Állítás: *Legyen $W(t,\omega)=(W_1(t,\omega),W_2(t,\omega))$, $0\le t<\infty$, kétváltozós Wiener folyamat. Ekkor minden $\delta>0$ számra és majdnem minden ω elemi eseményhez létezik olyan $\varepsilon(\delta,\omega)>0$ szám, amelyre $\inf\limits_{0<t\le 1} t^{-(\frac12+\delta)}|W(t,\omega)|\ge\varepsilon(\delta,\omega)$. (Jelölésünkben $|W(t,\omega)|=\sqrt{W_1(t,\omega)^2+W_2(t,\omega)^2)}$.)*

Bizonyításvázlat. Azt látjuk be, hogy minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan (elég kicsi) $\eta=\eta(\varepsilon,\delta)>0$ szám, amelyre

$$P\left(\inf_{0<t\le\eta} t^{-(\frac12+\delta)}|W(t,\omega)|\ge 1\right)\ge 1-\varepsilon. \tag{1}$$

Ezen egyenlőtlenség segítségével nem nehéz belátni az eredeti állítást.

Válasszuk a következő (duplán exponenciális) sorozatot a $[0,1]$ intervallumban. Definiáljuk az $t_k=2^{-2^{\varepsilon k}}$, $k=1,2,\dots$ sorozatot, és legyen $u_k=t_k^{(1+\delta)/2}$. Először a

$$P(k,\varepsilon,\delta)=P\left(\inf_{t_k\le t\le t_{k-1}}|W(t)|<u_k\right)$$

valószínűségre adunk jó becslést. Nem nehéz belátni, hogy $P(|W(t_k)|<t_k^{1/2}k^{-1})\le k^{-2}$. Becsülni akarjuk először az

$$A(k,\varepsilon,\delta)=P\left(\left\{\inf_{t_k\le t\le t_{k-1}}|W(t)|<u_k\right\}\cap\{|W(t_k)|\ge t_k^{-1/2}k^{-1}\}\right)$$

valószínűséget. Nem nehéz belátni, hogy a $P\left(\inf\limits_{t_k\le t\le t_{k-1}}|W(t)|<u_k\,\middle|\,|W(t_k)|=y\right)$ feltételes valószínűség az $y>0$ paraméter monoton csökkenő függvénye. mert az $u^{1/2}W(ut)$ és $W(t)$ Wiener folyamatok eloszása megegyezik. Ezért

$$\begin{aligned}A(k,\varepsilon,\delta)&\le P\left(\inf_{t_k\le t\le t_{k-1}}|W(t)|<u_k\,\middle|\,|W(t_k)|=t_k^{-1/2}k^{-1}\right)\\&=P\left(\inf_{0\le t\le t_k-t_{k-1}}|W(t)+\tilde x_k|<u_k\right)\le P\left(\inf_{0\le t\le t_k}|W(t)+\tilde x_k|<u_k\right),\end{aligned}$$

ahol $\tilde x_k$ tetszőleges olyan vektor az R^2 síkon, amelyre $|\tilde x_k|=x_k=t_k^{-1/2}k^{-1}$. Becsülni akarjuk a $B(k,\varepsilon,\delta)=P\left(\inf\limits_{0\le t\le t_k}|W(t)+\tilde x_k|<u_k\right)$ valószínűséget. Ennek érdekében vezessük be a következő mennyiséget. Adva valamely $0<u<x<v$ számok, jelölje $S(0,u)$ illetve $S(0,v)$ az origó középpontú u illetve v sugarú körvonalat, legyen $\tilde x\in R^2$ egy olyan vektor, amelyre $|\tilde x|=x$, és vezessük be a következő valószínűséget:

$$\begin{aligned}Q(x,u,v)=P(&\text{Az } \tilde x+W(t) \text{ Wiener folyamat, } 0\le t<\infty,\text{ előbb éri el az } S(0,u)\\&\text{kört, mint az } S(0,v) \text{ kört.})\end{aligned}$$

Ismeretes (lásd például a Dynkin–Yushkevich könyvet), hogy $Q(x,u,v)=\frac{\log\frac{v}{x}}{\log\frac{v}{u}}$. Azt állítom, hogy $u_k<x_k<v_k$ és $|\tilde{x}_k|=x_k$ esetén

$$P\left(\inf_{0\le t\le t_k}|W(t)+\tilde{x}_k|<u_k\right)\le P\left(\sup_{0\le t\le t_k}|W(t)|>v_k-x_k\right)+Q(x_k,u_k,v_k). \qquad (2)$$

