvény vehet fel nagyon kis értékeket, ha a $P(z)$ függvénynek van gyöke az egységkör vonalon. Ez azonban nem rontja el a $\log g(\lambda)$ függvény integrálhatóságát. Viszont a $g(\lambda)$ spektrál sűrűség előállítását megadó racionális törtfüggvény $R(z)$ nevezőjének nem lehet gyöke az egységkör vonalon, mert a $g(\lambda)$ függvény integrálható kell hogy legyen. Be lehet látni továbbá a következő állítást is.

Feladat: E feladat megfogalmazásában az előbb bevezetett jelöléseket fogom használni. Mutassuk meg, hogy $g(t) = \frac{1}{2\pi}\left|\frac{P(e^{it})}{R(e^{it})}\right|^2$ alakú, spektrál sűrűség függvény esetén létezik $g(t)$ spektrálsűrűségfüggvénnyel rendelkező Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, stacionárius Gauss sorozat, és független standard normális valószínűségi változók olyan $\dots, \varepsilon_{-1}, \varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots$ sorozata, amelyek teljesítik a (6.2) formulát.

Segítség: Definiáljuk véletlen integrálok segítségével az $Y_n = \int e^{int} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{P(e^{it})}{R(e^{it})} Z(\,dt)$, és $\varepsilon_n = \int e^{int} Z(\,dt)$, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozatokat, ahol $Z(\,dt)$ a $[-\pi, \pi]$ intervallumon vett $\frac{1}{2\pi}\lambda$ normalizált Lebesgue mértéknek megfelelő véletlen spektrál mérték. Mutassuk meg, hogy ezek a sorozatok teljesítik a (6.2) formulát, ha az a_p és b_q együtthatókat a

$P(z) = \sum\limits_{p=0}^{k} a_p z^p$ és $R(z) = \sum\limits_{q=0}^{l} b_q z^l$ formulák határozzák meg. Mutassuk meg, hogy az Y_n sorozatnak $g(t)$ a spektrál sűrűség függvénye. Az Y_n valószínűségi változókat érdemes átírni a 2.3 lemmában megfogalmazott véletlen spektrál mértékek szerinti integrálok helyettesítési szabályának a segítségével.

Előfordulhat, hogy egy moving average folyamat $g(\vartheta)$ spektrál sűrűségének van gyöke a $-\pi \le \vartheta \le \pi$ intervallumban, vagy ami ezzel ekvivalens, a $g(\vartheta)$ spektrál sűrűség függvény $g(\vartheta) = |P(e^{i\vartheta})|^2$ előállításában szereplő $P(z)$ polinom egyik gyöke az egységkör határán van. Ez a legnehezebb eset. Az alábbi példában ilyen modellre adunk egy látszólag egyszerű példát.

Példa. Legyen ε_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, független standard normális valószínűségi változók sorozata, és definiáljuk az $X_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, moving average sorozatot. Adjuk meg az X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sorozat Wold felbontását.

A példa tárgyalása. A vizsgálandó stacionárius sorozat spektrál sűrűsége

$$g(\vartheta) = |1 + e^{i\vartheta}|^2 = |P(e^{i\vartheta})|^2$$

a $P(z) = 1 + z$ polinommal. Mivel e polinom egyetlen gyöke a $z = -1$ pont ezért a Wold felbontást a $H_0(z) = 1 + z$ függvény adja meg. Ez azt jelenti, hogy a Wold felbontás $X_n = V_n + V_{n-1}$ alakban adható meg alkalmas V_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, független standard normális valószínűségi változók segítségével. A fő probléma a V_n valószínűségi változók megadása.

Az X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, stacionárius sorozat előállítható $X_n = \int e^{in\vartheta} Z(\,d\vartheta)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, alakban, ahol $Z(\cdot)$ egy $g(\vartheta) = \frac{1}{2\pi}|1 + e^{i\vartheta}|^2$, $-\pi \le \vartheta \le \pi$, spektrál sűrűség függvénnyel definiált spektrál mértékhez tartozó, és az X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sorozat által meghatározott véletlen spektrál mérték. Továbbá az általános elmélet szerint

$$V_n = \int e^{in\vartheta} \frac{1}{\overline{H_0(e^{-i\vartheta})}}\, dZ(\vartheta) = \int e^{in\vartheta} \frac{1}{1 + e^{-i\vartheta}}\, dZ(\vartheta)$$

alakban adható meg. Ez a formula azonban nem jól számolható. Ha felírjuk az $\frac{1}{H_0(z)}$ Taylor sorát azt kapjuk, hogy $\frac{1}{H_0(z)} = \frac{1}{1+z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k z^k$. Ez formálisan azt sugallná, hogy

$$\begin{aligned} V_n &= \int e^{in\vartheta} \frac{1}{1 + e^{-i\vartheta}}\, dZ(\vartheta) = \int e^{in\vartheta} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k e^{-ik\vartheta}\, dZ(\vartheta) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \int e^{i(n-k)\vartheta}\, dZ(\vartheta) = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k X_{n-k}. \end{aligned}$$

Ez azonban egy divergens sor, így ez az előállítás értelmetlen.

Viszont a szövegben tárgyalt heurisztikus gondolatmenet a következő megoldást sugallja.

$$
\begin{aligned}
V_n &= \lim_{R\to 1}\int e^{in\vartheta}\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\,dZ(\vartheta)=\lim_{R\to 1}\int e^{in\vartheta}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kR^ke^{-ik\vartheta}\,dZ(\vartheta)\\
&=\lim_{R\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kR^k\int e^{i(n-k)\vartheta}\,dZ(\vartheta)=\lim_{R\to 1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^kR^kX_{n-k},
\end{aligned}
$$

ahol a konvergens R számsorozat elemei 1-nél kisebb számok. Azaz azt sejtjük, hogy a $V_{n,R}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kR^kX_{n-k}$ számok konvergálnak a V_n valószínűségi változóhoz, ha $R\to 1$. Vegyük észre azt is, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^kR^kX_{n-k}=\int e^{in\vartheta}\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\,dZ(\,d\vartheta)$, azonosság is érvényes minden $0<R<1$ számra abban az értelemben, hogy a baloldalon vett végtelen összeg az X_n, $n=0,\pm1,\dots$, stacionárius sorozat G, $G(\,d\vartheta)=g(\vartheta)\,d\vartheta$, spektrál mértéke szerinti L_2 konvergenciában tart a jobboldalhoz, azaz

$$
\begin{aligned}
&\lim_{N\to\infty}E\left[\sum_{k=0}^{N}(-1)^kR^kX_{n-k}-\int e^{in\vartheta}\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\,dZ(\,d\vartheta)\right]^2\\
&\qquad=\lim_{N\to\infty}\int\left|e^{in\vartheta}\left(\sum_{k=0}^{N}(-1)^kR^ke^{-ik\vartheta}-\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\right)\right|^2\,dG(\,d\vartheta)=0,
\end{aligned}
$$

mivel az integrandus az utolsó kifejezés jobboldalán egyenletesen konvergál nullához minden $0<R<1$ számra, ha $N\to\infty$.

Belátjuk, hogy a $\lim\limits_{R\to1}V_{n,R}=V_n$ állítás igaz a következő értelemben: $\lim\limits_{R\to1}E(V_{n,R}-V_n)^2=0$. Valóban,

$$
\begin{aligned}
E(V_n-V_{n,R})^2&=E\left(\int e^{in\vartheta}\left(\frac{1}{1+e^{-i\vartheta}}-\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\right)\,dZ(\vartheta)\right)^2\\
&=\int\left|\frac{1}{1+e^{-i\vartheta}}-\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\right|^2G(\,d\vartheta),
\end{aligned}
$$

ahol $G(\,d\vartheta)=\frac{1}{2\pi}|1+e^{-i\vartheta}|^2\,d\vartheta$, az X_n stacionárius sorozat spektrál mértéke.

$$
\begin{aligned}
E(V_n-V_{n,R})^2&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\frac{1}{1+e^{-i\vartheta}}-\frac{1}{1+Re^{-i\vartheta}}\right|^2|1+e^{-i\vartheta}|^2\,d\vartheta\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{(1-R)^2}{|1+Re^{-i\vartheta}|^2}\,d\vartheta.
\end{aligned}
$$

Ez a kifejezés nullához tart, bár $\lim\limits_{R\to1}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{|1+Re^{-i\vartheta}|^2}\,d\vartheta=\infty$ a $\pm\pi$ pont kis környezetének hozadéka miatt ezen integrálhoz. Viszont az $(1-R)^2$ faktor miatt az eredeti integrál nullához tart $R \to 1$ esetén. Ennek igazolása érdekében érdemes az integrandust a következő alakban írni. $\frac{(1-R)^2}{|1+Re^{-i\vartheta}|^2} = \frac{(1-R)^2}{1+R^2+2R\cos\vartheta} = \frac{(1-R)^2}{(1-R)^2+2R(1+\cos\vartheta)}$. Ez az integrandus minden ϑ-ra és R-re kisebb vagy egyenlő, mint 1, és $\vartheta \neq \pm 1$ esetén nullához tart, ha $R \to 1$.

