Feladatok:

1a) Legyen X és Y két valószínűségi változó, amelyekre $EX^2 < \infty$, $EY^2 < \infty$, és legyen $\mathcal{F}$ olyan σ-algebra, amelyre X $\mathcal{F}$ mérhető. Mutassa meg, hogy

$$E(Y^2|\mathcal{F}) = E((Y-X)^2|\mathcal{F}) + 2XE((Y-X)|\mathcal{F}) + X^2.$$

1b) Mutassa meg a fenti azonosság segítségével, hogy ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots,$, martingál, amelyre $EX_n^2 < \infty$ minden n indexre, akkor $(X_n^2, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, szubmartingál.

1c) Mutassa meg, hogy ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, martingál, akkor $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$ vagy $(X_n^+, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, ahol $X_n^+ = \max(X_n, 0)$ szubmartingál.

2.) Egy igazságos kaszinóban, tétünket duplázva addig játszunk, amig biztosan nem nyerünk egy forintot. Azaz X_n, $n = 1, 2, \dots$, n időpontbeli nyereményünk a következőképp változik. Legyenek $Y_0, Y_1, \dots$ független valószínűségi változók, amelyekre $P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, \dots$, és definiáljuk az $X_1 = Y_0$, $X_{n+1} = X_n + 2^n Y_n I_{\{X_n < 0\}}$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változókat, ahol I_A az A halmaz indikátorfüggvényét jelöli.

a) Mutassa meg, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$, ahol $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, \dots, Y_{n-1})$ martingál. $X_n \to 1$ 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$, de az X_n sorozat nem konvergál L_1 normában, ha $n \to \infty$.

b) (Szorgalmi?) Mutassa meg, hogy $E \sup\limits_{n \geq 1} |X_n| = \infty$.

A következő feladatok megoldása felhasználja azt a tényt, hogy többváltozós normális eloszlású valószínűségi változók koordinátái függetlenek, ha korrelálatlanok. A következő feladat megoldásának fő gondolata: Ha (X, Z) normális eloszlású véletlen vektor, akkor létezik olyan (kiszámolható) α szám, amelyre $X - \alpha Z$ és Z függetlenek.

3.) Legyen (X, Z) kétdimenziós normális eloszlású véletlen vektor, $EX = 0$, $EZ = 0$. Mutassa meg, hogy $E(X|Z) = \frac{EXZ}{EZ^2} Z$, $E(X^2|Z) = EX^2 - \frac{(EXZ)^2}{EZ^2} + \left(\frac{EXZ}{EZ^2}\right)^2 Z^2$, $E(((X - E(X|Z))^2|Z) = EX^2 - \frac{(EXZ)^2}{EZ^2}$. (Vegyük észre, hogy az utolsó formula, amelyben X feltételes szórásngyzetét számoltuk ki feltéve Z értékét, nem függ Z aktuális értékétől.)

4.) Legyen ξ, η és ζ három független standard normális eloszlású valószínűségi változó. Mutassa meg, hogy a $\xi + \eta + \zeta$ és a $\frac{\xi - \eta}{\xi - \zeta}$ valószínűségi változók függetlenek egymástól.

A következő feladatok megoldása is azon alapul, hogy normális valószínűségi változók esetében bizonyos feltételek mellett a korrelálatlanságból következik a függetlenség. Ezek a feladatok Wiener folyamatokról és Brown bridge-ről szólnak. Emlékeztetek, hogy egy a $[0, 1]$ intervallumon definiált folytonos trajektóriájú $W(t)$ Gauss folyamat akkor Brown folyamat, ha $EW(t) = 0$, $EW(s)W(t) = \min(s, t)$, $0 \leq s, t \leq 1$, és akkor Brown bridge, ha $EW(t) = 0$, és $EW(s)W(t) = \min(s, t) - st$. $0 \leq s, t \leq 1$.

5.) Bizonyítsa be, hogy ha $W(t)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat, akkor $B(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \le t \le 1$, Brown bridge, amely független a $W(1)$ valószínűségi változótól. Megfordítva, ha $B(t)$, $0 \le t \le 1$, Brown bridge, és ξ egy tőle független standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $W(t) = B(t) + t\xi$ egy Wiener folyamat.

