Kiegészítés a Pénzügyi Matematika jegyzethez

Tárgyalom néhány eredmény bizonyítását Gál József és Pap Gyula Pénzügyi Matematika jegyzetében. Olyan eredményeket tárgyalok, amelyek bizonyítása további tárgyalást érdemel, mert vagy nem hibátlan a bizonyítás vagy a jobb megértés érdekében érdemes a háttérben levő gondolatokat jobban elmagyarázni. Nem fogom a jelöléseket teljesen kidolgozni, inkább arra koncentrálok, hogy elmagyarázzak néhány a könyvben nem szereplő hasznos gondolatot.

Az első tárgyalandó téma a 9.1.2 lemma bizonyítása. Ez az eredmény azt állítja, hogy ha létezik olyan $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, önfinanszírozó stratégia, amelyre $X_0^\pi \equiv 0$, $P(X_N^\pi \ge 0) = 1$ és $P(X_N^\pi > 0) > 0$, akkor létezik arbitrázs stratégia is, azaz olyan önfinanszírozó stratégia, amelyre $X_0^\pi \equiv 1$, $P(X_n^\pi \ge 0) = 1$ minden $0 \le n \le N$ indexre és $P(X_N^\pi > 0) > 0$.

A könyv bizonyításában tekintenek olyan π stratégiát, amely teljesíti az $X_0^\pi \equiv 0$, $P(X_N^\pi \ge 0) = 1$ és $P(X_N^\pi > 0) > 0$ feltételt, és amennyiben ez nem teljesíti az erősebb $X_0^\pi \equiv 0$, $P(X_n^\pi \ge 0) = 1$ minden $0 \le n \le N$ indexre és $P(X_N^\pi > 0) > 0$ feltételt, akkor igyekeznek a tekintett stratégia módosításával olyan stratégiát konstruálni, amelyik ezt a feltételt is teljesíti. A konstrukció során azonban figyelmen kívül hagyják, hogy a π stratégiában szereplő β_n és γ_n mennyiségeknek bizonyos mérhetőségi feltételeket is teljesíteniük kell. Ezért a könyv bizonyítását módosítani kell.

Olyan módosítást javaslok, amelyben nem egy stratégiát, hanem stratégiák egy sorozatát definiáljuk, és azt állítom, hogy e stratégia sorozat tartalmaz egy a kívánt feltételeket teljesítő stratégiát is. Jelöljük a kiinduló π stratégiát $\pi^{(1)}$-gyel, és definiáljuk önfinanszírozó stratégiák egy $\pi^{(k)}$, $1 \le k \le N$, sorozatát. Az a célunk, hogy olyan sorozatot definiáljunk, amelyben, ha valamelyik $\pi^{(k)}$ stratégia nyereséges ugyan abban az értelemben, hogy $X_0^\pi \equiv 0$, $P(X_N^{\pi^{(k)}} \ge 0) = 1$ és $P(X_N^{\pi^{(k)}} > 0) > 0$, de létezik pozitív valószínűséggel olyan veszteséges véletlen $n^{(k)}(\omega)$ időpont, amelyben $X_{n^{(k)}(\omega)}^{\pi^{(k)}}(\omega) < 0$, akkor a $k+1$-ik $\pi^{(k+1)}$ stratégia szintén nyereséges, és bár nem tudjuk kizárni veszteséges időpontok létezését, de ezek csak később jelenhetnek meg. Így, ha a kiinduló stratégia nem jó, akkor annak javítása már jobb. Ha az sem jó, akkor vesszük ennek javítását, és ezen javítások során az egyik lépésben arbitrázs stratégiát kapunk.

A következő szukcesszív módszerrel definiáljuk a $\pi^{(k)}$, $1 \le k \le N$, stratégiákat. Legyen $\pi^{(1)} = \pi$, és ha a $\pi^{(k)}$ stratégia már definiálva van, akkor a $\pi^{(k+1)}$ stratégiát a következő módon definiáljuk. Legyen $n_k(\omega)$ az a legkisebb n index, amelyre $X_n^{\pi^{(k)}}(\omega) < 0$, azaz $X_m^{\pi^{(k)}}(\omega) \ge 0$, ha $m < n_k(\omega)$, és $X_{n_k(\omega)}^{\pi^{(k)}}(\omega) < 0$. Ekkor legyen $\beta_m^{(k+1)}(\omega) = \gamma_m^{(k+1)}(\omega) = 0$, ha $m \le n(\omega)$, és $\gamma_m^{(k+1)}(\omega) = \gamma_m^{(k)}(\omega)$, $\beta_m^{(k+1)}(\omega) = \beta_m^{(k)}(\omega) - \frac{X_{n_k(\omega)}^{\pi^{(k)}}(\omega)}{B_{n_k(\omega)}}$, ha $m > n_k(\omega)$. Ha $X_n^{\pi^{(k)}}(\omega) \ge 0$ minden $0 \le n \le N$ indexre, akkor legyen $\beta_n^{\pi^{(k+1)}}(\omega) = \gamma_n^{\pi^{(k+1)}}(\omega) = 0$ minden $0 \le n \le N$ indexre.