1. megjegyzés. Az előző példában kiszámolt V_n valószínűségi változók valójában az X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, változók definiciójában szereplő ε_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ független, standard normális valószínűségi változók. Ez a vizsgált sorozatok véletlen spektrál mérték szerinti integrál előállításából, és a véletlen spektrál mérték szerinti integrálok helyettesitési szabályából azonnal látszik, (elemi bizonyítása is egyszerű) ugyanis, ha az ε_n véletlen sorozatot $\varepsilon_n = \int e^{in\vartheta} dZ_0(\vartheta)$ véletlen spektrál mérték szerinti integrálként állítjuk elő, akkor $X_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1} = \int e^{in\vartheta}(1 + e^{-i\vartheta}) dZ_0(\vartheta)$, azaz $dZ(\vartheta) = (1 + e^{-i\vartheta}) dZ_0(\vartheta)$.

2. megjegyzés. Tekintsünk egy a (6.1) formulában megadott X_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, moving average folyamatot. Ha a $P(z) = \sum\limits_{p=0}^{k} a_p z^p$ polinomnak nincs gyöke a $\{z\colon |z| < 1\}$ egységkör belsejében, akkor a (6.1) formulában megadott képlet az X_n, $n = 0, \pm 1, \dots$, folyamat Wold felbontása, mert $P(z) = H_0(z)$, és ε_n, $n = 0, \pm 1, \dots$ független standard normális valószínűségi változók sorozata. A fő feladat az, hogy mindegyik ε_n valószínűségi változót fejezzük ki az X_k, $k \le n$, valószínűségi változók lineáris kombinációjaként. Láttuk, hogy ennek érdekében egy akalmas véletlen spektrál mérték szerinti integrált kell kiszámolni, amelynek magfüggvénye az $e^{in\vartheta} \frac{1}{\overline{H_0(e^{i\vartheta})}} = \frac{e^{in\vartheta}}{P(e^{-i\vartheta})}$ függvény. Ennek az integrálnak a kiszámítása érdekében érdemes kiszámolni az $\frac{1}{P(z)}$ függvénynek a nulla pont körüli hatványsorát. Ezt könnyebben tudjuk kiszámolni, ha az $\frac{1}{P(z)}$ függvényt előállítjuk elemi $\frac{1}{(z-z_j)^l}$ alakú kifejezések lineáris kombinációként, ahol z_j a $P(z)$ polinom (esetleg többszörös) gyöke.

A fent vázolt módszer alkalmazásában akkor jelenik meg nehézség, ha a $P(z)$ polinomnak van 1 abszolút értékű gyöke. Ilyen esetet tárgyaltunk az előző feladatban, amelyben a $P(z) = 1 + z$ függvény jelent meg. Bizonyos modellekben olyan $P(z)$ polinom jelenhet meg, amelynek többszörös multiplicitású 1 abszolút értékű sajátértéke is létezik. Ilyen modell például az $X_n = \varepsilon_n + 2\varepsilon_{n-1} + \varepsilon_{n-2}$, $n = 0, \pm 1, \dots$ mozgó átlag. Ehhez a modellhez a $P(z) = (1 + z)^2$ polinom tartozik. Az ilyen modellek is tárgyalhatóak hasonlóan az $X_n = \varepsilon_n + \varepsilon_{n-1}$ mozgó átlaghoz, bár az egyes lépések jogosságának az igazolása kissé több munkát igényel.

Kiegészítés

a) Stacionárius sorozatok felbontása. Reguláris és szinguláris sorozatok.

Ismertetem az 1.1. és 1.2. Tételben kimondott eredmények vázlatos bizonyítását. Bizonyos részletek kidolgozását az olvasóra bízom. A magyarázatban bevezetem a következő jelölést. Jelölje H_Y, $H_{n,Y}$ és S_Y az (1.1) formulában bevezetett mennyiségek megfelelőit akkor, ha a definicióban felhasznált stacionárius Gauss sorozat az Y_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ sorozat.

Az 1.1 Tétel bizonyítása. Lássuk először be, hogy az (1.2) képletben megadott felbontás egyértelmű. Ennek érdekében először azt igazoljuk, hogy egy a tétel feltételeit teljesítő felbontásra $H_Z = S_X = S$. Valóban, H_n a $H_{n,Y}$ és $H_{n,Z}$ alterek direkt összege minden n indexre. Véve ezek metszetét azt kapjuk, hogy S az S_Y és S_Z terek direkt összege, de mivel $S_Y = \emptyset$ az Y_n sorozat regularitása miatt, ezért $S = S_Z$, és mivel $S_Z = H_Z$, $S = H_Z$. Innen és a tétel feltételeiből következik, hogy Y_n az X_n valószínűségi változó merőleges vetülete és Z_n az X_n valószínűségi változó vetülete a H Hilbert tér S alterére. Ezért a keresett (1.2) felbontás, (ha az létezik egyáltalán), egyértelmű.

Az előző gondolatmenet azt is sugallja, hogy hogyan próbáljuk meg előállítani a keresett (1.2) felbontást. Legyen Y_n az X_n vektor merőleges vetülete, és a Z_n vektor az X_n vektor vetülete az $S = S_X$ altérre. Ekkor tetszőleges m számra az X téren definiált U_m shift transzformáció teljesíti a $H_{n+m} = U_m H_n$, $S = U_m S$, $H_Y = U_m H_Y$ azonosságokat, és H az S és H_Y alterek ortogonális összege. Innen mivel

$$X_{n+m} = Y_{n+m} + Z_{n+m},$$

és

$$X_{n+m} = U_m X_n = U_m(Y_n + Z_n) = U_m Y_n + U_m Z_n,$$

következik, hogy

$$Y_{n+m} = U_m Y_n \quad \text{és} \quad Z_{n+m} = U_m Z_n$$

minden n és m indexre, és az Y_n és X_n sorozatok az X_n sorozat (stacionárius) alárendelt sorozatai. (Az utolsó azonosság igazolásában felhasználjuk, hogy $U_m Z_n \in S$, és $U_m Y_n \in H_Y$, továbbá H_Y az S altér ortogonális kiegészítője a H Hilbert térben.)

Továbbá, mivel

$$H_n = H_{Y,n} \oplus H_{Z,n} \quad \text{és} \quad H_n = H_{Y,n} \oplus S$$

ezért $H_{Z,n} = S$ minden n indexre. Az utolsó relációban metszetet, illetve uniót véve kapjuk, hogy

$$S_Z = H_{Z,n} = S = H_Z$$

(minden n indexre), ezért Z_n szinguláris sorozat. Be kell még látnunk azt, hogy az Y_n sorozat reguláris, azaz $S_Y = \emptyset$. Azt mutatjuk meg, hogy egyrészt S_Y ortogonális S-re, mert $S_Y \subset H_{Y,n}$, és $H_{Y,n}$ ortogonális S-re (az Y_n vektorok definiciója miatt), másrészt $S_Y \subset S$. Ugyanis $S_Y \subset H_{Y,n} \subset H_n$ minden n indexre, és metszetet véve minden

n indexre kapjuk a második állítást. Az S_Y altér viszont csak úgy tudja mind a két feltételt teljesíteni, hogy $S_Y = \emptyset$. A tételt beláttuk.

