Feladatok:

1.) Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, martingál, ζ_n, $n = 1, \ldots, N$, olyan valószínűségi változók sorozata, amelyekre ζ_n $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető. Legyen

$$Y_0 = X_0, \quad Y_n = Y_{n-1} + \zeta_n (X_n - X_{n-1}), \qquad n = 1, \ldots, N.$$

Mutassa meg, hogy $(Y_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, martingál.

a.) Legyen adva egy piac B_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, árú kötvényekkel és S_n, $n = 0, 1, \ldots, N$, árú részvényekkel. Tekintsünk egy $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$, $n = 1, \ldots, N$, stratégiát, ahol β_n az $n-1$-ik napon vett kötvények és γ_n az $n-1$-ik napon vett részvények száma, és ezek $\mathcal{F}_{n-1}$ mérhető valószínűségi változók, $n = 1, \ldots, N$. Legyen ez a π stratégia önfinanszírozó, azaz ne csak az $X_n^\pi = \beta_n B_n + \gamma_n S_n$, hanem az $X_{n-1}^\pi = \beta_n B_{n-1} + \gamma_n S_{n-1}$ azonosság is teljesüljön, $n = 1, \ldots, N$. (X_n^π a vagyonunk értéke az n időpontban.) Mutassa meg, hogy

$$\frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} = \gamma_n \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right), \qquad n = 1, \ldots, N.$$

b.) Mutassa meg az előző eredmények segítségével, hogy ha π önfinanszírozó stratégia, és $\frac{S_n}{B_n}$, $n = 0, 1, \ldots, N$, martingál, akkor $\frac{X_n^\pi}{B_n}$, $n = 0, 1, \ldots, N$, is martingál.

2.) Legyen adva egy diszkrét idejű bináris piac $B = (B_n)$ kötvényekkel, $S = (S_n)$ részvényekkel és N kereskedési időponttal, $\{r_n\}$ kamatlábakkal, $\{a_n\}$, és $\{b_n\}$ együtthatókkal, és $\{p_n\}$ valószínűségekkel, amelyek teljesítik a következő feltételeket.

(a) $r_n > -1$, $-1 < a_n < b_n$ minden $n = 1, \ldots, N$ esetén.

(b) A kötvény árfolyamára teljesül a

$$B_n = (1 + r_n) B_{n-1}, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

egyenlőség.

(c) A részvény $S = \{S_n\}_{n=0}^N$ árfolyama kielégíti az

$$S_n = (1 + \rho_n) S_{n-1}, \qquad n = 1, \ldots, N,$$

egyenlőséget, ahol adva van egy S_0 (determinisztikus) szám, és ρ_n olyan valószínűségi változó, amelyre $\rho_n = a_n$ vagy $\rho_n = b_n$, és $p_n = P(\rho_n = b_n) = 1 - P(\rho_n = a_n)$, $0 < p_n < 1$, $n = 1, \ldots, N$.

Így tudunk tekinteni egy olyan $(\Omega, \mathcal{A}.P)$ valószínűségi mezőt, ahol az előbb definiált S_n, $n = 0, \ldots, N$, részvényárfolyamok definiálva vannak. Ez egyben egy (B, S) diszkrét idejű bináris piac definicióját is jelenti.

(d) Legyen $a_n < r_n < b_n$ minden $1 \leq n \leq N$ indexre.

Feltesszük továbbá, hogy $P(\rho_1 = x_1, \ldots, \rho_N = x_N) > 0$ minden olyan $(x_1, \ldots, x_N)$ sorozatra, amelyre $x_n = a_n$ vagy $x_n = b_n$ minden $1 \leq n \leq N$ indexre.