Be lehet látni, hogy az ilyen módon önfinanszírozó $\pi^{(k)}$, $1 \le k \le N$, stratégiákat definiáltunk. Ha $\pi^{(1)}$ arbitrázs, akkor megtaláltuk a kívánt stratégiát, ha nem az, akkor $\pi^{(2)}$ olyan stratégia, amelyre $X_0^{\pi^{(2)}} \equiv 0$, továbbá $P(X_N^{(\pi^{(2)})} \ge 0) = 1$ és $P(X_N^{(\pi^{(2)})} > 0) > 0$, és azon $n_2(\omega)$ időpontra, amelyre az $X_{n_2(\omega)}^{\pi^{(2)}}(\omega) < 0$ esemény először következik be $n_2(\omega) \ge n_1(\omega) + 1$. Hasonlóan definiálva az $n_k(\omega)$ időpontot minden $1 \le k \le N$ indexre, mint azt a legkisebb számot, amelyre $X_{n_k(\omega)}^{\pi^{(k)}}(\omega) < 0$ azt kapjuk, hogy ha a $\pi^{(j)}$, $1 \le j \le k$ stratégiák egyike sem arbitrázs, akkor $X_0^{\pi^{(j)}} \equiv 0$, $P(X_N^{(\pi^{(j)})} \ge 0) = 1$ és $P(X_N^{(\pi^{(j)})} > 0) > 0$ minden $1 \le j \le k+1$ indexre. Továbbá $n_{j+1}(\omega) \ge n_j(\omega) + 1$ minden $1 \le j \le k$ indexre. Innen következik, hogy valamelyik k indexre $\pi^{(k)}$ arbitrázs stratégia.

A következő részben a 9.2.1 tétel bizonyítását ismertetem. Ez az eredmény arról szól, hogy egy d.i.-$(B,S)_N$ piac akkor és csak akkor zárja ki az arbitrázs lehetőségét, ha létezik a piac definiciójában szereplő $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mezőn a P valószínűségi mértékkel ekvivalens P^* (valószínűségi) martingál mérték. Egy P^* valószínűségi mértéket akkor nevezünk martingál mértéknek, ha a piac definiciójában szereplő $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, valószínűségi mezőn a P mértéket kicserélve erre a P^* mértékre az $(\frac{S_n}{B_n}, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, \dots, N$, sorozat martingál a P^* mérték szerint. A 9.2.1 tétel bizonyításának jobb megértése érdekében érdemes felidézni a 9.1.7 lemmát, amely szerint, ha $(\frac{S_n}{B_n}, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$, martingál a (P^* mérték szerint), akkor tetszőleges π önfinanszírozó stratégia esetén az $(\frac{X_n^\pi}{B_n}, \mathcal{F}_n)$, $n = 0, 1, \dots, N$ sorozat is martingál a (P^* mérték szerint).

Annak bizonyítása, hogy egy P^* ekvivalens martingál mérték létezése kizárja az arbitrázst viszonylag egyszerű. Ekkor ugyanis véve egy tetszőleges π önfinanszírozó stratégiát, amelyre $X_0^\pi = 0$ azt kapjuk, hogy $E^* X_N^\pi = 0$, (ahol a P^* valószínűségi mérték szerint vettük az E^* várható értéket), ezért $P^*(X_N^\pi \geq 0) = 1$ és $P^*(X_N^\pi > 0) > 0$ egyszerre nem lehetséges. De akkor nem lehetséges az sem, hogy $P(X_N^\pi \geq 0) = 1$ és $P(X_N^\pi > 0) > 0$ egyszerre a P^* és P mértékek ekvivalenciája miatt. Ez a 9.1.2 tétel alapján azt jelenti, hogy ebben az esetben nincs arbitrázs.

A másik irányú állítás, tehát annak a bizonyítása, hogy ha nincs arbitrázs akkor létezik ekvivalens martingál mérték nehezebb, mert ekkor meg kell konstruálni egy P^* ekvivalens martingál mértéket. Annak érdekében, hogy ezt megtehessük tegyük előbb a következő észrevételeket.