Az 1.2 Tétel bizonyítása. Vezessük be a $D_n = H_n \ominus H_{n-1}$ altereket, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, azaz legyen D_n az (1.1) formulában definiált H_{n-1} altér ortogonális kiegészítője a H_n Hilbert térben. Nem nehéz belátni, hogy $UD_n = D_{n+1}$ az U shift transzformációra minden n indexre. Továbbá az X_n folyamat regularitását felhasználva meg lehet mutatni, hogy $H_n = \cdots \oplus D_{n-2} \oplus D_{n-1} \oplus D_n$ minden n indexre.

A D_n Hilbert terek egy dimenziósak, kivéve azt az elfajuló esetet, amikor $X_n \equiv 0$ minden n indexre. Az utóbbi esetben a D_n alterek null dimenziósak. Ugyanis a D_n terek dimenziója megegyezik minden n-re a $UD_n = D_{n+1}$ reláció miatt, és D_0 dimenziója 1, ha $X_0 \notin H_{-1}$, és nulla ha $X_0 \in H_{-1}$. De az utóbbi esetben $D_n = \emptyset$, és $H_n = \cdots \oplus D_{n-2} \oplus D_{n-1} \oplus D_n = \emptyset$ minden n indexre.

Válasszunk ki egy 1-re normált V_0 vektort a D_0 (egy dimenziós) Hilbert térben, és definiáljuk a $V_n = U^n V_0$ vektort minden $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$ indexre. Ekkor a V_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, valószínűségi változók sorozata az X_n sorozatnak alárendelt független valószínűségi változók sorozatát alkotja, és a $H_0 = \cdots \oplus D_{-2} \oplus D_{-1} \oplus D_0$ azonosság miatt felírható az $X_0 = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_{-k}$ azonosság alkalmas c_k, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k^2 < \infty$, együtthatókkal. Ezután az $X_n = U^n X_0$ és $V_{n-k} = U^n V_{-k}$ azonosságok segítségével azt kapjuk, hogy $X_n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} c_k V_{n-k}$ minden n indexre. Az, hogy a V_n, $n = \dots, -1, 0, 1, \dots$, sorozat reguláris könnyen látható. Az 1.2. Tételt bebizonyítottuk.

b.) A felhasznált komplex függvénytani eredmények. Hardy féle $\mathcal{H}_p$ függvényosztályok.

A jegyzet fő tárgyát képező predikciós feladatok vizsgálatában fontos szerepet játszottak a 3. fejezetben bevezetett Hardy féle $\mathcal{H}_p$ függvényosztályok tulajdonságai. Ezek olyan az egységkör belsejében analitikus függvényekből állnak, amelyeknek véve az R sugarú körbe vett megszorításait, illetve azok természetes átskálázásait, olyan a $[-\pi, \pi]$ intervallumon definiált függvényeket kapunk, amelyeknek van limeszük az L_p normában, ha $R \to 1$. Érdemes bevezetni és a $\mathcal{H}_p$ függvényosztályokkal együtt tárgyalni ezek természetes megfelelőit, a H_p függvényosztályokat. Ezeket hasonlóan definiáljuk, mint a $\mathcal{H}_p$ függvényosztályokat, de elemei harmonikus, és nem feltétlenül analitikus függvények. Emlékeztetek arra, hogy egy kétváltozós $f(x, y)$ függvény akkor harmonikus egy D tartományban, ha $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$ minden $(x, y) \in D$ pontban. Megengedjük azt is, hogy az $f(x, y)$ harmonikus függvény komplex szám értékű legyen.

Röviden felidézem a kapcsolatot a (kétváltozós) harmonikus és analitikus függvények között. A bizonyításokat elhagyom ebből a tárgyalásból. Célom az eredmények, illetve a mögöttük rejlő kép és motiváció elmagyarázása. A részletesen kidologozott bizonyítások megtalálhatóak például Petruska György Komplex Függvénytan jegyzetének 9. és 10. fejezetében.

Egy analitikus függvénynek mind a valós mind az imaginárius része harmonikus függvény, és ezek között jól megfogalmazható kapcsolat van. Egy analitikus függvény valós és komplex része egymásnak úgynevezett harmonikus társa. Az egyikük ismeretében a másik is kiszámítható az úgynevezett Riemann–Cauchy egyenletek segítségével, és az egy additív konstans erejéig egyértelműen meghatározott.

Jelölje $S(0,R)$ a 0 központú és R sugarú körlapot. Minket elsősorban az $S(0,R)$, $0 < R \leq 1$, körlap belsejében definiált analitikus és harmonikus függvények viselkedése érdekel. (Megengedettek a komplex szám értékű harmonikus függvények is.) A következő eredmény az ilyen függvények jellemzését tartalmazza.

B1. Tétel. *Egy $f(z)$ függvény akkor és csak analitikus a $\{z\colon\ |z| < R\}$ körlapon, ha felírható minden $z = re^{i\varphi}$, $r < R$, pontban*

$$f(z) = f(re^{i\varphi}) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_n r^n e^{in\varphi}$$

(hatványsor) alakban.

Egy $f(x,y)$ függvény akkor és csak harmonikus az $\{(x,y)\colon\ x^2 + y^2 < R^2\}$ körlapon, ha felírható minden $(x,y) = re^{i\varphi}$, $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $r < R$, pontban

$$f(x,y) = f(re^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n r^{|n|} e^{in\varphi}$$

alakban olyan β_n együtthatókkal, amelyekkel a fenti sorok konvergensek.

Egy a következő eredmények vizsgálatában fontos kérdés az, hogy adva valamely $g(\varphi)$, $-\pi < \varphi < \pi$, függvény, hogyan lehet meghatározni egy olyan $u(re^{i\varphi})$ harmonikus függvényt az $S(0,R)$ körlapon, amelynek határértéke az $r \to R$ határátmenet esetén a $g(\varphi)$ függvénnyel egyenlő, illetve egy olyan analitikus függvényt ugyanezen a körlapon, amelynek valós része ehhez a $g(\varphi)$ függvényhez konvergál. A vizsgálatok azt mutatták, hogy ezekben a problémákban a sugárirányú (radiális) határátmenetet érdemes tekinteni, mint a függvény limeszét a határon. A harmonikus függvényekről szóló, számunkra legfontosabb eredményeket a 4.2., 4.3. és 4.4. Tételben (ez utóbbi a Fatou tétel) fogalmaztam meg. Érdemes megjegyezni, hogy ezek az eredmények is mutatnak némi hasonlóságot az analitikus függvényekről szóló eredményekkel, csak itt a Poisson magfüggvény játssza azt a szerepet, amit a $\frac{1}{z-\zeta}$ magfüggvény játszik a Cauchy formulában. A Fatou tétel, a legélesebb változata azon eredményeknek, amelyek arról szólnak, hogy milyen feltételek mellett tudjuk biztosítani azt, hogy a (4.1) képletben bevezetett, az irodalomban Poisson formulának nevezett kifejezés segítségével megadott harmonikus függvény teljesítse a kívánt határfeltételt. A Fatou tétel erősségét és jelentőségét az adja, hogy a benne szereplő $g(\varphi)$ határfüggvény, illetve μ határmérték folytonosságáról enyhe feltételt írtunk elő. Ezenkívül ezt a határfeltételt a tekintett körlap szélén írhatjuk elő, ahol a harmonikus, illetve analitikus függvények vizsgálata már nehezebb problémákat vet fel.

A harmonikus függvényeknek még egy fontos tulajdonságát említem meg. Ha $f(x)$ harmonikus függvény egy D tartományon, és $x \in D$, akkor ha egy olyan x

középpontú $S(x)$ körvonalat tekintünk, amely belsejével együtt szintén benne van a D tartományban, akkor az $f(x)$ szám egyenlő az $f(\cdot)$ függvény integrálközepével az $S(x)$ körvonalon. (Ez a tulajdonság egyben jellemzi is a harmonikus függvényeket.) E tény egyik következménye az, hogy az analitikus függvények vizsgálatában fontos szerepet játszó maximum elv alkalmazható harmonikus függvényekre is.

Felidézem a korlátos változású mérték definicióját, mert erre később szükségünk lesz.

