STACIONÁRIUS GAUSS FOLYAMATOK JELLEMZÉSE A SPEKTRÁL MÉRTÉK SEGÍTSÉGÉVEL.

A BOCHNER TÉTEL ÉS NÉHÁNY KÖVETKEZMÉNYE

1. A Bochner tétel.

E jegyzet elsősorban a következő kérdéssel foglalkozik.

Jellemezzük az egész számok halmazán definiált X_n, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, stacionárius Gauss sorozatokat és a valós számegyenesen definiált X_t, $-\infty < t < \infty$, stacionárius Gauss folyamatokat. Elég azzal a speciális esettel foglalkozni, amikor $EX_n = 0$, illetve $EX_t = 0$ minden $n = 0, \pm 1, \dots$ egész illetve $-\infty < t < \infty$ valós számra. A Gauss eloszlás tulajdonságaiból következik, hogy egy nulla várható értékű valószínűségi változókból álló stacionárius Gauss sorozatot illetve Gauss folyamatot egyértelműen meghatároz annak $r(n) = EX_m X_{m+n}$, $n = 0, \pm 1, \dots$, illetve $r(t) = EX_s X_{s+t}$, $-\infty < t < \infty$, kovariancia függvénye. De nem világos, hogy hogyan tudjuk megadni a lehetséges $r(n)$ illetve $r(t)$ kovariancia függvényeket. Meg fogjuk mutatni, hogy e kovariancia függvényeket jól tudjuk jellemezni, mint egy spektrál mértéknek nevezett mérték Fourier transzformáltját. De ahhoz, hogy ezt megtehessük meg kell ismernünk az analízis egyik fontos eredményét, az úgynevezett Bochner tételt. Ennek az eredménynek az ismertetése e jegyzet fő témája.

Egy másik szintén ebben a jegyzetben tárgyalt eredmény arról szól, hogy miután előállítottuk egy stacionárius Gauss sorozat vagy Gauss folyamat kovarianciafüggvényét, mint egy spektrál mérték Fourier transzformáltját hogyan tudjuk magát a Gauss sorozatot illetve Gauss folyamatot is előállítani egy alkalmasan definiált véletlen spektrál mérték segítségével.

Annak érdekében, hogy ezeket a problémákat tárgyalhassuk először felidézek néhány alapvető fogalmat és eredményt.

Több-dimenziós normális eloszlások definiciója. *Definiáljuk először a több-dimenziós standard normális eloszlást. Azt mondjuk, hogy egy $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor eloszlása a k-dimenziós standard normális eloszlás, ha a $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változók függetlenek, és mindegyik ξ_j valószínűségi változó, $1 \le j \le k$, standard normális eloszlású. Ekvivalens megfogalmazásban azt mondhatjuk, hogy egy $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ véletlen vektor eloszlása a k-dimenziós standard normális eloszlás, ha e véletlen vektornak létezik sűrűségfüggvénye, és az az $f(u_1, \dots, u_k) = \frac{1}{(2\pi)^{k/2}} \exp\left\{-\frac{1}{2}\sum\limits_{j=1}^{k} u_j^2\right\}$ függvény.*

Egy $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ k dimenziós véletlen vektor k dimenziós normális eloszlású vektor nulla várható értékkel, ha e véletlen vektor eloszlása megegyezik valamely $(\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k) = (\xi_1, \dots, \xi_k)A$ k-dimenziós vektor eloszlásával, ahol A egy $k \times k$ méretű mátrix, továbbá $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ egy k-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor.

Egy $(\zeta_1, \dots, \zeta_k)$ véletlen vektor k-dimenziós normális eloszlású vektor, ha eloszlása megegyezik egy $(\eta_1, \dots, \eta_k) + (m_1, \dots, m_k)$ véletlen vektor eloszlásával, ahol $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ egy k-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, amelynek a várható értéke nulla, és $(m_1, \dots, m_k)$ k-dimenziós determinisztikus vektor.

Tétel a több-dimenziós normális eloszlás tulajdonságairól. *Tekintsünk egy k-dimenziós $(\eta_1, \dots, \eta_k) = (\xi_1, \dots, \xi_k)A + (m_1, \dots, m_k)$ normális eloszlású valószínűségi változót, ahol A egy $k \times k$ méretű mátrix, $m = (m_1, \dots, m_k)$ k-dimenziós (véletlentől nem függő) vektor és $(\xi_1, \dots, \xi_k)$ egy k-dimenziós standard normális eloszlású véletlen vektor. Akkor $(\eta_1, \dots, \eta_k)$ egy $m = (m_1, \dots, m_k)$ várható értékű és $D = A^*A$ kovariancia mátrixú véletlen vektor. Egy normális eloszlású véletlen vektor kovariancia mátrixa pozitív (szemi)definit, és megfordítva, minden $k \times k$ méretű pozitív (szemi)definit mátrixhoz és k dimenziós vektorhoz létezik olyan k-változós normális eloszlású véletlen vektor, amelynek ez a kovariancia mátrixa és várható érték vektora. Továbbá egy k-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó eloszlását meghatározza annak m várható érték vektora és D kovariancia mátrixa.*

Bevezetjük továbbá a következő fogalmat is.

Gauss (sztochasztikus) folyamat definiciója. *Egy ξ_t, $t \in T$, sztochasztikus folyamatot Gauss folyamatnak nevezünk, ha minden véges dimenziós eloszlása normális eloszlás, azaz a T halmaz minden $T_0 = \{t_1, \dots, t_k\}$ véges részhalmazára a $(\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_k})$ véletlen vektor több-dimenziós normális eloszlású vektor.*

Stacionárius (sztochasztikus) folyamat definiciója. *Legyen adva egy $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat a $-\infty < t < \infty$ egyenesen, vagy a $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ egész számok halmazán. Azt mondjuk, hogy az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat (erős értelemben) stacionárius, ha minden $u > 0$ számra (a számegyenes esetében), illetve minden $u > 0$ egész számra, (ha a sztochasztikus folyamat az egész számokkal van indexelve) "az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat u számmal való eltoltja," az $\bar{X}(t, \omega) = X(t + u, \omega)$, $-\infty < t < \infty$, (vagy $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$), sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai megegyeznek az $X(t, \omega)$ folyamat véges dimenziós eloszlásaival. Másképp fogalmazva azt követeljük meg, hogy minden $u > 0$ (egész vagy valós) számra, (attól függően, hogy a t indexek halmaza az egész vagy a valós számokból áll-e) és minden $k \geq 1$ egész számra valamint $-\infty < t_1 < t_2 < \cdots < t_k < \infty$ számokra az $X(t_j, \omega)$, $1 \leq j < k$, k-dimenziós és $X(t_j + u, \omega)$, $1 \leq j < k$, k-dimenziós véletlen vektorok eloszlásai egyezzenek meg.*

Az erős értelemben stacionárius folyamatoknak van egy gyengén stacionárius folyamatnak nevezett megfelelője. Megadom ennek a definicióját is.

Gyengén stacionárius folyamat definiciója. *Legyen adva egy $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat a $-\infty < t < \infty$ egyenesen, vagy a $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ egész számok halmazán, és legyen $EX(t, \omega)^2 < \infty$ minden t paraméterre. Azt mondjuk, hogy az $X(t, \omega)$ sztochasztikus folyamat gyenge értelemben stacionárius, ha létezik olyan M szám, hogy $EX(t, \omega) = M$, minden t számra, azaz a várható érték nem függ a t számtól, és létezik olyan $\rho(s)$ függvény ($-\infty < s < \infty$, ha a sztochasztikus folyamat a valós, és $s = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ha a sztochasztikus folyamat az egész számokkal van indexelve), úgy, hogy* $\mathrm{Cov}\,(X(t, \omega), X(t + s, \omega)) = \rho(s)$. *Ez azt jelenti, hogy az $X(t, \omega)$ és $X(t + s, \omega)$ valószínűségi változók kovarianciafügggvénye csak a t és $t + s$ számok s különbségétől függ, és nincs jelentősége annak, hogy mi a t szám értéke.*

A következő egyszerű lemmában megfogalmazok egy egyszerű kapcsolatot az erősen és gyengén stacionárius sztochasztikus folyamatok között.

Lemma. *Ha $X(t,\omega)$ erősen stacionárius sztochasztikus folyamat, és $EX(t,\omega)^2 < \infty$, akkor $X(t,\omega)$ gyengén stacionárius folyamat.*

Megfordítva, ha $X(t,\omega)$ gyengén stacionárius sztochasztikus folyamat, és egyben Gauss-folyamat, akkor $X(t,\omega)$ erősen stacionárius folyamat.

A lemma bizonyítása. A Lemma első állítása nyílvánvaló. A második állítás igazolása szintén egyszerű, ha megértjük, hogy egy több-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektor eloszlását meghatározza annak várható érték vektora és kovariancia mátrixa.

Meg kívánjuk adni az összes lehetséges (nulla várható értékű) stacionárius Gauss sorozat és Gauss folyamat eloszlását. Tekintsük először azt a problémát, hogy milyen lehet egy valamely T paraméter tartományon definiált, nem feltétlenül stacionárius $X(t)$, $t \in T$, Gauss folyamat eloszlása. Az egyszerűbb jelölés érdekében feltesszük, hogy $EX(t) = 0$ minden $t \in T$ pontban. A Kolmogorov féle alaptétel szerint elegendő megadni a sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásait konzisztens módon. Ilyen módon definiáljuk egy sztochasztikus folyamat eloszlását, és minden sztochasztikus folyamat eloszlását definiálhatjuk ezen a módon. Jelen esetben, mivel véges dimenziós Gauss eloszlásokat kell definiálni, ezért egy nulla várható értékű valószínűségi változókat tartalmazó $X(t)$, $t \in T$, Gausss folyamat eloszlásának definiciójához elég megadni az $R(s,t) = EX_sX_t$, $s,t \in T$, kovariancia függvényeket. Annak, hogy létezzék egy adott $R(s,t)$, $s,t \in T$, kovarianciafüggvénnyel rendelkező Gauss folyamat az a szükséges és elégséges feltétele, hogy tetszőleges $k \ge 1$ egész számra és $t_1, \in T, \dots\ t_k \in T$ pontokra az i-edik sor j-ik oszlopában $R(t_i,t_j)$ elemet tartalmazó, $1 \le i,j \le k$, $k \times k$ méretű mátrix pozitív szemidefinit legyen.

Tekintsük azt az esetet, amikor a T paraméter tartomány az egész számok $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ halmaza vagy a $-\infty < t < \infty$ számegyenes. Akkor fog az előbb definiált kívánt tulajdonságú $R(s,t)$ függvény stacionárius Gauss sorozatot vagy Gauss folyamatot definiál, ha $R(s,t) = r(t-s)$ alkalmas $r(\cdot)$ függvénnyel minden s és t pontban. Az alább tárgyalandó Bochner tétel az ilyen $r(\cdot)$ függvények leírását adja. Annak érdekében, hogy ezt az eredményt meg tudjuk fogalmazni, először bevezetjük a pozitív definit függvény fogalmát. Aztán a Bochner tételben jellemezzük a pozitív definit függvényeket. Szükségünk lesz még egy apró technikai nehézség megoldására. A pozitív definit függvények általában komplex értékűek. Mi viszont olyan $r(t)$ függvény keresünk, amelyik valós értékű. De ha meg tudjuk adni a pozitív definit függvényeket, akkor nem nehéz közülük kiválasztani a valós értékű pozitív definit függvényeket.

Pozitív definit függvény definiciója. *Egy a valós számegyenesen definiált $r(t)$, $-\infty < t < \infty$, függvényt pozitív definitnek nevezünk, ha minden $k \ge 1$ egész, $t_1,\dots,t_k$ valós és $z_1,\dots,z_k$ komplex számokból álló rendszer teljesíti a*

$$\sum_{1 \le j,l \le k} z_j \bar z_l r(t_j - t_l) \ge 0 \tag{1.1}$$

egyenlőtlenséget, ahol $\bar{z}$ a z komplex szám konjugáltját jelöli.

Egy az egész számok $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ halmazán definiált $r(t)$ függvényt pozitív definitnek nevezünk, ha minden $k \geq 1$ egész, $t_1, \dots, t_k$ egész és $z_1, \dots, z_k$ komplex számokból álló rendszer teljesíti az (1.1) azonosságot.

Példa a számegyenesen definiált $r(t)$ pozitív definit függvényre az $r_u(t) = e^{iut}$ függvény tetszőleges u valós számmal, mert ebben az esetben

$$\begin{aligned}\sum_{1\le j,l\le k} z_j\bar{z}_l r_u(t_j - t_l) &= \sum_{1\le j,l\le k} z_j\bar{z}_l e^{iu(t_j-t_l)} = \sum_{1\le j,l\le k} z_j\bar{z}_l e^{iut_j}\overline{e^{iut_l)}} \\ &= \left(\sum_{j=1}^k z_j e^{iut_j}\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^k z_j e^{iut_j}\right)} \geq 0. \qquad (1.2)\end{aligned}$$

Hasonlóan, az $r_u(t) = e^{iut}$ függvény pozitív definit az egész számok halmazán, de ekkor feltehetjük, hogy $-\pi \leq t < \pi$, mert az így definiált $r_u(t)$ függvényre $r_{u+2\pi s}(t) = r_u(t)$ minden egész s (és egész t) számra. Az ilyen módon definiált pozitív definit függvények pozitív együtthatós lineáris kombinációi is pozitív definit függvények, és alkalmas limeszeléssel további pozitív definit függvényeket kapunk. Az alább ismertetett Bochner tétel heurisztikus tartalma az, hogy ilyen módon az összes pozitív definit függvényt megkapjuk.

Bochner tétel. *Egy a számegyenesen definiált $\omega(t)$ függvény akkor és csak akkor folytonos és pozitív definit, ha létezik a számegyenesen olyan véges $G(\cdot)$ mérték, amelynek segítségével az $\omega(t)$ függvény előállítható*

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} G(\,dx), \quad -\infty < t < \infty, \qquad (1.3)$$

alakban. Az $\omega(t)$ függvény egyértelműen meghatározza az e függvény (1.3) képletben megadott előállításában szereplő $G(\cdot)$ mértéket. Az $\omega(t)$ függvény akkor és csak akkor valós értékű, ha a G mérték páros, azaz $G(-A) = G(A)$ a számegyenes minden mérhető A részhalmazára.

Egy az egész számok halmazán definiált $\omega(t)$ függvény akkor és csak akkor pozitív definit, ha létezik olyan véges $G(\cdot)$ mérték a $[-\pi, \pi)$ szakaszon (pontosabban a számegyenesnek mint additív csoportnak a faktorcsoportján annak $2\pi\mathbb{Z}$ részcsoportja szerint, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok additív csoportját jelöli), amelynek segítségével az $\omega(t)$ függvény előállítható

$$\omega(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} G(\,dx), \quad t = 0 \pm 1, \pm 2, \dots, \qquad (1.4)$$

alakban. Az $\omega(t)$ függvény egyértelműen meghatározza e függveny (1.4) képletben megadott előállításában szereplő $G(\cdot)$ mértéket. Az $\omega(t)$ függvény akkor és csak akkor valós értékű, ha a G mérték páros, azaz $G(-A) = G(A)$ a $[-\pi, \pi)$ intervallum minden mérhető A részhalmazára.