A vizsgált modellben az $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ valószínűségi mező elemi eseményei az $\omega = (S_0, \dots, S_N)$ alakú sorozatok, ahol S_n, $0 \leq n \leq N$, a részvények ára az n időpontban. Továbbá $P(\omega) = P(S_0, \dots, S_N) > 0$ minden ω elemi eseményre, és az $S_n(\omega)$ valószínűségi változókat az $S_n(\omega) = S_n$, $0 \leq n \leq N$, képlet segítségével definiáljuk. A valószínűségi mező véges sok elemi eseményt tartalmaz, legyen ezek száma k, és jelöljük $\omega_1, \dots, \omega_k$-val az elemi eseményeket. Ekkor a valószínűségi mezőn definált függvények tekinthetők úgy, mint az k-dimenziós Euklideszi téren definiált $\xi = (\xi(\omega_1), \dots, \xi(\omega_k))$ alakú függvények tere. Tekintsük a valószínűségi mezőn definiált függvények terén ható lineáris funkcionálokat. Ezek egyszerűen leírhatók, és ezek a lineáris funkcionálok érdekesek lesznek számunkra. Nevezetesen, minden lineáris funkcionál ezen a téren megadható egy $(q_1, \dots, q_k)$ sorozattal, úgy, hogy adva egy $\ell(\cdot)$ funkcionál ezen a téren $\ell(\xi) = \sum_{j=1}^{k} q_j \xi(\omega_j)$ minden $\xi = (\xi(\omega_1), \dots, \xi(\omega_k))$ függvényre.

Ez azt jelenti, hogy minden lineáris funkcionál a valószínűségi mezőn definiált függvények terén azonosítható egy $Q = (q_1, \dots, q_k)$ előjeles mértékkel a valószínűségi mezőn a következő képlet segítségével: $Q(\omega_j) = q_j$ minden $1 \leq j \leq k$ indexre. Ez a Q előjeles mérték akkor és csak akkor nem-negatív, ha $q_j \geq 0$ minden $1 \leq j \leq k$ indexre, és akkor ekvivalens is ezen kívül a P mértékkel, ha a szigorúbb $q_j > 0$, $1 \leq j \leq k$, egyenlőtlenség is teljesül. Ekkor alkalmas konstanssal megszorozva a funkcionált egy a P mértékkel ekvivalens valószínűségi mértéket kapunk. Célunk olyan lineáris funkcionál konstrukciója a valószínűségi mezőn definiált függvények terén, amely egy a P mértékkel ekvivalens martingál mértéket határoz meg.

Ennek érdekében először definiáljuk a következő két a valószínűségi mezőn definiált függvényeket tartalmazó halmazt.

$$\mathcal{V}_0 = \{\xi\colon\ \Omega \to R |\ \text{létezik olyan } \pi \text{ önfinanszírozó stratégia} \\ \text{amelyre } X_\pi^0 = 0 \text{ és } X_N^\pi = \xi\}, \tag{1}$$

$$\mathcal{V}_1 = \{\xi\colon\ \Omega \to R|\ \xi \ge 0 \text{ és } E\xi = 1\}. \tag{2}$$

A konvex analízis egyik klasszikus tétele szerint, mivel $\mathcal{V}_1$ konvex, kompakt halmaz, $\mathcal{V}_0$ az Ω halmazon definiált függvények lineáris altere, és $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1 = \emptyset$, ha nincs arbitrázs mérték, ezért létezik olyan ℓ lineáris funkcionál az Ω halmazon definiált függvények terén, amelyre $\ell(\xi) = 0$ minden $\xi \in \mathcal{V}_0$ és $\ell(\xi) > 0$ minden $\xi \in \mathcal{V}_1$ függvényre. E jegyzet kiegészítésében ismertetem ezt az eredményt és annak bizonyítását.

(Az, hogy $\mathcal{V}_1$ konvex, kompakt halmaz, és $\mathcal{V}_0$ lineáris altér könnyen látható. A $\mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1 = \emptyset$ reláció azért igaz, mert ha létezne $\xi \in \mathcal{V}_0 \cap \mathcal{V}_1$ függvény, akkor lenne olyan π önfinanszírozó stratégia, amelyre $X_0^\pi = 0$, $X_N^\pi = \xi$ és mivel $\xi \in \mathcal{V}_1$, $P(\xi = X_N^\pi \ge 0) = 1$, $P(\xi = X_N^\pi > 0) > 0$, amiből következik, hogy létezik arbitrázs stratégia.) Azt állítom, hogy egy ilyen ℓ líneáris funkcionál alkalmas konstansszorosa a P mértékkel ekvivalens P^* martingál mértéket határoz meg.

Abból, hogy $\ell(\xi) > 0$ minden $\xi \in \mathcal{V}_1$ függvényre következik, hogy az ℓ funkcionált meghatározó $q_1, \dots, q_k$ konstansok mindegyikére $q_j > 0$. Valóban véve valamelyik $1 \le j \le k$ indexet és definiálva azt a ξ_j függvényt, amelyre $\xi_j(\omega_j) = \frac{1}{P(\omega_j)}$, és $\xi_j(\omega_l) = 0$, ha $l \ne j$, azt kapjuk, hogy $\xi_j \ge 0$, és $E\xi_j = 1$, ezért $\xi_j \in \mathcal{V}_1$, tehát $\ell(\xi_j) = \frac{q_j}{P(\omega_j)} > 0$. Ez azt jelenti, hogy az ℓ lineáris operátort megszorozva alkalmas konstanssal egy a P valószínűségi mértékkel ekvivalens P^* mértéket kapunk.