Korlátos változású mérték definiciója. *Legyen μ egy mérték, azaz σ-additív halmazfüggvény valamely $(X,\mathcal{A})$ téren. (Megengedjük, hogy a $\mu(A)$, $A\in\mathcal{A}$, mérték komplex értékű legyen.) A μ mérték $\|\mu\|$ (totális variáció) normáját a*

$$\|\mu\| = \sup_{B_1,\dots,B_n} \sum_{j=1}^{n} |\mu(B_j)|$$

képlettel definiáljuk, ahol a szuprémumot az X halmaz összes véges $B_1,\dots,B_n$ véges particiójára vesszük. Akkor mondjuk, hogy a μ mérték korlátos változású, ha a $\|\mu\|$ norma véges.

Emlékeztetek arra is, hogy az analízis eredményei szerint minden monoton függvény majdnem mindenütt differenciálható, és ez azt jelenti, hogy az általa indukált μ Stieltjes mértékre a Fatou tételben szereplő $\mu'(\varphi)$ derivált majdnem minden φ pontban létezik. Hasonló állítás érvényes korlátos változású függvények által indukált Stieltjes mértékekre is, mivel egy korlátos változású függvény előállítható két monoton függvény különbségeként.

Megadom a H_p, $1\le p\le\infty$, függvényosztályok definicióját.

A H_p függvényosztályok definiciója. *A H_p függvényosztály, $1\le p\le\infty$, azokból a $\{(x,y)\colon x^2+y^2<1\}$ egységkörben harmonikus $H(x,y)$ függvényekből áll, amelyekre $(x,y)=re^{i\varphi}$, $r=\sqrt{x^2+y^2}$ jelöléssel*

$$\|H_p\|^p \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{r<1} \|H(re^{i\varphi})\|_p^p = \sup_{r<1} \int_{-\pi}^{\pi} |H(re^{i\varphi})|^p \, d\varphi < \infty, \quad \text{ha } 1\le p<\infty,$$

és

$$\|H_\infty\| \stackrel{\text{def}}{=} \sup_{r<1} \|H(re^{i\varphi})\|_\infty = \sup_{r<1,\, -\pi\le\varphi<\pi} |H(re^{i\varphi})| < \infty, \quad \text{ha } p=\infty.$$

Az érdekesség kedvéért megjegyzem, hogy a H_p terek definiciójában szereplő $\|H_p\|$ mennyiség definiciójában a szuprémumot limesszel is helyettesíthettük volna, mert minden az $S(0,1)$ körlapon harmonikus u függvényre $\nu_p(r)=\int_{-\pi}^{\pi}|u(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi$, $1\le p<\infty$, és $\nu_\infty(r)=\sup\limits_{-\pi\le\varphi\le\pi}|u(re^{i\varphi})|$ kifejezés az r változó folytonos függvénye a $(0,1)$ intervallumon. Ez egy érdekes tény, de erre a továbbiakban nem lesz szükségünk.

A következő eredmény megadja többek között a H_p függvényosztály elemeinek jellemzését, azok radiális limeszét, és e radiális limesz kapcsolatát az őt meghatározó

H_p térbeli függvénnyel. Az $1 < p \leq \infty$ és a $p = 1$ esetek különböznek. Az első esetben (a $[-\pi, \pi]$ intervallumon a Lebesgue mérték által meghatározott) L_p térbeli függvények jelennek meg lehetséges limeszként, míg a másodikban a korlátos változású mértékek. A pontosan megfogalmazott tétel a következőt mondja.

B2. Tétel a H_p függvényosztályok jellemzéséről. *Legyen $u(x, y) = u(re^{i\varphi})$ harmonikus függvény az $S(0, 1)$ egységkörben. Rögzítsünk egy $1 < p \leq \infty$ paramétert. Az $u \in H_p$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha létezik olyan $\tilde{u} \in L_p$ függvény (ahol az L_p teret a $[-\pi, \pi]$ intervallumon definiáljuk a Lebesgue mértékkel), amelyre*

$$u(re^{i\varphi}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)} \tilde{u}(\vartheta)\, d\vartheta, \quad 0 \leq r < 1,\ -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Az $u \in H_1$ reláció akkor és csak akkor teljesül, ha létezik olyan korlátos változású μ mérték a $[-\pi, \pi]$ intervallum Borel mérhető halmazain, amelyre

$$u(re^{i\varphi}) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1 - r^2}{1 + r^2 - 2r\cos(\vartheta - \varphi)}\, d\mu(\vartheta), \quad 0 \leq r < 1,\ -\pi \leq \varphi \leq \pi.$$

Továbbá $\|u\|_p = \|\tilde{u}\|_p$, ha $1 < p \leq \infty$, és $\|u\|_1 = \|\mu\|$, ha $p = 1$.

Az $u \in H_p$ függvény egyértelműen meghatározza az őt definiáló $\tilde{u}$ függvényt, ha $1 < p \leq \infty$, és az őt definiáló μ mértéket, ha $p = 1$. Továbbá egy $u \in H_p$ függvény $u(re^{i\varphi}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \beta_n |r|^n e^{in\varphi}$ alakú előállításban szereplő β_n együtthatók és az őt meghatározó $\tilde{u}$ függvény illetve $\|\mu\|$ mérték Fourier együtthatói megegyeznek, azaz

$$\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\vartheta} \tilde{u}(\vartheta)\, d\vartheta, \quad \text{ha } 1 < p \leq \infty, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

és

$$\beta_n = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-in\vartheta}\, d\mu(\vartheta), \quad \text{ha } p = 1, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

A következő eredmény tulajdonképpen a harmonikus függvények Poisson integrál alakú előállításáról szóló eredmények következménye.

B3. Tétel. *Legyen $u(\cdot) \in H_p$, és legyen $\tilde{u}(\cdot)$ az a $[-\pi, \pi]$ intervallumon definiált függvény $p > 1$ esetben, és az a μ korlátos változású mérték a $[-\pi, \pi]$ intervallum Borel részhalmazain a $p = 1$ esetben, amely meghatározza az $u(\cdot)$ függvényt a B2. tételben megadott módon. Ekkor majdnem minden $\varphi \in [-\pi, \pi]$ számra igaz a*

$$\lim_{r \to 1} u(re^{i\varphi}) = \begin{cases} \tilde{u}(\varphi), & \text{ha } 1 < p \leq \infty \\ \dfrac{d\mu}{d\lambda}(\varphi), & \text{ha } p = 1 \end{cases}$$

reláció, azaz $\tilde{u}(\varphi)$ illetve $\frac{d\mu}{d\lambda}(\varphi)$ az $u(re^{i\varphi})$ függvény iránymenti határértéke az $r = 1$ esetben.

A B2 tételben az egy $u \in H_p$ függvény sorfejtésében szereplő β_n együtthatók tulajdonságairól megfogalmazott eredményből következik az is, hogy az u függvény akkor és csak akkor analitikus (akkor teljesül a $\beta_n = 0$ reláció minden $n = -1, -2, \dots$ indexre), ha az u függvényt olyan $\tilde{u} \in L_p$ függvény meghatározza meg a $p > 1$ esetben, illetve olyan μ korlátos változású mérték határozza meg a $p = 1$ esetben, amelynek β_n Fourier együtthatói nullával egyenlőek minden $n \le -1$ paraméterre. Ez a tény teszi természetessé a következő definiciót.

Analitikus mértékek definiciója. *Egy a $[-\pi, \pi]$ intervallum Borel mérhető részhalmazain definiált korlátos változású μ mértéket analitikusnak nevezünk, ha*

$$\int e^{in\vartheta}\, d\,\mu(\vartheta) = 0, \quad \textit{minden } n = 1, 2, \dots \textit{ számra.}$$

A fenti eredményekben láttuk, hogy a H_p térbeli függvényeknek mindig van radiális limesze, és a lehetséges limeszfüggvények halmaza megegyezik az $L_p([-\pi, \pi])$ tér elemeivel, ha $p > 1$, és a $[-\pi, \pi]$ intervallum Borel mérhető részhalmazain definiált korlátos változású mértékek halmazával, ha $p = 1$. Természetes módon felmerül az a Hardy függvényosztályok vizsgálatában fontos kérdés, hogy hogyan szűkül a lehetséges (radiális) limeszek halmaza, ha a H_p tér helyett a szűkebb a 3. fejezetbem bevezetett $\mathcal{H}_p$ függvénytér elemeinek a (radiális) limeszét tekintjük. Erre a kérdésre csak részleges választ fogunk adni, de ez a részleges válasz is elegendő a predikció elméleti vizsgálatainkban felmerült hasonló jellegű problémák megoldásához.