Definiáljuk a P^* mértéket ugyanazon az $(\Omega, \mathcal{A})$ téren, ahol a diszkrét idejű bináris piacot meghatározó P mértéket definiáltuk ugyanazon $\{r_n\}$ kamatlábak, $\{a_n\}$, és $\{b_n\}$ együtthatók segítségével, csak a $\{p_n\}$ valószínűségeket helyettesítsük a $p_n^* = \frac{r_n - a_n}{b_n - a_n}$, $n = 1, 2, \dots, N$, valószínűségekkel, és legyen

$$P^*(\rho_n = b_n) = 1 - P^*(\rho_n = a_n) = p_n^*, \quad n = 1, \dots, N,$$

valamint legyenek a $\rho_1, \dots, \rho_N$ valószínűségi változók függetlenek a P^* mérték szerint.

Megjegyzem, hogy ez azt jelenti, hogy a P^* mérték azon $(x_1, \dots, x_N)$ sorozatokra van koncentrálva, amelyekre $x_n = a$ vagy $x_n = b_n$, $n = 1, \dots, N$, és

$$P^*(\{(x_1, \dots, x_N)\}) = \prod_{\substack{1 \le n \le N \\ x_n = b_n}} p_n^* \prod_{\substack{1 \le n \le N \\ x_n = a_n}} (1 - p_n^*).$$

Mutassa meg, hogy az így definiált P^* mérték a P valószínűségi mértékkel ekvivalens martingál mérték.

Szorgalmi feladat: Mutassa meg, hogy P^* az egyetlen a P valószínűségi mértékkel ekvivalens martingál mérték.

3.) Legyen adva véges sok $X_1, \dots, X_N$ valószínűségi változó, amelyekre $E|X_j| < \infty$ minden $1 \le n \le N$ indexre. Tudjuk, hogy ha ezek a valószínűségi változók martingált alkotnak, akkor $EX_\tau = EX_0$ minden τ megállási szabályra. (Természetesen feltesszük, hogy $P(\tau \le N) = 1$). Bizonyítsuk be ezen állítás megfordítását, nevezetesen azt, hogy amennyiben $EX_\tau = EX_0$ *minden* τ megállási szabályra, akkor az $X_1, \dots, X_N$ valószínűségi változók martingált alkotnak.

   Segítség. Fogalmazzuk meg a martingál tulajdonságot integrálazonosságok segítségével. Ezután tekintsünk tetszőleges $1 \le n \le N$ indexet és $\mathcal{B}(X_1, \dots, X_n)$ mérhető A halmazt. Vegyük a $\tau_1 \equiv n$ és τ_2 megállási szabályokat, ahol $\tau_2(\omega) = n$, ha $\omega \notin A$ és $\tau_2(\omega) = n+1$, ha $\omega \in A$. Mit tudunk állítani ezen megállási szabályok segítségével?

4.) A következő feladat célja megmutatni, hogy bizonyos esetekben explicit módon ki tudjuk számolni a feltételes eloszást.

   Legyen adva két ξ és η valószínűségi változó, amelyek együttes sűrűségfüggvénye egy $\mu \times \nu$ szorzatmérték szerint az R^2 téren $h(x, y)$, azaz

$$P((\xi, \eta) \in A) = \int_A h(x, y) \mu(\,dx) \nu(\,dy) \text{ minden Borel mérhető } A \subset R^2 \text{ halmazra.}$$

   Ekkor η sűrűségfüggvénye a ν mérték szerint $g(y) = \int_R h(x, y) \mu(\,dx)$, azaz $P(\eta \in B) = \int_B g(y) \nu(\,dy)$ minden $B \subset R$ Borel mérhető halmazra. A ξ valószínűségi változó feltételes sűrűségfüggvénye feltéve az η valószínűségi változó értékét

$$f(x|y) = \frac{h(x, y)}{g(y)},$$

azaz $P(\xi \in C|\eta = y) = \int_C f(x|y)\mu(dx)$ minden $C \in R$ halmazra.

Szorgalmi feladat $E(u(\xi,\eta)|\eta = y) = \int u(x,y)f(x|y)\mu(dx)$, ha $E|u(\xi,\eta)| < \infty$.