6.) Egy $B(t)$, $0 \le t \le 1$, Brown bridge Markov folyamat, azaz, minden $0 \le s \le t \le 1$ számra igaz, hogy ha definiáljuk az $\mathcal{F}_s = \sigma(B(u)\ , 0 \le u \le s)$, és $\mathcal{G}_s = \sigma(B(s))$ σ-algebrákat, akkor $P(B(t) \in A|\mathcal{G}_s) = P(B(t) \in A|\mathcal{F}_s)$ minden Borel mérhető A halmazra a számegyenesen. (Ez azt jelenti, hogy $B(t)$ Markov folyamat.)

Segítség: Mutassuk meg, hogy a $B(t) - \frac{1-t}{1-s}B(s)$ valószínűségi változó független az $\mathcal{F}_s = \sigma(B(u)\ , 0 \le u \le s)$ σ-algebrától, majd használjuk a 8. feladat eredményét.

7.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, a $[0,1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Definiáljuk az

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \times \text{azon } 1 \le j \le n \text{ indexek száma, amelyekre } \xi_j < t$$

empirikus eloszásfüggvényt minden $0 \le t \le 1$ számra e valószínűségi változók segítségével. Mutassa meg, hogy a $G_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$, $0 \le t \le 1$, normalizált eloszlásfüggvény és a Brown bridge kovarianciafüggvénye megegyezik.

A következő feladat megegyezik Kevei Péter jegyzetének 12. feladatával.

8.) Legyen adva egy $\mathcal{G}$ σ-algebra és két X és Y valószínűségi változó, amelyek teljesítik a következő feltételeket:

X mérhető a $\mathcal{G}$ σ-algebrára, és Y független tőle.

Mutassa meg, hogy minden olyan kétváltozós Borel mérhető $h(x,y)$ függvényre, amelyre $E|h(X,Y)| < \infty$

$$E(h(X,Y)|\mathcal{G})(\omega) = \int h(X(\omega), y)\, dF(y) \quad 1 \text{ valószínűséggel,}$$

ahol F az Y valószínűségi változó eloszlásfüggvénye.

Segítség: Lássuk be az állítást először abban az esetben, ha $h(x,y)$ az R^2 tér mérhető részhalmaza. Ezt is lássuk be először egyszerű halmazokra, majd terjesszük ki az állítást az általános esetre felhasználva azt a mértékelméletben tanult eredményt, hogy egy mérték kiterjesztése egy algebráról az általa generált σ-algebrára egyértelmű.

9.) Legyen (X,Z) kétdimenziós normális eloszlású véletlen vektor, $EX = 0$, $EZ = 0$. Mutassa meg a 8. feladat eredményének a segítségével, hogy tetszőleges mérhető B halmazra $P(X \in B|Z) = P(U \in B)$, ahol U normális eloszlású valószínűségi változó $m = \frac{EXZ}{EZ^2}Z$ várható értékkel és $\sigma^2 = EX^2 - \frac{EXZ}{EZ^2}$ szórásnégyzettel.

Megjegyzés: A 9. feladat azt állítja, hogy X feltételes eloszlása, feltéve Z értékét a normális eloszlás, amelynek várható értéke megegyezik a 3. feladatban kiszámolt

$E(X|Z)$ feltételes várható értékkel szórásnégyzete pedig az $E(((X - E(X|Z))^2|Z)$ feltételes szórásnégyzettel.

10.) Láttuk, hogy alkalmazva az Itô formulát az $W(t) = \int_0^t 1\, dW(s)$ kifejezésre ki tudjuk számolni az $\int_0^t W(s)\, dW(s)$ integrált. Bizonyítsuk be hasonló módon, hogy

$$\int_0^t W^2(s)\, dW(s) = \frac{1}{3} W^3(t) - \int_0^t W(s)\, ds,$$

és

$$\int_0^t W^3(s)\, dW(s) = \frac{1}{4} W^4(t) - \frac{3}{2} \int_0^t W^2(s)\, ds.$$

A következő feladat a jegyzet 7. példájában tárgyalt exponenciális Brown mozgáshoz, azaz a $dX(t) = \mu X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenlet megoldásához kapcsolódik. Ott az Itô formulát alkalmaztuk az $f(X(t))$ függvényre $f(x) = \log x$ választással, és ez azt adta, hogy a tekintett sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása az $X(t) = X(0) \exp\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}$ függvény. A jegyzetben tárgyalt számolás segített megtalálni a megoldást, mégsem tekinthető teljes értékű indoklásnak, mert az Itô formulában az egész számegyenesen definiált kétszer folytonosan differenciálható $f(x)$ függvényt kell választani, az $f(x) = \log x$ függvény pedig nem ilyen, sőt nem is egészíthető ki ilyen függvénnyé. Megjegyzem, hogy ez a probléma azzal függ össze, hogy a nem az origóból kiinduló exponenciális Brown mozgás, mint a rá adott megoldás mutatja, nem veszi fel soha a nulla értéket, de ezt közvetlenül nem látjuk.

