Vizsga feladatok és kérdések

1.) Legyen (ξ, η) egy két-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor $E\xi = E\eta = 0$ várható értékkel, és ismert $\mathrm{Var}\,\xi$, $\mathrm{Var}\,\eta$ szórásnégyzetekkel és $\mathrm{Cov}\,(\xi, \eta)$ kovarianciával. Számítsa ki az $E(\xi|\eta)$ feltételes várható értéket.

2.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$ független, korlátos valószínűségi változók. Vezessük be a ξ_1, $\dots$, ξ_n valószínűségi változók által generált $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_n)$ σ-algebrát, és definiáljuk az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_1 \cdots \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat. Mutassa meg, hogy ha $E\xi_n = 0$ minden $n = 2, 3, \dots$ indexre, akkor az $(S_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat martingál.

3.) Mi a többváltozós normális eloszlás definiciója, és melyek a legfontosabb tulajdonságai ennek az eloszlásnak?

4.) Hogy szól a Bochner tétel? Mi a spektrál mérték, és mi a véletlen spektrál mérték? Mik a legfontosabb eredmények velük kapcsolatban?

5.) Mi a reguláris és szinguláris stacionárius sorozat definiciója? Melyek a róluk szóló legfontosabb eredmények? Mi a Wold felbontás?

6.) Milyen komplex függvénytani feladatot kellett megoldani annak érdekében, hogy megtaláljuk egy stacionárius sorozat Wold felbontását? Milyen eredmények segítettek abban, hogy az eredeti feladatot erre a komplex függvénytani feladatra vezessük vissza?

7.) Hogy szól a Kálmán-féle filterről szóló feladat? Ismertesse röviden a feladat megoldásának legfontosabb tulajdonságait.

8.) Legyen adva egy ξ valószínűségi változó és egy $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Hogyan definiáljuk az $E(\xi|\mathcal{F})$ feltételes várható értéket?