Továbbá, mivel az ℓ funkcionál értéke nullával egyenlő a $\mathcal{V}_0$ altéren azt is tudjuk, hogy $E^* X_N^\pi = 0$ minden olyan π önfinanszírozó stratégiára, amelyre $X_0^\pi = 0$. Azt állítom, hogy ebből következik, hogy P^* martingál mérték. Jegyezzük meg, hogy ha P^* martingál mérték, akkor a 9.1.7 Lemma alapján teljesül az $E^* X_N^\pi = 0$ azonosság minden olyan önfinanszírozó π stratégiára, amelyre $X_0^\pi = 0$. Azt állítom tehát, hogy ez a tulajdonság nemcsak szükséges, hanem elégséges feltétele is annak, hogy P^* martingál mérték legyen.

Azt kell belátni, hogy ezen feltételek teljesülése esetén $\frac{S_n}{B_n}$, $0 \le n \le N$, martingál a P^* valószínűségi mérték szerint. Felhasználva a jegyzet Appendixében szereplő A.2.30 Állítást elég belátni azt, hogy tetszőleges $\tau\colon\ \Omega \to \{0, \dots, N\}$ megállási idő esetén

$$E^* \left(\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0} \right) = 0. \tag{3}$$

Ezt az azonosságot úgy látjuk be, hogy minden $\tau\colon\ \Omega \to \{0, \dots, N\}$ megállási idő esetén konstruálunk olyan $\pi = \pi_\tau$ önfinanszírozó stratégiát, amelyre

$EX_0^\pi = 0$, és az $E^*X_N^\pi = 0$ azonosság ekvivalens a (3) relációval ezzel a τ megállási szabállyal.

A következő módon konstruáljuk ezt a π önfinanszirozó stratégiát. Legyen a nulla időpontban 1 részvényünk és $-\frac{S_0}{B_0}$ kötvényünk. Ekkor $X_0^\pi = 0$. Várjunk a τ időpontig, akkor adjuk el a részvényünket, és a kapott pénzen vegyünk kötvényt. Ez azt jelenti, hogy az $n \le \tau$ időpontokban 1 részvényünk és $-\frac{S_0}{B_0}$ kötvényünk van, míg a $\tau < n \le N$ időpontokban nulla részvényünk és $\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0}$ kötvényünk van. Képletben kifejezve olyan $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$, $0 \le n \le N$, stratégiát követünk, amelyben

$$\beta_n = \frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{n>\tau\}} - \frac{S_0}{B_0}, \quad \gamma_n = I_{\{n\le\tau\}}.$$

Nem nehéz belátni, hogy ez a π stratégia önfinanszírozó, és mivel $X_0^\pi = 0$, ezért $X_n^\pi \in \mathcal{V}_0$. Így $\ell(X_N^\pi) = 0$, és $E^*X_N^\pi = 0$. Ez azt jelenti, hogy

$$\begin{aligned} 0 = E^*X_N^\pi &= E^*(\beta_N B_N + \gamma_N S_N) \\ &= E^*\left(\left(\frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{N>\tau\}} - \frac{S_0}{B_0}\right) B_N + I_{\{\tau=N\}} S_N\right). \end{aligned}$$

Mivel $I_{\{\tau=N\}} S_N = \frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{\tau=N\}} B_N$, ezért a fenti azonosság alapján

$$0 = E^*\left(\left(\frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{N>\tau\}} - \frac{S_0}{B_0}\right) B_N + \frac{S_\tau}{B_\tau} I_{\{\tau=N\}} B_N\right) = B_N E^*\left(\frac{S_\tau}{B_\tau} - \frac{S_0}{B_0}\right).$$

Innen következik a (3) reláció, és a 9.2.1 tételt bebizonyítottuk.

Végül a 10.1.5 Tétel bizonyítását tárgyalom. Ezen eredmény megfogalmazása előtt a könyv bevezeti a piac teljességének a fogalmát. Akkor mondjuk, hogy egy piac teljes, ha minden a piacot definiáló $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn definiált ξ valószínűségi változóhoz létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, amelyikre $X_N^\pi = \xi$. A 10.1.5 tétel első fele azzal a kérdéssel foglalkozik, hogy egy arbitrázs mentes piac mikor teljes. A 8.2.1 Tétel alapján tudjuk, hogy egy piac akkor és csak akkor arbitrázs mentes, ha létezik rajta egy a P mértékkel ekvivalens P^* martingál mérték. A teljesség jellemzését ezen P^* ekvivalens martingál mérték segítségével adjuk meg. A 10.1.5 Tétel első állítása, amelyet a könyv ismertetésében 10.1.5.A Tétel alakban fogalmaztam meg, azt állítja, hogy egy arbitrázs mentes piac akkor és csak akkor teljes, ha egyetlen a P mértékkel ekvivalens martingál mérték létezik rajta. Először ennek az állításnak a bizonyítását ismertetem.

