Az Itô formuláról

Ezen írás témája az Itô integrálok elméletében rendkívül fontos szerepet játszó Itô formula. Célja mindössze annyi, hogy elmagyarázzon és természetessé tegyen egy olyan formalizmust, amely megkönnyíti az Itô formula használatát. Bár nem tárgyalom az Itô formula precíz bizonyítását, az itt leírt magyarázat segíthet annak megértésében is, hogy hogyan kell tárgyalni ezt a bizonyítást.

Legyen adva σ-algebrák egy $\mathcal{F}_t$ filtrációja valamely $0 \le t \le T$ intervallumon és egy hozzá adaptált $W(t)$, $0 \le t \le T$, Wiener folyamat. Ha $K(t) = K(t,\omega)$ és $H(t) = H(t,\omega)$, $0 \le t \le T$, két az $\mathcal{F}_t$ filtrációhoz adaptált sztochasztikus folyamat, (azaz $H(t,\omega)$ és $K(t,\omega)$ $\mathcal{F}_t$ mérhető minden $0 \le t \le T$ paraméterre, és ezenkívül $K(t,\omega)$ és $H(t,\omega)$, mint kétváltozós függvény a $[0,T] \times \Omega$ halmazon mérhető a $\mathcal{B}_T \times \mathcal{F}_T$ σ-algebrára, ahol $\mathcal{B}_T$ a Borel σ-algebra a $0,T]$ intervallumon), amelyekre 1 valószínűséggel teljesülnek az $\int_0^T |K(s,\omega)|\,ds < \infty$ és $\int_0^T H^2(s,\omega)\,ds < \infty$ feltételek, akkor lehet definiálni az

$$X(t,\omega) = X(0,\omega) + \int_0^t K(s,\omega)\,ds + \int_0^t H(s,\omega)\,dW(s,\omega), \quad 0 \le t \le T, \tag{1}$$

Itô folyamatot, ahol $\int_0^t H(s,\omega)\,dW(s,\omega)$ a Kevei Péter jegyzetében is tárgyalt Itô integrált jelöli. (Feltesszük, hogy $X(0,\omega) \in \mathcal{F}_0$.)

Adva egy sima, pontosabban fogalmazva kétszer folytonosan differenciálható $f(x)$ függvény a számegyenesen definiálhatjuk az $f(X(t,\omega))$, $0 \le t \le T$, sztochasztikus folyamatot, és be lehet látni, hogy ez is Itô folyamat. Ez azt jelenti, hogy az $f(X(t,\omega))$, $0 \le t \le T$, sztochasztikus folyamatot is fel lehet írni az (1) formulához hasonló alakban azzal a különbséggel, hogy az $X(t,\omega)$ folyamat definiciójában szereplő $K(s,\omega)$ és $H(s,\omega)$ (véletlen) függvényeket más az $\mathcal{F}_t$ filtrációhoz adaptált (véletlen) függvényekkel kell helyettesíteni. Az Itô formula ennek az állításnak egy olyan bizonyítása, amely megadja az $f(X(t,\omega))$, $0 \le t \le T$, Itô folyamat alakjában megadott előállítását. Azaz, az Itô formula megadja az $f(X(t,\omega))$ folyamat (1) képlet alakú integrál előállításában szereplő és $\mathcal{F}_t$ filtrációhoz adaptált függvényeket is.

Annak érdekében, hogy az Itô formulát jobban megértsük érdemes először annak determinisztikus megfelelőjét tekinteni. Legyen adva egy $x(t) = x(0) + \int_0^t A(s)\,ds$, $0 \le t \le T$, függvény, és egy folytonosan differenciálható $f(x)$

függvény a számegyenesen. Tekintsük az $f(x(t))$, $0 \le t \le T$, függvényt, és írjuk fel ezt is integrál alakban. Mivel