11a.) Bizonyítsa be az Itô formula segítségével, hogy az

$$X(t) = \exp\{U(t)\} = \exp\left\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right\}$$

sztochasztikus folyamat, ahol $U(t) = \sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ kielégíti a $dX(t) = \mu X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletet az $X(0) = 1$ határfeltétellel.

11b.) Az előbb definiált $X(t)$ és $U(t)$ folyamatokra

$$d\left(\frac{1}{X(t)}\right) = \frac{1}{X(t)}[(\sigma^2 - \mu)\, dt - \sigma dW(t)].$$

11c.) Legyen $Z(t)$ megoldása a $dZ(t) = \mu Z(t)\, dt + \sigma Z(t)\, dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletnek. Mutassa meg, hogy

$$d\left(\frac{1}{X(t)} Z(t)\right) = \frac{dZ(t)}{X(t)} + Z(t) d\left(\frac{1}{X(t)}\right) - \sigma^2 \frac{Z(t)}{X(t)}\, dt = 0,$$

ezért $Z(t) = Z(0)\exp\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}$.

A következő feladat tekinthető úgy, mint a Kevei jegyzet 6. példájának a kiegészítése. Egyébként tartalmazza a jegyzet 13. feladatát.

12a.) Legyen $Y(t) = e^{-U(t)}$, ahol $U(t) = \int_0^t X(s)\,dW(s) - \frac{1}{2}\int_0^t X^2(s)\,ds$ egy olyan $X(s)$, $0 \le s \le T$, sztochasztikus folyamattal, amelyre az előbb definiált $U(t)$ Itô-folyamat létezik. Mutassa meg, hogy igaz a

$$dY(t) = Y(t)[X^2(t)\,dt - X(t)\,dW(t)], \quad Y(0) = 1,$$

azonosság.

12b.) Mutassa meg, hogy ha a $Z(t)$ Itô folyamat teljesíti a $Z(t) = 1 + \int_0^t Z(s)X(s)\,dW(s)$ egyenletet a 12a) feladatban szereplő $X(t)$ sztochasztikus folyamattal, akkor

$$d[Y(t)Z(t)] = 0.$$

Ezért ennek az egyenletnek az egyetlen az $Y(0) = 1$ határfeltételt teljesítő megoldása a Kevei jegyzet 6. példájában tárgyalt $Z(t) = e^{U(t)}$ sztochasztikus folyamat.

A következő feladat megegyezik a Kevei jegyzet 16. feladatával.

13a.) Legyenek $W_1(t), \dots, W_r(t)$, $0 \le t \le T$, független Wiener folyamatok, és definiáljuk segítségükkel az $R_r(t) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^r W_i^2(t)}$, $0 \le t \le T$, úgynevezett r-ed rendű Bessel folyamatot minden $r \ge 2$ dimenzióban. Bizonyítsa be,hogy ez teljesíti az

$$R_r(t) = \int_0^t \frac{r-1}{2R_r(s)}\,ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t \frac{W_j(s)}{R_r(s)} dW_j(s)$$

azonosságot.

13b.) A jegyzetben valószínűleg olyan megoldásra gondoltak, amelyben az Itô formulát alkalmazzuk az $f(x_1, \dots, x_r) = \left(\sum\limits_{j=1}^r x_j^2\right)^{1/2}$ függvénnyel. Elfogadok a feladat a) részére egy ilyen megoldást, mert az helyes eredményt ad. Ugyanakkor ez a megoldás nem teljes értékű, mert az előbb definiált $f(x_1, \dots, x_r)$ függvény nem elég sima. (Az origóban nem deriválható kétszer folytonosan.) Adja meg egy egzakt bizonyítás vázlatát. Ennek érdekében írja fel azt, hogy milyen sztochasztikus differenciálegyenletet elégít ki az $R_r^\varepsilon(t) = \sqrt{\sum\limits_{j=1}^r W_i^2(t) + \varepsilon}$, $0 \le t \le T$, sztochasztikus folyamat. Ezenkívül adja meg, hogy milyen limesz relációkat kell bebizonyítani annak érdekében, hogy a kapott azonosság segítségével bebizonyítsuk a 13a.) feladat állítását. (Megjegyzem, hogy az

$$\int_0^t K_n(s)\,ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t H_{j,n}(s)\,dW_j(s), \quad n = 1, 2, \dots,$$