Valóban, válasszunk egy $v_k>x_k$ számot. Az $\inf_{0\le t\le t_k}|W(t)+\tilde{x}_k|<u_k$ esemény csak úgy következhet be, hogy a következő A) vagy B) események valamelyike bekövetkezik. A) esemény: A $W(t)+x_k$ folyamat előbb éri el az $S(0,v_k)$ kört, mint az $S(0,u_k)$ kört, és ez a t_k időpont előtt megtörténik, (hogy a Wiener folyamat még a t_k időpont előtt elérhesse az $S(0,u_k)$ kört is.). B) esemény: $W(t)+x_k$ előbb éri el az $S(0,u_k)$ mint az $S(0,v_k)$ kört. Az A) esemény valószínűsége kisebb, mint $P\left(\sup\limits_{0\le t\le t_k}|W(t)+\tilde{x}_k|>v_k\right)$, a B) esemény valószínűsége pedig $Q(x_k,u_k,v_k)$. Innen következik a (2) formula.

A $P\left(\inf_{0\le t\le t_k}|W(t)+\tilde{x}_k|<u_k\right)$ valószínűséget a (2) formula segítségével fogjuk becsülni $u_k=t_k^{(1+\delta)2}$, $x_k=t_k^{1/2}k^{-1}$ és $v_k=t_k^{1/2}k$ választással, ahol $t_k=2^{-2^{k\varepsilon}}$.

Nem nehéz belátni, hogy a fenti választással $P\left(\sup\limits_{0\le t\le t_k}|W(t)|>v_k-x_k\right)\le k^{-2}$. A $Q(x_k,u_k,v_k)$ kifejezés becslése érdekében vegyük észre, hogy $\log\frac{v_k}{x_k}=2\log k$. Másrészt $\log\frac{v_k}{u_k}=\delta 2^{\varepsilon k}+\log k$. Innen nem nehéz belátni, hogy $Q(x_k.u_k,v_k)=\frac{\log\frac{v_k}{x_k}}{\log\frac{v_k}{u_k}}\le k^{-2}$, ha $k\ge k_0(\varepsilon,\delta)$. A fenti becslésekből adódik, hogy létezik olyan $p=p(\varepsilon,\delta)$ szám, amelyre

$$\sum_{k=p}^{\infty}P\left(\inf_{t_k\le t\le t_{k-1}}|W(t)|<u_k\right)<\varepsilon.$$

Másrészt vegyük észre, hogy tetszőleges $t_k\le t\le t_{k-1}$ számokra $t^{1/2+\delta}\le t_{k-1}^{1/2+\delta}\le t_k^{(1+\delta)/2}$. Valóban, elég megmutatni, hogy $\frac{1+\delta}{2}\log t_k-(\frac12+\delta)\log t_{k-1}\ge 0$, azaz $-(\frac12+\frac{\delta}{2})2^{k\varepsilon}+(\frac12+\delta)2^{(k-1)\varepsilon}=2^{k\varepsilon}[(\frac12+\delta)2^{-\varepsilon}-(\frac12+\frac{\delta}{2})]\ge 0$, ami igaz akkor, ha az $\varepsilon=\varepsilon(\delta)>0$ számot elég kicsinek választjuk. Ezért az utolsó egyenlőtlenségből következik, hogy ilyen ε választással

$$\sum_{k=p}^{\infty}P\left(\inf_{t_k\le t\le t_{k-1}}\frac{|W(t)|}{t^{\frac12+\delta}}<1\right)<\sum_{k=p}^{\infty}P\left(\inf_{t_k\le t\le t_{k-1}}\frac{|W(t)|}{u_k}<1\right)<\varepsilon.$$

Innen következik a bizonyítandó (1) formula. Nem nehéz belátni hogy minden $\eta>0$ és $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\eta'=\eta'(\eta,\varepsilon)>0$ szám, amelyre

$$P\left(\inf_{\eta<t\le 1}t^{-(\frac12+\delta)}|W(t,\omega)|\ge\eta'\right)\ge 1-\varepsilon.$$

Az (1) formulából és ebből az egyenlőtlenségből következik a bizonyítandó állítás.