$$\frac{df(x(s))}{ds} = f'(x(s))x'(s) = f'(x(s))A(s),$$

ahol f' az f függvény deriváltját jelöli, a Newton–Leibniz formula alapján

$$f(x(t)) = f(x(0)) + \int_0^t f'(x(s))A(s)\,ds, \quad 0 \le t \le T. \tag{2}$$

Ezt az összefügggést a következő "differenciál forma" alakban is felírhatjuk:

$$df(x(s)) = f'(x(s))A(s)ds. \tag{3}$$

Valóban, a (3) differenciálformát kiintegrálva azt kapjuk, hogy

$$\int_0^t dfx((s)) = f(x(t)) - f(x(0)) = \int_0^t f'(x(s))A(s)\,ds,$$

ami megegyezik a (2) azonossággal.

A (3) formulának van másfajta interpetációja és igazolása is. Felírhatjuk, hogy $f(x(s+h)) - f(x(s)) = f'(x(s))x'(s)h + o(h) = f'(x(s))A(s)h + o(h)$. Felírva ezt az azonosságot minden, $s = 0, h, 2h, \dots, ([\frac{t}{h}] - 1)h$ számra, ahol $[x]$ az x szám egész részét jelöli, a kapott azonosságokat összeadva, majd elvégezve a $h \to 0$ határátmenetet megkapjuk a (2) formulát. Ezt fizikusmódra úgy is interpretálhatjuk, hogy az $f(x(s+h)) - f(x(s)) = f'(x(s))x'(s)h + o(h) = f'(x(s))A(s)h + o(h)$ azonosság $h \to 0$ határátmenettel (azaz a h mennyiséget végtelen kicsinek választva) a $df(x(s)) = f'(x(s))A(s)ds$ azaz a (3) azonosságot adja, amit kiintegrálva a $[0,t]$ intervallumban megkapjuk a (2) azonosságot.

Az előbbi érvelést azért írtam le, mert hasonló, bár kissé bonyolultabb gondolatmenetet követve, és néhány fizikus nézőpontból természetes feltevést felhasználva megkapjuk az Itô formulát is. Ennek érdekében írjuk először az (1) formulát differenciál alakban. Ez így néz ki:

$$dX(s,\omega) = K(s,\omega)\,ds + H(s,\omega)\,dW(s,\omega). \tag{4}$$

Fel akarjuk írni hasonlóan a $df(X(s,\omega))$ kifejezést, ahol $X(t,\omega)$ az (1) képletben megadott Itô folyamat, és $f(x)$ kétszer folytonosan differenciálható függvény a számegyenesen. Ezt az azonosságot kiintegrálva megkapjuk az Itô formulát. A determinisztikus esetben a megfelelő $df(x(s))$ kifejezést az $f(x(s))$

függvény első tagig vett Taylor sorfejtéséből kaptuk meg. Most a második tagig kell sorba fejtenünk az $f(X(s,\omega))$ függvényt, és meg kell értenünk azt is, hogy a Taylor sorfejtés második tagjában mely tagokat kell figyelembe vennünk és azokat hogyan. Felírok egy táblázatot, és mint látni fogjuk ez a táblázat annak jó alkalmazásával együtt tartalmazza az Itô formulát. Itt a táblázat.

$$(dW(s,\omega))^2 = ds, \quad ds \cdot dW(s,\omega) = 0, \quad (ds)^2 = 0. \tag{5}$$

A (4) és (5) formulák alapján

$$\begin{aligned}(dX(s,\omega))^2 &= (K(s,\omega)\,ds + H(s,\omega)\,dW(s,\omega))^2 \\ &= H^2(s,\omega)\,dW(s,\omega)^2 + 2K(s,\omega)H(s,\omega)ds\,dW(s,\omega) \\ &\quad + K^2(s,\omega)(\,ds)^2 = H^2(s,\omega)\,ds. \end{aligned}\tag{6}$$