A bizonyítások ismertetése előtt megjegyzem, hogy azok kihasználják a következő két tényt. Ha adva van σ-algebrák $\mathcal{F}_0 \subset \cdots \subset \mathcal{F}_N \subset \mathcal{A}$ sorozata és egy M $\mathcal{F}_N$ mérhető valószínűségi változó egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, akkor létezik egyetlen olyan N elemű $(M_0, \mathcal{F}_0)$, $(M_1, \mathcal{F}_1)$,..., $(M_N, \mathcal{F}_N)$ martingál az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyre $M_N = M$. Nevezetesen e martingál elemeit a következő képlet határozza meg: $M_n = E(M_N|\mathcal{F}_n)$ minden $0 \le n \le N$ indexre. Egy másik eredmény, nevezetesen a 9.1.7 Lemma szerint, ha P^* a P mértékkel ekvivalens martingál mérték egy piacon, és π önfinanszírozó stratégia, akkor az $\frac{B_0}{B_n} X_n^\pi$, $0 \le n \le N$, sorozat martingál a P^* mérték szerint.

Annak bizonyítása, hogy egy teljes piacon nem lehet két különböző ekvivalens martingál mérték viszonylag egyszerű. Azt kell belátni, hogy ha P^* és P^{**} két a P mértékkel ekvivalens martingál mérték, és A tetszőleges mérhető halmaz a piacot meghatározó valószínűségi mezőn, akkor $P^*(A) = P^{**}(A)$. Innen ugyanis következik, hogy$P^* = P^{**}$.

Viszont a piac teljessége miatt tudjuk, hogy létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, amelyre $\frac{B_0}{B_N} X_N^\pi = I_A$. Kihasználva, hogy $\frac{B_0}{B_n} X_n^\pi$, $0 \le n \le N$, martingál mind a P^* mind a P^{**} mérték szerint, felírhatjuk, hogy $P^*(A) = E^* I_A = E^* \frac{B_0}{B_N} X_N^\pi = E^* X_0^\pi = X_0^\pi$, és $P^{**}(A) = E^{**} I_A = E^{**} \frac{B_0}{B_N} X_N^\pi = E^{**} X_0^\pi = X_0^\pi$. Ezért $P^*(A) = P^{**}(A)$. (A fenti számolásban felhasználtuk, hogy P^* és P^{**} a P mértékkel ekvivalens mértékek. Ebből következik ugyanis, hogy a X_0^π valószínűségi változó, amely 1 valószínűséggel konstans a P mérték szerint 1 valószínűséggel egyenlő ugyanezzel a konstanssal a P^* és P^{**} mértékek szerint is.)

A következő lépésben azt bizonyítjuk be, hogy ha a piacon egyetlen a P valószínűségi mértékkel ekvivalens P^* martingál mérték létezik, akkor a piac teljes. Ennek érdekében először a következő állítást bizonyítjuk be.

Vezessük be a következő $\mathcal{V}_2$ halmazt az ω téren definiált függvények terén:

$$\mathcal{V}_2 = \{\xi\colon\ \Omega \to R|\ E^*\xi = 0\}.$$

Azt állítom, hogy adott feltétel teljesülése esetén $\mathcal{V}_2 = \mathcal{V}_0$, ahol a a $\mathcal{V}_0$ halmazt az (1) formulában definiáltuk. Az, hogy $\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_2$ következik a 9.17 lemmából. Azt fogom bebizonyítani, hogy ha $\mathcal{V}_2 \ne \mathcal{V}_0$, akkor létezik $R \ne P^*$ a P mértékkel ekvivalens martingál mérték.

Ehhez azt kell megmutatni a 9.2.1 Tétel bizonyításában igazolt állítások alapján, hogy ha a P^* martingál mértéket a $P^*(\omega_j) = q_j$, $1 \le j \le k$, formulák határozzűk meg, akkor létezik olyan $r = (r_1, \dots, r_k)$ vektor, amelyre $\langle r, \xi(\omega)\rangle = \sum_{j=1}^k r_j \xi(\omega_j) = 0$ minden $\xi \in \mathcal{V}_0$ vektorra, $r_j > 0$ minden

$1 \le j \le k$ indexre, és a $q = (q_1, \dots, q_k)$ és $r = (r_1, \dots, r_k)$ vektorok nem párhuzamosak, azaz nem létezik olyan c konstans, amelyre $r_j = cq_j$ minden $1 \le j \le k$ indexre.

Vegyük észre, hogy abból, hogy $\mathcal{V}_2 \neq \mathcal{V}_0$, következik, hogy létezik olyan $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathcal{V}_2$ vektor, amely merőleges $\mathcal{V}_0$ altérre, azaz $\langle z, \xi(\omega) \rangle = \sum_{j=1}^{k} z_j \xi(\omega_j) = 0$, ha $\xi = (\xi(\omega_1), \dots, \xi(\omega_k)) \in \mathcal{V}_0$.