E kérdés tanulmányozásában érdemes az $S(0, 1)$ körön analitikus $g(z) = g(re^{i\vartheta})$ függvények által meghazározott $\log |g(0)|$ szám és $\int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta$ integrálok viselkedését vizsgálni $0 < r < 1$ paraméterekre, illetve a $\log |g(0)|$ szám és az előbbi integrálok kapcsolatát tekinteni. Bizonyos formulákat kissé általánosabb esetekben is érdemes vizsgálni. Tekinthetünk olyan eseteket is, amelyekben az analitikus $g(\cdot)$ függvénynek lehet véges sok szingularitása is.

Emlékeztetek arra, hogy ha $g(z)$ olyan analitikus függvény egy D egyszeresen összefüggő tarományban, amely sehol nem vesz fel null értéket, akkor lehet venni a $g(z)$ függvény logaritmusát a D tartományban, amely ebben az esetben analitikus függvény, ezért a reális része harmonikus függvény. Továbbá teljesül a $\operatorname{Re} \log g(z) = \log |g(z)|$ azonosság. Ezért, ha $g(z)$ egy az $S(0, 1)$ egységkörön definiált, és ott el nem tűnő analitikus függvény, akkor a harmonikus függvények tulajdonságai miatt $\log |g(0)| = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\vartheta})|\, d\vartheta$ minden $0 < r < 1$ paraméterre. Ha $g(z)$ nem azonosan nullával egyenlő analitikus függvény az $S(0, 1)$ körön, de lehetnek nullhelyei, akkor ezeknek a nullhelyeknek nem lehet torlódási pontja az $S(0, 1)$ kör belsejében. Ezért minden $0 < r < 1$ számra a $g(z)$ függvénynek csak véges sok nullhelye van az r sugarú kör belsejében. Ha ezek a nullhelyek valamely $a_1, \dots, a_k$ pontokban vanak, akkor a $g(z)$ függvényt elosztva olyan racionális törtfüggvények szorzatával, amelyek az r sugarú körvonalat önmagába viszik, az a_j, $1 \le j \le k$, nullhelyeket pedig az origóba, olyan $\tilde g(z)$ függvényt kapunk, amelynek nincs nullhelye, ezért alkalmazhatjuk rá az előbb felírt azonosságot. Továbbá $|\tilde g(re^{i\varphi})| = r^k |g(re^{i\varphi})|$ minden $-\pi \le \varphi \le \pi$ számra, mert z $\tilde g(z)$ függvény definiciójában olyan függvények szorzatával osztottuk el a $g(z)$ függvényt, amelyeknek az abszolút értéke r-rel egyenlő az r sugarú körvonalon. Ezen észrevételek kidolgozásával egy hasznos azonosságot lehet kapni. Ez a Jensen formulának nevezett eredmény, amely kissé általánosabb feltételek mellett is megfogalmazható, olyan esetekben is, amikor a $g(z)$ függvénynek véges sok pólusa is lehet. Ez a formula a következőt mondja.

B4. Tétel. Jensen formula. *Legyen $g(z)$ meromorf függvény egy $\{z\colon |z| < R\}$ sugarú körlapon. Tekintsünk egy $r < R$ számot, és legyenek a $g(z)$ függvény zérushelyei és pólusai az r sugarú kör belsejében az origót nem számítva és a nullhelyeket, illetve pólusokat multiplicitással felsorolva valamely $a_1, \dots, a_n$, illetve $b_1, \dots, b_m$ pontok. Teljesüljön a $g(z) = A_q z^q + \cdots$ reláció az origó kis környezetében. (Ez a formula adja meg, hogy az origó hányszoros gyöke vagy pólusa a $g(z)$ függvénynek.) Ekkor teljesül az*

$$\log |A_q r^q| + \sum_{k=1}^{n} \log \frac{r}{|a_k|} - \sum_{j=1}^{m} \log \frac{r}{|b_j|} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta$$

azonosság.

A Jensen formulának egyszerű következménye az alábbi Jensen egyenlőtlenség. (Ez nem egyezik meg az irodalomban általában Jensen egyenlőtlenség néven használt relációval). A Jensen egyenlőtlenség bizonyítása az előző azonosságot alkalmazza abban az esetben, amikor a $g(z)$ függvénynek nincs pólusa, és az origó se nem pólus, se nem gyök, azaz $q = 0$ a Jensen formulában.

B5. Tétel. Jensen egyenlőtlenség. *Ha $g(z)$ analitikus függvény egy $\{z\colon |z| < R\}$, R sugarú és nulla középpontú körlapon, és $g(0) \ne 0$, akkor minden $r < R$ számra*

$$\log |g(0)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\vartheta})| \, d\vartheta.$$

Vegyük észre, hogy ez az azonosság nagyon hasonló a vizsgálatainkban fontos szerepet játszó Szegő tételhez. (Ez utóbbi a jegyzet 4.6. tétele.) A lényeges különbség a két eredmény között az, hogy a Szegő tételben, az $S(0,1)$ körlapon dolgozva, a (4.8) formula jobboldalán az $R = 1$ határkörön vettük az integrált, míg a Jensen egyenlőtlenségben egy $r < R$ sugarú belső körben integráltunk. A fő probléma az, hogy a Jensen egyenlőtlenség alapjául szolgáló Jensen azonosságban kihasználtuk azt, hogy egy nem azonosan nulla analitikus függvény nullhelyeinek nincs belső torlódási pontja, míg a Szegő tétel esetében figyelembe kell venni azt, hogy egy $g(z)$ analitikus függvény nullhelyeinek lehet torlódási pontja az analitikus függvény értelmezési tartományának a határán, sőt a $g(z)$ függvény eltűnhet a határ bizonyos pontjaiban, és az ilyen esetek lehetőségének a hatását is kontrollálni kell.

Ahhoz, hogy a Szegő tételt be tudjuk bizonyítani, és hasonló jelenségeket vizsgálni tudjunk szükségünk van némi kontrollra egy az $S(0,1)$ körben analitikus $g(z)$ függvény nullhelyeinek a viselkedéséről abban az esetben, ha $\sup\limits_{r<1} \int \log |g(re^{i\varphi})|\, d\varphi < \infty$. Olyan típusú eredményre van szükségünk, amely arról szól, hogy a nullhelyek abszolút értékei nem sűrűsödhetnek be túlságosan az 1 pont körül. Ilyen jellegű eredményt mond ki az alábbi tétel.

B6. Tétel. *Legyen $g(z)$ analitikus függvény az $S(0,1)$ egységkörön. Akkor és csak akkor teljesül a*

$$\sup_{0<r<1} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\varphi})|\, d\varphi < \infty \tag{B1}$$

egyenlőtlenség, ha a $g(z)$ függvény $a_1, a_2, \dots$ nullhelyei teljesítik a

$$\sum_{k=1}^{\infty} (1 - |a_k|) < \infty \tag{B2}$$

egyenlőtlenséget. Az utolsó kifejezésben az a_k nullhelyet annyiszor számoltuk, amennyi az a_k nullhely multiplicitása.

Ha a fenti (equivalens) relációk teljesülnek, akkor a $g(z)$ függvény teljesíti a

$$\lim_{r\to 1} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \log |g(re^{i\varphi})|\, d\varphi = \log |A_q| - \sum_{k=1}^{\infty} \log |a_k|$$

azonosságot, ahol a $g(z)$ függvény Taylor sora $g(z) = A_q z^q + \cdots$ alakú.

Külön lemma formájában mondom ki az alábbi egyszerűen bizonyítható állítást annak fontossága miatt a Hardy függvényosztályok vizsgálatában. Ez azt állítja, hogy a B6. tételben megfogalmazott relációk teljesülnek a Hardy terekben.

