A konvolúcióról

E jegyzetben a konvolúció fogalmát és legfontosabb tulajdonságait ismertetem. E fogalom fontos szerepet játszik a Kockázati Folyamatok jegyzet tárgyalásában. Felidézve a mértékelmélet néhány fontos fogalmát és eredményét jobb és egyszerűbb képet kapunk a konvolúcióról. E jegyzet célja ennek megtétele.

Először feidézem a mértékek és előjeles mértékek fogalmát, és ismertetek néhány róluk szóló eredményt. Legyen adva egy X halmaz és rajta egy $\mathcal{A}$ σ-algebra. Azt mondjuk, hogy μ véges mérték az $(X,\mathcal{A})$ téren, ha a $\mu(A)$ mennyiség definiálva van minden $A\in\mathcal{A}$ halmazon, $0\le\mu(A)<\infty$ minden $A\in\mathcal{A}$ halmazra, és μ σ-additív, azaz $\sum\limits_{j=1}^\infty \mu(A_j)=\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j\right)$ ha $A_j\in\mathcal{A}$ minden $j=1,2,\dots$ indexre, és az A_j halmazok, $j=1,2,\dots$, diszjunktak. A μ mértéket σ-végesnek nevezzük, ha lehetséges, hogy $\mu(A)=\infty$ bizonyos $A\in\mathcal{A}$ halmazokra, de létezik $\mathcal{A}$-beli halmazoknak olyan $A_1\subset A_2\subset\cdots$ sorozata, amelynek elemeire $\mu(A_j)<\infty$, $j=1,2,\dots$, és $\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j=X$. Azt mondjuk, hogy μ előjeles mérték az $(X,\mathcal{A})$ téren, ha μ σ-additív, de megengedjük hogy $\mu(A)<0$ legyen bizonyos $A\in\mathcal{A}$ halmazokon. A μ előjeles mértéket a mértékekhez hasonlóan végesnek nevezzük, ha $|\mu(A)|<\infty$ minden $A\in\mathcal{A}$ halmazra, és σ-végesnek, ha létezik létezik $\mathcal{A}$-beli halmazoknak olyan $A_1\subset A_2\subset\cdots$ sorozata, amelynek elemeire $|\mu(A_j)|<\infty$, $j=1,2,\dots$, és $\bigcup\limits_{j=1}^\infty A_j=X$.

Az analízis egyik eredménye, a Hahn-féle felbontási tétel szerint, ha adva van egy μ előjeles mérték egy $(X,\mathcal{A})$ mérhető téren, akkor az X halmaz felbontható egy a μ mérték szerint pozitív és negatív részre. Pontosabban megfogalmazva a következő eredmény igaz.

Hahn-féle felbontási tétel. *Legyen adva egy $(X,\mathcal{A})$ tér és rajta egy (véges vagy σ-véges) μ előjeles mérték. Akkor létezik olyan $B\in\mathcal{A}$ halmaz, amelyre igaz a következő állítás. Ha $A\subset B$, akkor $\mu(A)\ge0$. Ha $A\subset X\setminus B$, akkor $\mu(A)\le0$.*

A mértékelmélet következő tételben megfogalmazott eredménye arról szól, hogy definiálhatjuk mértékterek szorzatán véges előjeles mértékek vagy σ-véges mértékek direkt szorzatát, ami ismét véges előjeles mérték, illetve σ-véges mérték.

Tétel szorzatmértékek létezéséről szorzattereken. *Legyen adva egy $(X,\mathcal{A},\mu)$ és egy $(Y,\mathcal{B},\nu)$ mértéktér, ahol μ és ν véges előjeles mértékek vagy σ-véges mértékek az $(X,\mathcal{A})$ illetve $(Y,\mathcal{B})$ mérhető tereken. Tekintsük az $X\times Y$ szorzatteret, rajta az $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ σ-algebrával. Ekkor létezik egy olyan egyértelműen meghatározott $\mu\times\nu$ véges előjeles mérték, illetve a második esetben σ-véges (nem előjeles) szorzatmérték az $\mathcal{A}\times\mathcal{B}$ σ-algebrán, amelyikre $(\mu\times\nu)(A\times B)=\mu(A)\nu(B)$ minden olyan $A\in\mathcal{A}$ és $B\in\mathcal{B}$ halmazpárra, amelyre $|\mu(A)|<\infty$, $|\nu(B)|<\infty$.*

Ehhez az eredményhez kapcsolódik az analízisben rendkívül fontos szerepet játszó Fubini tétel.