1. megjegyzés. Az, hogy a $[-\pi,\pi)$ intervallumot, mint a számegyenesnek annak $2\pi\mathbb{Z}$ részcsoportja szerinti faktorcsoportot tekintjük jelenti, hogy valójában a $[-\pi,\pi]$ zárt intervallumot vesszük, de a π és $-\pi$ pontokat azonosítjuk. Tulajdonképpen a $[-\pi,\pi)$ intervallumot úgy tekintettük, mint a mod 2π additív csoport egy reprezentációját a természetes topológiával. Ugyanez a megjegyzés lesz érvényes a későbbiekben is, amikor $[-\pi,\pi)$ intervallumot, mint ezt a faktorcsoportot tekintjük.

2. megjegyzés. Egy a számegyenesen tekintett $\omega(t)$ pozitív definit függvényt csak ama feltétel mellett tudtuk felírni az (1.3) alakban, ha $\omega(t)$ folytonos függvény. Ez a feltétel nem hagyható el. Valóban, definiáljuk azt az $\omega(\cdot)$ függvényt, amelyre $\omega(0)=1$, $\omega(t)=0$, ha $t\neq 0$. Ez az origóban nem folytonos pozitív definit függvény, amely nem állítható elő az (1.3) alakban.

A tételben szereplő (véges) $G(\cdot)$ mértéket spektrálmértéknek nevezik az irodalomban.

Annak bizonyítása, hogy az (1.3) és (1.4) képlet jobboldalán szereplő integrál egy pozitív definit függvényt definiál tetszőleges véges $G(\cdot)$ spektrálmérték esetén, amely a $-\infty<t<\infty$ esetben folytonos viszonylag egyszerű. Ezt lényegében az (1.2) képletet segítségével lehet megmutatni. Azt, hogy az (1.2) képletben definiált $\omega(t)$ függvény folytonos úgy láthatjuk be, hogy minden $-\infty<t<\infty$ és $\delta>0$ számra tekintjük a $B(t,\delta)=[t-\frac{\delta^2}{|t|+1},[t+\frac{\delta^2}{|t|+1}]$ intervallumot, és $s\in B(t,\delta)$ esetén felírjuk az

$$|\omega(t)-\omega(s)|\le\int_{x\colon\, |x-t|<\frac1\delta}|1-e^{i(t-s)x}|G(\,dx)+2G\left(x\colon\, |x-t|>\frac1\delta\right)$$

egyenlőtlenséget. Ezután észrevesszük, hogy mivel $|1-e^{i(t-s)x}|\le 2|t-s||x|\le 4\delta$, ha $s\in B(t,\delta)$, ezért a fenti egyenlőtlenség jobboldalának mindkét tagja nullához tart, ha $s\in B(t,\delta)$ és $\delta\to 0$. Innen következik, hogy $\omega(\cdot)$ folytonos függvény. A számolások formális részleteit elhagyom.

Lényegesen nehezebb annak igazolása, hogy tetszőleges pozitív definit függvény előállítható ilyen módon. Ezért ezen állítás bizonyítására fogunk koncentrálni. A fő nehézséget az okozza, hogy az általános esetben nem tudjuk explicit módon megadni a keresett G spektrálmértéket.

A bizonyítás egyik fő gondolata a következő. Ha $\omega(\cdot)$ szép függvény, elég sima, integrálható és négyzetesen integrálható, akkor az előállítható annak a mértéknek a Fourier transzformáltjaként, amelynek sűrűségfüggvénye az $\omega(\cdot)$ függvény

$$u(x)=\frac{1}{2\pi}\int e^{-itx}\omega(t)\,dt$$

inverz Fourier transzformáltja. Ezt az állítást nem fogalmazom meg pontosabban. Helyette ezen állításnak egy olyan számunkra hasznos változatát bizonyítom, amelyben kihasználjuk azt, hogy pozitív definit $\omega(\cdot)$ függvénnyel foglalkozunk. Megjegyzem, annak bizonyításában, hogy alkalmas feltételek mellett $u(x)$ az $\omega(t)$ függvény inverz Fourier transzformálja az egyik lényeges pont annak igazolása, hogy $u(x)$ integrálható függvény. Ezt általában úgy biztosítják, hogy felteszik, hogy $\omega(t)$ elég sima függvény, ahonnan következik, hogy annak $u(x)$ inverz Fourier transzformáltja a végtelenben elég gyorsan nullához tartó, ezért integrálható függvény. Ha $\omega(t)$ a $-\infty < t < \infty$ számegyenesen veszi fel az értékeit, akkor fel fogjuk tenni, hogy $\omega(t)$ folytonos függvény. Ez egy simasági feltétel, de ez önmagában nem elegendő annak biztosításához, hogy az $u(x)$ inverz Fourier transzformált integrálható legyen. Viszont be fogjuk, látni, hogy mivel $\omega(t)$ pozitív definit, ezért $u(x)$ pozitív függvény. Felhasználva, hogy $u(\cdot)$ pozitív függvény enyhébb feltételek mellett is biztosítani tudjuk az integrálhatóságát.

A számunkra érdekes eredményt, azt hogy alkalmas feltételek mellett egy pozitív definit függvény egy sűrűségfüggvénnyel rendelkező mérték Fourier transzformáltjaként is előállítható két állításban, egy Proposition 1A-ban és egy Proposition 1B-ben fogalmazom meg. Az elsőben a folytonos idejű $t \in (-\infty, \infty)$ a másodikban a diszkrét idejű $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ esetet tekintem, mert a bizonyítás formális lépései különbözőek ebben a két esetben. Mind a két eredmény bizonyítása egy a Parseval formulához hasonló azonosság vizsgálatán és a pozitív definit függvények néhány egyszerű, de fontos tulajdonságának az igazolásán alapul. E Proposition-ok ismeretében a Bochner tételt be tudjuk bizonyítani az általános esetben is egy alkalmas limesz eljárás segítségével néhány önmagában is fontos és érdekes eredmény felhasználásával.

Proposition 1A. *Legyen $\omega(t)$, $-\infty < t < \infty$, egy a számegyenesen definiált folytonos és integrálható függvény (azaz legyen $\int |\omega(t)|\, dt < \infty$), amelyik pozitív definit. Akkor az*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \omega(t)\, dt, \quad -\infty < x < \infty, \tag{1.5}$$

függvény integrálható és nem-negatív, és teljesül az

$$\omega(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} u(x)\, dx, \quad -\infty < t < \infty, \tag{1.6}$$

azonosság.

Proposition 1B. *Legyen $\omega(t)$, $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, egy az egész számok halmazán definiált pozitív definit függvény, amelyre $\sum\limits_{t=-\infty}^{\infty} |\omega(t)| < \infty$. Akkor az*

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{-itx} \omega(t), \quad -\pi \le x < \pi, \tag{1.7}$$

függvény nem negatív és integrálható a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, és teljesül az

$$\omega(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} u(x)\, dx, \quad t = 0 \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1.8}$$

azonosság.

A Proposition 1A és 1B igazolása érdekében először a következő két lemmát látjuk be.

1.1. Lemma. *Legyen $\omega(t)$ pozitív definit függvény vagy a $-\infty < t < \infty$ egyenesen vagy az egész számok $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ halmazán. Ekkor $\omega(-t) = \overline{\omega(t)}$, és $\omega(0)$ nem negatív valós szám, amely teljesíti az $\omega(0) \ge |\omega(t)|$ egyenlőtlenséget is minden $-\infty < t < \infty$ illetve $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ számra.*

A következő lemmát a Proposition 1A bizonyításában használjuk fel.

1.2. Lemma. *Adva egy F eloszlásfüggvény a számegyenesen definiáljuk az F^- eloszlásfüggvényt az $F^-(t) = 1 - F(t+0)$ és a ${}^0F$ eloszlásfüggvényt a ${}^0F(t) = F * F^-(t)$ képlet segítségével minden $-\infty < t < \infty$ számra, ahol $*$ konvolucíót jelöl. Ha $\omega(t)$ pozitív definit és folytonos függvény a számegyenesen akkor*

$$\int e^{-ixt}\omega(t)\, {}^0F(\,dt) \ge 0 \tag{1.9}$$

minden x valós számra és F eloszlásfüggvényre. (Speciálisan azt is állítjuk, hogy az (1.9) formulában szereplő integrál értéke valós szám.)

Az 1.1. lemma bizonyítása. A pozitív definit függvény definiciójában szereplő (1.1) képlet (az $r(t) = \omega(t)$ szereposztással) abban a speciális esetben, amikor két pontot tekintünk, $t_1 = 0$ és $t_2 = t$, valamint $z_1 = 1$ és $z_2 = z$ választással azt adja, hogy

$$\omega(0)(1 + |z|^2) + \omega(t)z + \omega(-t)\bar{z} \ge 0 \tag{1.10}$$

minden z komplex és $-\infty < t < \infty$ vagy $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ számra. A $z = 0$ választással az (1.10) formulában azt kapjuk, hogy $\omega(0) \ge 0$. Ezután a $z = 1$ majd $z = i$ választás az (1.10) formulában azt adja, hogy $\omega(-t) = \overline{\omega(t)}$. Valóban, az első reláció szerint $\operatorname{Im}\omega(t) = -\operatorname{Im}\omega(-t)$, míg a második reláció szerint $\operatorname{Re}\omega(t) = \operatorname{Re}\omega(-t)$. Ezt felhasználva meg lehet mutatni, szintén az (1.10) formula segítségével, hogy az $\omega(0) = 0$ esetben $\omega(t) = 0$ minden t számra. Valóban, ebben az esetben $\omega(t)z + \overline{\omega(t)z} = 2\mathrm{Re}\,(\omega(t)z) \ge 0$, ahonnan $z = \pm 1$ és $z = \pm i$ választással $\operatorname{Re}\omega(t) = 0$ és $\operatorname{Im}\omega(t) = 0$. Ha $\omega(0) > 0$ akkor alkalmazzuk az (1.10) formulát a $z = -\frac{\overline{\omega(t)}}{\omega(0)}$ választással. Azt kapjuk, hogy $\omega(0) + \frac{|\omega(t)|^2}{\omega(0)} - 2\frac{|\omega(t)|^2}{\omega(0)} \ge 0$, azaz $\omega(0)^2 \ge |\omega(t)|^2$. Az 1.1. lemmát beláttuk.

Megjegyzés. Az 1.1. lemma bizonyításában egy olyan kétszer kettes mátrixot tekintettünk, amelynek főátlójában mindkét helyen az $\omega(0)$ szám van, a mellékátló két helyén pedig az $\omega(t)$ és $\omega(-t)$ számok vannak. Azt vizsgáltuk, hogy ez a mátrix mikor definiál egy pozitív definit kvadratikus alakot, és erre adtunk szükséges feltételt. Valójában a lemmában megadtuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy a tekintett kvadratikus alak pozitív definit legyen.

Az 1.2. lemma bizonyítása. Rögzítsünk egy F eloszlásfüggvényt, vegyünk két független, F eloszlású ξ és η valószínűségi változót, valamint vegyük az F eloszlásfüggvény által meghatározott ${}^0F$ eloszlásfüggvényt. Számoljuk ki az $e^{-ix(\xi-\eta)}\omega(\xi - \eta)$ valószínűségi változó várható értékét két különböző módon. Először úgy tekintjük ezt a valószínűségi változót, mint a $\xi-\eta$ valószínűségi változó, másodszor pedig mint a (ξ,η) véletlen vektor függvényét. Ezután felírjuk az $Ee^{-ix(\xi-\eta)}\omega(\xi-\eta)$ várható értéket a $\xi-\eta$ valószínűségi változó ${}^0F(\,dt)$ és a (ξ,η) véletlen vektor $F(\,dy)F(\,dz)$ eloszlásának a segítségével. A következő azonosságot kapjuk.

$$\int e^{-ixt}\omega(t)\,{}^0F(\,dt)=Ee^{-ix(\xi-\eta)}\omega(\xi-\eta)=\int e^{-ix(y-z)}\omega(y-z)F(\,dy)F(\,dz).$$

Ezért az 1.2. lemmában bizonyítandó állítást úgy is megfogalmazhatjuk, hogy

$$\int e^{-ix(y-z)}\omega(y-z)F(\,dy)F(\,dz)\ge 0 \tag{1.11}$$

minden F eloszlásfüggvényre és x valós számra. Vegyük észre, hogy abban az esetben, ha F véges sok értéket felvevő diszkrét eloszlás, azaz létezik véges sok $s_1,\dots,s_k$ és $p_1>0,\dots\; p_k>0$, $\sum\limits_{j=1}^k p_j=1$, szám úgy, hogy $P(\xi=s_j)=p_j$, $1\le j\le k$, akkor az (1.11) egyenlőtlenség következik az (1.1) formulából, mert ekkor

$$\int e^{-ix(y-z)}\omega(y-z)F(\,dy)F(\,dz)=\sum_{1\le j,,l\le k}p_je^{-ixs_j}\overline{p_le^{-ixs_l}}\omega(s_j-s_l)\ge 0.$$

Az általános eset bizonyítását úgy kapjuk, hogy minden F eloszlást diszkrét eloszlásokkal közelítünk alkalmas módon. Ha adva van egy F eloszlásfüggvény és egy kis $\varepsilon>0$ szám, válasszunk egy olyan $T=T(\varepsilon)>0$ számot, amelyre $F(-T)<\frac{\varepsilon}{2\omega(0)}$ és $1-F(T)<\frac{\varepsilon}{2\omega(0)}$.

Rögzítsünk egy F eloszlásfüggvényt, egy x valós számot az (1.11) formulában és egy $\varepsilon>0$ küszöbindexet. A folytonos $e^{ixy}\omega(y)$ függvény egyenletesen folytonos a $[-T,T]$ intervallumban. Legyen $\eta>0$ olyan szám, amelyre $|e^{ixy}\omega(y)-e^{ixz}\omega(z)|\le\varepsilon$, ha $|y|\le 2T$, $|z|\le 2T$, és $|y-z|\le\eta$. Bontsuk fel a $[-T,T]$ intervallumot véges sok diszjunkt $B_1,\dots,B_M$ intervallumra úgy, hogy mindegyik B_j intervallum hossza kisebb mint $\frac{\eta}{2}$, és válasszunk ki mindegyik B_j intervallumban egy $s_j\in B_j$ pontot. Az egyszerűbb jelölés érdekében definiáljuk a $B_0=(-\infty,-T)\cup(T,\infty)$ halmazt is, és válasszunk ki egy $s_0\in B_0$ pontot. Az egyszerűség kedvéért válasszuk az összes B_j, $0\le j\le M$, halmazt úgy, hogy annak határa nulla mértékű az F eloszlás által generált μ_F Stieltjes mérték szerint. Definiáljuk azt az F_ε diszkrét eloszlást, amely az s_j, $0\le j\le M$ pontokba van koncentrálva, és olyan μ_{F_ε} Stieltjes mértéket definiál, amely szerint $\mu_{F_\varepsilon}(\{s_j\})=\mu_F(B_j)$. Azt állítom, hogy

$$\left|\int e^{-ix(y-z)}\omega(y-z)F(\,dy)F(\,dz)-\int e^{-ix(y-z)}\omega(y-z)F_\varepsilon(\,dy)F_\varepsilon(\,dz)\right|\le 5\varepsilon. \tag{1.12}$$

Az (1.12) formula igazolása érdekében vezessük be a $h(y,z)=e^{ix(s_j-s_l)}\omega(s_j-s_l)$, ha $y\in B_j$ és $z\in B_l$ függvényt, $1\le j,\le M$, és vegyük észre, hogy

$$\int_{[-T,T]\times[-T,T]}e^{-ix(y-z)}\omega(y-z)F_\varepsilon(\,dy)F_\varepsilon(\,dz)=\int_{[-T,T]\times[-T,T]}h(y,z)F(\,dy)F(\,dz),$$

és ezenkívül $|h(y,z) - e^{ix(y-z)}\omega(y-z)| \le \varepsilon$, ha $(y,z) \in [-T,T] \times [-T,T]$. Ezért ha az (1.12) formulában szereplő integrálokat megszorítjuk a $[-T,T] \times [-T,T]$ négyzetre, akkor az integrálok különbsége kisebb, mint ε. Az $R^2 \setminus ([-T,T] \times [-T,T])$ tartomány mértéke mindkét mérték szerint kisebb, mint $\frac{2\varepsilon}{\omega(0)}$, és az 1.1. lemma alapján az integrandusok abszolút értéke minden pontban kisebb, mint $\omega(0)$. Ezekből az észrevételekből következik az (1.12) formula.