B7. Lemma. *A 3. fejezetben definiált $\mathcal{H}_p$ függvényosztályok minden $0 < p \le \infty$ paraméterre teljesítik a (B1) és ezért a (B2) relációt.*

Ha egy $g(z)$ függvénynek véges sok nullhelye van, akkor alkalmas racionális törtfüggvénnyel való beszorzással ezeket a nullhelyeket el tudtuk tüntetni, és a beszorzás segítségével kapott függvények tulajdonságaiból értékes következtetéseket tudunk tenni az eredeti $g(z)$ függvény viselkedéséről. A következő eredmény hasonló lehetőséget biztosít akkor, ha egy az $S(0,1)$ egységkörön analitikus függvénynek végtelen sok a_k nullhelye is lehet, de ezek a nullhelyek teljesítik a (B2) relációt.

B8. Tétel. *Keressünk olyan az $S(0,1)$ egységkörben analitikus, és korlátos függvényt, amelynek a nullhelyei olyan $a_1, a_2, \dots$ számok, $|a_k| < 1$ minden $1 \le k < \infty$ indexre, amelyek teljesítik a (B2) relációt. Az alábbi $B(z)$ függvény ilyen tulajdonságú.*

$$B(z) = Cz^q \prod_{k=q+1}^{\infty} \frac{|a_k|}{a_k} \frac{a_k - z}{1 - z\bar{a}_k}, \tag{B3}$$

ahol q a nullával egyenlő gyökök száma, $a_k = 0$, ha $1 \le k \le q$, és $a_k \ne 0$, ha $k \ge q+1$, továbbá C tetszőleges egy abszolút értékű komplex szám. Az $f(z)$ függvényt definiáló szorzat egyenletesen konvergál az $S(0,1)$ nyílt kör minden zárt részhalmazában.

Megjegyzem, hogy a B8. tétel konstrukciója, hasonló a Weierstrass tétel konstrukciójához. A Weierstrass tételben olyan analitikus egész függvényeket keresünk, amelyeknek nullhelyei egy előírt, véges torlódási ponttal nem rendelkező ponthalmazon vannak. Ezt egy alkalmas szorzat segítségével állítjuk elő, amelyben bizonyos tagokat azért vezetünk be, hogy biztosítsuk a szorzat konvergenciáját. Jelen esetben az 1 abszolút értékű $\frac{|a_k|}{a_k}$ faktorok biztosítják a szorzat konvergenciáját. Ezek bevezetése természetes. Ezek a faktorok biztosítják, hogy a $z = 0$ esetben $B(z) = B(0)$ kifejezés (B3) definiciójában szereplő végtelen szorzat pozitív valós szám, 'a végtelen szorzat közelítő szorzatai nem forognak el'. Bevezetem a következő fogalmat.

Blaschke szorzat definiciója. *Legyen $a_1, a_2, \dots$ egy a (B2) feltételt teljesítő pontsorozat az $S(0,1)$ körlap belsejében. A (B3) formulában definiált $B(z)$ függvényt az $a_1, a_2, \dots$ sorozathoz és C, $|C| = 1$ komplex számhoz tartozó Blaschke szorzatnak nevezik.*

A Hardy terek vizsgálatában fontos a Blaschke szorzatok tulajdonságainak a megértése. A következő tétel eredménye ilyen típusú eredményt mond ki.

B9. Tétel. *Ha a $B(z)$ függvény egy Blaschke szorzat, azaz (B3) alakban írható fel, akkor $B(z)$ olyan analitikus függvény az $S(0,1)$ körlapon, amelyre $|B(z)| \le 1$ minden $|z| < 1$ argumentumra, és $\lim\limits_{r\to 1} B(re^{i\varphi}) = 1$ majdnem minden $-\pi \le \varphi \le \pi$ számra.*

Megfogalmazok egy olyan eredményt a $\mathcal{H}_p$-beli függvények tulajdonságairól, amely a 3. fejezetben megfogalmazott 3.3. tétel természetes általánosítása arra az esetre, amikor a $\mathcal{H}_p$ tereket nemcsak a $p = 2$ hanem minden $0 < p \le \infty$ paraméterre tekintjük. Előtte azonban a teljesség kedvéért megfogalmazom a következő eredményt.

B10. Tétel. *Rögzítsünk egy $f(z)$ reguláris függvényt az $S(0,1)$ körlapon, és definiáljuk a $\nu_0(r) = \nu_0(r,f) = \int_{-\pi}^{\pi} \log|f(r^{i\varphi})|\,d\varphi$, $\nu_p(r) = \nu_p(r,f) = \int_{-\pi}^{\pi} |f(re^{i\varphi})|^p\,d\varphi$, ha $0 < p < \infty$, és $\nu_\infty(r) = \nu_\infty(r,f) = \sup\limits_{-\pi\le\varphi<le\pi} |f(re^{i\varphi})|$ függvényeket. A $\nu_p(r$ függvény monoton a $0 \le r < 1$ változóban minden $0 \le p \le \infty$ paraméterre.*

A következő eredmény úgy tekinthető, mint a 3.3. tétel legfontosabb részének természetes általánosítása minden $0 < p \le \infty$ paraméterre.

B11. Tétel. *Egy $f \in \mathcal{H}_p$, $0 < p < \infty$, függvénynek létezik radiális limesze majdnem minden irányban, azaz*

(i) A $\lim\limits_{r\to 1} f(re^{i\varphi}) = \tilde{f}(\varphi)$ azonosság teljesül majdnem minden $\varphi \in [-\pi,\pi]$ pontban egy alkalmas a $[-\pi,\pi]$ intervallumon definiált $\tilde{f}(\cdot)$ függvénnyel.

(ii) Az (i) pontban szereplő $\tilde{f}$ függvény az $L_p([-\pi,\pi])$ tér eleme, és teljesíti az $\|f\|_p = \|\tilde{f}\|_p$ azonosságot, ahol az $\|f\|_p$ mennyiséget a 3. fejezetben a $\mathcal{H}_p$ halmazosztály definiciójában vezettük be.

(iii) *A* $\lim\limits_{r\to1} f(re^{i\varphi})=\tilde f(\varphi)$ *konvergencia teljesül az* L_p *értelemben is, ha* $0<p<\infty$.

(iv) $\int_{-\pi}^{\pi}|\log|\tilde f(\varphi)||\,d\varphi<\infty$, *kivéve, ha* $f(z)\equiv 0$ *a* $z\in S(0,1)$ *egységkörben. Speciálisan, az* $\tilde f$ *függvény vagy majdnem mindenütt nulla, vagy csak egy (a Lebesgue mérték szerint) null mértékű halmazon lehet nulla.*

Mivel az igazán érdekes $1\le p\le\infty$ esetben $\mathcal{H}_p\subset H_p$, a H_p terek tulajdonságaiból következik, hogy az $1\le p\le\infty$ esetbetben egy $f\in\mathcal{H}_p$ függvényt egyértelműen meghatároz annak $\tilde f(\cdot)$ radiális limesze, és az f függvény 0 pont körüli Taylor sorfejtésének az együtthatói megegyeznek az $\tilde f$ függvény megfelelő Fourier együtthatóival. Innen az is következik, hogy az $f\in\mathcal{H}_p$ függvények, $1\le p\le\infty$, radiális limeszei azok és csak azok az $\tilde f\in L_p$ függvények, amelyekre $\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\varphi}\tilde f(\varphi)\,d\varphi=0$ minden $n=1,2,\dots$ számra.

Kihasználva ezeket a tulajdonságokat valamint azt a tényt, hogy egy analitikus mérték egy olyan H_1 térbeli függvénynek a radiális limesze, amely benne van a $\mathcal{H}_1$ térben is, és a $\mathcal{H}_1$ térbeli függvények radiális limeszei L_1 térbeli függvények be lehet bizonyítani a következő tételt.

B12. Tétel. *Minden analitikus mérték abszolút folytonos a Lebesgue mértékre nézve, azaz létezik sűrűségfüggvénye a* $[-\pi,\pi]$ *intervallumon.*

Megjegyzem, hogy a $\mathcal{H}_p$ terek fent említett tulajdonságainak felhasználásával be lehet bizonyítani a következő eredményt is.