5a) Legyen X és Y két valószínűségi változó, amelyekre $EX^2 < \infty$, $EY^2 < \infty$, és legyen $\mathcal{F}$ olyan σ-algebra, amelyre X $\mathcal{F}$ mérhető. Mutassa meg, hogy

$$E(Y^2|\mathcal{F}) = E((Y-X)^2|\mathcal{F}) + 2XE((Y-X)|\mathcal{F}) + X^2.$$

5b) Mutassa meg a fenti azonosság segítségével, hogy ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, martingál, amelyre $EX_n^2 < \infty$ minden n indexre, akkor $(X_n^2, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, szubmartingál.

5c) Mutassa meg, hogy ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, martingál, akkor $(|X_n|, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, vagy $(X_n^+, \mathcal{F}_n)$, $n = 1, 2, \dots$, ahol $X_n^+ = \max(X_n, 0)$ szubmartingál.

Tanultuk, hogy, ha $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots$ olyan martingál (általánosabban olyan szub vagy szupermartingál), amelyre $\sup_n E|X_n| = K$ valamely $K < \infty$ konstanssal, akkor $X_n \to X$ valamely X valószínűségi változóra 1 valószínűséggel. Továbbá $E|X| \le K$. (Lásd Kevei Péter jegyzete 8. oldalán Doob martingál konvergenciatételét.)

Tudjuk továbbá, hogy ha adva van σ-algebrák növekvő

$$\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots$$

sorozata, és egy X, $E|X| < \infty$ valószínűségi változó, akkor az $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots$ változókra az $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots$, sorozat martingál. Arra vagyunk kíváncsiak, hogy melyek azok az $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots$, martingálok, amelyekre létezik az $X = \lim X_n$ limes 1 valószínűséggel, és $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$ minden $n = 0, 1, \dots$ indexre.

6.) Legyen $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots$ olyan martingál, amelyre létezik olyan X, $E|X| < \infty$, valószínűségi változó, amelyre az X_n sorozat L_1 normában konvergál az X változóhoz, azaz $\lim_{n\to\infty} E|X_n - X| = 0$. Mutassa meg, hogy ekkor $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, 2, \dots$, és X $\mathcal{F}_\infty$ mérhető valószínűségi változó , ahol $\mathcal{F}_\infty$ a $\mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, \dots$, σ-algebrák által generált, azaz az őket tartalmazó legszűkebb σ-algebra.

Segítség. Legyen $B \in \mathcal{F}_n$. Ekkor $\int_B X_n\,dP = \int_B X\,dP$, mert

$$\int_B X_n\,dP = \int_B X_N\,dP, \text{ ha } N \ge n, \text{ és } \lim_{N\to\infty} \int_B X_N\,dP = \int_B X\,dP.$$

7.) Legyen $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots$ σ-algebrák növekvő sorozata, $\mathcal{F}_\infty$ az általuk generált σ-algebra. Ha X és Y két $\mathcal{F}_\infty$ mérhető valószínűségi változó, $E|X| < \infty$, $E|Y| < \infty$, $E(X|\mathcal{F}_n) = E(Y|\mathcal{F}_n)$ 1 valószínűséggel minden $n = 0, 1, \dots$ indexre, akkor $X = Y$ 1 valószínűséggel.

Segítség. Legyen $\mu(A) = \int_A (X - Y)\,dP$. Ekkor $\mu(A) = 0$ minden $A \in \mathcal{F}_n$, $n = 0, 1, \dots$, halmazra. Ezután hívatkozzunk a mérték kiterjesztésének egyértelműségére az $\mathcal{F}_\infty$ σ-algebrára.

8.) Legyen $\mathcal{F}_0 \subset \mathcal{F}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_n \subset \cdots$ σ-algebrák növekvő sorozata, és $\mathcal{F}_\infty$ az általuk generált σ-algebra. Legyen X $\mathcal{F}_\infty$ mérhető valószínűségi változó, $E|X| < \infty$, és legyen $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$. Mutassa meg, hogy az X_n sorozat konvergál az L_1 normában és majdnem mindenütt az X valószínűségi változóhoz.