Az (1.12) formulát alkalmazva egy $\varepsilon_n \to 0$ sorozatra azt kapjuk, hogy az (1.11) formula baloldalán szereplő kifejezéshez konvergálni tudunk valós, nem negatív számok segítségével. Ezért az (1.11) formula és így a 1.2. lemma állítása is igaz.

Egy σ^2 szórásnégyzetű, nulla várható értékű normális eloszlás felírható, mint két $\sigma^2/2$ szórásnégyzetű, nulla várható értékű normális eloszlás konvoluciója. Ezen eloszlások páros függvények, ezért tetszőleges nulla várható értékű normális eloszlás felírható az 1.2. lemmában definiált ${}^0F$ alakban alkalmas F eloszlásfüggvénnyel. Innen következik, hogy az 1.2. lemma alapján

$$\int e^{-ixt}\omega(t)e^{-\alpha t^2}\,dt \ge 0 \tag{1.13}$$

minden valós x és pozitív α számra, ha $\omega(\cdot)$ folytonos, pozitív definit függvény a számegyenesen. Másrészt, tudjuk, hogy a normális eloszlás karakterisztikus függvénye teljesíti az

$$e^{-vt^2/2} = \int e^{-itx}\frac{e^{-x^2/2v}}{\sqrt{2\pi v}}\,dx \quad \text{minden } t \text{ és } v>0 \text{ valós számra}$$

azonosságot. Számunkra kényelmesebb lesz ezen azonosság következő kissé módosított alakjával dolgozni:

$$e^{-v(t-a)^2/2} = \int e^{-i(t-a)x}\frac{e^{-x^2/2v}}{\sqrt{2\pi v}}\,dx, \tag{1.14}$$

ahol t, a és $v>0$ tetszőleges valós számok.

A Proposition 1A bizonyítása. Mivel $\omega(t)$ integrálható függvény, ezért az (1.13) formulából és a Lebesgue tételből azt kapjuk $\alpha \to 0$ határátmenettel, hogy az (1.5) képletben definiált $u(t)$ valós értékű, pozitív függvény. A további tulajdonságok bizonyítása érdekében az alábbi a Parseval formulához hasonló azonosságot igazoljuk. Szorozzuk meg az (1.14) azonosságot a $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}\omega(t)$ függvénnyel, majd integráljunk a t változó szerint. Azt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int \omega(t)\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}e^{-v(t-a)^2/2}\,dt &= \int\int \omega(t)e^{-i(t-a)x}\frac{e^{-x^2/2v}}{2\pi}\,dx\,dt \\ &= \int \left[\frac{1}{2\pi}\int \omega(t)e^{-itx}\,dt\right]e^{-x^2/2v}e^{ixa}\,dx = \int e^{ixa}u(x)e^{-x^2/2v}\,dx\end{aligned} \tag{1.15}$$

minden valós a számra.

Az (1.15) azonosság tekinthető úgy, mint a Parseval formula természetes, egyszerű változata. Az azonosság baloldalán az $\omega(t)$ és $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}e^{-v(t-a)^2/2}$ függvények skalárszorzata van, a jobboldalt úgy is írhatjuk, mint $\int u(-x)e^{-ixa}e^{-x^2/2v}\,dx$. Ez az integrál az $\omega(t)$ függvény $u(-x)$ Fourier transzformáltjának valamint a $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}e^{-v(t-a)^2/2}$ függvény $e^{iax}e^{-x^2/2v}$ Fourier transzformáltjának a skalár szorzata. A Parseval formula hasonló azonosságot mond ki két négyzetesen integrálható függvény skalárszorzatáról. A lényeges különbség e két formula között az, hogy a Parseval formulában két négyzetesen integrálható függvényt tekintünk, míg az itt vizsgált esetben $\omega(t)$ integrálható, de nem feltétlenül négyzetesen integrálható függvény. Viszont a másik függvény korlátos, és a végtelenben gyorsan tart nullához, és ugyanez elmondható a Fourier transzformáltjáról is. Ez biztosítja a tekintett integrálok végességét.

Tekintsük az (1.15) integrált az $a=0$ esetben, és végezzük el a $v\to\infty$ határátmenetet. Mivel $u(t)$ nem negatív függvény, és az $e^{-x^2/2v}$ függvény minden rögzített x számra a v változó monoton növekedő függvénye, amely 1-hez tart, ha $v\to\infty$, ezért a Beppo–Levy tétel alapján $\lim\limits_{v\to\infty}\int u(x)e^{-x^2/2v}\,dx=\int u(x)\,dx$. Másrészt az (1.15) képlet baloldala kisebb, mint $\omega(0)$ minden v paraméterre. Ugyanis $|\omega(t)|\le\omega(0)$ minden t számra, és az $\omega(\cdot)$ függvényt egy sűrűségfüggvénnyel szorozzuk be az (1.15) formula baloldalán szereplő integrálban. A fenti érvelésből következik, hogy $u(\cdot)$ integrálható függvény.

Tekintsük ezután az (1.15) azonosságot tetszőleges a paraméter esetén, és hajtsuk végre a $v\to\infty$ határátmenetet. Azt állítom, hogy az

$$\omega(a)=\int e^{ixa}u(x)\,dx$$

azonosságot kapjuk, ami azt jelenti, hogy igaz az (1.6) azonosság. Valóban, mivel $u(x)$ integrálható függvény, ezért az (1.15) azonosság jobboldala a Lebesgue tétel alapján az $\int e^{ixa}u(x)\,dx$ integrálhoz tart $v\to\infty$ esetén. Másrészt az azonosság baloldala az $\omega(a)$ számhoz tart $v\to\infty$ esetén, mert egyrészt $\omega(t)$ folytonos és korlátos függvény, másrészt $\frac{\sqrt{v}}{\sqrt{2\pi}}e^{-v(t-a)^2/2}$ olyan (normális) sűrűségfüggvény, amely nagy v paraméter esetén majdnem teljesen az a pont egy kis környezetébe van koncentrálva. Ezzel a Proposition 1A állítását beláttuk.

A Proposition 1B bizonyítása. Mivel $\sum\limits_{t=-\infty}^{\infty}|\omega(t)|<\infty$, ezért az (1.7) formulában definiált $u(t)$ függvény korlátos, és így integrálható a $-\pi\le t<\pi$ intervallumon. Lássuk be, hogy ez a függvény nem negatív. Ennek érdekében vegyünk egy nagy N számot, és definiáljuk a $z_N^{(k)}(x)=\frac{e^{ikx}}{\sqrt{N}}$, ha $-N\le k\le N$, és $z_N^{(k)}(x)=0$, ha $|k|>N$ számokat. Ekkor az $\omega(t)$ sorozat pozitív definit tulajdonsága miatt

$$0\le\sum_{-N\le j,l\le N}\frac{e^{i(j-l)x}}{N}\omega(j-l)=\sum_{-2N\le t\le 2N}\frac{2N-|t|+1}{N}e^{itx}\omega(t)$$

minden pozitív egész N és $-\pi \leq x < \pi$ számra. Mivel $\lim\limits_{N\to\infty} \frac{2N-|t|+1}{N} = 2$ minden rögzített t egész számra, és $\sum\limits_{t=-\infty}^{\infty} |\omega(t)| < \infty$, az előző relációból $N \to \infty$ határátmenettel megkapjuk az

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{t=-\infty}^{\infty} e^{itx}\omega(t) \geq 0$$

egyenlőtlenséget.

Lássuk be az (1.8) azonosságot. Ennek érdekében definiáljuk minden $N = 1, 2, \ldots$ számra az $u_N(x) = \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{t=-N}^{N} e^{itx}\omega(t)$ függvényt, $-\pi \leq x \leq \pi$, és vegyük észre, hogy a trigonometrikus függvények ortogonalitása miatt

$$\omega(t) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-itx} u_N(x)\, dx, \quad \text{ha } |t| \leq N. \tag{1.16}$$

Mivel $|u_N(x) - u(x)| \leq \frac{1}{2\pi} \sum\limits_{|t|>N} |\omega(t)| \to 0$, ha $N \to \infty$ minden $-\pi \leq x < \pi$ számra, ezért $\lim\limits_{N\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |u_N(x) - u(x)|\, dx = 0$, és az (1.16) relációból következik az (1.8) azonosság. A Proposition 1B-t beláttuk.

A Bochner tétel bizonyításában egy algebrai jellegű lemmát fogunk alkalmazni. Ennek megfogalmazása érdekében bevezetjük a következő definiciót.

Mátrixok kompoziciója és vektorok diád szorzata. *Adva két $A = (a(i,j))$ és $B = (b(i,j))$, $1 \leq i,j \leq n$, $n \times n$-es mátrix ezek kompozicióján az $A \circ B = (a(i,j)b(i,j))$, $1 \leq i,j \leq n$, $n \times n$-es mátrixot értjük.*

Ha $e = (e^{(1)}, \ldots, e^{(n)})$ és $f = (f^{(1)}, \ldots, f^{(n)})$ két n koordinátát tartalmazó vektor, akkor ezek diád szorzatán az $(e \times f) = (e^{(i)} \bar{f}^{(j)})$, $1 \leq i,j \leq n$, $n \times n$-es mátrixot értjük, ahol $\bar{x}$ az x szám komplex konjugáltját jelöli.

Be fogjuk látni a következő 1.3. lemmát.

1.3. Lemma. *Legyen A és B két $n \times n$-es pozitív szemidefinit mátrix. Akkor ezek $A \circ B$ kompoziciója szintén pozitív szemidefinit.*

Számunkra e lemmának az alábbi következménye lesz érdekes.

1.3. Lemma következménye. *Két pozitív definit függvény szorzata is pozitív definit.*

A következmény bizonyítása. Legyen f és g két pozitív definit függvény. Az, hogy ezek a függvények pozitív definitek azzal ekvivalens, hogy akárhogyan rögzítünk bizonyos $t_1, \ldots, t_n$ pontokat az $A(t_1, \ldots, t_n) = (f(t_i - t_j))$ és $B(t_1, \ldots, t_n) = (g(t_i - t_j))$, $1 \leq i,j \leq n$, $n \times n$-es mátrixok pozitív szemidefinitek. Ekkor viszont az $A(t_1, \ldots, t_n) \circ B(t_1, \ldots, t_n) = (f(t_i - t_j)g(t_i - t_j))$, $1 \leq i,j \leq n$ mátrixok is pozitív szemidefinitek minden $\{t_1, \ldots, t_n\}$ ponthalmazra. Ez viszont azt jelenti, hogy az $f(t)g(t)$ függvény is pozitív definit.

Az 1.3. Lemma bizonyítása. Ha A és B két szimmetrikus mátrix, akkor mind a két mátrixnak van egy $e_1, \dots, e_n$ illetve $f_1, \dots, f_n$ ortonormált sajátvektorokból álló teljes rendszere $\lambda_1, \dots, \lambda_n$, illetve $\mu_1, \dots, \mu_n$ sajátértékekkel. Ezek a mátrixok akkor és csak akkor pozitív szemidefinitek, ha a sajátértékeik nem negatívak.

Azt állítom, hogy az A mátrix felírható $A = \sum\limits_{p=1}^{n} \lambda_p(e_p \times e_p)$, a B mátrix pedig $B = \sum\limits_{p=1}^{n} \mu_p(f_p \times f_p)$ alakban a fenti sajátvektorokkal és sajátértékekkel. Ennek igazolásához elegendő azt ellenőrizni, hogy $e_p(e_p \times e_p) = e_p$ és $e_q(e_p \times e_p) = 0$, ha $q \neq p$, és hasonló reláció érvényes a B mátrixra, azok f_p sajátvektoraira μ_p sajátértékekkel. Ezekből az azonosságokból ugyanis következik, hogy a $\sum\limits_{p=1}^{n} \lambda_p(e_p \times e_p)$ mátrix sajátvektorai az $e_1, \dots, e_n$ vektorok $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ sajátértékekkel.

Viszont könnyen látható, hogy az $e_p = (e_p^{(1)}, \dots, e_p^{(n)})$ vektorra az $e_p(e_p \times e_p)$ vektor j-ik koordinátája $e_p^{(j)} \sum\limits_{l=1}^{n} e_p^{(l)} \bar{e}_p^{(l)} = e_p^{(j)}$, mivel az e_p vektor normája 1, és hasonlóan az $e_q(e_p \times e_p)$ vektor j-ik koordinátája $e_p^{(j)} \sum\limits_{l=1}^{n} e_q^{(l)} \bar{e}_p^{(l)} = 0$, ha $p \neq q$, mert a e_p és e_q vektorok ortogonálisak. Ebből a számolásból az is következik, hogy egy (n-dimenziós) e vektor önmagával vett $(e \times e)$ diád szorzata pozitív szemidefinit mátrix egy 1 és $n-1$ nulla sajátértékű sajátvektorral.

Az 1.3. lemma bizonyítása érdekében mutassuk meg, hogy ha $e = (e^{(1)}, \dots, e^{(n)})$ és $f = (f^{(1)}, \dots, f^{(n)})$ két n-dimenziós vektor, akkor az $(e \times e) \circ (f \times f)$ mátrixszorzat szintén pozitív szemidefinit mátrix. Ehhez elegendő észrevenni, hogy a $h = h(e, f) = (e^{(1)} f^{(1)}, \dots, e^{(n)} f^{(n)})$ vektor teljesíti az $(e \times e) \circ (f \times f) = (h \times h)$ azonosságot. Innen viszont következik, tekintve a pozitív szemidefinit A és B mátrixoknak a bizonyítás elején megadott alakját, hogy a kompozíciójuk felírható

$$A \circ B = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \lambda_j \mu_k (e_j \times e_j) \circ (f_k \times f_k)$$

alakban, tehát pozitív szemidefinit mátrixok pozitív együtthatós lineáris kombinációjaként. Ez azt jelenti, hogy $A \circ B$ is pozitív szemidefinit. Az 1.3. lemmát bebizonyítottuk.