Az Itô formula úgy is megfogalmazható, hogy a $df(X(s,\omega))$ kifejezés másodrendű Taylor sorfejtéssel számolható ki, ahol $(dX(s,\omega))^2$ a (6) képlet segítségével adható meg. Ez a feltételezés a következő eredményt adja:

$$\begin{aligned} df(X(s,\omega)) &= \frac{df}{dx}(X(s,\omega))dX(s,\omega) + \frac{1}{2}\frac{df^2}{dx^2}(X(s,\omega))(dX(s,\omega))^2 \\ &= \frac{df}{dx}(X(s,\omega))(K(s,\omega)\,ds + H(s,\omega)\,dW(s,\omega)) \\ &\quad + \frac{1}{2}\frac{df^2}{dx^2}(X(s,\omega))H(s,\omega)^2 ds. \end{aligned}$$

Ez az Itô formula differenciál formában megadott alakja. Ugyanez az azonosság integrálformában a következőképp néz ki.

$$\begin{aligned} f(X(t,\omega)) &= f(X(0,\omega)) + \int_0^t \frac{df}{dx}(X(s,\omega))K(s,\omega)\,ds \\ &+ \int_0^t \frac{df}{dx}(X(s,\omega))H(s,\omega)\,dW(s,\omega)) + \int_0^t \frac{1}{2}\frac{df^2}{dx^2}(X(s,\omega))H^2(s,\omega)\,ds. \end{aligned}$$

Vannak az Itô formulának általánosabb változatai is. Az egyik ilyen változat az, amikor adott egy $X(t,\omega)$ Itô folyamat a $[0,T]$ intervallumon, és egy kétváltozós $f = f(u,x)$ függvény. Ez az $f(u,x)$ függvény elég sima, ami jelen esetben azt jelenti, hogy $f \in \mathcal{F}^{1,2}$, azaz f olyan kétváltozós függvény, amelyik az első változója szerint egyszer, a második változója szerint pedig kétszer folytonosan differenciálható. Ekkor $f(t, X(t,\omega))$ is Itô folyamat, amit az előző esethez hasonlóan lehet megadni. A $df(s,X(s,\omega))$ kifejezést ebben az esetben is másodrendű Taylor sorfejtéssel adjuk meg, és felhasználjuk, hogy $(ds)^2=0$, és $dsd(X(s,\omega))=0$. Azt kapjuk, hogy $df(s,X(s,\omega))=\frac{\partial f}{\partial u}(s,X(s,\omega))\,ds+\frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s,\omega))\,dX(s,\omega)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(s,X(s,\omega))(\,dX(s.\omega))^2$. Innen, felhasználva a (4) és (6) formulákat azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} df(s,X(s,\omega)) = {} & \frac{\partial f}{\partial u}(s,X(s,\omega))\,ds \\ & +\frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s,\omega))(K(s,\omega)\,ds+H(s,\omega)\,dW(s,\omega)) \\ & +\frac{1}{2}\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(s,X(s,\omega))H^2(s,\omega)\,ds. \end{aligned}$$

Ez az Itô formula differenciálformában az $f(t,X(t,\omega))$ kifejezésre. Ugyanez a formula integrál alakban így írható:

$$\begin{aligned} f(t,X(t,\omega)) = {} & f(0,X(0,\omega))+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(s,X(s,\omega)\,ds \\ & +\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s,\omega))K(s,\omega)\,ds+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x}(s,X(s,\omega))H(s,\omega)\,dW(s,\omega)) \\ & +\int_0^t \frac{1}{2}\frac{\partial f^2}{\partial x^2}(s,X(s,\omega))H^2(s,\omega)\,ds. \end{aligned}$$