Fubini tétel. *Legyen adva egy $(X,\mathcal{A},\mu)$ és egy $(Y,\mathcal{B},\nu)$ mértéktér, ahol μ és ν két véges vagy σ-véges mérték, és ezek szorzata, az $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mu\times\nu)$ mértéktér. Legyen $f(x,y)$ egy kétváltozós integrálható függvény az $(X\times Y,\mathcal{A}\times\mathcal{B},\mu\times\nu)$ szorzattéren, azaz legyen $\int_{X\times Y}|f(x,y)|(\mu\times\nu)(\,dx,\,dy)<\infty$. Ekkor érvényes a következő azonosság:*

$$\int_{X\times Y} f(x,y)(\mu\times\nu)(\,dx,\,dy)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)\mu(\,dx)\right)\nu(\,dy).$$

A továbbiakban csak az R^1 számegyenesen, illetve a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált előjeles mértékekkel foglalkozunk. Az R^1 számegyenesen definiált előjeles mértékek esetében feltesszük, hogy azok végesek, a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált előjeles mértékek esetében pedig azt, hogy azok lokálisan végesek. Ez utóbbi tulajdonság azt jelenti, hogy a figyelembe vett előjeles mérték megszorítása tetszőleges véges $[a,b]$, $0\le a<b<\infty$, intervallumra véges. Pontosabban fogalmazva, azt mondjuk, hogy μ lokálisan véges előjeles mérték a $[0,\infty)$ félegyenesen, ha μ olyan függvény a $[0,\infty)$ félegyenes Borel mérhető részhalmazain, amelynek megszorítása tetszőleges véges $[a,b]$, $0\le a<b<\infty$, intervallum Borel mérhető részhalmazaira véges előjeles mérték. Viszont nem követeljük meg, hogy μ előjeles mérték legyen a $[0,\infty)$ félegyenes Borel mérhető részhalmazain. (Az okozhat problémát a μ előjeles mérték kiterjesztésében a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált előjeles mértékké, hogy megjelenhetnek olyan A halmazok is, amelyekre $\mu(A)=\infty$, és olyan A halmazok is, amelyekre $\mu(A)=-\infty$. De egy előjeles mérték nem tartalmazhat mind plusz mind minusz végtelen mértékű halmazt.)

Hasonlóan definiálhatjuk az R^1 számegyenes Borel mérhető halmazain definiált lokálisan véges előjeles mértékeket. Ezek olyan a számegyenes Borel mérhető halmazain definiált függvények, amelyeknek megszorítása tetszőleges $[a, b]$ véges intervallumra véges előjeles mérték. Számunkra kényelmes lesz olyan lokálisan véges előjeles mértékekkel dolgozni a számegyenesen, amelyek eltünnek a $(-\infty, 0)$ félegyenesen, és megszorításuk a $[0, \infty)$ félegyenesre lokálisan véges előjeles mérték. Van egy természetes kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés az ilyen lokálisan véges előjeles mértékek között a számegyenesen és a lokálisan véges előjeles mértékek között a $[0, \infty)$ félegyenesen. Ez a megfeleltetés hasznos néhány későbbi érvelésünkben.

Definiálhatjuk két az R^1 számegyenesen, illetve a $[0, \infty)$ félegyenesen adott, és a fenti tulajdonsággal rendelkező μ és ν előjeles mérték $\mu * \nu$ konvolúcióját a következő formula segítségével. Ha μ és ν a számegyenesen definiált véges előjeles mértékek, akkor

$$\mu * \nu(A) = (\mu \times \nu)(\{(x, y) \colon\, x + y \in A\})$$

minden Borel mérhető A halmazra az R^1 számegyenesen. Ha μ és ν lokálisan véges előjeles mértékek a $[0, \infty)$ félegyenesen, akkor is ez a képlet definiálja μ és ν konvolúcióját, de ebben az esetben a $[0, \infty)$ félegyenesnek csak a korlátos, Borel mérhető A részhalmazaira definiáljuk a $\mu * \nu(A)$ mennyiséget. Pontosabban fogalmazva: Ha $A \subset [0, \infty)$ korlátos, Borel mérhető halmaz, akkor

$$\mu * \nu(A) = \lim_{T \to \infty} \mu_T * \nu_T(A) = \lim_{T \to \infty} (\mu_T \times \nu_T)(\{(x, y) \colon\, x + y \in A\}),$$

ahol μ_T és ν_T a μ és ν lokálisan véges előjeles mértékek megszorítása a $[0, T]$ intervallumra. A fenti határérték létezik, mert ha $A \subset [0, s]$, akkor $T > s$ esetén a $\mu_T * \nu_T(A)$ valószínűség nem függ a T számtól.