Itô integrálok $n \to \infty$ esetén konvergálnak az

$$\int_0^t K(s)\,ds + \sum_{j=1}^r \int_0^t H_j(s)\,dW_j(s)$$

Itô integrálhoz, ha $\lim \int_0^T |K_n(s) - K(s)|\,ds \to 0$ és $\lim \int_0^T |H_{j,n}(s) - H_j(s)|^2\,ds \to 0$ egy valószínűséggel minden $1 \le j \le r$ indexre.)

13c.) *Szorgalmi feladat.* Bizonyítsa be azokat a limesz relációkat, amelyek lehetővé teszik a feladat megoldását a b) feladat megoldásának a segítségével. A bizonyításban fel szabad használni azt a (nehezen bizonyítható) eredményt, mely szerint az $\int_0^t \frac{1}{R_r(s)}\,ds$ integrál 1 valószínűséggel véges.

14.) Bizonyítsa be a tanult martingál egyenlőtlenségek segítségével, hogy ha $W(t)$, $0 \le t \le T$, egy Wiener folyamat, akkor $P\left(\sup_{0 \le t \le T} |W^2(t) - t| > x\right) \le \frac{8T^2}{x^2}$ minden $x > 0$ számra. (Olyan megoldást is elfogadok, ahol a 8 helyett nagyobb konstans szerepel.)

15.) Legyen $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, (standard) Wiener folyamat egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, $a(t)$, $0 \le t \le 1$, egy folytonosan deriválható függvény, és definiáljuk az $X(t,\omega) = W(t,\omega) + \int_0^t a(s)\,ds$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamatot. (Legyen $\mathcal{A}$ a legszűkebb olyan σ-algebra, amelyre a $W(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat mérhető.) Legyen P_1 a $W(t,\omega)$, és P_2 az $X(t,\omega)$ (folytonos trajektóriájú) sztochasztikus folyamat eloszlása a $C([0,1])$ térben. Bizonyítsa be a Girsanov tétel segítségével, hogy a P_2 mérték $\frac{dP_2}{dP_1}$ Radon–Nikodym deriváltja a P_1 mérték szerint

$$\frac{dP_2}{dP_1}(x) = \exp\left\{\int_0^1 a(t)\,dx(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 a^2(t)\,dt\right\}$$

az $x = \{x(t)\colon\ 0 \le t \le 1\} \in C([0,1])$ pontban.

Segítség: Mutassuk meg, hogy a Girsanov tételből következik, hogy

$$\int F(X(\cdot,\omega))e^{-\int_0^1 a(t)dW(t,\omega) - \frac{1}{2}\int_0^1 a^2(t)\,dt)}\,dP(\omega) = \int F(W(\cdot,\omega))\,dP(\omega) \qquad \text{(a)}$$

minden F a $C([0,1])$ téren értelmezett R^1 értékű függvényre. Felhasználjuk, hogy egy $(\Omega_1, \mathcal{A}_1, P_1)$ téren definiált X és egy $(\Omega_2, \mathcal{A}_2, P_2)$ téren definiált Y valószínűségi változó eloszlása akkor és csak akkor egyezik meg, ha $EF(X) = EF(Y)$ minden F függvényre, továbbá

$$EF(X) = \int F(X(\omega_1))\,dP_1(\omega_1), \quad \text{és} \quad EF(Y) = \int F(Y(\omega_2))\,dP_2(\omega_2).$$

Továbbá mivel $a(t)$ folytonosan deriválható függvény, az $\int_0^t a(s)\,dW(t,\omega)$ integrál definiálható minden ω-ra, mint egy determinisztikus integrál. Mutassa meg, hogy $\int_0^1 a(t)\,dX(t,\omega) = \int_0^1 a(t)\,dW(t,\omega) + \int_0^1 a^2(t)\,dt$, és ezért az (a) azonosságot az $F(x)$

függvény helyett a $G(x)=F(x)\exp\left\{\int_0^1 a(t)\,dx(t)-\frac{1}{2}\int_0^1 a^2(t)\,dt\right\}$ függvényre alkalmazva azt kapjuk, hogy

$$\int F(X(\cdot,\omega))\,dP(\omega)=\int F(W(\cdot,\omega))e^{\int_0^1 a(t)dW(t,\omega)-\frac{1}{2}\int_0^1 a^2(t)\,dt)}\,dP(\omega).$$