Az Itô formula általános alakja a többdimenziós Itô formula. Ennek megfogalmazásában először definiálják a többdimenziós Itô folyamatokat. Egy d-dimenziós Itô folyamat olyan d-dimenziós $(X_1(t,\omega),\dots,X_d(t,\omega))$ sztochasztikus folyamat, amelynek mindegyik koordinátája egyváltozós Itô folyamat. Az egyváltozós Itô folyamatoknak is egy általánosabb definicióját fogjuk használni, amelyben nem egy egydimenziós, hanem egy r-dimenziós Wiener folyamat szerint integrálunk. (Az alábbi definicióban két paraméter van. Az egyik d, az Itô folyamat dimenziója, a másik r, annak a Wiener folyamatnak a dimenziója, amelyik szerint integrálunk.) Az r-dimenziós Wiener folyamat a következőt jelenti. Legyen adva $\mathcal{F}_t$ σ-algebrák, $0\le t\le T$, egy filtrációja. Azt mondjuk, hogy $W(t,\omega)=(W_1(t,\omega),\dots,W_r(t,\omega))$, $0\le t\le T$, az $\mathcal{F}_t$ filtrációhoz adaptált r-dimenziós Wiener folyamat, ha mindegyik $W_j(t,\omega)$, $1\le j\le r$ sztochasztikus folyamat az $\mathcal{F}_t$ filtrációhoz adaptált Wiener folyamat a $0\le t\le T$ intervallumban, és ezenkívül a $W_j(t,\omega)$, $0\le t\le T$, $1\le j\le r$, Wiener folyamatok függetlenek egymástól.

Legyen adva σ-algebrák egy $\mathcal{F}_t$ filtrációja valamely $0\le t\le T$ intervallumon és egy hozzá adaptált $W(t,\omega)=(W_1(t,\omega),\dots,W_r(t,\omega))$, $0\le t\le T$,

r-dimenziós Wiener folyamat. Legyenek továbbá adva $K_i(t) = K_i(t,\omega)$ és $H_{i,j}(t) = H_{i,j}(t,\omega)$, $0 \le t \le T$, $1 \le i \le d$, $1 \le j \le r$, olyan az $\mathcal{F}_t$ filtrációhoz adaptált sztochasztikus folyamatok, amelyekre 1 valószínűséggel teljesülnek az $\int_0^T |K_i(s,\omega)|\, ds < \infty$ és $\int_0^T H_{i,j}^2(s,\omega)\, ds < \infty$ feltételek. Ekkor lehet definiálni az

$$X_i(t,\omega) = X_i(0,\omega) + \int_0^t K_i(s,\omega)\, ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t H_{i,j}(s,\omega)\, dW_j(s,\omega), \quad 0 \le t \le T, \tag{7}$$

sztochasztikus folyamatokat minden $1 \le i \le d$ indexre. Az így definiált $(X_1(t,\omega),\dots,X_d(t,\omega))$ sztochasztikus folyamatot d-dimenziós Itô folyamatnak nevezzük. (Feltesszük, hogy $X_i(0,\omega) \in \mathcal{F}_0$ minden $0 \le i \le d$ indexre.) A (7) formulában definiált d-dimenziós Itô folyamatot így adjuk meg differenciál formában:

$$dX_i(s,\omega) = K_i(s,\omega)\, ds + \sum_{j=1}^r H_{i,j}(s,\omega)\, dW_j(s,\omega), \quad 1 \le i \le d, \tag{8}$$

Legyen $f(u,x_1,\dots,x_d)$ egy $d+1$-változós sima függvény, (tegyük fel, hogy a $\frac{\partial f}{\partial u}$ és $\frac{\partial f^2}{\partial x_i \partial x_j}$, $1 \le i,j \le d$ függvények léteznek, és folytonosak), és tekintsük az $f(t, X_1(t,\omega), X_2(t,\omega),\dots,X_d(t,\omega))$, $0 \le t \le T$, sztochasztikus folyamatot, ahol $X_i(t,\omega)$, $1 \le i \le d$, a (7) formulában van definiálva. Célunk az, hogy megadjuk ennek a sztochasztikus folyamatnak az előállítását az előző esetekhez hasonlóan Itô folyamat formájában.

A korábbi esetekhez hasonlóan most is egy másodfokú Taylor sorfejtés segítségével adjuk meg az $f(t, X_1(t,\omega), X_2(t,\omega),\dots,X_d(t,\omega))$, $0 \le t \le T$, sztochasztikus folyamat alkalmas előállítását, csak most az (5) formulában megfogalmazott szabályrendszert ki kell egésziteni a következő módon.

$$dW_i(s,\omega) dW_k(s,\omega) = \delta_{i,k} ds, \quad ds \cdot dW_i(s,\omega) = 0, \quad (ds)^2 = 0 \tag{9}$$

minden $1 \le i,k \le d$ indexre, ahol $\delta_{i,k} = 0$, ha $i \ne k$, és $\delta_{i,k} = 1$, ha $i = k$.