B13. Tétel. *A* $\mathcal{H}_p$ *tér,* $1\le p\le\infty$, *Banach tér, sőt az is igaz, hogy az* $f\to\tilde f$ *leképezés (minden* $f\in\mathcal{H}_p$ *függvénynek megfeleltetjük annak* $\tilde f$ *radiális limeszét) a* $\mathcal{H}_p$ *tér egy izomorf és norma tartó leképezését adja az* L_p *Banach tér azon zárt alterébe, amely azon* $\tilde f$ *függvényekből áll, amelyek teljesítik az* $\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\varphi}\tilde f(\varphi)\,d\varphi=0$ *azonosságot minden* $n=1,2,\dots$ *számra.*

A fenti eredményekből következik, hogy minden $1\le p\le\infty$ paraméterre egy a $[-\pi,\pi]$ intervallumon definiált f függvény akkor és csak akkor állítható elő, mint valamely $F\in\mathcal{H}_p$ függvény radiális limesze, ha $f\in L_p$, és az f függvény negatív indexű Fourier együtthatói mind nullával egyenlőek, azaz $\int_{-\pi}^{\pi}e^{in\varphi}f(\varphi)\,d\varphi=0$ minden $n=1,2,\dots$ számra. Továbbá azt is tudjuk a B11. tétel (iv) pontja alapján, hogy egy ilyen f függvényre teljesülnie kell az $\int_{-\pi}^{\pi}|\log|f(\varphi)||\,d\varphi<\infty$ egyenlőtlenségnek is, hacsak az f függvény nem tűnik el majdnem mindenütt.

De ez nem egy teljesen kielégítő kép a jellemezni kívánt függvénycsaládról, mert az, hogy egy függvénynek mikor tűnnek el a negatív indexű Fourier együtthatói csak nehezen ellenőrizhető az általános esetben, és a B11. tétel (iv) pontjában megfogalmazott tulajdonság csak szükséges, de nem elégséges feltétele annak, hogy f a kívánt függvényosztályba tartozzon.

Lényegesen jobb leírása van az alábbi FELADAT B-ben megkövetelt tulajdonságokkal rendelkező függvénycsaládnak. Ez a FELADAT B természetes általánosítása a

3. fejezet végén megfogalmazott FELADAT A-nak, amelynek megoldása fontos szerepet játszik a predikció elméletben.

FELADAT B. *Legyen adva egy $\alpha(\cdot)$ függvény a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, amelyre $\alpha(\vartheta)\ge 0$ majdnem minden $\vartheta\in[-\pi,\pi]$ számra, és definiáljuk minden $0<p\le\infty$ paraméterre a következő*

$$\mathcal{H}_p(\alpha)=\{h(\cdot)\colon\ h\in\mathcal{H}_p,\ \textit{és}\ \lim_{r\to\infty}|h(re^{i\vartheta})|=\alpha(\vartheta)\ \textit{majdnem minden}\ \vartheta\in[-\pi,\pi]\ \textit{számra.}\}\tag{B4}$$

függvényekből álló halmazt. Határozzuk meg, hogy mely függvények elemei a $\mathcal{H}_p(\alpha)$ halmaznak. Speciálisan, mely $\alpha(\cdot)$ függvényekre nem üres a $\mathcal{H}_p(\alpha)$ halmaz? Mutassuk meg, hogy ha $\mathcal{H}_p(\alpha)$ nem üres halmaz, akkor a FELADAT B-nek van egy maximális $h_0(z)\in\mathcal{H}_p(\alpha)$ megoldása, amelyre teljesül a $|h_0(z)|\ge|h(z)|$ egyenlőtlenség minden $h\in\mathcal{H}_p(\alpha)$ függvényre és z, $|z|<1$, komplex számra.

A FELADAT A-ban hasonló feladatot vizsgáltunk $p=2$, esetben $\alpha(\vartheta)=\sqrt{g(\vartheta)}$ választással, ahol $g(\cdot)$ egy spektrál sűrűség függvény volt. Mivel $g(-\vartheta)=g(\vartheta)$ egy $g(\cdot)$ spektrál sűrűség függvényre, ezért az $\alpha(-\vartheta)=\alpha(\vartheta)$ tulajdonság is teljesül a FELADAT A-ban. A FELADAT A-ban (felhasználva az $\alpha(\cdot)$ függvény most említett speciális tulajdonságát) olyan $h\in\mathcal{H}_2$ függvényeket keresünk, amelyek hatványsorában valós együtthatók szerepelnek.

A FELADAT A megoldását nem nehéz megtalálni a FELADAT B eredményének a segítségével. Másrészt a FELADAT B megoldása megkapható a FELADAT A 4. fejezetben ismertetett megoldási módszerének a finomításával. Az első lépésben egy olyan eredményt bizonyítunk be, amely a 4.1 Lemma általánosításának tekinthető, és lehetővé teszi, hogy egy $f\in\mathcal{H}_p(\alpha)$ függvény ismeretében olyan új $g\in\mathcal{H}_p(\alpha)$ fügvényt találjunk, amelynek nincs nullhelye az $S(0,1)$ egységkörben. Ráadásul erre a függvényre teljesül az $|f(z)|\le|g(z)|$ egyenlőtlenség minden $z\in S(0,1)$ pontban. Ez következik az alábbi eredményből.

B14. Tétel. *Legyen $f\in\mathcal{H}_p$ valamely $0<p\le\infty$ paraméterrel. Ez az f függvény felírható $fz)=B(z)g(z)$ alakban, ahol $B(z)$ egy Blaschke szorzat, $g\in\mathcal{H}_p$, és $g(z)\ne 0$ minden $z\in S(0,1)$ pontban. Továbbá $\|g\|_p=\|f\|_p$ a Hardy függvényosztályok definiciójában bevezetett $\|\cdot\|_p$ kifejezéssel.*

A B9. tételből következik az, hogy ha $f\in\mathcal{H}_p(\alpha)$ akkor a B14. tételben konstruált g függvényre $g\in\mathcal{H}_p(\alpha)$. A $g(z)\ne 0$ tulajdonság lehetővé teszi, hogy definiáljuk a $\log g(z)$ analitikus függvényt. Továbbá a Blaschke szorzat tulajdonságaiból az is következik, hogy $|g(z)|\ge|f(z)|$ minden $z\in S(0,1)$ pontban, sőt szigorú egyenlőtlenség van akkor, ha az $f(z)$ függvénynek vannak nullhelyei. Ezután, ha bebizonyítjuk a 4.6. tételben kimondott Szegő tételt akkor a 4.5. lemma bizonyításának természetes módosításával bizonyos feltételek teljesülése esetén mellett meg tudjuk konstruálni a FELADAT B egyik megoldását. A következő eredményt kapjuk.

B15. Tétel. *Rögzítsünk valamely $0 < p \le \infty$ számot, és legyen $\alpha(\vartheta)$ olyan függvény a $[-\pi,\pi]$ intervallumon, amely teljesíti az $\int_{-\pi}^{\pi} |\log|\alpha(\vartheta)||\,d\vartheta < \infty$ feltételt, továbbá $\int_{-\pi}^{\pi} |\alpha(\vartheta)|^p\,d\vartheta < \infty$, ha $0 < p < \infty$, és $\sup|\alpha(\vartheta)| < \infty$, ha $p = \infty$. Ekkor az*

$$F_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{i\vartheta}+z}{e^{i\vartheta}-z}\log\alpha(\vartheta)\,d\vartheta\right\} \tag{B5}$$

függvényre $F_0 \in \mathcal{H}_p(\alpha)$. Továbbá minden $f \in \mathcal{H}_p(\alpha)$ függvény $f(z) = F_0(z)h(z)$ alakban adható meg, ahol $h(z)$ olyan analitikus függvény az $S(0,1)$ egységkörön, amelyre $|h(z)| \le 1$ minden z számra az egységkör belsejében, és $\lim\limits_{r\to1} |h(re^{i\vartheta})| = 1$ majdnem minden $\vartheta \in [-\pi,\pi]$ pontban.