Segítség. Lássuk be, hogy $E|X_n| \le E|X| < \infty$ minden $n = 0, 1, \ldots$ indexre. Továbbá tudjuk, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, martingál. Ezért, a tanultak alapján $X_n \to Y$ majdnem mindenütt valamely Y valószínűségi változóhoz, amelyre $E|Y| \le E|X|$. Továbbá mutassuk meg, hogy mivel $X_n = E(X|\mathcal{F}_n)$, ezért az X_n sorozat L_1 normában is konvergál. Innen, és az előző feladatok eredményeiből következik, hogy $X = Y$. Az L_1 normában való konvergencia bizonyításának érdekében mutassuk meg, hogy $E|X_n|I(|X_n| > K) \le IE|X|I(|X_n| > K) < \varepsilon$ minden $n = 0, 1, \ldots$ indexre és $\varepsilon > 0$ számra, továbbá $E|Y|I(|X_n| > K) < \varepsilon$, ha $K > K(\varepsilon)$, mert a $P(|X_n| > K)$ valószínűség nagyon kicsi nagy $K > 0$ számra. Innen és az $X_n \to Y$ majdnem mindenütt relációból következik az állítás.

9.) Egy igazságos kaszinóban, tétünket duplázva addig játszunk, amig biztosan nem nyerünk egy forintot. Azaz X_n, $n = 1, 2, \ldots$, n időpontbeli nyereményünk a következőképp változik. Legyenek $Y_0, Y_1, \ldots$ független valószínűségi változók, amelyekre $P(Y_n = 1) = P(Y_n = -1) = \frac{1}{2}$, $n = 0, 1, \ldots$, és definiáljuk az $X_1 = Y_0$, $X_{n+1} = X_n + 2^n Y_n I_{\{X_n < 0\}}$, $n = 1, 2, \ldots$, valószínűségi változókat, ahol I_A az A halmaz indikátorfüggvényét jelöli.

Mutassa meg, hogy $(X_n, \mathcal{F}_n)$, ahol $\mathcal{F}_n = \sigma(Y_0, , \ldots, Y_{n-1})$ martingál. $X_n \to 1$ 1 valószínűséggel, ha $n \to \infty$, de az X_n sorozat nem konvergál L_1 normában, ha $n \to \infty$.

10.) Legyen (X, Z) kétdimenziós normális eloszlású véletlen vektor, $EX = 0$, $EZ = 0$. Mutassa meg, hogy $E(X|Z) = \frac{EXZ}{EZ^2} Z$, $E(X^2|Z) = EX^2 - \frac{(EXZ)^2}{EZ^2} + \left(\frac{EXZ}{EZ^2}\right)^2 Z^2$, $E(((X - E(X|Z))^2|Z) = EX^2 - \frac{(EXZ)^2}{EZ^2}$. (Vegyük észre, hogy az utolsó formula, amelyben X feltételes szórásngyzetét számoltuk ki feltéve Z értékét, nem függ Z aktuális értékétől.)

Segítség. Írja az X valószínűségi változót $X = \alpha Y + Z$ alakban alkalmas α konstanssal úgy, hogy Z az Y-tól független normális eloszlású valószínűségi változó.

11.) Legyenek $0 \le t_1 < t_2 < \cdots < t_n$ valós számok. Mutassa meg, hogy létezik olyan $(\zeta_1, \ldots, \zeta_n)$ n-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektor, amelyre $E\zeta_j = 0$, $1 \le j \le n$, $E\zeta_j\zeta_k = \min(t_j, t_k)$, $1 \le j, k \le n$. (Segítség: Konstruálja meg a $\zeta_j - \zeta_{j-1}$ valószínűségi változókat, ahol $\zeta_0 \equiv 0$.)