Számoljuk ki először a $dX_i(s,\omega) dX_k(s,\omega)$, $1 \le i,k \le d$, kifejezéseket a (9) formula segítségével.

$$\begin{aligned} dX_i(s,\omega) dX_k(s,\omega) = {} & \left(K_i(s,\omega)\, ds + \sum_{j=1}^r H_{i,j}(s,\omega)\, dW_j(s,\omega) \right) \\ & \left(K_k(s,\omega)\, ds + \sum_{j=1}^r H_{k,j}(s,\omega)\, dW_j(s,\omega) \right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \left(\sum_{j=1}^{r} H_{i,j}(s,\omega)\, dW_j(s,\omega)\right) \left(\sum_{j=1}^{r} H_{k,j}(s,\omega)\, dW_j(s,\omega)\right) \\
&\quad + K_i(s,\omega)\, ds \left(\sum_{j=1}^{r} H_{k,j}(s,\omega)\, dW_j(s,\omega)\right) \\
&\quad + K_k(s,\omega)\, ds \left(\sum_{j=1}^{r} H_{i,j}(s,\omega)\, dW_j(s,\omega)\right) + K_i(s,\omega)K_k(s,\omega)(\, ds)^2 \\
&= \sum_{j=1}^{r} H_{i,j}(s,\omega)H_{k,j}(s,\omega)\, ds. \qquad (10)
\end{aligned}
$$

Véve a $df(s, X_1(s,\omega), X_2(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega))$ kifejezés kéttagú Taylor sorfejtését és felhasználva a (9) és (10) formulákat azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
df(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega)) &= \frac{\partial f}{\partial u}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega))\, ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega))\, dX_i(s,\omega) \\
&\quad + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial u^2} f(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega)\, (ds)^2 \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial u \partial x_i} f(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega)\, ds\, dX_i(s,\omega) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega))\, dX_i(s,\omega) dX_k(s,\omega) \\
&= \frac{\partial f}{\partial u}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega))\, ds \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega))\, dX_i(s,\omega) \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{d}\sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega)) \\
&\qquad \sum_{j=1}^{r} H_{i,j}(s,\omega)H_{k,j}(s,\omega)\, ds.
\end{aligned}
$$

Ez tekinthető a többdimenziós Itô formulának differenciál alakban. A többdimenziós Itô formula integrál formában a következő módon adható meg.

$$
f(t, X_1(t,\omega), \dots, X_d(t,\omega)) = f(0, X_1(0,\omega), \dots, X_d(0,\omega))
$$

$$
\begin{aligned}
&+\int_0^t \frac{\partial f}{\partial u}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega))\, ds \\
&+\sum_{i=1}^d \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega))\, dX_i(s,\omega) \\
&+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^d \sum_{k=1}^d \biggl(\int_0^t \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega)) \\
&\qquad\qquad \sum_{j=1}^r H_{i,j}(s,\omega) H_{k,j}(s,\omega)\, ds \biggr),
\end{aligned}
$$

ahol

$$
\begin{aligned}
&\int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega))\, dX_i(s,\omega) \\
&\quad = \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega)) K_i(s,\omega)\, ds \\
&\qquad\qquad + \sum_{j=1}^r \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_i}(s, X_1(s,\omega), \dots, X_d(s,\omega)) H_{i,j}(s,\omega)\, dW_i(s,\omega)
\end{aligned}
$$

minden $1 \le i \le d$ indexre a (7) formula alapján.

