Feladatok:

1a) Legyen X és Y két valószínűségi változó, amelyekre $EX^2 < \infty$, $EY^2 < \infty$, és legyen $\mathcal{F}$ olyan σ-algebra, amelyre X $\mathcal{F}$ mérhető. Mutassa meg, hogy

$$E(Y^2|\mathcal{F}) = E((Y-X)^2|\mathcal{F}) + 2XE((Y-X)|\mathcal{F}) + X^2.$$

1b) Mutassa meg a fenti azonosság segítségével, hogy ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, martingál, amelyre $EX_n^2 < \infty$ minden n indexre, akkor $(X_n^2, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, szubmartingál.

1c) Mutassa meg, hogy ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, martingál, akkor $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, vagy $(X_n^+, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, ahol $X_n^+ = \max(X_n, 0)$ szubmartingál.

2.) Egy igazságos kaszinóban tétünket duplázva addig játszunk, amíg biztosan nem nyerünk egy forintot. Azaz X_n, $n = 1, 2, \ldots$, n időpontbeli nyereményünk a következőképp változik. Legyenek $Y_0, Y_1, \ldots$ független valószínűségi változók, amelyekre $P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$, és definiáljuk az $X_1 = Y_0$, $X_{n+1} = X_n + 2^n Y_n I_{\{X_n < 0\}}$, $n = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változókat, ahol I_A az A halmaz indikátorfüggvényét jelöli.

a) Mutassa meg, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$, ahol $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, , \ldots, Y_{n-1})$ martingál. $X_n \to 1$ 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$, de az X_n sorozat nem konvergál L_1 normában, ha $n \to \infty$.

b) (Szorgalmi?) Mutassa meg, hogy $E \sup\limits_{n \geq 1} |X_n| = \infty$.

3.) Legyenek $X_1, X_2, \ldots$ olyan független valószínűségi változók, amelyekre $EX_n = 0$, $EX_n^2 < \infty$, $n = 1, 2, \ldots$. Definiáljuk az

$$S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad T_n = (X_1 + \cdots + X_n)^2 - E(X_1^2 + \cdots + X_n^2)$$

valószínűségi változókat és $\mathcal{F}_n = \sigma(X_1, \ldots, X_n)$ σ-algebrákat minden $n = 1, 2, \ldots$ indexre. Mutassa meg, hogy $(S_n, \mathcal{F}_n)$ és $(T_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, martingálok.

4.) Legyen $S_1, S_2, \ldots$ szimmetrikus bolyongás a számegyenesen, azaz legyen $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ minden $n = 1, 2, \ldots$ indexre, ahol $X_1, X_2, \ldots$ olyan független valószínűségi változók, amelyekre $P(X_n = 1) = P(X_n = -1) = \frac{1}{2}$, minden $n = 1, 2, \ldots$ indexre. Legyen a és b két pozitív egész szám, és definiáljuk segítségükkel a következő $\tau = \tau_{a,b}$ valószínűségi változót: τ az a legkisebb n index, amelyre $S_n = -a$ vagy $S_n = b$, azaz $S_n = -a$ vagy $S_n = b$, de $S_m \neq -a$ és $S_m \neq -b$, ha $m < n$.

Felhasználva, hogy τ megállási szabály, mutassa meg az előző feladat eredményének és a martingálok tulajdonságairól tanultak alapján, hogy $ES_\tau = 0$, $ES_\tau^2 = E\tau$, ezért annak a valószínűsége, hogy a szimmetrikus bolyongás előbb éri el a $-a$ pontot, mint a b pontot $\frac{b}{a+b}$, és annak a valószínűsége, hogy a szimmetrikus bolyongás előbb éri el a b pontot, mint a $-a$ pontot $\frac{a}{a+b}$. Azon véletlen időpontnak a várható értéke, amikor a véletlen bolyongás először éri el a $-a$ vagy b pontot ab.

5.) Az előző feladat eredményének a segítségével mutassa meg, hogy egy szimmetrikus bolyongás egy valószínűséggel meglátogatja az 1 pontot, de e pont első meglátogatásának az időpontja olyan valószínűségi változó, amelynek végtelen a várható értéke.