A $\mathcal{H}_p$ osztálybeli függvények radiális limeszének a B11. tétel (ii) és (iv) pontjában megfogalmazott tulajdonságaiból következik, hogy a B15. tételben az $\alpha(\cdot)$ függvényre előírt tulajdonságok nemcsak elégséges, hanem szükséges feltételei is annak, hogy a $\mathcal{H}_p(\alpha)$ halmaz ne legyen üres. A B15. tétel (B5) formulájában definiált $F_0(z)$ függvényt az $\alpha(\cdot)$ függvényhez tartozó külső függvénynek, a szintén a B15. tételben bevezetett $h(z)$ függvényt pedig belső függvénynek nevezzük. A FELADAT B megoldásához, azaz a $\mathcal{H}_p(\alpha)$ halmaz pontos megadásához az $\alpha(\cdot)$ függvényhez tartozó külső függvény megadásán kívül a belső függvények jellemzése is szükséges. Először leírom a belső függvények definicióját. Ez nem függ az $\alpha(\cdot)$ függvénytől.

Belső függvények definiciója. *Azokat az $S(0,1)$ egységkör belsejében analitikus $h(z)$ függvényeket nevezzük belső függvénynek, amelyekre $|h(z)| \le 1$ minden $z \in S(0,1)$ pontban, és létezik a $\lim\limits_{r\to1} h(re^{i\vartheta}) = \tilde h(\vartheta)$ radiális limesz egy olyan $\tilde h(\vartheta)$ függvénnyel, amelyre $|\tilde h(\vartheta)| = 1$ majdnem minden $\vartheta \in [-\pi,\pi]$ számra.*

Megjegyzés. Az irodalomban azokat a függvényeket nevezik az $\alpha(\cdot)$ függvényhez tartozó külső függvénynek, amelyeket a (B5) formulában szereplő függvényeket egy 1 abszolút értékű komplex számmal beszorozva kapunk. Ráadásul e függvényosztálynak a következő ‘intrinsic’ jellemzését adják.

Egy $F(z) \in \mathcal{H}_p(\alpha)$ akkor és csak akkor az $\alpha(\cdot)$ függvényhez tartozó külső függvény, ha $|f(z)| \le |F(z)|$ minden $z \in S(0,1)$ pontban minden $f \in \mathcal{H}_p(\alpha)$ függvényre. Az e jegyzetben is ismertetett eredményekből az is következik, hogy az $|f(z)| < |F(z)|$ szigorú egyenlőtlenség is érvényes minden $z \in S(0,1)$ pontban akkor, ha az $f \in \mathcal{H}_p(\alpha)$ függvény nem az $\alpha(\cdot)$ függvényhez tartozó külső függvény.

Írjuk le a belső függvények családját. Belső függvények a (B3) formulában definiált $B(z)$ Blaschke szorzatok, amelyeket olyan $a_k \in S(0,1)$ komplex számok segítségével definiálunk, amelyek teljesítik a (B2) relációt. Továbbá az is igaz, hogy minden $h(z)$ belső függvény előáll $h(z) = B(z)S(z)$ alakban, ahol $S(z)$ olyan belső függvény, amely sehol sem tűnik el az $S(0,1)$ egységkörön. Adjuk meg az összes ilyen tulajdonságú belső függvényt. Mint látni fogjuk az egy abszolút értékű konstans függvényeken kívül más ilyen függvény is van.

Mivel az ilyen tulajdonságú $S(z)$ függvények nem tünnek el az $S(0,1)$ egységkörön, ezért definiálhatjuk ezen függvények $\log S(z)$ logaritmusát ezen a halmazon. Ezek analitikus függvények, ezért a keresett függvényekre $\operatorname{Re}\log S(z) = \log|S(z)|$ harmonikus függvény az $S(0,1)$ egységkörben. Továbbá $\lim\limits_{r\to 1}\log|S(re^{i\vartheta})| = 0$ majdnem minden $\vartheta \in [-\pi,\pi]$ számra, és $\log|S(re^{i\vartheta})| \le 0$, ha $r < 1$. Először az ilyen tulajdonságú $\log|S(e^{i\vartheta})|$ függvényeket keressük. Felhasználva a Fatou tételt (ez a 4.4 tétel) azt kapjuk, hogy a (4.4) formula jobboldala nem triviális, kívánt tulajdonságú $\log|S(z)| = \operatorname{Re}\log S(z)$ függvényeket definiál, ha ebben képletben egy pozitív szinguláris μ mérték -1-szerese szerint integrálunk. (Egy a $[-\pi,\pi]$ intervallum Borel részhalmazain definiált μ mérték szinguláris, ha a tartója nulla Lebesgue mértékű halmaz.) Azért integráltunk egy pozitív mérték (-1)-szerese szerint, hogy biztosítsuk a $\log|S(re^{i\vartheta})| \le 0$, ha $r < 1$ tulajdonságot. Véve az így kapott függvények analitikus kiegészítését, majd annak exponensét az $S(0,1)$ egységkörön el nem tűnő belső függvényeket kapunk. Ezeket az

$$S(z) = C\exp\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{z+e^{i\vartheta}}{z-e^{i\vartheta}}\,d\mu(\vartheta)\right\}, \tag{B6}$$

képlettel adhatjuk meg, ahol μ tetszőleges szinguláris (pozitív) mérték a $[-\pi,\pi]$ intervallum Borel mérhető részhalmazain, és C egy 1 abszolút értékű komplex szám. A (B6) képlettel definiálható $S(z)$ függvényeket szinguláris belső függvénynek nevezik az irodalomban. Be lehet látni, hogy minden belső függvény felírható egy Blaschke szorzat és egy szinguláris belső függvény szorzataként, és ez a reprezentáció, eltekintve az egyes faktorok 1 abszolút értékű számmal való szorzásától egyértelmű.

Érdemes a következő észrevételt tenni. A (B6) formula integráljában szereplő $g(z) = \frac{z+e^{i\vartheta}}{z-e^{i\vartheta}}$ magfüggvény a $\{z\colon\ |z| < 1\}$ egységkört a $\{z\colon\ \operatorname{Re} z < 0\}$ félsíkba képező racionális törtfüggvény minden $\vartheta \in [-\pi,\pi]$ paraméterre. Innen következik, hogy egy $S(z)$ szinguláris belső függvényre $|S(z)| < 1$ szigorú egyenlőtlenséggel minden $z \in S(0,1)$ pontban. Hasonló egyenlőtlenség érvényes a Blaschke szorzatokra is.

A fenti eredmények lehetőséget adnak a FELADAT B megoldásának a leírására. Ez a tartalma a következő tételnek.

B16. Tétel. *Akkor és csak akkor nem üres a (B4) formulában definiált $\mathcal{H}_p(\alpha)$ függvényhalmaz (eltekintve az $\alpha(\vartheta) \equiv 0$ elfajuló esettől), ha az $\alpha(\vartheta) \ge 0$ függvény teljesíti az $\int_{-\pi}^{\pi}|\log|\alpha(\vartheta)||\,d\vartheta < \infty$, valamint az $\int_{-\pi}^{\pi}|\alpha(\vartheta)|^p\,d\vartheta < \infty$, ha $0 < p < \infty$, vagy $\sup|\alpha(\vartheta)| < \infty$, ha $p = \infty$ feltételeket. Ha ezek a feltételek teljesülnek akkor a $\mathcal{H}_p(\alpha)$ halmaz megegyezik a következő képlettel megadott $f(z)$ függvények családjával.*

$$f(z) = F_0(z)B(z)S(z), \tag{B7}$$

ahol $F_0(\cdot)$ a (B5) képletben megadott az $\alpha(\cdot)$ függvényhez tartozó külső függvény, $B(\cdot)$ a (B3) képletben definiált Blaschke szorzat (valamely a (B2) formulát kiegégítő a_k paraméterekkel), és $S(z)$ a (B6) formulában (valamilyen szinguláris μ mérték segítségével) definiált szinguláris belső függvény. A $\mathcal{H}_p(\alpha)$ halmazban tartalmazott $f(z)$ függvények (B7) formulában megadott előállítása, eltekintve attól, hogy az egyes tényezőket esetleg megszorozhatjuk egy 1 abszolút értékű konstanssal, egyértelmű.