Befejezésül heurisztikus magyarázatot adok arra, hogy miért ilyen alakú az Itô formula. A $df(X(s,\omega))$ differenciálra kell jó képletet adni, ami valójában egy jó aszimptotikus formulát jelent az $f(X(s+h,\omega)) - f(X(s,\omega))$ differenciára kis h szám esetén. A probléma determinisztikus megfelelőjében, amikor az $f(x(s+h)) - f(x(s))$ differenciát kell jól megbecsülni kis h szám esetén, a következőképp érvelhetünk.

$$
\begin{aligned}
f(x(s+h)) - f(x(s)) &= \left.\frac{df(x(u))}{du}\right|_{u=\xi} h = \left.\frac{df(x(u))}{du}\right|_{u=x(s)} h + o(h) \\
&= \left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{u=x(s)} \frac{dx(s)}{ds} h + o(h),
\end{aligned}
$$

ahol ξ alkalmas pont az $[x(s), x(s+h)]$ intervallumban. Ez azt jelenti, hogy $\left.\frac{df(x)}{dx}\right|_{u=x(s)} \frac{dx(s)}{ds} h$ jó becslés az $f(x(s+h)) - f(x(s))$ differenciára, ami heurisztikusan úgy fogalmazható meg, hogy $df(x(s)) = f'(x(s))x'(s)ds$.

A $df(X(s,\omega))$ differenciálra, ahol $X(s,\omega)$ egy $W(s,\omega)$ Wiener folyamat által definiált Itô folyamat, más eredmény érvényes. Ez azzal függ össze, hogy a $W(s,\omega)$ Wiener folyamat megváltozása kis intervallumban másfajta viselkedést mutat. Ugyanis $\frac{W(s+h,\omega)-W(s,\omega)}{\sqrt{h}}$ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Így a $W(s+h,\omega)-W(s,\omega)$ különbség kis h paraméter esetén $\sqrt{h}$ nagyságrendű, ezért egy $f(W(s+h,\omega))-f(W(s,\omega))$ vagy általánosabban egy $f(X(s+h,\omega))-f(X(s,\omega))$ alakú kifejezésre, ahol $X(s,\omega)$ Itô folyamat, úgy tudunk $o(h)$ hibájú közelítést adni, hogy az $f(W(s+h,\omega))$ vagy $f(X(s+h,\omega))$ függvény Taylor sorfejtését a második tagig vesszük. Továbbbá ezen sorfejtés második tagjában a h^2 és $h[W(s+h,\omega)-W(s,\omega)]$ illetve $h[X(s+h,\omega)-X(s,\omega)]$ kifejezésnek megfelelő tagok elhanyagolhatóan kis hibát adnak, ezért elhagyhatóak. Ezenkivül a $[W(s+h,\omega)-W(s,\omega)]^2$ kifejezés helyettesíthető az $E[W(s+h,\omega)-W(s,\omega)]^2=h$ kifejezéssel. Ezek a közelítések a differenciálok nyelvén azt jelentik, hogy $(ds)^2=0$, $ds\cdot dW(s,\omega)=0$ és $(dW(s,\omega))^2=ds$, azaz az (5) formula érvényes.

Megjegyzem, hogy az Itô formula bizonyítása a fenti heurisztikus érvelés rendbe tételét jelenti. A legnehezebb rész annak igazolása, hogy a $[W(s+h,\omega)-W(s,\omega)]^2$ kifejezés helyettesítése az $E[W(s+h,\omega)-W(s,\omega)]^2=h$ kifejezéssel elhanyagolhatóan kis hibát ad. Nem mondhatjuk ugyanis, hogy a $[W(s+h,\omega)-W(s,\omega)]^2-E[W(s+h,\omega)-W(s,\omega)]^2$ sztochasztikus folyamatban (mint az s paramétertől függő sztochasztikus folyamatban rögzített kis h számmal) szereplő valószínűségi változók elhanyagolhatóan kicsik. Ahhoz, hogy a most tárgyalt közelítés jogosságát igazoljuk fel kell használni e sztochasztikus folyamat függetlenségi tulajdonságait is.