Legyen $\varepsilon > 0$ egy elég kicsi szám, $r_j = q_j + \varepsilon z_j$ minden $1 \le j \le k$ indexre, és legyen $r = (r_1, \dots, r_k)$. Ekkor $r_j > 0$, mert $q_j > 0$, és az $\varepsilon > 0$ együttható elég kicsi minden $1 \le j \le k$ indexre, $\langle r, \xi(\omega) \rangle = \langle q, \xi(\omega) \rangle + \varepsilon \langle z, \xi(\omega) \rangle = 0$, ha $\xi(\omega) \in \mathcal{V}_0$. Az r és q vektorok nem párhuzamosak, mert $\langle q, z \rangle = 0$, azaz q és z merőleges vektorok. Az utolsó azonosság azért igaz, mert $\langle q, \xi \rangle = E^*\xi = 0$ minden $\xi \in \mathcal{V}_2$ vektorra, és $z \in \mathcal{V}_2$. Ez azt jelenti, hogy az $r = (r_1, \dots, r_k)$ vektor teljesíti a kívánt tulajdonságokat, ezért $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_2$ feltételeink teljesülése esetén.

A $\mathcal{V}_0 = \mathcal{V}_2$ azonosság segítségével könnyen beláthatjuk a piac teljességét. Ebből az azonosságból következik, hogy minden olyan valószínűségi η változóra, amelyre $E^*\eta = 0$, létezik olyan π önfinanszírozó stratégia, amelyre $X_N^\pi = \eta$. Másrészt egy $\zeta \equiv c$ konstans valószínűségi változóhoz definiálhatunk egy triviális önfinanszírozó stratégiát a $\pi^0 = (\beta_n^0, \gamma_n^0)$, $\beta_n = \frac{c}{B_N}$, $\gamma_n = 0$ minden $0 \le n \le N$ indexre képletek segítségével, és erre a stratégiára $X_N^{\pi^0} \equiv c$. Mivel tetszőleges valószínűségi változót felírhatunk $\xi = \eta + c$ alakban, ahol $\eta = \xi - E^*\xi$, ezért $E\eta = 0$, és $c = E^*\xi$, innen következik $\xi = X_N^{\pi'}$ a $\pi' = \pi + \pi^0$ önfinanszírozó stratégiával, ahol $\eta = X_N^\pi$, $E^*\xi = X_N^{\pi^0}$, alkalmas π és π^0 önfinanszírozó stratégiákkal.

Tárgyalom a 10.1.5 Tétel második felének a bizonyítását is, amelyet a könyv ismertetésében 10.1.5.B Tétel néven fogalmaztam meg. Ez az ismertetéstől kissé eltérő megfogalmazásban a következőt mondja.

10.1.5.B Tétel. *Tekintsünk egy arbitrázs mentes piacot egy a P valószínűségi mértékkel ekvivalens P^* martingál mértékkel. Ekkor az az állítás, hogy a piac teljes ekvivalens az alábbi (A) állítással.*

(A) Tetszőleges $(M_n, \mathcal{F}_n, P^*)_{0 \le n \le N}$ martingál előállítható

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \left(\frac{S_k}{B_k} - \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}} \right), \quad n = 1, \dots, N, \tag{4}$$

alakban, ahol a γ_n-ek $\mathcal{F}_{n-1}$-mérhető valószínűségi változók, $(n = 1, \dots, N)$.

Lássuk be először azt, hogy a teljességből következik a a (4) formula.

Legyen adva egy $M_0, \dots, M_N$ martingál, és vegyünk olyan $\pi = (\beta_n, \gamma_n)$, $n = 0, \dots, N$, önfinanszírozó stratégiát, amelyre $M_N = \frac{X_N^\pi}{B_N}$. Mivel mind az M_n, $n = 0, 1, \dots, N$, mind az $\frac{X^\pi}{B_n}$, $n = 0, 1, \dots, N$, sorozat martingál, innen következik, hogy

$$M_n = E^*(M_N | \mathcal{F}_n) = E^* \left(\frac{X_N^\pi}{B_N} \middle| \mathcal{F}_n \right) = \frac{X_n}{B_n}$$

minden $n = 0, 1, \dots, N$ indexre, ahonnan $M_n - M_{n-1} = \frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}}$, $n = 1, 2, \dots, N$. Mivel π önfinanszírozó stratégia, ezért bizonyos algabrai összefüggéseket írhatunk fel a $\frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}}$ kifejezés kiszámolásánál. Nevezetesen, mivel $X_n^\pi = \beta_n^\pi B_n + \gamma_n^\pi S_n$, és $X_{n-1}^\pi = \beta_n^\pi B_{n-1} + \gamma_n^\pi S_{n-1}$ az önfinanszírozó tulajdonság miatt, ezért

$$\begin{aligned} M_n - M_{n-1} &= \frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} = \frac{\beta_n^\pi B_n + \gamma_n^\pi S_n}{B_n} - \frac{\beta_n^\pi B_{n-1} + \gamma_n^\pi S_{n-1}}{B_{n-1}} \\ &= \gamma_n^\pi \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right) \end{aligned}$$

minden $n = 1, 2, \dots$ indexre, ahonnan

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k^\pi \left(\frac{S_k}{B_k} - \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}} \right).$$

Ez azt jelenti, hogy a (4) formula érvényes.