Megjegyzés. A fenti bizonyítás hátterét jobban megértjük, ha észrevesszük, hogy az $(e \times e)$ diád szorzat egy e egységvektor esetén megegyezik az e vektorra történő ortogonális vetítéssel.

Vegyük észre, hogy az $e^{-\alpha t^2}$, $-\infty < t < \infty$, függvény pozitív definit minden $\alpha > 0$ számra, mert felírható, mint egy (normális) sűrűségfüggvény Fourier transzformáltja. Ha az $e^{-\alpha t^2}$ függvény értelmezési tartományát megszorítjuk a $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ egész számok halmazára, ez a függvény akkor is pozitív definit marad. Ezért az 1.3. lemma következménye szerint, ha $\omega(t)$ pozitív definit függvény, akkor $\omega(t) e^{-\alpha t^2}$ szintén pozitív definit függvény, akár a $-\infty < t < \infty$ számegyenesen akár a $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ egész számok halmazán dolgozunk. Ráadásul, mivel $\omega(t)$ korlátos, az $\omega(t)e^{-\alpha t^2}$ függvény integrálható. Ezért alkalmazható rá a Proposition 1A vagy Proposition 1B eredménye. Célunk az, hogy ennek segítségével $\alpha \to 0$ határátmenetet alkalmazva bebizonyítsuk a Bochner tételt. Ennek érdekében megfogalmazom a valószínűségszámítás alábbi klasszikus eredményeit.

Tétel eloszlások konvergenciájának jellemzéséről karakterisztikus függvények segítségével. *Legyen $F_n(u)$ eloszlásfüggvények egy sorozata a számegyenesen $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényekkel, $n = 1, 2, \dots$. Ha a $\varphi_0(t) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(t)$ határérték létezik minden t pontban, és a $\varphi_0(t)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(u)$ eloszlásfüggvény a számegyenesen, amelynek a $\varphi_0(t)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az $F_n(u)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak ehhez az $F_0(u)$ eloszlásfüggvényhez.*

Megfogalmazom ezen eredmény megfelelőjét a $[-\pi, \pi)$ intervallumra koncentrált mértékek konvergenciájáról. (Itt valójában a $[-\pi, \pi)$ intervallum a számegyenesnek, mint additív csoportnak a faktorcsoportját jelöli a $2\pi\mathbb{Z}$ részcsoportja szerint, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok additív csoportja.)

Tétel a $[-\pi, \pi)$ intervallumon definiált valószínűségi mértékek konvergenciájáról. *Legyen μ_n, $n = 1, 2 \dots$, valószínűségi mértékek sorozata a $[-\pi, \pi)$ intervallumban és definiáljuk mindegyik μ_n mérték $\varphi_n(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\mu_n(\,dt)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, Fourier transzformáltját. Ha létezik, a $\varphi_0(k) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n(k)$ határérték minden $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ számra, akkor létezik olyan μ_0 valószínűségi mérték a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, amelyre $\varphi_0(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\mu_0(\,dt)$ minden $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ számra. Ezenkívül a μ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mértéksorozat gyengén konvergál ehhez a μ_0 mértékhez.*

A teljesség kedvéért felidézem a következő definiciót.

Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája. *Azt mondjuk, hogy egy (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus téren definiált μ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi mértékek sorozata gyengén konvergál egy az (X, ρ) téren definiált μ_0 valószínűségi mértékhez, ha minden az (X, ρ) téren definiált folytonos és korlátos függvényre teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} \int f(x)\mu_n(\,dx) = \int f(x)\mu_0(\,dx)$ reláció.*

Megjegyzés. Egy (X, ρ) teljes szeparábilis metrikus téren definiált μ valószínűségi mértéket egyértelműen meghatároz az $\int f(x)\mu(\,dx)$ integrálok rendszere, ha ezt az integrált az összes az (X, ρ) téren definiált korlátos és folytonos $f(\cdot)$ függvényre vesszük. E tény ismerete szükséges annak igazolásához, hogy valószínűségi mértékek fent definiált gyenge limesze egyértelműen definiálva van.

A $[-\pi, \pi)$ intervallumon definiált valószínűségi mértékek konvergenciájáról szóló tétel kevésbé ismert, mint az előtte megfogalmazott eredmény, noha a bizonyítása egyszerűbb. Röviden vázolom ezt a bizonyítást.

Ismert az az eredmény, hogy a $[-\pi, \pi)$ intervallumon definiált valószínűségi mértékek tetszőleges sorozatának van a valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája szerint konvergens részsorozata. (Általánosabban, ez az állítás igaz bármely (szeparábilis) kompakt metrikus téren definiált valószínűségi mértékek sorozatára is.) Tekintsük a μ_n, $n = 1, 2, \dots$ valószínűségi mértékeknek egy tetszőleges részsorozatát. Akkor ennek a részsorozatnak van egy konvergens részsorozata. Továbbá, a tétel feltételei szerint e konvergens részsorozat limeszének egyértelműen meg van határozva a $\varphi_0(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, Fourier transzformáltja. Ezt felhasználva nem nehéz belátni Weierstrass második approximációs tételének a segítségével, hogy ezen részsorozat bármely választása esetén az az egyértelműen meghatározott μ_0 mérték jelenik meg határértékként, amelynek $\varphi_0(k)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, a Fourier transzformáltja. Abból, hogy a μ_n sorozat tetszőleges részsorozatának van konvergens részsorozata, és annak mindig ugyanaz a μ_0 mérték a limesze következik, hogy a μ_n mérték is konvergál, a limesze pedig ez a μ_0 mérték.

Rátérek a Bochner tétel bizonyítására.

A Bochner tétel bizonyítása. Lássuk be először azt, hogy ha $\omega(t)$ folytonos pozitív definit függvény a számegyenesen vagy pozitív definit függvény az egész számok halmazán akkor teljesíti az (1.3) illetve (1.4) formulát alkalmas $G(\,dx)$ mértékkel. Feltehetjük az egyszerűség kedvéért azt, hogy $\omega(0) = 1$, mert dolgozhatunk az $\frac{\omega(t)}{\omega(0)}$ függvénnyel is az $\omega(t)$ függvény helyett. (Azt kell észrevenni, hogy az $\omega(0) = 0$ esetben az 1.1. lemma alapján $\omega(t) = 0$ minden t pontban, és ebben az esetben (1.3) illetve (1.4) formula igaz az azonosan nulla G mértékkel.)

Láttuk, hogy tetszőleges $\alpha > 0$ számra az $\omega(t)e^{-\alpha t^2}$ függvény integrálható és folytonos, pozitív definit függvény, ha $-\infty < t < \infty$, és pozitív definit, abszolút konvergens sorozat, ha $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Ezért a Proposition 1A, illetve Proposition 1B eredménye alapján mind a két esetben előáll, mint egy (sűrűségfüggvénnyel rendelkező) G_α mérték Fourier transzformáltja. Sőt az $\omega(0) = 1$ feltétel miatt azt is tudjuk, hogy G_α valószínűségi mérték. Mivel $\lim\limits_{\alpha \to 0} \omega(t)e^{-\alpha t^2} = \omega(t)$ minden t számra, ha $\alpha \to 0$ ezért a *Tétel eloszlások konvergenciájának jellemzéséről karakterisztikus függvények segítségével* illetve a *Tétel a $[-\pi, \pi)$ intervallumon definiált valószínűségi mértékek konvergenciájáról* eredménye alapján tudjuk, hogy a G_α mértékek gyengén konvergálnak egy G mértékhez, és az az $\omega(t)$ függvény teljesíti az (1.3) illetve (1.4) formulát ezzel a G mértékkel.

Lássuk be, hogy az (1.3) illetve (1.4) formulában szereplő G mérték egyértelműen meg van határozva. Azt kell megmutatni, hogy ha G_1 és G_2 két véges mérték a számegyenesen, és $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} G_1(\,dx) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} G_2(\,dx)$ minden t valós számra, vagy G_1 és G_2 két véges mérték a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, és $\int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} G_1(\,dx) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{itx} G_2(\,dx)$ minden $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ számra, akkor $G_1 = G_2$. (Ezt valójában bebizonyítják az előbb felhasznált tételek bizonyításában, de most megismételjük ezt a bizonyítást.)

Elég megmutatni azt, hogy $\int h(x) G_1(\,dx) = \int h(x) G_2(\,dx)$ minden a számegyenesen, illetve a $[-\pi, \pi)$ intervallumon definiált folytonos és korlátos függvényre mind a két esetben. A második esetben ez az állítás azonnal következik Weierstrass második approximációs tételéből, amely szerint minden a $[-\pi, \pi)$ intervallumban folytonos függvény tetszőleges pontossággal közelíthető a szuprémum normában trigonometrikus polinomokkal. Az első eset is igazolható Weierstrass második approximációs tételének a segítségével. Először azt látjuk be, hogy egy folytonos, és egy véges intervallumon kívül eltűnő függvény integrálja a G_1 és G_2 mérték szerint egyenlő. Ugyanis egy ilyen függvényt egy a $[-T,T]$ intervallumon definiált függvénynek tekintve egy elég nagy $T>0$ számmal, és véve ennek a függvénynek a $2T$ periódusú kiterjesztését a számegyenesre azt kapjuk, hogy az e periódikus kiterjesztés segítségével kapott folytonos és korlátos függvény integrálja a G_1 illetve a G_2 mérték szerint egyenlő. Ezután $T\to\infty$ határátmenettel azt kapjuk, hogy az eredeti függvény integrálja is megegyezik e két mérték szerint.

Ezután felhasználjuk, hogy egy tetszőleges folytonos és korlátos függvényt jól tudunk közelíteni korlátos tartójú, folytonos függvényekkel. Minden $T>0$ számra létezik olyan folytonos függvény, amelynek tartója a $[-T-1,T+1]$ intervallum, a $[-T,T]$ intervallumban az értéke 1, és az abszolút értéke kisebb vagy egyenlő 1-gyel minden pontban. Egy folytonos és korlátos függvényt megszorozva egy ilyen függvénnyel, és elvégezve a $T\to\infty$ határátmenetet megkapjuk a kívánt állítást.

Azt kell még belátni, hogy egy pozitív definit $\omega(t)$ függvény akkor és csak akkor valós értékű, ha az (1.3) illetve (1.4) reprezentációjában szereplő G mérték páros. Az, hogy az $\omega(\cdot)$ függvény valós, ha a G mérték páros nyilvánvaló. A másik irányú állítás igazolásának érdekében vegyük észre, hogy az 1.1. lemma alapján $\omega(-t)=\overline{\omega(t)}$, ezért $\omega(t)$ akkor és csak akkor valós (akkor és csak akkor teljesül az $\omega(t)=\overline{\omega(t)}$ azonosság), ha $\omega(t)=\omega(-t)$. Ezért abban az esetben, ha $\omega(t)$ valós értékű felírhatjuk az $\omega(t)=\omega(-t)=\int e^{-itx}G(\,dx)=\int e^{itx}G^-(dx)$ azonosságot, ahol $G^-(A)=G(-A)$ minden mérhető A halmazra. Ezt összehasonlítva az $\omega(t)$ függvény (1.3) illetve (1.4) előállításával, és felhasználva azt, hogy az ebben az előállításban szereplő G mérték egyértelműen meghatározott azt kapjuk, hogy $G=G^-$. Ez azt jelenti, hogy a G mérték páros. A Bochner tétel bizonyítását befejeztük.

Számunkra a Bochner tételnek az alábbi következménye lesz érdekes.

A Bochner tétel következménye. *Legyen adva egy $X(t)$, $EX(t)=0$, $-\infty<t<\infty$, folytonos idejű stacionárius Gauss folyamat, és jelölje $r(t)=EX(0)X(t)$, $-\infty<t<\infty$, e sztochasztikus folyamat kovariancia függvényét. Ha $r(\cdot)$ folytonos függvény a számegyenesen, akkor létezik egy olyan egyértelműen meghatározott $G(\cdot)$ véges, páros mérték a számegyenesen (azaz $G(A)=G(-A)$ minden mérhető A halmazra), amellyel az $r(\cdot)$ kovariancia függvény megadható*

$$r(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}G(\,dx),\quad -\infty<t<\infty, \tag{1.17}$$

alakban.

Megfordítva, ha G egy véges, páros mérték a számegyenesen, akkor létezik egy olyan $X(t)$, $EX(t)=0$, $-\infty<t<\infty$, folytonos idejű stacionárius Gauss folyamat, amelynek $r(t)=EX(0)X(t)$ kovariancia függvénye folytonos, és az (1.17) képlettel adható meg ezen G mérték segítségével.

Legyen adva egy $X(n)$, $EX(n)=0$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamat, és jelölje $r(n)=EX(0)X(n)$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, e sztochasztikus folyamat kovariancia függvényét. Létezik egy olyan egyértelműen meghatározott $G(\cdot)$ véges, páros mérték (azaz $G(A)=G(-A)$ minden mérhető A halmazra) a $[-\pi,\pi)$ intervallumon (pontosabban a számegyenes additív csoportjának faktorcsoportján a $2\pi\mathbb{Z}$

részcsoport szerint, ahol $\mathbb{Z}$ az egész számok additív csoportját jelöli) úgy, hogy az $r(\cdot)$ kovariancia függvény megadható

$$r(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx} G(\,dx), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{1.18}$$

alakban.

Megfordítva, ha G egy véges, páros mérték a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, (hasonlóan értelmezve ezt az intervallumot, mint az előbb tettük), akkor létezik egy olyan $X(n)$, $EX(n) = 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamat az egész számok halmazán, amelynek $r(n) = EX(0)X(n)$ kovariancia függvénye az (1.18) képlettel adható meg ezen G mérték segítségével.

A következményben szereplő G mértéket a stacionárius Gauss folyamat spektrál mértékének nevezik az irodalomban.

A következmény bizonyítása. A fenti következmény igazolásához azt kell észrevenni, hogy egy stacionárius Gauss folyamat $r(t) = EX(0)X(t) = EX(s)X(t+s)$, $-\infty < s, t < \infty$, vagy $r(n) = EX(0)X(n) = EX(m)EX(n+m)$, $n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, kovariancia függvénye (valós értékű) pozitív definit függvény. Valóban, tetszőleges $t_1, \dots, t_k$ időpontokra és $z_1, \dots, z_k$ komplex számokra

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} z_j \bar{z}_l r(t_j - t_l) &= \sum_{j=1}^{k} \sum_{l=1}^{k} z_j \bar{z}_l EX(t_j)X(t_l) \\ &= E\left(\sum_{j=1}^{k} z_j X(t_j)\right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{k} z_j X(t_j)\right)} \ge 0, \end{aligned}$$

azaz $r(t)$ pozitív definit függvény. Az, hogy $r(n)$ pozitív definit függvény a diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamatok esetében hasonlóan látható.