Innen $X(\cdot,\omega)$ eloszlása megegyezik $W(\cdot,\omega)$ eloszlásával az $(\Omega,\mathcal{A},P^*)$ valószínűségi mezőn, ahol $\frac{dP^*}{dP}(\omega)=\exp\left\{\int_0^1 a(t)dW(t,\omega)-\frac{1}{2}\int_0^1 a^2(t)\,dt)\right\}$. A T: $(\Omega,\mathcal{A})\to C([0,1])$, $T(\omega)=W(\cdot,\omega)$ leképezést alkalmazva azt kapjuk, hogy P_1 a P mérték, és P_2 a P^* mérték őstképe az ezen leképezés által indukált mértéktranszformáció szerint. Innen következik a feladat állítása.

16a.) Legyen $x(t)$ és $y(t)$ két függvény a $[0,1]$ intervallumon. Mutassa meg, hogy tetszőleges $0\le t_1\le t_2\le\cdots\le t_n\le 1$ pontokra

$$\begin{aligned}\left\{\sum_{k=1}^n[x(t_k)-x(t_{k-1})]^2\right\}^{1/2}&-\left\{\sum_{k=1}^n[y(t_k)-y(t_{k-1})]^2\right\}^{1/2}\\ &\le\left\{\sum_{k=1}^n[(x(t_k)+y(t_k))-(x(t_{k-1}+y(t_{k-1}))]^2\right\}^{1/2}\\ &\le\left\{\sum_{k=1}^n[x(t_k)-x(t_{k-1})]^2\right\}^{1/2}+\left\{\sum_{k=1}^n[y(t_k)-y(t_{k-1})]^2\right\}^{1/2}.\end{aligned}$$

Legyen $W(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, egy (standard) Wiener folyamat, $A(t)$, $0\le t\le 1$, egy folytonosan differenciálható függvény, és definiáljuk az $X(t,\omega)=2W(t,\omega)+A(t)$, $0\le t\le 1$, sztochasztikus folyamatot. Mutassa meg a fenti egyenlőtlenség és a Kevei jegyzet 2. Tétele (pontosabban ennek közvetlenül utána írt következménye) segítségével, hogy az $n=1,2,\dots$, számokra definialhatunk olyan $0=t_{0,n}<t_{1,n}\cdots<t_{n-1,n}<t_{n,n}=1$ sorozatokat, amelyekre egyrészt $\sup\limits_{1\le k<\le n}(t_{k,n}-t_{k-1,n})\to 0$, ha $n\to\infty$, másrészt

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n[X(t_{k,n},\omega)-X(t_{k-1,n},\omega)]^2=4\quad\text{1 valószínűséggel.}$$

16b.) Mutassa meg, hogy a 16a.) feladatban definiált $X(t,\omega)=2W(t,\omega)+A(t)$ és a $W(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, sztochasztikus folyamatok eloszlásai szinguláris mértékek a $C([0,1])$ térben, azaz léteznek olyan $B_1,B_2\in C([0,1])$ (mérhető) halmazok, amelyekre $B_1\cap B_2=\emptyset$, és $P(X(\cdot,\omega)\in B_1)=1$, $P(W(\cdot,\omega)\in B_2)=1$.

17a.) Legyen $W(t,\omega)$, $0\le t\le 1$, (standard) Wiener folyamat egy $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn, $a(t)$, $0\le t\le 1$, egy folytonosan deriválható függvény, és definiáljuk az $X(t,\omega)=W(t,\omega)+\int_0^t a(s)\,ds$, $0\le t\le 1$, sztochasztikus folyamatot. Legyen $P_1(n)$

a $(W(2^{-n}), W(2\cdot 2^{-n}), W(3\cdot 2^{-n}), \dots, W(2^n\cdot 2^{-n}))$ és $P_2(n)$ az $(X(2^{-n}), X(2\cdot 2^{-n}), X(3\cdot 2^{-n}), \dots, X(2^n\cdot 2^{-n}))$ véletlen vektor eloszlása az R^{2^n} térben. Bizonyítsa be a következő azonosságot a $\frac{dP_2(n)}{dP_1(n)}$ Radon-Nikodym deriváltról.

$$\frac{dP_2(n)}{dP_1(n)}(x_1, \dots, x_{2^n}) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{2^n}[b_n(k)(x_k - x_{k-1}) - 2^{-n-1}b_n^2(k)]\right\},$$

ahol $b_n(k) = 2^n\int_{(k-1)2^{-n}}^{k2^{-n}} a(s)\,ds$, és $x_0 = 0$.