12.) Legyen $W(t)$, $0 \le t < \infty$, Wiener folyamat. Mutassa meg, hogy minden $a > 0$ számra $\frac{1}{\sqrt{a}} W(at)$, $0 \le t < \infty$, Wiener folyamat. Mutassa meg, hogy $tW(\frac{1}{t})$, $0 < t < \infty$, $W(0) = 0$, Wiener folyamat.

13.) Legyen ξ normális eloszlású valószínűségi változó nulla várható értékkel és σ^2 szórásnégyzettel. Mutassa meg, hogy $Ee^{t\xi} = e^{\sigma^2 t^2/2}$ minden t valós számra. Legyen $W(t)$, $t \ge 0$, (standard) Wiener folyamat. Mutassa meg, hogy $Z(t) = e^{\alpha t W(t) - \alpha^2 t/2}$ sztochasztikus folyamat az $\mathcal{F}_t = \mathcal{B}(W(s),\ s \le t)$ σ-algebrákkal, $t \ge 0$, martingál minden α valós számra.

14.) Láttuk, hogy alkalmazva az Itô formulát az $W(t) = \int_0^t 1\, dW(s)$ kifejezésre ki tudjuk számolni az $\int_0^t W(s)\, dW(s)$ integrált. Bizonyítsuk be hasonló módon, hogy

$$\int_0^t W^2(s)\, dW(s) = \frac{1}{3}W^3(t) - \int_0^t W(s)\, ds,$$

és

$$\int_0^t W^3(s)\, dW(s) = \frac{1}{4}W^4(t) - \frac{3}{2}\int_0^t W^2(s)\, ds.$$

A következő feladat Kevei Péter jegyzetének a 7. példájában tárgyalt exponenciális Brown mozgáshoz, azaz a $dX(t) = \mu X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenlet megoldásához kapcsolódik. Ott az Itô formulát alkalmaztuk az $f(X(t))$ függvényre $f(x) = \log x$ választással, és ez azt adta, hogy a tekintett sztochasztikus differenciálegyenlet megoldása az $X(t) = X(0)\exp\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}$ függvény. A jegyzetben tárgyalt számolás segített megtalálni a megoldást, mégsem tekinthető teljes értékű indoklásnak, mert az Itô formulában az egész számegyenesen definiált kétszer folytonosan differenciálható $f(x)$ függvényt kell választani, az $f(x) = \log x$ függvény pedig nem ilyen, sőt nem is egészíthető ki ilyen függvénnyé. Megjegyzem, hogy ez a probléma azzal függ össze, hogy a nem az origóból kiinduló exponenciális Brown mozgás, mint a rá adott megoldás mutatja, nem veszi fel soha a nulla értéket, de ezt közvetlenül nem látjuk.

15a.) Bizonyítsa be az Itô formula segítségével, hogy az

$$X(t) = \exp\{U(t)\} = \exp\left\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\right\}$$

sztochasztikus folyamat, ahol $U(t) = \sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t$ kielégíti a $dX(t) = \mu X(t)\, dt + \sigma X(t)\, dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletet az $X(0) = 1$ határfeltétellel.

15b.) Az előbb definiált $X(t)$ és $U(t)$ folyamatokra

$$d\left(\frac{1}{X(t)}\right) = \frac{1}{X(t)}[(\sigma^2 - \mu)\, dt - \sigma dW(t)].$$

15c.) Legyen $Z(t)$ megoldása a $dZ(t) = \mu Z(t)\, dt + \sigma Z(t)\, dW(t)$ sztochasztikus differenciálegyenletnek. Mutassa meg, hogy

$$d\left(\frac{1}{X(t)}Z(t)\right) = \frac{dZ(t)}{X(t)} + Z(t)d\left(\frac{1}{X(t)}\right) - \sigma^2\frac{Z(t)}{X(t)}\, dt = 0,$$

ezért $Z(t) = Z(0)\exp\{\sigma W(t) + (\mu - \frac{\sigma^2}{2})t\}$.