Megfordítva, ha $r(t)$, $-\infty < t < \infty$, vagy $r(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, pozitív definit függvény, akkor létezik az az adott $r(\cdot)$ kovariancia függvénnyel rendelkező stacionárius Gauss folyamat, mert minden $t_1, \dots, t_k$ pontra létezik $EX(t_j)X(t_l) = r(t_j - t_l)$ kovariancia függvénnyel rendelkező $(X(t_1), \dots, X(t_k))$ többdimenziós normális eloszlású vektor.

Megjegyzés. A folytonos idejű stacionárius Gauss folyamatok $r(\cdot)$ kovariancia függvényét csak akkor jellemeztük az előző következményben, ha az folytonos függvény. Ez a feltétel nem hagyható el. Valóban, legyenek $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, független, standard normális eloszlású valószínűségi változók. Akkor ezek olyan stacionárius Gauss folyamatot definiálnak, amelynek $r(\cdot)$ kovariancia függvényét az $r(0) = 1$, $r(t) = 0$, ha $t \neq 0$ képlettel adhatjuk meg. Ez a függvény nem adható meg (1.17) alakban.

Stacionárius Gauss folyamatok megadása véletlen mértékek segítségével. Az előző fejezeben megmutattuk, hogy egy stacionárius Gauss folyamat kovariancia függvénye megadható, mint egy spektrál mérték Fourier transzformáltja. Ebben a fejezetben megmutatjuk, hogy nemcsak a kovariancia függvény, hanem maga a Gauss folyamat is megadható, mint egy olyan véletlen Gauss mérték szerinti integrál, amely véletlen Fourier transzformáltnak is tekinthető. Ez lehetővé teszi azt is, hogy a Gauss folyamaton természetes módon definiálható shift transzformáció hatását is meg tudjuk adni ezen véletlen integrál segítségével. A fenti állítások pontos megfogalmazása érdekében először néhány fogalmat be kell vezetni. Először a shift transzformáció definicióját fogom tárgyalni.

Tekintsünk egy $X(t)$, $EX(t) = 0$, $-\infty < t < \infty$, folytonos idejű vagy egy $X(n)$, $EX(n) = 0$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamatot egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, és definiáljuk azokat az $\mathcal{M}$ (valós) és $\bar{\mathcal{M}}$ (komplex) Hilbert tereket, amelyek elemei az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező négyzetesen integrálható, nulla várható értékű valós illetve komplex értékű függvényei, és a skalárszorzatot ezekben a Hilbert terekben a $(\xi, \eta) = E\xi\eta$, $\xi, \eta \in \mathcal{M}$, illetve a $(\xi, \eta) = E\xi\bar{\eta}$, $\xi, \eta \in \bar{\mathcal{M}}$ képletek adják meg. Jelölje $\mathcal{H}$ az $\mathcal{M}$ Hilbert térnek azt a (valós) alterét, amely a folytonos idejű folyamatok esetében az összes $\sum c_k X(t_{j_k})$ alakú, a diszkrét idejű folyamatok esetében pedig öszes $\sum c_k X(n_{j_k})$ alakú valós együtthatós véges lineáris kombináció formájában megadható valószínűségi változóból álló halmaz lezártja. A fenti definiciókban a t_{j_k} argumentumok valós, az n_{j_k} argumentumok pedig egész számok lehetnek. Hasonló módon definiáljuk a $\bar{\mathcal{M}}$ Hilbert tér $\bar{\mathcal{H}}$ alterét azzal a különbséggel, hogy a tekintett $\sum c_k X(t_{j_k})$ illetve $\sum c_k X(n_{j_k})$ alakú lineáris kombinációkban a c_k együtthatók komplex számok lehetnek. Folytonos idejű stacionárius Gauss folyamatok esetében definiálni kívánunk alkalmas módon T_t, shift transzformációkat minden $t \in (\infty, \infty)$ paraméterre a $\mathcal{H}$ vagy $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert térben. Hasonló módon diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamatok esetében definiálni kívánunk alkalmas módon T_n shift transzformációkat minden $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ paraméterre a $\mathcal{H}$ és $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert terekben.

A folytonos idejű esetben azt kívánjuk, hogy legyen $T_t X(s) = X(t+s)$ minden s valós számra, a diszkrét időben pedig azt, hogy legyen $T_n X(m) = X(n+m)$ minden m egész számra. Ezenkívül azt is szeretnénk, hogy a T_t illetve a T_n operátorok unitérek legyenek a $\mathcal{H}$ vagy $\bar{\mathcal{H}}$ térben. Emlékeztetek arra, hogy egy operátort akkor nevezünk unitérnek egy Hilbert térben, ha nemcsak normatartó, hanem invertálható is. (A véges dimenziós Euklideszi terektől eltérően abból, hogy egy operátor normatartó egy Hilbert térben nem következik, hogy invertálható is.) A következő lemmában belátjuk, hogy létezik egy egyértelműen meghatározott T_t vagy T_n operátor a $\mathcal{H}$ Hilbert térben a kívánt tulajdonságokkal, és ezek figyelembe vételével definiálni tudjuk a shift transzformációt. Megjegyzem, hogy a shift transzformációt definiálhatnánk a nagyobb $\mathcal{M}$ vagy $\bar{\mathcal{M}}$ Hilbert térben is, de mivel erre nem lesz szükségünk ezt nem tesszük.

2.1. Lemma. *Legyen adva egy folytonos idejű $X(t)$, $EX(t) = 0$, $-\infty < t < \infty$, stacionárius Gauss folyamat egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Létezik minden $t \in (-\infty, \infty)$ paraméterre egy olyan egyértelműen meghatározott T_t normatartó lineáris transzformáció a lemma megfogalmazása előtt definiált $\mathcal{H}$ vagy $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert térben, amely teljesíti a $T_t X(s) = X(t+s)$ relációt minden $-\infty < s < \infty$ paraméterre. A T_t transz-*

formáció unitér, és teljesül a $T_{t_1}T_{t_2} = T_{t_1+t_2}$ *azonosság minden* $-\infty < t_1, t_2 < \infty$ *számpárra.*

Legyen adva egy diszkrét idejű $X(n)$, $EX(n) = 0$, $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$, *stacionárius Gauss folyamat egy* $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ *valószínűségi mezőn. Létezik minden* $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$ *paraméterre egy olyan egyértelműen meghatározott* T_n *normatartó lineáris transzformáció a lemma megfogalmazása előtt definiált* $\mathcal{H}$ *vagy* $\bar{\mathcal{H}}$ *Hilbert térben, amely teljesíti a* $T_nX(m) = X(n+m)$ *relációt minden* $m = 0, \pm1, \pm2, \dots$ *paraméterre. A* T_n *transzformáció unitér, és teljesül a* $T_{n_1}T_{n_2} = T_{n_1+n_2}$ *azonosság minden* $n_1, n_2 = 0, \pm1, \pm2, \dots$ *számpárra.*

A 2.1. lemma bizonyítása. Tekintsünk két véges sok $X(t)$ valószínűségi változó lineáris kombinációjaként definiált $\eta = \sum a_jX(t_j)$ és $\zeta = \sum b_jX(t'_j)$ valószínűségi változót, és ezek $U\eta = \sum a_jX(t_j + t)$ és $U\zeta = \sum b_jX(t'_j + t)$ transzformációit. Vegyük észre, hogy $(\eta, \zeta) = (U\eta, U\zeta)$, mert mind a két skalárszorzat a $\sum\sum a_j\bar{b}_kr(t_j - t'_k)$ összeggel egyenlő, ahol $r(s) = EX(0)X(s) = EX(u)X(u+s)$ tetszőleges u és s számokkal. (Ebben a lépésben kihasználjuk, hogy (gyengén) stacionárius sztochasztikus folyamatokkal dolgozunk.) Ez az azonosság azt is biztosítja, hogy a $T_t\eta = U\eta = \sum ajX(t_j + t)$ képlettel definiáljuk a véges lineáris kombinációként felírható $\eta = \sum a_jX(t_j)$ valószínűségi változó képét a T_t transzformáció hatására. E definició jogosságához az kell észrevenni, hogy ha egy η valószínűségi változónak két különböző reprezentációját adjuk meg, azaz $\eta = \zeta$ valamely $\zeta = \sum b_jX(t'_j)$ véges lineáris kombinációval, akkor a $T_t\eta = T_t\zeta$ azonosság is igaz. Ez azért van így, mert $\|\zeta - \eta\|^2 = (\zeta - \eta, \zeta - \eta) = 0$ esetén a $\|T_t\zeta - T_t\eta\|^2 = (T_t(\zeta - \eta), T_t(\zeta - \eta)) = 0$ azonosság is teljesül. Mivel a tekintett véges lineáris kombinációk egy mindenütt sűrű alteret alkotnak a $\mathcal{H}$ vagy $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert térben, és T_t korlátos ezen az altéren ezért a T_t operátor definicióját kiterjeszthetjük az egész $\mathcal{H}$ vagy $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert térre. Ez a transzformáció normatartó, és invertálható is. Ugyanis minden $\eta = \sum a_jX(t_j)$ véges összeg felírható $\eta = T_t\eta'$ alakban az $\eta' = \sum a_jX(t_j - t)$ valószínűségi változóval. Nem nehéz ezek után belátni, hogy nemcsak ezen mindenütt sűrű altér elemeinek van inverze, hanem ezen altér lezártjában, azaz a $\mathcal{H}$ vagy $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert térben is invertálható minden elem.

Mivel előírtuk, hogy $T_tX(s) = X(t + s)$ minden s számra, és T_t korlátos, lineáris transzformáció, ezért azt csak az előbb megadott módon definiálhatjuk. Végül abból, hogy $T_{t_1}T_{t_2}X(s) = T_{t_1}X(s + t_2) = X(s + t_1 + t_2) = T_{t_1+t_2}X(s)$ minden $s \in (-\infty, \infty)$ számra, és korlátos lineáris transzformációkkal dolgozunk következik, hogy teljesül a $T_{t_1}T_{t_2} = T_{t_1+t_2}$ azonosság is.

A diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamatokról szóló állítást ugyanígy kell bebizonyítani, csak a jelölést kell kissé megváltoztatni. Ezért ennek tárgyalását elhagyom. A 2.1. lemmát bebizonyítottuk.

Meg akarjuk mutatni, hogy a stacionárius Gauss folyamatokat elő tudjuk állítani megfelelő véletlen Gauss mértékek szerinti integrálként. Annak érdekében, hogy ezt a kérdést tárgyalhassuk először be kell vezetni azokat a véletlen Gauss mértékeket, amelyek szerint integrálni fogunk. Ezen Gauss mértékek tulajdonságai szoros kapcsolatban vannak az előállítandó stacionárius Gauss folyamat spektrál mértékével.

Legyen adva egy véges, páros G mérték a számegyenesen vagy a $[-\pi, \pi)$ szakaszon. Ez a G mérték tekinthető egy alkalmas stacionárius Gauss folyamat spektrál mértékének. (A $[-\pi, \pi)$ intervallum jelen esetben is úgy értendő mint a számegyenes additív csoportjának faktorcsoportja a $2\pi\mathbb{Z}$ részcsoport szerint.) Be fogjuk vezetni alkalmasan definiált, komplex értékű valószínűségi változóknak egy a számegyenes vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallum mérhető részhalmazaival paraméterezett rendszerét, amelyet a G spektrál mérték szerinti véletlen spektrál mértéknek fogunk nevezni. Definiálni fogunk természetes módon egy véletlen integrált ezen véletlen spektrál mérték segítségével. Meg fogjuk mutatni, hogy ezen integrál segítségével definiálható egy G spektrál mértékkel rendelkező stacionárius Gauss folyamat. Ezt az eredményt (felhasználva a Gauss folyamat előállításában szereplő integrál speciális alakját) úgy is interpretálhatjuk, hogy nemcsak a Gauss folyamat kovariancia függvénye állítható elő, mint egy spektrál mérték Fourier transzformáltja, hanem maga a Gauss folyamat is előállítható, mint egy véletlen spektrál mérték Fourier transzformáltja. Ez az előállítás lehetővé teszi azt, hogy a shift transzformáció hatását is tanulmányozni tudjuk egy véletlen integrál segítségével.

Először megadom a véletlen spektrál mérték definicióját.

Véletlen spektrál mérték definiciója. *Legyen adva egy véges, páros G mérték a számegyenesen vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallumon. Azt mondjuk, hogy a komplex értékű $Z_G(A) = \xi_G(A) + i\eta_G(A)$, $A \in \mathcal{B}$, valószínűségi változók rendszere, ahol $\mathcal{B}$ a számegyenes vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallum Borel mérhető halmazainak a σ-algebráját jelöli, a G mérték szerinti véletlen spektrál mérték, ha teljesíti a következő tulajdonságokat:*

(i) A $\xi_G(A)$, $\eta_G(A)$, $A \in \mathcal{B}$, valószínűségi változók rendszere egy Gauss mezőt alkot, azaz akárhogy is veszünk ki belőlük véges sok tagot, ezek együttese többváltozós, normális eloszlású véletlen vektor.

(ii) $EZ_G(A) = 0$ minden $A \in \mathcal{B}$ halmazra.

(iii) $EZ_G(A)\overline{Z_G(B)} = G(A \cap B)$ minden $A, B \in \mathcal{B}$ halmazpárra.

(iv) $Z_G(-A) = \overline{Z_G(A)}$ minden $A \in \mathcal{B}$ halmazra.

Ahhoz, hogy a véletlen spektrál mértékekkel dolgozni tudjunk meg kell ismernünk azok legfontosabb tulajdonságait. Többek között meg fogjuk mutatni, hogy tetszőleges G spektrál mérték esetén létezik egy a G mérték szerinti Z_G véletlen spektrál mérték. Bár ez talán egyszerűbben látható néhány később tárgyalandó eredmény segítségével, amelyek arra is magyarázatot adhatnak, hogy miért volt érdemes az ebben a definicióban megadott tulajdonságokkal rendelkező véletlen spektrál mértékeket bevezetni, meg fogjuk adni ennek az állításnak egy direkt bizonyítását is. Azt is meg fogjuk mutatni, hogy egy G mérték szerinti véletlen spektrál mérték véges dimenziós eloszlásait a G mérték egyértelműen meghatározza.

A következő lemmában megfogalmazom a véletlen spektrál mérték néhány fontos tulajdonságát.

2.2. Lemma. *Legyen adva egy véges, páros G mérték a számegyenesen vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallumon, és legyen $Z_G(A)$, $A \in \mathcal{B}$, egy G mérték szerinti véletlen spektrál mérték. Ez a véletlen spektrál mérték teljesíti a következő tulajdonságokat.*

(v) $\sum\limits_{j=1}^{n} Z_G(A_j) = Z_G\left(\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j\right)$, *ha* $A_1,\dots,A_n$ *diszjunkt, Borel mérhető halmazok.*

(vi) *A* $\operatorname{Re} Z_G(A)$, $A\in\mathcal{B}$, *valószínűségi változók rendszere független az* $\operatorname{Im} Z_G(A)$, $A\in\mathcal{B}$ *valószínűségi változók rendszerétől.*

(vii) *A* $Z_G(A\cup(-A))$ *alakú valószínűségi változók valós értékűek. Ha* $A_1\cup(-A_1)$, $\dots$ $A_n\cup(-A_n)$ *diszjunkt halmazok, akkor a* $Z_G(A_1)$, $\dots$, $Z_G(A_n)$ *valószínűségi változók függetlenek.*

(viii) $\operatorname{Re} Z_G(A) = \operatorname{Re} Z_G(-A)$, *és* $\operatorname{Im} Z_G(A) = -\operatorname{Im} Z_G(-A)$ *minden* $A\in\mathcal{B}$ *halmazra, és ha* $A\cap(-A)=\emptyset$, *akkor* $E\operatorname{Re} Z_G(A)^2 = E\operatorname{Im} Z_G(A)^2 = \frac{G(A)}{2}$.