Végül teszek néhány formális megjegyzést arról, hogyan tudunk számolni a differenciálformákkal az Itô formula alkalmazásában. Ez tulajdonképpen implicit módon le van írva a jegyzet fő részében, de érdemes részletesebben megfogalmazni annak érdekében, hogy könnyebben és biztosabban tudjunk számolni az Itô formula alkalmazásaiban.

Először felírom azt, hogy hogyan adunk meg egy általános alakú Itô folyamatot differenciál alakban. Azt az általános esetet tekintem, amikor egy vektor értékű r-dimenziós $W(t)=(W_1(t),\dots,W_r(t))$ Wiener folyamat segítségével adunk meg egy Itô folyamatot. Ezt valamilyen $H_j=H_j(t,\omega)$, $1\le j\le r$, és $K=K(t,\omega)$, $0\le t\le T$, adaptált sztochasztikus folyamatok segítségével adjuk meg, ahol feltesszük, hogy ezek a folyamatok teljesítik azokat az integrálhatósági feltételeket, amelyek szükségesek a megfelelő (véletlen) integrálok létezéséhez.

Bevezetjük a

$$dX(t) = K(t)\,dt + \sum_{j=1}^{r} H_j(t)\,dW_j(t), \quad 0 \le t \le T,$$

(formális) kifejezést, és azt mondjuk, hogy ez a formula az $X(t)$ Itô folyamat megadása differenciálformában. Ha meg van adva van az $X(t) = X(t,\omega)$, $t \in [0,T]$, Itô folyamat differenciálformája és $X(0) = X(0,\omega)$ kezdeti értéke, amelynek $\mathcal{F}_0$ mérhetőnek kell lenni, akkor fel tudjuk írni az $X(t)$ Itô folyamatot eredeti alakjában is " kiintegrálva" az Itô folyamat differenciálformáját. Ez azt adja, hogy

$$X(t) - X(0) = \int_0^t K(s)\,ds + \sum_{j=1}^{r} \int_0^t H_j(s)\,dW_j(s), \quad 0 \le t \le T.$$

Az Itô formulával való számolás során gyakran találkozunk valamilyen $U(t)\,dX(t)$ alakú kifejezéssel, ahol $X(t) = X(t,\omega)$ egy Itô folyamat, és $U(t) = U(t,\omega)$ egy olyan adaptált folyamat, amelyre a megfelelő véletlen integrálok léteznek. (Teljesülnek a szükséges integrálhatósági feltételek.) Ha $dX(t) = K(t)\,dt + \sum_{j=1}^{r} H_j(t)\,dW_j(t)$, akkor ennek a kifejezésnek az értéke a következő:

$$U(t)\,dX(t) = U(t)K(t)\,dt + \sum_{j=1}^{r} U(t)H_j(t)\,dW_j(t),$$

azaz

$$\int_0^t U(s)\,dX(s) = \int_0^t U(s)K(s)\,ds + \sum_{j=1}^{r} \int_0^t U(s)H_j(s)\,dW_j(s).$$

(Az előző formulák azt fejezik ki, hogy az Itô integrálok linearitási tulajdonsága öröklődik a differenciálformákra is.)

Az Itô formula megfogalmazása differenciálformában tartalmazza a (9) formulában megfogalmazott

$$dW_i(s,\omega)\,dW_k(s,\omega) = \delta_{i,k}\,ds, \quad ds \cdot dW_i(s,\omega) = 0, \quad (ds)^2 = 0$$

azonosságokat. Ez az általános esetben, amikor $U(t)\,dX_1(t)\,dX_2(t)$ alakú kifejezéseket számolunk ki, ahol $dX_i(t) = K_i(t)\,dt + \sum_{j=1}^{r} H_{i,j}(t)\,dW_j(t)$, $i =$

$1, 2$, két Itô folyamat, és $U(t)$ egy adaptált folyamat azt jelenti, hogy

$$
\begin{aligned}
&U(t)\, dX_1(t)\, dX_2(t) \\
&\quad = U(t) \left(K_1(t)\, dt + \sum_{j=1}^{r} H_{1,j}(t)\, dW_j(t) \right) \left(K_2(t)\, dt + \sum_{j=1}^{r} H_{2,j}(t)\, dW_j(t) \right) \\
&\quad = U(t) \left[\sum_{j=1}^{r} H_{1,j}(t) H_{2,j}(t) \right] dt.
\end{aligned}
$$

Végül röviden összefoglalom, hogyan számolunk az Itô formulával.