Nem nehéz belátni a konvolúció következő tulajdonságait.

Tétel a konvolúció tulajdonságairól. *Két az R^1 számegyenesen definiált véges μ és ν előjeles mérték konvolúciója egy véges előjeles mérték. Két a $[0, \infty)$ félegyenesen definiált lokálisan véges μ és ν előjeles mérték konvolúciója lokálisan véges előjeles mérték a $[0, \infty)$ félegyenesen. A konvolúció operátor kommutatív, azaz $\mu * \nu = \nu * \mu$, asszociatív, azaz $(\mu * \nu) * \chi = \mu * (\nu * \chi)$, és disztributív, azaz teljesíti a $\mu * (a\nu_1 + b\nu_2) = a(\mu * \nu_1) + b(\mu * \nu_2)$ azonosságot is.*

Az irodalomban általában nem mértékek, hanem (bizonyos tulajdonságokat teljesítő) függvényekre definiálják a konvolúciót. Ahhoz, hogy ezt megtehessük be kell vezetni néhány fogalmat, és fel kell idézni néhány eredményt az analízisből. Egyrészt definiálni kell a korlátosan változó függvény fogalmát, és meg kell magyarázni ennek kapcsolatát a monoton függvényekkel. Másrészt be kell vezetni a Stieltjes mértékek fogalmát, és ismertetni kell az erre vonatkozó legfontosabb eredményeket.

A korlátosan változó függvény fogalma. *Egy $[a,b]$ intervallumon definiált $f(x)$ függvény (megengedett az $a=-\infty$ és $b=\infty$ eset is) korlátos változású ezen az intervallumon, ha létezik olyan $K<\infty$ szám, amelyre igaz, hogy bármely $n>1$ indexre és $a\le x_0<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n\le b$ számsorozatra $\sum_{j=1}^n |f(x_j)-f(x_{j-1})|\le K$.*

A korlátosan változó függvények jellemzése. *Két korlátos és monoton növekvő függvény különbsége korlátos változású. Megfordítva, egy $[a,b]$ intervallumon (lehet $a=-\infty$ és $b=-\infty$) korlátos változású függvény előállítható két monoton növekvő korlátos függvény különbségeként. Megadunk egy ilyen felbontást, amelyik bizonyos értelemben optimális.*

Definiáljuk egy $f(x)$ függvény $M_+(f(x))$ pozitív és $M_-(f(x))$ negatív variációját egy $a\le x\le b$ pontban a következő módon. Tekintsük az $a\le y_0<y_1<\dots<y_{n-1}<y_n\le x$ számsorozatokat, és definiáljuk az $M_+(f(x))=\sup\sum_{j=1}^n |f(y_j)-f(y_{j-1})|_+$ és $M_-(f(x))=\sup\sum_{j=1}^n |f(y_j)-f(y_{j-1})|_-$ függvényeket, ahol a szuprémumot az összes előirt tulajdonságú $a\le y_0<y_1<\dots<y_{n-1}<y_n\le x$ számsorozatra vesszük, és $|x|_+=\max(x,0)$, és $|x|_-=\max(-x,0)$. Ekkor az $M_+(f(x))$ és $M_-(f(x))$ (ezek az $f(x)$ függvény pozitív és negatív variációi) korlátos és monoton növekvő függvények, amelyekre $f(x)=f(a)+M_+(f(x))+M_-(fx))$.

Azt mondjuk, hogy egy a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált $f(x))$ függvény lokálisan korlátos, illetve lokálisan korlátos változású, ha a megszoritása minden véges $[a,b]$ intervallumra, $0\le a<b<\infty$ korlátos, illetve korlátos változású. Az előző esethez hasonlóan látható, hogy egy függvény akkor és csak akkor lokálisan korlátos változású a $[0,\infty)$ félegyenesen, ha előállítható két a $[0,\infty)$ félegyenesen monoton növekvő, lokálisan korlátos függvény különbségeként.