17b.) Tekintsük a $C([0,1])$ teret a szokásos topológiával és az általa generált $\mathcal{F}$ σ-algebrával, valamint legyen a P_1 mérték a $W(\cdot,\omega)$ eloszása, (azaz a Wiener mérték) és P_2 az $X(\cdot,\omega)$ eloszlása ezen a téren. Vezessük be a következő $\mathcal{F}_n$ σ-algebrát a $C([0,1])$ téren minden $n = 1, 2, \dots,$ számra. Definiáljuk az $u_{n,k}(x) = x(k2^{-n)}$, $x \in C([0,1])$, függvényt minden $n = 1, 2, \dots,$ és $0 \le k \le 2^n$ indexpárra a $C([0,1])$ térben (azaz $u_{n,k}(x)$ az $x = x(\cdot) \in C([0,1])$ függvény értéke a $k2^{-n}$ pontban). Legyen $\mathcal{F}_n$ az a legszükebb σ-algebra, amelyre az összes $u_{n,k}(x)$, $0 \le k \le 2^n$, függvény mérhető rögzített n index-szel. Jelölje $P_1'(n)$ a P_1, és $P_2'(n)$ a P_2 mérték megszorítását a $\mathcal{F}_n$ σ-algebrára. Ekkor a 17a.) feladat állítása így fogalmazható meg ebben a térben:

$$\frac{dP_2'(n)}{dP_1'(n)}(x) = \exp\left\{\sum_{k=1}^{2^n}[B_n(k2^{-n})(x(k2^{-n}) - x((k-1)2^{-n})) - 2^{-n-1}B_n^2(k2^{-n})]\right\}$$

minden $x \in C([0,1])$-re, ahol $B_n(t) = 2^n\int_{t-2^{-n}}^{t} a(s)\,ds$, $2^{-n} \le t \le 1$.

A martingálelmélet eredményeiből következik, hogy $\frac{dP_2'(n)}{dP_1'(n)}$ egy valószínűséggel konvergál a $\frac{dP_2}{dP_1}$ Radon–Nikodym deriválthoz a P_1 (Wiener) mérték szerint a $C([0,1])$ térben. (Lásd a következő Megjegyzést.) Ezt felhasználva bizonyítsa be az előző képlet segítségével a 15. feladat állítását, azaz a

$$\frac{dP_2}{dP_1}(x) = \exp\left\{\int_0^1 a(t)\,dx(t) - \frac{1}{2}\int_0^1 a^2(t)\,dt\right\}$$

azonosságot.

Megjegyzés: Nem nehéz belátni, hogy a $\frac{dP_2'(n)}{dP_1'(n)}$, $n = 1, 2, \dots,$ sorozat martingált alkot a $(C([0,1]), \mathcal{F}, P_1)$ téren, amelyre alkalmazható Doob martingál konvergenciatétele. (Lásd Kevei jegyzet 8. oldal.) Tehát a $\frac{dP_2'(n)}{dP_1'(n)}(x)$, $n = 1, 2, \dots,$ sorozat 1 valószínűséggel konvergál. Ez azonban nem elég a számunkra. Azt is be kell látni, hogy ez a sorozat a "helyes limeszhez", a $\frac{dP_2}{dP_1}(x)$ valószínűségi változóhoz konvergál. Meg lehet mutatni, hogy ez a sorozat nem csak 1 valószínűséggel, hanem L_1 normában is konvergál. Be lehet látni, hogy innen következik, hogy limeszként a $\frac{dP_2}{dP_1}(x)$ valószínűségi változót kapjuk.

18.) Tekintsünk egy arbitrázs mentes diszkrét idejű (d.i.-$(B,S)_N$) piacot. Legyen adva azon két π_1 és π_2 önfinanszírozó stratégia a nulla időpontban $X_0^{\pi_1} = x_1$ és $X_0^{\pi_2} = x_2$ indulótőkével. Mutassa meg, hogy ha $X_N^{\pi_1} \ge X_N^{\pi_2}$ 1 valószínűséggel, akkor $x_1 \ge x_2$.

Segítség: Érdemes felhasználni, hogy van ekvivalens martingál mérték (9.2.1. Tétel), és az $\frac{X_n^\pi}{B_n}$ sorozat martingál tulajdonságát (9.1.7. Lemma).