Megmutatjuk, hogy az (A) tulajdonságból következik, hogy a piac teljes.

Adva egy ξ valószínűségi változó, tekintsük azt az $M_0, \dots, M_N$ martingált, amelyre $M_N = \frac{\xi}{B_N}$. Ekkor $M_n = E^* \left(\frac{\xi}{B_N} \middle| \mathcal{F}_n \right)$ minden $n = 0, 1, \dots, N$ indexre. Tudjuk, hogy minden π önfinanszírozó stratégiára az $\frac{X_n^\pi}{B_n}$, $n = 0, 1, \dots, N$, sorozat martingál a P^* mérték szerint. Olyan π önfinanszírozó stratégiát keresünk, amelyre $X_N^\pi = \xi$, azaz $\frac{X_N^\pi}{B_N} = M_N$. Ez viszont csak úgy lehetséges, ha $\frac{X_n^\pi}{B_n} = M_n$ minden $n = 0, 1, \dots, N$ indexre. Felhasználjuk, hogy az M_n, $n = 1, 2, \dots, N$, martingál elemei a (4) formula alapján

$$M_n = M_0 + \sum_{k=1}^n \gamma_k \left(\frac{S_k}{B_k} - \frac{S_{k-1}}{B_{k-1}} \right), \quad n = 1, \dots, N,$$

alakban írhatóak γ_k $\mathcal{F}_{k-1}$ mérhető valószínűségi változókkal.

A keresett $\pi = (\beta_n^\pi, \gamma_n^\pi)$, $n = 0.1, \ldots, N$ önfinanszírozó stratégiát úgy kell választani, hogy $M_n - M_{n-1} = \gamma_n \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right) = \frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n=1}}$. Viszont az előző részben végrehajtott számításokban megmutattuk, hogy

$$\frac{X_n^\pi}{B_n} - \frac{X_{n-1}^\pi}{B_{n-1}} = \gamma_n^\pi \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right),$$

ezért ez csak úgy lehetséges, ha $\gamma_n^\pi = \gamma_n$ minden $n = 1, 2, \ldots, N$ indexre. Annak érdekében, hogy biztosítsuk az $M_n = \frac{X_n^\pi}{B_n}$ azonosságot minden $n = 0, 1, \ldots, N$ indexre definiáljuk a $\pi = (\beta_n^\pi, \gamma_n^\pi)$, $n = 0, 1, \ldots, N$, stratégiát a következő módon.

$$\beta_0^\pi = M_0,\ \gamma_0^\pi = 0, \quad \text{ és } \beta_n^\pi = M_n - \gamma_n \frac{S_n}{B_n},\ \gamma_n^\pi = \gamma_n, \text{ ha } 1 \le n \le N.$$

Vegyük észre, hogy

$$\beta_n^\pi = M_{n-1} + (M_n - M_{n-1}) - \gamma_n \frac{S_n}{B_n} = M_{n-1} - \gamma_n \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}},$$

mivel $M_n - M_{n-1} = \gamma_n \left(\frac{S_n}{B_n} - \frac{S_{n-1}}{B_{n-1}} \right)$ a (4) feltétel szerint, ezért a $\beta_n^\pi \in \mathcal{F}_{n-1}$ reláció is teljesül. Tudjuk, hogy $X_N^\pi = B_N M_N = \xi$, ezért a kívánt állítás bizonyításához azt kell még megmutatni, hogy a π stratégia önfinanszírozó. Ezt úgy látjuk be, hogy ellenőrizzük a $B_{n-1}\Delta\beta_n^\pi + S_{n-1}\Delta\gamma_n^\pi = 0$ azonosságot.

$$\begin{aligned}
B_{n-1}\Delta\beta_n^\pi + S_{n-1}\Delta\gamma_n^\pi &= B_{n-1}\left(\Delta M_n - \Delta\left(\gamma_n \frac{S_n}{B_n}\right)\right) + S_{n-1}\Delta\gamma_n \\
&= B_{n-1}\left(\gamma_n \Delta\left(\frac{S_n}{B_n}\right) - \Delta\left(\gamma_n \frac{S_n}{B_n}\right)\right) + S_{n-1}\Delta\gamma_n \\
&= -B_{n-1}\frac{S_{n-1}}{B_{n-1}}\Delta\gamma_n + S_{n-1}\Delta\gamma_n = 0.
\end{aligned}$$

A kívánt állítást beláttuk.

Kiegészítés

Belátjuk a konvex analízisnek a 9.2.1 Tétel bizonyításában felhasznált eredményét. Ez a következőt mondja.