Annak érdekében, hogy bevezessük a Stieltjes mértékeket előbb ismertetni kell a monoton és korlátos változású függvények néhány tulajdonságát. Minden a számegyenesen monoton függvényre igaz, hogy megszámlálhatóan sok pont kivételével folytonos, és minden pontban van bal és jobboldali határértéke, (amelyek a szakadási pontokban különböznek). Mivel a korlátos változású (és a lokálisan korlátos változású) függvények két monoton függvény különbségeként állíthatóak elő, ugyanez az állítás rájuk is érvényes.

A továbbiakban csak olyan monoton, illetve (lokálisan) korlátos változású függvényekkel fogunk foglalkozni, amelyeknek értékei megegyeznek a jobboldali határértékükkel. Az ilyen függvényeket càdlàg, (continue à droite, limite à gauche) függvényeknek nevezik. Ilyen függvények segítségével fogjuk konstruálni a Stieltjes mértékeket. Az egész számegyenesen definiált véges előjeles mértékeket az egész számegyenesen definiált korlátos változású függvények segítségével adjuk meg. Meg kívánjuk adni a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált lokálisan véges előjeles mértékeket is alkalmas módon. Ezt a $[0,\infty)$ intervallumon definiált lokálisan korlátos változású függvények segítségével tehetjük meg. De technikailag kényelmesebb az ilyen előjeles, lokálisan véges mértékeket azokkal az egész számegyenesen definiált függvények segítségével megadni, amelyek a $(-\infty,0)$ félegyenesen nullával egyenlőek. Ez annak felel meg, hogy a $[0,\infty)$ félegyenesen definiált előjeles lokálisan véges mértékeket olyan az egész számegyenesen definiált lokálisan véges előjeles mértékekkel azonosítjuk, amelyek eltünnek a $(-\infty,0)$ félegyenesen.

Tétel a Stieltjes mértékek konstrukciójáról. *Legyen adva egy olyan korlátos változású càdlàg $f(x)$ függvény a számegyenesen, amelyre teljesül a $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$ reláció. Létezik egy olyan egyértelműen meghatározott véges előjeles μ mérték a számegyenes Borel mérhető halmazain, amelyre $\mu((a,b])=f(b)-f(a)$ minden $-\infty<a<b<\infty$ számpárra. Minden a számegyenes Borel halmazain definiált véges μ előjeles mérték előállitható ilyen $f(x)$ függvény segítségével. Ezt az $f(x)$ függvényt egyértelműen meghatározza az általa generált μ előjeles mérték, nevezetesen $f(x)=\mu((-\infty,x])$. Ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adtunk a számegyenes Borel halmazain definiált véges μ előjeles mértékek és a számegyenesen definiált olyan korlátos változású càdlàg $f(x)$ függvények között, amelyekre* $\lim_{x\to-\infty} f(x)=0$.

Legyen adva egy olyan lokálisan korlátos változású càdlàg $f(x)$ függvény a számegyenesen, amelyre $f(x)=0$ minden $-\infty<x<0$ számra. Létezik olyan egyértelműen meghatározott lokálisan véges előjeles μ mérték a számegyenes Borel mérhető halmazain, amelyre $\mu(A)=0$, ha $A\subset(-\infty,0)$, és $\mu((a,b])=f(b)-f(a)$ minden $0\le a<b<\infty$ számpárra. Minden a számegyenes Borel halmazain definiált lokálisan véges μ előjeles mérték, amely nullával egyenlő a $(-\infty,0)$ félegyenes Borel mérhető részhalmazain előállitható ilyen $f(x)$ függvény segítségével. Ezt az $f(x)$ függvényt egyértelműen meghatározza az általa generált μ mérték, nevezetesen $f(x)=\mu((-\infty,x])$. Ilyen módon kölcsönösen egyértelműen megfeleltettük egymásnak *a számegyenes Borel mérhető halmazain definiált olyan lokálisan véges μ előjeles mértékeket, amelyekre $\mu(A) = 0$, ha $A \subset (-\infty, 0)$ és azokat a számegyenesen definiált lokálisan korlátos változású càdlàg $f(x)$ függvényeket, amelyekre $f(x) = 0$, ha $x < 0$.*

A fenti tételben kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést létesítettünk a számegyenes Borel halmazain definiált véges előjeles mértékek és a $-\infty$-ben eltűnő korlátos változású càdlàg függvények között. Nevezetesen a μ elójeles mérteknek az $f(x) = \mu((-\infty, x])$ függvény felel meg, egy $f(x)$ függvénynek pedig az a μ mérték, amelyre $\mu((a, b]) = f(b) - f(a)$ minden $a < b$ számpárra. Ez a tulajdonság egyértelműen meghatározza a μ mértéket.