(ix) *Vezessük be a* $\operatorname{Re} Z_G(A) = \xi_A$ *és* $\operatorname{Im} Z_G(A) = \eta_A$ *jelölést, és jelölje* $\chi_A(\cdot)$ *egy* A *halmaz indikátor függvényét. Ezzel a jelöléssel*

$$\begin{aligned} E\xi_A\xi_B &= \frac{1}{4}[G(A\cap B) + G((-A)\cap(-B)) + G(A\cap(-B)) + G((-A)\cap B)] \\ &= \frac{1}{4}\int [\chi_A(x)+\chi_{(-A)}(x)][\chi_B(x)+\chi_{(-B)}(x)]G(\,dx), \end{aligned} \tag{2.1}$$

és

$$\begin{aligned} E\eta_A\eta_B &= \frac{1}{4}[G(A\cap B) + G((-A)\cap(-B)) - G(A\cap(-B)) - G((-A)\cap B)] \\ &= \frac{1}{4}\int [\chi_A(x)-\chi_{(-A)}(x)][\chi_B(x)-\chi_{(-B)}(x)]G(\,dx) \end{aligned} \tag{2.2}$$

minden $A,B\in\mathcal{B}$ *halmazra.*

Tetszőleges a számegyenesen vagy a $[-\pi,\pi)$ *intervallumon megadott véges, páros* G *mértékre létezik a* G *mérték szerinti véletlen* Z_G *spektrál mérték, és ennek a* Z_G *véletlen spektrál mértéknek a véges dimenziós eloszlásait meghatározza a* G *(spektrál) mérték.*

Megjegyzés. Azok az azonosságok, amelyekben két valószínűségi változó egyenlőségét fogalmaztuk meg, (ilyenek például a (iv) és (v) tulajdonságokat kifejező azonosságok) úgy értendőek, hogy a két oldalon álló kifejezés egy valószínűséggel megegyezik. Az a kivételes null mértékű halmaz, ahol a két kifejezés nem egyezik meg függhet az azonosságban szereplő valószínűségi változóktól.

A 2.2. lemma bizonyítása. Az (v) tulajdonság igazolásához elég megmutatni, hogy

$$\begin{aligned} &E\left(\sum_{j=1}^{n} Z_G(A_j) - Z_G\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right)\overline{\left(\sum_{j=1}^{n} Z_G(A_j) - Z_G\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right)} \\ &\qquad = E\left(\sum_{j=1}^{n} Z_G(A_j) - Z_G\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{Z_G(A_j)} - \overline{Z_G\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right)}\right) = 0. \end{aligned}$$

Ezt az azonosságot azonban megkapjuk a (iii) tulajdonságból a várható értékben vett kifejezésben vett tagonkénti szorzással, felhasználva a G mérték additivitását, valamint azt, hogy az $A_1, \dots A_n$ halmazok diszjunktak.

A (vi) tulajdonság igazolásához elég megmutatni, hogy $E \operatorname{Re} Z_G(A) \operatorname{Im} Z_G(B) = 0$ minden $A, B \in \mathcal{B}$ halmazpárra. Ez a redukció azért lehetséges, mert a $\operatorname{Re} Z_G(A)$ és $\operatorname{Im} Z_G(B)$ alakú valószínűségi változók, $A, B \in \mathcal{B}$, együttesen normális eloszlásúak, ezért ebben az esetben a korrelálatlanságból következik a függetlenség is. Viszont ez az azonosság következik az alábbi a (iii) és (iv) tulajdonságokat felhasználó számolásból.

$$\begin{aligned} E \operatorname{Re} Z_G(A) \operatorname{Im} Z_G(B) &= \frac{1}{4i} E(Z_G(A) + \overline{Z_G(A)})(Z_G(B) - \overline{Z_G(B)}) \\ &= \frac{1}{4i} E(Z_G(A) + Z_G(-A))(\overline{Z_G(-B)} - \overline{Z_G(B)}) \\ &= \frac{1}{4i} G(A \cap (-B)) - \frac{1}{4i} G(A \cap B) \\ &\qquad + \frac{1}{4i} G((-A) \cap (-B)) - \frac{1}{4i} G((-A) \cap B) = 0, \end{aligned}$$

mivel $G(D) = G(-D)$ minden $D \in \mathcal{B}$ halmazra. Speciálisan $G((-A) \cap (-B)) = G(A \cap B)$, és $G((-A) \cap B) = G(A \cap (-B))$.

A bizonyítás következő lépésében a (ix) relációt bizonyítjuk be hasonló módon. Felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned} E\, \xi_A \xi_B &= \frac{1}{4} E(Z_G(A) + \overline{Z_G(A)})(Z_G(B) + \overline{Z_G(B)}) \\ &= \frac{1}{4} E(Z_G(A) + Z_G(-A))(\overline{Z_G(-B)} + \overline{Z_G(B)}) \\ &= \frac{1}{4} G(A \cap B) + \frac{1}{4} G((-A) \cap (-B)) + \frac{1}{4} G(A \cap (-B)) + \frac{1}{4} G((-A) \cap B), \end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned} E\, \eta_A \eta_B &= -\frac{1}{4} E(Z_G(A) - \overline{Z_G(A)})(Z_G(B) - \overline{Z_G(B)}) \\ &= \frac{1}{4} E(Z_G(A) - Z_G(-A))(\overline{Z_G(B)} - \overline{Z_G((-B))}) \\ &= \frac{1}{4} G(A \cap B) + \frac{1}{4} G((-A) \cap (-B)) - \frac{1}{4} G(A \cap (-B)) - \frac{1}{4} G((-A) \cap B), \end{aligned}$$

ahonnan következik a (2.1) és (2.2) formulák első azonossága. Ezen formulák második azonossága innen egyszerűen látható.

A (vii) és (viii) relációk első állítása következik a (iv) relációból, a (vii) reláció második állítása pedig a (2.1) és (2.2) formulákból és a (vi) relációból. Azt kell észrevenni, hogy ha $A_1 \cup (-A_1), \dots A_n \cup (-A_n)$ diszjunkt halmazok, akkor

$$E \operatorname{Re} Z_G(A_j) \operatorname{Re} Z_G(A_k) = E \operatorname{Im} Z_G(A_j) \operatorname{Im} Z_G(A_k) = 0$$

minden $1 \leq j,k \leq n$, $j \neq k$ indexpárra. Innen, a tekintett valószínűségi változók együttes Gauss eloszlásából és a (vi) relációból következik a (vii) pontban állított függetlenség. A (viii) reláció második állítása egyszerűen következik a (2.1) és (2.2) formulákból.

A következő lépésben bebizonyítom, hogy minden korlátos és páros G mértékhez létezik egy G mérték szerinti Z_G véletlen spektrál mérték. Ennek érdekében a következő két állítást igazolom.

a) Létezik két olyan független, nulla várható értékű együttesen normális eloszlású ξ_A és η_A, $A \in \mathcal{B}$ valószínűségi változókból álló valószínűségi mező, amelynek $E\xi_A\xi_B$ és $E\eta_A\eta_B$, $A, B \in \mathcal{B}$, kovariancia függvényei teljesítik a (2.1) illetve (2.2) formulát.
b) Legyen ξ_A és η_A, $A \in \mathcal{A}$, két az a) pontban felsorolt tulajdonságokat kielégítő valószínűségi mező. Akkor $Z_G(A) = \xi_A + i\eta_A$, $A \in \mathcal{B}$, a G mérték szerinti véletlen spektrál mérték.

Az a) pont igazolásához elég megmutatni, hogy tetszőleges $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{B}$ halmazokhoz léteznek olyan $\xi_{A_1}, \dots, \xi_{A_n}$ illetve $\eta_{A_1}, \dots, \eta_{A_n}$ nulla várható értékű normális eloszlású vektorok, amelynek kovarianciáját a (2.1) illetve (2.2) formula adja meg, ha e formulákban az A és B argumentumokat az A_j és A_k, $1 \leq j,k \leq n$, argumentumokkal helyettesítjük. Ez ekvivalens azzal, hogy $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} z_j \bar{z}_k E\xi_{A_j}\xi_{A_k} \geq 0$ és $\sum\limits_{j=1}^{n} \sum\limits_{k=1}^{n} z_j \bar{z}_k E\eta_{A_j}\eta_{A_k} \geq 0$ tetszőleges $z_1, \dots, z_n$ komplex számokra.

Ezen állítás igazolására felhasználjuk az $E\xi_A\xi_B$ és $E\eta_A\eta_B$ várható értékre adott kifejezés jobboldalát. Azt kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_j\bar{z}_k E\xi_{A_j}\xi_{A_k} &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{z_j\bar{z}_k}{4} \int [\chi_{A_j}(x) + \chi_{(-A_j)}(x)][\chi_{A_k}(x) + \chi_{(-A_k)}(x)] G(\,dx) \\
&= \frac{1}{4} \int \left(\sum_{j=1}^{n} z_j(\chi_{A_j}(x) + \chi_{(-A_j)}(x)) \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j(\chi_{A_j}(x) + \chi_{(-A_j)(x)}) \right)} G(\,dx) \geq 0,
\end{aligned}
$$

és hasonlóan

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} z_j\bar{z}_k E\eta_{A_j}\eta_{A_k} \\
&\qquad = \frac{1}{4} \int \left(\sum_{j=1}^{n} z_j(\chi_{A_j}(x) - \chi_{(-A_j)(x)}) \right) \overline{\left(\sum_{j=1}^{n} z_j(\chi_{A_j}(x) - \chi_{(-A_j)}(x)) \right)} G(\,dx) \geq 0.
\end{aligned}
$$

Az, hogy a b) pontban definiált $Z_G(A) = \xi_A + i\eta_A$, $A \in \mathcal{B}$, véletlen mérték teljesíti a G mérték szerinti spektrál mérték definiciójában szereplő (i) és (ii) tulajdonságot nyilvánvaló. Annak igazolásához, hogy teljesíti a (iii) tulajdonságot azt kell megmutatni (a ξ_A és η_A alakú valószínűségi változók függetlensége és nulla várható értéke miatt), hogy $E(\xi_A\xi_B+\eta_A\eta_B)=G(A\cap B)$. Ez igaz, mert a (2.1) és (2.2) formulák, illetve a G mérték $G(-A)=G(A)$ tulajdonsága miatt

$$E(\xi_A\xi_B+\eta_A\eta_B)=\frac{1}{2}[G(A\cap B)+G((-A)\cap(-B))]=G(A\cap B).$$

A (iv) pont igazolásához azt kell megmutatni, hogy $\xi_A=\xi_{(-A)}$ és $\eta_A=-\eta_{(-A)}$ minden $A\in\mathcal{B}$ halmazra. Ehhez elég azt igazolni, hogy $E[\xi_A-\xi_{(-A)}]^2=0$, és $E[\eta_A+\eta_{(-A)}]^2=0$. Viszont $E[\xi_A-\xi_{(-A)}]^2=E\xi_A^2+E\xi_{(-A)}^2-2E\xi_A\xi_{(-A)}$, és a (2.1) formula és a G mérték párossága miatt $E\xi_A^2=E\xi_{(-A)}^2=\frac{1}{2}G(A\cap(-A))+\frac{1}{2}G(A)$, és $E\xi_A\xi_{-(A)}=\frac{1}{2}G(A\cap(-A))+\frac{1}{2}G(A)$, ahonnan $E[\xi_A-\xi_{(-A)}]^2=0$. Az $E[\eta_A+\eta_{(-A)}]^2=0$ azonosság hasonlóan bizonyítható, csak ott az $E\eta_A^2=E\eta_{-(A)}^2=-E\eta_A\eta_{-(A)}=\frac{1}{2}G(A)-\frac{1}{2}G(A\cap(-A))$ azonosságot kell használni.

Az, hogy a G mérték meghatározza a G mérték szerinti Z_G spektrál mérték eloszlását abból következik, hogy a $\operatorname{Re} Z_G$, és $\operatorname{Im} Z_G$ egymástól független, nulla várható értékű együttesen normális eloszlású valószínűségi változókból álló valószínűségi mezők, és a (ix) tulajdonság miatt mind a $\operatorname{Re} Z_G$ mind az $\operatorname{Im} Z_G$ valószínűségi mező elemeinek a kovarianciáját meghatározza a G mérték. A 2.2 lemma bizonyítását befejeztük.

Megadom azt a (valós), alkalmas függvényekből álló Hilbert teret, amelynek a függvényeire fogjuk definiálni a G mértékhez tartozó Z_G véletlen spektrál mérték szerinti sztochasztikus integrált.

A sztochasztikus integrál definiciójában szereplő magfüggvényekből álló Hilbert tér definiciója. *Legyen adva egy G véges, páros mérték a számegyenesen vagy a $[-\pi,\pi)$ intervallumon. Jelölje $\bar{\mathcal{K}}_G$ a G mérték szerint négyzetesen integrálható (komplex számértékű) a $[-\pi,\pi)$ intervallumon vagy a számegyenesen definiált függvények Hilbert terét (az, hogy a $[-\pi,\pi)$ intervallumot vagy a számegyenest tekintjük-e attól függ, hogy a G mérték hol van definiálva) a $(g,h)=\int g(x)\overline{h(x)}G(\,dx)$, $g,h\in\bar{\mathcal{K}}_G$, skalárszorzattal. Legyen $\mathcal{K}_G\subset\bar{\mathcal{K}}_G$ azon függvények halmaza az előbb definiált skalárszorzattal, amely azon $g\in\bar{\mathcal{K}}_G$ függvényekből áll, amelyekre teljesül a $g(x)=\overline{g(-x)}$ azonosság is az értelmezési tartomány minden pontjában.*

Vegyük észre, hogy $\mathcal{K}_G$ valós Hilbert tér. Ugyanis egyrészt ha c_1, c_2 valós számok, $g,h\in\mathcal{K}_G$, akkor $c_1g+c_2h\in\mathcal{K}_G$, másrészt, ha $h,g\in\mathcal{K}_G$, akkor (g,h) skalárszorzatuk valós szám. Ez utóbbi állítás igazolásához azt kell megmutatni, hogy $(g,h)=\overline{(g,h)}$. Viszont a G mérték párossága, és a $g(-x)=\overline{g(x)}$, $h(-x)=\overline{h(x)}$ azonosságok miatt

$$(g,h)=\int g(x)\overline{h(x)}G(\,dx)=\int g(-x)\overline{h(-x)}G(\,dx)=\int\overline{g(x)}h(x)\,G(\,dx)=\overline{(g,h)}.$$

A $\bar{\mathcal{K}}_G$ tér a $\mathcal{K}_G$ tér komplexifikációjának tekinthető. Valóban, tetszőleges $f\in\bar{\mathcal{K}}_G$ függvény felírható, mint $f(x)=\frac{1}{2}(f(x)+\overline{f(-x)})+\frac{1}{2}i[-if(x)+i\overline{f(-x)}]$, azaz $f(x)=h_1(x)+ih_2(x)$, $h_1(x)=\frac{1}{2}(f(x)+\overline{f(-x)})$ és $h_2(x)=\frac{1}{2}(-if(x)+i\overline{f(-x)})$ választással. Nem nehéz belátni, hogy $h_1\in\mathcal{K}_G$, és $h_2\in\mathcal{K}_G$ ezekkel a h_1 és h_2 függvényekkel.