Tétel. *Legyen adva az R^k Euklideszi téren valamely $k \ge 1$ számmal egy konvex kompakt $K \subset R^k$ halmaz, és az R^k tér valamely L lináris altere, amelyekre $K \cap L = \emptyset$. Ekkor el tudjuk választani a K halmazt és az L lineáris alteret egy az R^k téren definiált lineáris funkcionál segítségével a következő értelemben. Létezik olyan $\varphi(\cdot)$ lineáris funkcionál az R^k téren, és $c > 0$ szám, amelyekre $\varphi(x) = 0$ minden $x \in L$ pontban, és $\varphi(x) \ge c$ minden $x \in K$ pontban.*

A Tétel bizonyítása az alábbi lemma eredményén alapul.

Lemma. *Legyen C konvex, zárt halmaz az R^k Euklideszi téren, amely nem tartalmazza az origót. Akkor létezik olyan φ lineáris funkcionál az R^k téren, és olyan $c > 0$ szám, amelyekre $\varphi(x) \ge c$ minden $x \in C$ pontban.*

A Lemma bizonyítása. Először azt látjuk be, hogy az $\{|x|\colon\ x \in C\}$ számok halmazának van (pozitív) minimuma, ahol $|x|$ az x vektor hosszát jelöli az Euklideszi norma szerint. Valóban, a $C_r = C \cap \{x\colon\ |x| \le r\}$ halmaz nem üres kompakt halmaz elég nagy $r > 0$ számra, ezért az $|x|$ folytonos függvény felveszi a minumuát valamely $z \in C_r$ pontban a C_r halmazon. De nem nehéz belátni, hogy a $|z| = \min\{|x|\colon\ x \in C\}$ reláció is teljesül.

Mivel a C halmaz konvexitása miatt $\lambda x + (1-\lambda)z \in C$ minden $x \in C$ pontra és $0 \le \lambda \le 1$ számra, ezért

$$|\lambda x + (1-\lambda)z|^2 \ge |z|^2,$$

vagy ami ezzel ekvivalens

$$\lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda(1-\lambda)\langle x, z\rangle + (1-\lambda)^2\langle z, z\rangle \ge \langle z, z\rangle$$

minden $x \in C$ pontra és $0 \le \lambda \le 1$ számra. Ezt az egyenlőtlenséget átrendezve és λ-val osztva azt kapjuk, hogy

$$2(1-\lambda)\langle x, z\rangle - 2\langle z, z\rangle + \lambda(\langle x, x\rangle + \langle z, z\rangle) \ge 0.$$

Innen $\lambda \to 0$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\langle x, z\rangle \ge \langle z, z\rangle = |z|^2 > 0$$

minden $x \in C$ vektorra. Ez azt jelenti, hogy a lemma állítása érvényes a $\varphi(x) = \langle x, z \rangle$ lineáris funkcionállal és a $c = |z|^2$ számmal.

A tétel bizonyítása. Definiáljuk a

$$C = K - L = \{x\colon\ x = k - l \text{ valamely } k \in K \text{ és } l \in L \text{ vektorokkal}\}$$

halmazt.

Azt állítom, hogy C konvex, zárt halmaz, amely nem tartalmazza az origót, azaz teljesíti a lemma feltételeit. Az, hogy C konvex halmaz, és nem tartalmazza az origót könnyen látható. Az, hogy zárt halmaz, következik az alábbi érvelésből.

Tegyük fel, hogy $x_n = k_n - l_n \to y$, $y \in R^k$, ha $n \to \infty$ valamely $k_n \in K$, $l_n \in L$ sorozatra. A K halmaz kompaktsága miatt létezik olyan n_j indexsorozat, amelyre $k_{n_j} \to k$, ha $j \to \infty$ valamely $k \in K$ vekorra. Ekkor $l_{n_j} \to k - y$, ha $j \to \infty$. De ekkor $l = k - y \in L$ az L halmaz zártsága miatt. Ezért $y = k - l \in C$, tehát C zárt halmaz.

A lemma alapján létezik olyan φ lineáris funkcionál az R^k térben, amelyre $\varphi(x) = \varphi(k-l) \geq c$ minden $k \in K$ és $l \in L$ vektorra valamely $c > 0$ számmal. Azt állítom, hogy innen következik, hogy $\varphi(l) = 0$ minden $l \in L$ vektorra. Valóban, tegyük fel, hogy $\varphi(l) > 0$ valamely $l \in L$ vektorra. Ekkor vegyünk egy $k \in K$ vektort és $\lambda > 0$ számot. A $\varphi(k - \lambda l) = \varphi(k) - \lambda\varphi(l) \geq c > 0$ egyenlőtlenségnek teljesülnie kellene. Ez azonban nem lehetséges, ha a $\lambda > 0$ számot elég nagyra választjuk. Hasonlóan $\varphi(l) < 0$ szintén nem lehetséges.

Tehát a lemma segítségével konstruált φ lineáris funkcionálra $\varphi(l) = 0$, ha $l \in L$, és $\varphi(k) \geq c > 0$, ha $k \in K$. A tételt beláttuk.