Hasonlóan az $f(x) = \mu(-\infty, x])$, $x \geq 0$, illetve $\mu(a, b]) = f(b) - f(a)$, ha $0 \leq a < b$, $\mu(\{0\} = f(0)$ képlet kölcsönösen egyértelmű leképezést ad a számegyenes Borel mérhető halmazain definiált, és a $(-\infty, 0))$ félegyenes részhalmazain eltűnő lokálisan véges előjeles mértékek és a $[0, \infty)$ félegyenesen definiált lokálisan korlátos változású cádlág függvények között. Mivel az ilyen lokálisan véges előjeles mértékek azonosíthatóak megszorításukkal a $[0, \infty)$ félegyenesre, ilyen módon kölcsönösen egyértelmű megfeleltetést adtunk a $[0, \infty)$ félegyenes Borel halmazain definiált lokálisan véges előjeles mértékek és a $[0, \infty)$ félegyenesen definiált lokálisan korlátos változású càdlàg függvények között.

A fenti tulajdonságok és a mértékek konvolúciójára adott definició alapján definiálhatjuk a számegyenesen definiált korlátos változású illetva a $[0, \infty)$ félegyenesen definiált lokálisan korlátos változású és càdlàg függvények konvolúcióját. Nevezetesen, ha $Fx)$ és $G(x)$ korlátos változású, a $-\infty$-ben eltünő càdlàg függvények a számegyenesen, akkor az F és G függvények $F * G$ konvolúcióját a $\mu_{F*G} = \mu_F * \mu_G$ képlet adja meg, ahol μ_F az F függvény μ_G a G függvény, μ_{F*G} pedig a (definiálandó) $F * G$ függvénynek megfelelő előjeles mérték a fenti előjeles mértékek és adott tulajdonságú függvények között definiált kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés szerint.

Hasonlóan, ha $Fx)$ és $G(x)$ lokálisan korlátos változású càdlàg függvények a $[0, \infty)$ félegyenesen, akkor az F és G függvények $F * G$ konvolúcióját a $\mu_{F*G} = \mu_F * \mu_G$ képlet adja meg, ahol μ_F az F függvény μ_G a G függvény, μ_{F*G} pedig a (definiálandó) $F * G$ függvénynek megfelelő lokálisan véges előjeles mérték a fenti lokálisan véges előjeles mértékek és adott tulajdonságú függvények között definiált kölcsönösen egyértelmű megfeleltetés szerint.

A konvolúció fenti implicit módon megadott definicióját fel tudjuk írni explicit formában is. Ha $Fx)$ és $G(x)$ két korlátos változású, a $-\infty$-ben eltünő és càdlàg függvény a számegyenesen, akkor a definició szerint tetszőleges x számra

$$\begin{aligned} F * G(x) &= \mu_{F*G}(-\infty, x]) = \mu_F \times \mu_G((\{(u,v)\colon\ u+v \le x\}) \\ &= \int I_x(u,v)(\mu_F \times \mu_G)(\,du,\,dv), \end{aligned}$$

ahol $I_x(u,v) = 1$, ha $u+v \le x$, és $I_x(u,v) = 0$, ha $u+v > x$.

Mivel $\int |I_x(u,v)|(\mu \times \nu)(\,du, dv) < \infty$, az utolsó formula jobboldalán lévő kifejezés kiszámolására alkalmazhatjuk a Fubini tételt. Azt kapjuk, hogy

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} I_x(u,v)\mu_F(\,du) \right) \mu_G(\,dv) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-v)\mu_G(dv).$$

Az irodalomban a G függvény által meghatározott $\mu_G(\,dv)$ Stieltjes mérték helyett $G(\,dv)$-t írnak. Ebben a formalizmusban azt kaptuk, hogy

$$F * G(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x-v)G(\,dv). \tag{1}$$