Továbbá $\|f\|^2 = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2$, ha $f = h_1 + ih_2$ valamely $h_1, h_2 \in \mathcal{K}_G$ függvényekkel. Ebben az esetben ugyanis $(h_2, h_1) = \overline{(h_1, h_2)} = (h_1, h_2)$, ezért $\|f\|^2 = (h_1 + ih_2, h_1 + ih_2) = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2 + i((h_2, h_1) - (h_1, h_2)) = \|h_1\|^2 + \|h_2\|^2$.

Megjegyzés. A fentiekben bevezettünk valós Hilbert tereket. A klasszikus példa valós Hilbert terekre a négyzetesen integrálható *valós értékű* függvények tere a szokásos normával. De vannak más fontos példák is. A mi példánkban olyan függvényeket vettünk, amelyekre $f(-x) = \overline{f(x)}$. Ez szemléletesen azt jelenti, hogy valós értékű függvények helyett olyan függvényeket tekintettünk, amelyek úgy viselkednek, mint a valós értékű függvények Fourier transzformáltjai. Ahhoz, hogy a kívánt feltételek teljesüljenek azt is fel kellett tenni, hogy páros G mérték szerint integrálunk.

Röviden ismertetem, hogyan állítunk elő egy előírt eloszlású stacionárius Gauss folyamatot a $\mathcal{K}_G$ Hilbert tér elemein bevezetett véletlen integrál segítségével egy alkalmas Z_G véletlen spektrál mérték szerint. Az alább bevezetendő I operátor játssza ennek a véletlen integrálnak a szerepét.

Tekintsünk egy G spektrál mértéket a számegyenesen vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallumon és egy G mérték szerinti Z_G véletlen spektrál mértéket valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Vegyük a G mérték által meghatározott, előbb definiált $\mathcal{K}_G$ valós és $\bar{\mathcal{K}}_G$ komplex Hilbert teret, valamint jelölje $\mathcal{H}$ és $\bar{\mathcal{H}}$ a $\sum c_k Z_G(B_k)$, $B_k \in \mathcal{B}$, alakú véges lineáris kombinációként előállítható valószínűségi változók lineáris terének lezártját a $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn definiált négyzetesen integrálható valószínűségi változók Hilbert terében, ahol $\mathcal{H}$ definiciójában csak a valós értékű $\sum c_k Z_G(B_k)$ véges lineáris kombinációk lezártját tekintjük. (Valós értékű lineáris kombinációt kapunk például akkor, ha az összegben a $c_k Z_G(B_k)$ taggal együtt szerepel a $\bar{c}_k Z_G((-B_k))$ tag is.) Konstruálni fogunk egy I: $\bar{\mathcal{K}}_G \to \bar{\mathcal{H}}$ lineáris leképezést, amely egyben unitér operátor is, illetve tekinteni fogjuk ezen operátor megszorítását a $\mathcal{K}_G$ valós Hilbert térbe, amely egy I: $\mathcal{K}_G \to \mathcal{H}$ alakú leképezés lesz. Emlékeztetek arra,hogy egy operátort egy $\mathcal{H}$ Hilbert térből egy $\mathcal{K}$ Hilbert térbe akkor nevezünk unitérnek, ha nemcsak normatartó, hanem invertálható is.

Ezt az alább bevezetendő I operátort fogjuk tekinteni a Z_G véletlen spektrál mérték szerinti véletlen integrálnak. Az I operátor definiciója természetessé fogja tenni ezt az elnevezést. Az I: $\mathcal{K}_G \to \mathcal{H}$ leképezés meg fogja adni a $\mathcal{H}$ térbeli valós, az I: $\bar{\mathcal{K}}_G \to \bar{\mathcal{H}}$ leképezés pedig a $\bar{\mathcal{H}}$ térbeli komplex értékű valószínűségi változók reprezentációját Z_G véletlen spektrál mérték szerinti véletlen integrálként. Ezek a formulák azt is lehetővé fogják tenni, hogy konstruáljunk egy előírt G spektrál mértékkel rendelkező stacionárius Gauss folyamatot egy véletlen spekrál mérték szerinti integrálok segítségével.

Egy a $\mathcal{K}_G$ vagy $\bar{\mathcal{K}}_G$ Hilbert térben levő függvényt eleminek nevezünk, ha véges sok különböző értéket vesz fel. Először elemi függvényekre fogjuk definiálni az I operátort, azután belátjuk, hogy az elemi függények a $\mathcal{K}_G$ vagy $\bar{\mathcal{K}}_G$ Hilbert tér mindenütt sűrű részhalmazát alkotják, és az I operátor kiterjeszthető az egész Hilbert térre alkalmas lezárás segítségével.

Az $f \in \bar{\mathcal{K}}_G$ elemi függvényekre az I operátor $I(f)$ értékét a következő módon definiáljuk:

$$I(f) = \sum_{j=1}^{n} f(x_j) Z_G(B_j), \tag{2.3}$$

ha $B_1, \dots, B_n$ a számegyenesnek vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallumnak olyan particiója, ahol az f függvény konstans, és $x_j \in B_j$, $j = 1, \dots, n$. Először azt kell belátnunk, hogy jogunk van az $I(f)$ mennyiséget így definiálni, annak értéke nem függ a partició választásától.

A problémát az okozza, hogy a $B_1, \dots, B_k$ partició választása nem egyértelmű. Jogunk van például a partició bármely B_k elemét véges sok kisebb diszjunkt halmaz uniójára bontani. Annak érdekében, hogy a (2.3) definició jogosságát belássuk, elég megmutatni, hogy az egyes B_k halmazok feldarabolása véges sok részre nem változtatja meg a (2.3) kifejezésben szereplő összeg értékét. Véve ugyanis két olyan különböző particiót, amelyek elemein az f függvény konstans, elég azt megmutatni, hogy véve egy mindkét felosztásnál finomabb particiót, az $I(f)$ összeg mind a két esetben egyenlő az ehhez a finomabb particióhoz tartozó összeggel.

Ez az állítás belátható a következő észrevétel segítségével. Ha $B_{k,1}, \dots, B_{k,m}$ a particióban szereplő valamelyik B_k halmaznak egy véges felosztása, és $x_k \in B_k$, akkor $\sum\limits_{j=1}^{m} f(x_k) Z_G(B_{k,j}) = f(x_k) Z_G(B_k)$ a véletlen spektrál mérték (v) tulajdonsága miatt.

Megfogalmazom az $I(\cdot)$ operátor néhány fontos tulajdonságát, egyelőre csak elemi függvényekre.

$$EI(f)\overline{I(g)} = \int f(x)\overline{g(x)} G(\,dx) \tag{2.4}$$

minden $f, g \in \bar{\mathcal{K}}_G$ függvénypárra, ha f és g elemi függvények, és

$$I(f) \quad \text{valós értékű valószínűségi változó, ha } f \in \mathcal{K}_G, \tag{2.5}$$

és f elemi függvény.

A (2.4) formula bizonyítása érdekében vegyünk egy olyan $B_1, \dots, B_n$ particiót, amelynek az elemein mind az f mind a g függvény konstans értékű, és legyen $x_j \in B_j$. Ekkor

$$\begin{aligned} EI(f)\overline{I(g)} &= E\left(\sum_{j=1}^{n} f(x_j) Z_G(B_j)\right)\left(\sum_{j=1}^{n} \overline{g(x_j)}\ \overline{Z_G(B_j)}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{N} f(x_j)\overline{g(x_j)} G(B_j) = \int f(x)\overline{g(x)} G(\,dx), \end{aligned}$$

mivel $EZ_G(B_j)\overline{Z_G(B_j)} = G(B_j)$, és $EZ_G(B_j)\overline{Z_G(B_k)} = 0$, ha $j \neq k$, a véletlen spektrál mérték (iii) tulajdonsága és a partició $B_j \cap B_k = \emptyset$, ha $j \neq k$ tulajdonsága miatt.

A (2.5) tulajdonság igazolásához azt kell megmutatni, hogy $I(f) = \overline{I(f)}$, ha $f \in \mathcal{K}_G$ és f elemi függvény. Feltehetjük az f függvény nívóhalmazainak esetleges finomításával, és e halmazok alkalmas átindexelésével, hogy a tekintett partició olyan $B_{-n}, \dots, B_n$ halmazokból áll, amelyekre $B_{-j} = -B_j$. Továbbá olyan $x_j \in B_j$, $j = -n, \dots, n$, pontokat veszünk, amelyekre $f(-x_j) = \overline{f(x_j)}$, és $Z_G(-B_j) = \overline{Z_G(B_j)}$ a véletlen spektrál mérték (viii) tulajdonsága miatt. Ilyen választással felírhatjuk, hogy

$$I(f) = \sum_{j=-n}^{n} f(x_j) Z_G(B_j) = \sum_{j=-n}^{n} f(-x_j) Z_G(-B_j) = \sum_{j=-n}^{n} \overline{f(x_j)}\,\overline{Z_G(B_j)} = \overline{I(f)}.$$

Az alábbi lemmában megfogalmazom az $I(f)$ operátor számunkra legfontosabb tulajdonságait.

2.3. Lemma. *Legyen adva egy korlátos, páros G mérték a számegyenesen vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallumon és egy e G mérték szerinti Z_G véletlen spektrál mérték valamely $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Tekintsük a G mérték által meghatározott $\mathcal{K}_G$ valós, $\bar{\mathcal{K}}_G$ komplex és a Z_G véletlen spektrál mérték által meghatározott $\mathcal{H}$ valós és $\bar{\mathcal{H}}$ komplex Hilbert tereket. Létezik egy olyan egyértelműen meghatározott I: $\bar{\mathcal{K}}_G \to \bar{\mathcal{H}}$ unitér leképezés, amelynek megszorítása a $\mathcal{K}_G$ valós Hilbert térre egy I: $\mathcal{K}_G \to \mathcal{H}$ unitér leképezés, és amely teljesíti a (2.3) formulát minden $f \in \bar{\mathcal{K}}_G$ elemi függvényre. Speciálisan, a (2.4) és (2.5) formulák érvényesek minden $f, g \in \bar{\mathcal{K}}_G$ függvénypárra, illetve $f \in \mathcal{K}_G$ függvényre, tehát nem csak elemi függvényekre.*

Ha a G mérték a számegyenesen van definiálva, akkor az I operátor segítségével definiált $X(t) = I(e^{itx})$, $-\infty < t < \infty$, valószínűségi változók együttese egy folytonos idejű stacionárius Gauss folyamat a számegyenesen G spektrál mértékkel. Ha a G mérték a $[-\pi, \pi)$ intervallumon van definiálva, akkor az $X(n) = I(e^{inx})$, $n = 0$, ± 1, $\pm 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata egy az egész számokon definiált diszkrét stacionárius Gauss sorozat G spektrál mértékkel.

Az előbb definált $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, és $X(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, folytonos illetve diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamatok tagjainak véges valós (vagy komplex) lineáris kombinációi mindenütt sűrű halmazt alkotnak a $\mathcal{H}$ (vagy $\bar{\mathcal{H}}$) valós (illetve komplex) Hilbert térben. Ezért segítségükkel egyértelműen definiálni lehet azokat a T_u, $-\infty < u < \infty$, illetve T_m, $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, unitér shift operátorokat a $\mathcal{H}$, illetve $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert tereken, amelyekre $T_u X(t) = X(t+u)$, $T_m X(n) = X(n+m)$. Igaz a következő képlet:

$$\begin{aligned} T_u I(g(x)) &= I(e^{iux} g(x)), \quad -\infty < u < \infty, \quad \text{ha } G \text{ a számegyenesen van definiálva} \\ T_m I(g(x)) &= I(e^{imx} g(x)), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad \text{ha } G \text{ a } [-\pi, \pi) \text{ intervallumon} \\ &\qquad \text{van definiálva} \end{aligned} \tag{2.6}$$

minden $g \in \mathcal{K}_G$ vagy $g \in \bar{\mathcal{K}}_G$ függvényre.

Az $I(f)$ leképezést a (2.3) kifejezésben olyan összeg formájában adtuk meg elemi függvényekre, amely tekinthető integrál közelítő összegnek is. Ezután az $I(f)$ mennyiséget ilyen ‘integrál közelítő összegek’ alkalmas limeszeként definiáltuk az általános esetben. Ezért természetes bevezetni a következő jelölést.

$$I(f) = \int f(x) Z_G(\,dx), \quad \text{ha } f \in \mathcal{K}_G \quad \text{vagy } f \in \bar{\mathcal{K}}_G.$$

Ezzel a jelöléssel a 2.3. lemmában bevezetett stacionárius folytonos és diszkrét idejű Gauss folyamatok G spektrál mértékkel a következőképp adhatók meg:

$$X(t) = \int e^{itx} Z_G(\,dx), \quad -\infty < t < \infty, \quad X(n) = \int e^{inx} Z_G(\,dx), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots . \tag{2.7}$$

Az e sztochasztikus folyamatok által meghatározott és a (2.6) formulában definiált shift operátor így írható fel a fenti véletlen integrálok segítségével:

$$\begin{aligned} T_u \left(\int g(x) Z_G(\,dx) \right) &= \int e^{iux} g(x) Z_G(\,dx), \quad -\infty < u < \infty, \\ T_m \left(\int g(x) Z_G(\,dx) \right) &= \int e^{imx} g(x) Z_G(\,dx), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \end{aligned} \tag{2.8}$$

minden $g \in \mathcal{K}_G$, illetve $g \in \bar{\mathcal{K}}_G$ függvényre a folytonos illetve diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamat által meghatározott shift operátorokra.

A (2.7) formulát interpretálhatjuk úgy, hogy az $X(n)$ illetve $X(t)$ stacionárius folyamat a $Z_G(\cdot)$ véletlen spektrál mérték Fourier transzformáltja. A (2.8) formula azt mutatja, hogy ez a véletlen Fourier transzformált hasonlóan viselkedik a hagyományos Fourier transzformálthoz. Valóban, ha $h(t) = \int e^{ixt} g(x)\,dx$, azaz $h(\cdot)$ a $g(\cdot)$ Fourier transformáltja, akkor a $h_u(t) = T_u h(t) = h(t+u)$ függvényre

$$h_u(t) = \int e^{ix(t+u)} g(x)\,dx = \int e^{ixt} g_u(x)\,dx,$$

ahol $g_u(x) = e^{iux} g(x)$, azaz a $h_u(\cdot)$ függvény a $g_u(\cdot)$ függvény Fourier transzformáltja. A (2.8) formula hasonló relációt mond ki véletlen Fourier transzformáltakra.