6.) Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, martingál, ζ_n, $n = 1, \dots, N$, olyan valószínűségi változók sorozata, amelyekre ζ_n $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető. Legyen

$$Y_0 = X_0, \;\; Y_n = Y_{n-1} + \zeta_n(X_n - X_{n-1}), \quad n = 1, \dots, N.$$

Mutassa meg, hogy $(Y_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, martingál.

6a.) Legyen adva egy piac B_n, $n = 0, 1, \dots, N$, árú kötvényekkel és S_n, $n = 0, 1, \dots, N$, árú részvényekkel. Tekintsünk egy $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$, $n = 1, \dots, N$, stratégiát, ahol β_n az $n-1$-ik napon vett kötvények és γ_n az $n-1$-ik napon vett részvények száma, és ezek $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető valószínűségi változók, $n = 1, \dots, N$. Legyen ez a π stratégia önfinanszírozó, azaz ne csak az $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$, hanem az $X_{n-1}^\pi = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$ azonosság is teljesüljön, $n = 1, \dots, N$. (X_n^π a vagyonunk értéke az n időpontban.) Mutassa meg, hogy

$$\frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} = \gamma_n \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right), \quad n = 1, \dots, N.$$

6b.) Mutassa meg az előző eredmények segítségével, hogy ha π önfinanszírozó stratégia, és $\frac{S_n}{B_n}$, $n = 0, 1, \dots, N$, martingál, akkor $\frac{X_n^\pi}{B_n}$, $n = 0, 1, \dots, N$, is martingál.

7.) Legyenek $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_n$ valós számok. Mutassa meg, hogy létezik olyan $(\zeta_1, \dots, \zeta_n)$ n-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektor, amelyre $E\zeta_j = 0$, $1 \le j \le n$, $E\zeta_j\zeta_k = \min(t_j, t_k)$, $1 \le j, k \le n$. (Segítség: Konstruálja meg a $\zeta_j - \zeta_{j-1}$ valószínűségi változókat, ahol $\zeta_0 \equiv 0$.)

8.) Legyen $W(t)$, $0 \le t < \infty$, Wiener folyamat. Mutassa meg, hogy minden $a > 0$ számra $\frac{1}{\sqrt{a}} W(at)$, $0 \le t < \infty$, Wiener folyamat. Mutassa meg, hogy $tW(\frac{1}{t})$, $0 < t < \infty$, $W(0) = 0$, Wiener folyamat.

9.) Bizonyítsa be, hogy ha $W(t)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat, akkor $B(t) = W(t) - tW(1)$, $0 \le t \le 1$, Brown bridge, amely független a $W(1)$ valószínűségi változótól. (Egy $B(t)$, $0 \le t \le 1$ sztochasztikus folyamatot akkor nevezünk Brown bridge-nek, ha olyan folytonos trajektóriájú Gauss folyamat, amelyre $EB(t) = 0$, $0 \le t \le 1$, és $EB(s)B(t) = s(1-t)$, ha $0 \le s \le t \le 1$.) Megfordítva, ha $B(t)$, $0 \le t \le 1$, Brown bridge, és ξ egy tőle független standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor $W(t) = B(t) + t\xi$ egy Wiener folyamat.

10.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független, a $[0, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Definiáljuk az

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \times \text{azon } 1 \le j \le n \text{ indexek száma, amelyekre } \xi_j < t$$

empirikus eloszásfüggvényt minden $0 \leq t \leq 1$ számra e valószínűségi változók segítségével. Mutassa meg, hogy a $G_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$, $0 \leq t \leq 1$, normalizált eloszlásfüggvény és a Brown bridge kovarianciafüggvénye megegyezik.

11.) Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó nulla várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Mutassa meg, hogy $Ee^{t\xi} = e^{\sigma^2 t^2/2}$ minden t valós számra. Legyen $W(t)$, $t \geq 0$, (standard) Wiener folyamat. Mutassa meg, hogy $Z(t) = e^{\alpha t W(t) - \alpha^2 t/2}$ sztochasztikus folyamat az $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(W(s),\ s \leq t)$ σ-algebrákkal, $t \geq 0$, martingál minden α valós számra.

12.) Legyen $W(t)$, $t \geq 0$, (standard) Wiener folyamat. Mutassa meg, hogy a $Z(t) = \frac{W^2(t)}{2} - t$ sztochasztikus folyamat az $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(W(s),\ s \leq t)$ σ-algebrákkal, $t \geq 0$, martingál.