Abban az esetben, ha a $[0,\infty)$ félegyenesen defininiált lokálisan korlátos változású cádlág $F(x)$ és $G(x)$ függvények konvolúcióját akarjuk kiszámolni, akkor az előző számoláshoz hasonlóan azt kapjuk, hogy

$$F * G(x) = \int_0^x F(x-v)\mu_G(\,dv) = \int_0^x F(x-v)G(\,dv), \tag{2}$$

ahol $G(\,dv)$ a μ_G Stieltjes mérték szerinti $\mu_G(\,dv)$ integrálást jelenti. Természetesen, a az (1) és (2) képletekben az F és G függvény szerepe fölcserélhető, és azok így is írhatóak:

$$F * G(x) = G * F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x-v)F(\,dv),$$

illetve

$$F * G(x) = G * F(x) = \int_0^x G(x-v)F(\,dv).$$

Ha az (1) formulában definiált $F(x)$ függvény $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$ alakban írható, ami az egyik lehetséges megfogalmazása annak, hogy $F(x)$ abszolút folytonos függvény, akkor az $F * G$ konvolúciónak van sűrűségfüggvénye, amelyik a

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v)G(\,dv), \quad \text{és} \quad F * G(x) = \int_{-\infty}^{x} h(u)\,du$$

képlettel adható meg. Valóban, ebben az esetben némi számolás, amelyben felhasználjuk a Fubini tételt azt adja, hogy

$$\begin{aligned} F * G(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x-v} f(u)\,du \right) G(\,dv) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{x} f(u-v)\,du \right) G(\,dv) \\ &= \int_{-\infty}^{x} \left(\int_{-\infty}^{x} f(u-v) G(\,dv) \right) du = \int_{-\infty}^{x} h(v)\,dv, \end{aligned}$$

ahol

$$h(x) = \int_{-\infty}^{x} f(x-v) G(\,dv),$$

és ezt kellett belátni.

Hasonlóan mutatható meg,hogy ha a (2) formulában szereplő $F(x)$ függvényre $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$, akkor az abban szereplő $F * G(x)$ függvénynek van sűrűségfüggvénye, és az a

$$h(x) = \int_0^x f(x-v) G(\,dv), \quad \text{és} \quad F * G(x) = \int_0^x h(u)\,du$$

képlettel adható meg.

Ha mind az F mind a G függvénynek van sűrűségfüggvénye az (1) illetve (2) formulában, azaz $F(x) = \int_{-\infty}^x f(u)\,du$, $G(x) = \int_{-\infty}^x g(u)\,du$ az (1), illetve $F(x) = \int_0^x f(u)\,du$, $G(x) = \int_0^x g(u)\,du$ a (2) formulában szereplő F és G függvényekre, akkor az analízis néhány klasszikus eredménye alapján az $F*G$ konvolúció felírható a következő alakban:

$$h(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-v) g(dv)\,dv \quad \text{és} \quad F * G(x) = \int_{-\infty}^{x} h(u)\,du$$

az első, illetve

$$h(x) = \int_0^x f(x-v) g(v)\,dv, \quad \text{és} \quad F * G(x) = \int_0^x h(u)\,du$$

a második esetben.

Végül a következő két kérdéssel kivánunk foglalkozni:

1.) Hogyan viszonyul az itt vizsgált konvolúció a valószínűségszámításban korábban bevezetett konvolúcióhoz?
2.) Miért volt érdemes bevezetni a $[0, \infty)$ félegyenesen definiált lokálisan véges előjeles mértékek, illetve lokálisan korlátos változású függvények konvolúcióját?