Legyen adva d darab $X_j(t) = X_j(t,\omega)$, $1 \le j \le d$, Itô folyamat, és egy elég sima $f(t, x_1, \dots, x_d)$ függvény, amely d darab x_j, $1 \le j \le d$, hely koordinátától és egy t időkoordinátától függ. (Most a fő rész magyarázatától eltérően t-vel és nem u-val jelöltem az f függvény időkoordinátáját.) Ekkor $Y_t = f(t, X_1(t), \dots, X_d(t))$, $0 \le t \le T$, szintén egy Itô folyamat, amelyet a következő módon adhatunk meg.

Tekintjük az f függvény Taylor sorfejtését a második tagig (differenciálformában) és abba behelyettesítjük a megfelelő Itô folyamatokat, azaz felírjuk a következő formulákat.

$$
\begin{aligned}
df(t, x_1, \dots, x_d) &= \frac{\partial f}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_d)\, dt + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, x_1, \dots, x_d)\, dx_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} f(t, x_1, \dots, x_d)\, (dt)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial t \partial x_i} f(t, x_1, \dots, x_d\, dt\, dx_i \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(t, x_1, \dots, x_d)\, dx_i\, dx_k,
\end{aligned}
$$

és

$$
\begin{aligned}
dY(t) &= df(t, X_1(t,\omega), \dots, X_d(t,\omega)) = \frac{\partial f}{\partial t}(t, X_1(t,\omega), \dots, X_d(t,\omega))\, dt \\
&\quad + \sum_{i=1}^{d} \frac{\partial f}{\partial x_i}(t, X_1(t,\omega), \dots, X_d(y,\omega))\, dX_i(t,\omega) \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{d} \sum_{k=1}^{d} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k}(t, X_1(t,\omega), \dots, X_d(t,\omega)) \sum_{j=1}^{r} H_{i,j}(t,\omega) H_{k,j}(t,\omega)\, dt.
\end{aligned}
$$

A második azonosságot úgy kaptuk az elsőből, hogy ay x_i változót az $X_i(t,\omega)$ Itô folyamattal, és a dx_i differenciált az $X_i(t,\omega)$ Itô folyamat $dX_i(t,\omega)$ differenciálformájával helyettesítettük, majd az így kapott kifejezésben a

$dX_i(t,\omega)\, dX_k(t,\omega)$ szorzat elemeit kifejeztük az $X_i(t,\omega)$ Itô folyamatok differenciálformájára adott képlet segítségével, és az így kapott szorzatot kiszámoltuk a (9)) formula felhasználásával. Ugyanezt tettük a $dt\, dX_i(t,\omega)$ szorzattal, de ekkor nullát kaptunk a (9) formula alapján, ezért a megfelelő tagot elhagytuk. Hasonló okból elhagytuk azt a tagot is, amelyikben a $(dt)^2$ szorzó megjelent.

Az utolsó azonosságban az $X_i(t,\omega)$ Itô folyamat $dX_i(t,\omega)$ diffferenciálformáját kifejezve a dt és $dW_j(t)$, $1 \le j \le r$, változók függvényeként, megkapjuk az $Y(t,\omega)$ folyamatnak, mint Itô folyamatnak az előállítását differenciálformában. Felhasználva, hogy az $Y(t,\omega)$ folyamat kezdeti értéke

$$Y(0,\omega) = f(0, X_1(0,\omega), \dots, X_d(0,\omega)),$$

meg tudjuk adni az az $Y(t,\omega)$ Itô folyamat eredeti alakját is, "kiintegrálva" e folyamat differenciálformáját.