A valószínűségszámítás tanulmányozása során már találkoztunk a konvolúció fogalmával. Ezt a következőképp vezettük be. Ha adott két F és G eloszlásfüggvény, akkor vettünk két független ξ és η valószínűségi változót, ahol ξ F és η G eloszlású volt, és az $F * G$ konvolúciót úgy definiáltuk, mint a $\xi + \eta$ véletlen összeg eloszlásfüggvényét. Vegyük észre, hogy $P(\xi + \eta \le x) = (\mu_F \times \mu_G)(\{(u, v)\colon\ u + v \le x\}) = \mu_F * \mu_G((-\infty, x])$, ahol μ_F az F és μ_G a G eloszlásfüggvény által meghatározott Stieltjes mérték. Ez azt jelenti, hogy a korábban tanult konvolúció a most tárgyalt konvolúciónak az a speciális esete, amikor csak eloszlásfüggvények konvolúcióját tekintjük. A konvolúció által meghatározott sűrűségfüggvény kiszámítására tanult formulák is az itt szereplő formulák speciális esetei. Ha a most tárgyalt konvolúció megszorítását tekintjük eloszlásfüggvények közötti konvolúcióra, és ezt hasonlítjuk össze a korábban tanult konvolúcióval, akkor egy különbséget találunk e két fogalom között. Azt, hogy jelenleg egy ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét az $F(x) = P(\xi \le x)$, míg korábban az $F(x) = P(\xi < x)$ képlet segítségével definiáltuk. Az, hogy e két definició közül melyiket választjuk izlés kérdése. Most azért kellett ezt az új definiciót választanunk mert càdlàg függvényekkel akartunk dolgozni.Az hogy az eloszlásfüggvény definiciójának fenti két lehetősege közül melyiket kell választanunk, attól függ hogyan definiáltuk a konvolúciót: az $F * G(x) = \mu_{F*G}(-\infty, x])$ vagy az $F * G(x) = \mu_{F*G}(-\infty, x))$ képlet segítségével.

A $[0, \infty)$ félegyenesen definiált lokálisan véges előjeles mértékek és lokálisan korlátos változású függvények konvolúciójának bevezetését a felújítási tétel, a felújítási egyenlet, és az ezzel kapcsolatos problémák tették természetessé. Idézzünk fel egy a felújítási folyamatokról szóló gyakran használt eredményt.

Legyenek $X_1, X_2, \dots,$ független és azonos eloszlású valószínűségi változók valamilyen G eloszlásfügvénnyel, amelyekre $P(X_1 \ge 0) = 1$ és $P(X_1) > 0) > 0$. Vezessük be a $T_0 = 0$, $T_n = X_1 + \dots + X_n$, $n = 1, 2, \dots,$ véletlen összegeket, és minden $t \ge 0$ számra az N_t mennyiséget, amelyet az

$$N_t = \max\{n \ge 0\colon\ T_n \ge t\}, \quad t \ge 0$$

képlet definiál. Legyen $m(t) = EN_t = \sum_{m=1}^{\infty} G^{*m}(t)$, ahol G^{*m} a G eloszlásfüggvény m-szeres konvolúcióját jelöli önmagával. (Az utolsó formula második azonossága az előbb említett tétel állítása.) Mint a Kockázati Folyamatok jegyzet is igazolja, érvényes az

$$m(t) = G(t) + m * G(t), \quad t \ge 0,$$

azonosság. Itt $m * G$ az m és G a $[0, \infty)$ félegyenesen definiált függvények konvolúcióját jelöli. Vegyük észre, hogy az $m(t)$ függvény monoton, lokálisan korlátos, ezért lokálisan korlátos változású függvény. Ezért a fenti képletben szereplő konvolúció (az ebben a jegyzetben is tárgyalt általánosabb értelemben) egy jól definiált fogalom.

Még fontosabb kérdés az úgynevezett felújítási egyenlet vizsgálata, ami bizonyos problémákban megjelenik, és amelynek vizsgálata az itt bevezetett konvolúció alkalmazását igényli az általános esetben.

A felújítási egyenletben az előbb bevezetett G és m függvényekkel dolgozunk, és a következő problémával foglalkozunk: Adva egy $a(t)$, $t \geq 0$, függvény, létezik-e megoldása az

$$A(t) = a(t) + \int_0^t A(t-x)G(\,dx) = (a + A * G)(t), \quad t \geq 0$$

egyenletnek? (Itt $A(t)$ az ismeretlen, keresett függvény.) A következő eredmény érvényes.

Tétel. *Ha $a(t)$, $t \geq 0$, lokálisan korlátos változású càdlàg függvény a $[0, \infty)$ félegyenesen, akkor a fenti egyenletnek létezik egyértelműen meghatározott megoldása a $[0, \infty)$ félegyenesen definiált korlátos változású càdlàg függvények terében, és az megadható a következő képlet segítségével.*

$$A(t) = (a + a * m)(t).$$

Megjegyzem, hogy a felújítási egyenlet fenti alakú megoldásának és a felújítási tételnek egy fontos következménye az, hogy a felújítási egyenlet $A(t)$ megoldásának aszimptotikus viselkedéséről $t \to \infty$ esetén pontos információnk van. Erről szól a Kockázati Folyamatok jegyzetben az 1.27. Tétel.