Írjuk fel az I operátor tulajdonságait is a fenti integrál jelöléssel. Az $\int f(x) Z_G(\,dx)$ akkor és csak akkor létezik, ha $\int |f(x)|^2 G(\,dx) < \infty$. A (2.4) formula szerint

$$E\left[\int f(x) Z_G(\,dx) \overline{\int g(x) Z_G(\,dx)} \right] = \int f(x) \overline{g(x)} G(\,dx) \tag{2.9}$$

minden $f, g \in \bar{\mathcal{K}}_G$ függvénypárra. Továbbá

$$E \int f(x) Z_G(\,dx) = 0,$$

és a (2.5) formula szerint

$$\int f(x) Z_G(\,dx) \quad \text{egy valószínűséggel valós értékű, ha } f(-x) = \overline{f(x)}.$$

A 2.3. Lemma bizonyítása. Vegyük észre, hogy a (megfelelő térben tekintett) elemi függvények mindenütt sűrű halmazt alkotnak a $\mathcal{K}_G$ illetve a $\bar{\mathcal{K}}_G$ Hilbert térben, a $\sum c_k Z_G(B_k)$ alakú véges lineáris kombinációk pedig (azzal a megszorítással, hogy egy valószínűséggel valós értékűek vagy e feltétel nélkül) mindenütt sűrű részhalmazt alkotnak a $\mathcal{H}$ és a $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert terekben. E tényekből, illetve a (2.4) és (2.5) formulából következik, hogy az elemi függvények terén definiált I lineáris függvény egyértelmű módon kiterjeszthető egy unitér I: $\mathcal{K}_G \to \mathcal{H}$ vagy I: $\bar{\mathcal{K}}_G \to \bar{\mathcal{H}}$ unitér leképezéssé. (Vegyük észre, hogy ha egy $U_n = I(f_n) \in \mathcal{H}$ vagy $U_n = I(f_n) \in \bar{\mathcal{H}}$ sorozatra $U_n \to U$ a megfelelő Hilbert tér normában, akkor $f_n \to f$ egy alkalmas $f \in \mathcal{K}_G$ vagy $f \in \bar{\mathcal{K}}_G$ függvénnyel, és $U = I(f)$. Ez következik abból, hogy I normatartó transzformáció.) Speciálisan a (2.4) és (2.5) formulák nemcsak az elemi függvényekre érvényesek.

Vegyük észre, hogy $f_t(x) = e^{itx} \in \mathcal{K}_G$ minden $-\infty < t < \infty$ számra, ha a G mérték a számegyenesen van definiálva, és $f_n(x) = e^{inx} \in \mathcal{K}_G$ minden $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ számra, ha a G mérték a $[-\pi, \pi)$ intervallumra koncentrálódik. Ezért a (2.5) formula alapján az $X(t) = I(e^{itx})$ illetve $X(n) = I(e^{inx})$ valószínűségi változók valós értékűek. Továbbá az I operátor definiciójából az is következik, hogy e valószínűségi változók normális eloszlásúak, sőt véges sok különböző ilyen alakú valószínűségi változó együttes eloszlása is normális eloszlású, azaz a 2.3. lemmában definiált $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, és $X(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, sztochasztikus folyamatok Gauss folyamatok. Ahhoz, hogy belássuk, hogy stacionárius Gauss folyamatok G spektrálmértékkel, ki kell számolnunk e sztochasztikus folyamatok tagjainak kovariancia függvényét. Ezt megtehetjük a (2.4) formula segítségével. Azt kapjuk, hogy $EX(s)X(t) = EI(e^{itx})\overline{I(e^{isx})} = \int e^{i(t-s)x} G(\,dx)$, és $EX(m)X(n) = EI(e^{inx})\overline{I(e^{imx})} = \int e^{i(n-m)x} G(\,dx)$, azaz, ezek a sztochasztikus folyamatok (valós érékű stacionárius Gauss folyamatok G spektrál mértékkel, amint állítottuk.

Lássuk be, hogy ha a G mérték a $[-\pi, \pi)$ intervallumba van koncentrálva, akkor az $f_n(x) = e^{inx}$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, függvények véges lineáris kombinációi mindenütt sűrű halmazt alkotnak a $\mathcal{K}_G$, illetve $\bar{\mathcal{K}}_G$ térben, attól függően, hogy csak valós vagy komplex együtthatókat is megengedünk-e ezekben a lineáris kombinációkban. Hasonlóan, ha a G mérték a számegyenesen van definiálva, akkor az $f_t(x) = e^{itx}$, $-\infty < t < \infty$, függvények véges lineáris kombinációi mindenütt sűrű halmazt alkotnak a $\mathcal{K}_G$, illetve $\bar{\mathcal{K}}_G$ térben, attól függően, hogy csak valós vagy komplex együtthatókat is megengedünk-e ezekben a lineáris kombinációkban.

Az első állítás egyszerű következménye Weierstrass második approximációs tételének, amely szerint minden folytonos függvényt tetszőleges pontossággal lehet közelíteni a szuprémum normában trigonometrikus polinomokkal a $[-\pi, \pi)$ intervallumban. Azt kell még kihasználni, hogy a folytonos függvények mindenütt sűrűn vannak a $\mathcal{K}_G$ vagy $\bar{\mathcal{K}}_G$ térben. A második állítás ennek az argumentumnak némi finomításával igazolható. Azt kell egyrészt észrevenni, hogy egy a számegyenesen tekintett (véges) G mérték esetén a kompakt tartójú folytonos függvények sűrűn vannak a tekintett Hilbert térben, sőt ugyanez elmondható a folytonos periódikus függvényekre is, mert egy korlátos tartójú függvényt tetszőleges pontossággal közelíthetünk T periódusú folytonos függvénnyel, ha a T periódust elég nagyra választjuk. Ezután Weierstrass második approximációs tételét T periódusú függvényekre alkalmazva megkapjuk a kívánt állítást.

Felhasználva az e^{itx} és e^{inx} függvények fenti tulajdonságát, illetve az előbb konstruált $X(t)$ és $X(n)$ stacionárius folyamatok alakját, a 2.1 lemmából látható, hogy a

2.3 lemmában definiált T_u és T_m shift operátorok egyértelműen kiterjeszthetőek a $\mathcal{H}$ és $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert terekre. Mivel a (2.6) formula érvényes minden $\sum c_k e^{itx_k}$ illetve $\sum c_k e^{itx_k}$ alakú véges lineáris kombinációra, és az ilyen lineáris kombinációk sűrű halmazt alkotnak a $\mathcal{K}_G$ vagy $\bar{\mathcal{K}}_G$ Hilbert térben, ezért nem nehéz belátni az unitér shift operátor kiterjesztésével ezen altérről az egész térre, hogy a (2.6) formula az általános esetben is érvényes. A 2.3. lemmát beláttuk.

Legyen adva egy G véges és páros mérték vagy a számegyenesen vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallumon. Az előbb tárgyalt eredmények lehetővé tették egy G spektrál mértékkel rendelkező stacionárius Gauss folyamat konstruálását a számegyenesen vagy az egész számok halmazán, (attól függően, hogy a G mérték a számegyenesen vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallumon van-e definiálva) a következő módon. Bevezettük a G mérték szerinti véletlen spektrál mérték fogalmát, és megmutattuk, hogy minden G véges és páros mérték esetén létezik e mérték szerinti véletlen spektrál mérték (2.2. lemma). Ezután bevezettünk egy olyan alkalmas I operátort a G mérték szerint négyzetesen integrálható függvények terén ezen véletlen spektrál mérték segítségével, amelynek képtere olyan (együttesen) normális eloszlású valószínűségi változókból áll, amelyek azon a valószínűségi mezőn vannak definiálva, mint a véletlen spektrál mérték. Ez az operátor tekinthető a véletlen spektrál mérték szerinti (véletlen) integrálnak is, és ennek segítségével elő tudtunk előállítani egy G spektrál mértékkel rendelkező stacionárius Gauss folyamatot. Ez volt a 2.3. lemma fő eredménye. A 2.3. lemma abban is segített, hogy megadjunk egy kalkulust, amely lehetővé teszi a számolást egy stacionárius Gauss folyamat által meghatározott shift operátorral. Ennek az eredménynek a vizsgálatában hasznos volt a 2.1. lemma.

A következő 2.4. lemma úgy is tekinthető, mint az előző eredmények megfordítása. A korábbi tárgyalásban megkonstruáltunk egy G spektrál mérték szerinti véletlen spektrál mértéket, majd ennek segítségével definiáltunk egy G spektrál mértékkel rendelkező stacionárius Gauss folyamatot. Viszont egy G spektrál mértékkel rendelkező stacionárius Gauss folyamatot közvetlenül, véletlen spektrál mértékek felhasználása nélkül is megkonstruálhatunk. A 2.4. lemmában megmutatjuk, hogy ezen stacionárius Gauss folyamat segítségével egy olyan a G mérték szerinti véletlen Z_G spektrál mértéket tudunk konstruálni, amelyre az is igaz hogy az e véletlen spektrál mérték szerinti véletlen integrál előállítja a kiinduló stacionárius Gauss folyamatot. Ez az eredmény egyben arra is magyarázatot adhat, hogy miért az itt leírt módon definiáltuk a véletlen spektrál mértéket.

A 2.4. lemma hasonlóan bizonyítható a korábbi eredményekhez, és az azokban már igazolt részeredmények egyszerűsítik a tárgyalást. Definiálni fogunk egy alkalmas J operátort a G mérték szerint négyzetesen integrálható függvények teréből egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn definiált Gauss eloszlású valószínűségi változók terébe, Itt $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ az a valószínűségi mező, ahol a stacionárius Gauss folyamat definiálva van. Mint a bizonyításból kiderül ez a J operátor valójában nem más, mint a 2.3. lemma bizonyításában definiált I operátor alkalmas Z_G véletlen spektrál mértékkel. A keresett véletlen spektrál mértéket úgy kapjuk meg, hogy vesszük a számegyenes vagy a $[-\pi, \pi)$ intervallum mérhető részhalmazainak az indikátor függvényeit, és a véletlen spektrál mértékben szereplő $Z_G(A)$ valószínűségi változók ezen indikátor függvények képei lesznek a J operátor hatására. Megfogalmazom a 2.4. lemmát.

2.4. Lemma. *Legyen adva egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mező, és azon egy folytonos idejű $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, stacionárius Gauss folyamat valamely G spektrál mértékkel a számegyenesen vagy egy diszkrét idejű $X(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, stacionárius Gauss folyamat valamely G spektrál mértékkel a $[-\pi, \pi)$ intervallumon. Ekkor létezik egy olyan Z_G a G mérték szerinti véletlen spektrál mérték az $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn, amelyre $X(t) = \int e^{itx} Z_G(\,dx)$, $-\infty < t < \infty$, folytonos idejű, és $X(n) = \int e^{inx} Z_G(\,dx)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamat esetén. A $Z_G(A)$, $A \in \mathcal{B}$, valószínűségi változók által generált σ-algebra megegyezik az $X(t)$, $-\infty < t < \infty$, illetve $X(n)$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, valószínűségi változók által generált σ-algebrával a folytonos illetve diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamatok esetében.*

A 2.4. Lemma bizonyítása. Jelölje $\bar{\mathcal{H}}$ (a 2.1. lemma jelöléséhez hasonlóan) az $X(t)$ illetve $X(n)$ valószínűségi változók véges lineáris kombinációi lezártjaként kapott alteret a négyzetesen integrálható (komplex értékű) valószínűségi változók Hilbert terében, és definiáljuk a következő J: $\bar{\mathcal{K}}_G \to \bar{\mathcal{H}}$ lineáris transzformációt. Adva egy véges $\sum c_k e^{it_k x}$, $-\infty < t_k < \infty$, vagy $\sum c_k e^{in_k x}$, $n_k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, lineáris kombináció a folytonos, illetve diszkrét idejű Gauss folyamatok esetén legyen $J(\sum c_k e^{it_k x}) = \sum c_k X(t_k)$, és $J(\sum c_k e^{in_k x}) = \sum c_k X(n_k)$. Ez a J transzformáció lineáris az előző formulákban tekintett lineáris kombinációk terén, és rendelkezik az alábbi norma tartó tulajdonsággal is. Folytonos idejű stacionárius Gauss folyamatok esetén két $\sum c_k e^{it_k x}$ és $\sum d_k e^{iu_k x}$ alakú véges lineáris kombinációra

$$\int \left(\sum c_k e^{it_k x}\right) \overline{\left(\sum d_k e^{iu_k x}\right)} G(\,dx) = E\left(\sum c_k X(t_k)\right) \overline{\left(\sum d_k X(u_k)\right)}, \qquad (2.10)$$

mert

$$\begin{aligned} \int \left(\sum c_k e^{it_k x}\right) \overline{\left(\sum d_k e^{iu_k x}\right)} G(\,dx) &= \sum \sum c_k \overline{d_l} \int e^{i(t_k - u_l)x} G(\,dx) \\ &= \sum \sum c_k \overline{d_l} E X(t_k) \overline{X(u_l)} = E\left(\sum c_k X(t_k)\right) \overline{\left(\sum d_k X(u_k)\right)}. \end{aligned}$$

Hasonló módon látható az, hogy diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamatok esetében két $\sum c_k e^{in_k x}$ és $\sum d_k e^{im_k x}$ alakú véges lineáris kombinációra

$$\int \left(\sum c_k e^{in_k x}\right) \overline{\left(\sum d_k e^{im_k x}\right)} G(\,dx) = E\left(\sum c_k X(n_k)\right) \overline{\left(\sum d_k X(m_k)\right)}. \qquad (2.11)$$

A 2.3. lemma bizonyításában megmutattuk, hogy a $\sum c_k e^{it_k x}$ vagy $\sum c_k e^{in_k x}$ alakú véges lineáris kombinációk mindenütt sűrű halmazt alkotnak a $\bar{\mathcal{K}}_G$ Hilbert térben. Ugyancsak igaz, hogy a $\sum c_k X(t_k)$ vagy $\sum c_k X(n_k)$ véges lineáris kombinációk mindenütt sűrű halmazt alkotnak a $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert térben. (Hogy a fenti kifejezésekből melyiket vesszük attól függ, hogy folytonos vagy diszkrét idejű stacionárius Gauss folyamatot vizsgálunk-e.) Ez viszont a (2.10) és (2.11) formulákkal együtt azt jelentik, hogy az eddig csak speciális alakú függvényekre definiált J operátort kiterjeszthetjük a $\bar{\mathcal{K}}_G$ Hilbert tér unitér leképezésére a $\bar{\mathcal{H}}$ Hilbert térre. Speciálisan az is igaz, hogy

$$EJ(f)\overline{J(g)} = \int f(x)\overline{g(x)}G(\,dx), \quad \text{ha } f,g \in \bar{\mathcal{K}}_G. \tag{2.12}$$

Szükségünk lesz még a következő azonosságra. Adva egy $f \in \bar{\mathcal{K}}_G$ függvény, jelölje $\bar{f}^-$ az $\bar{f}^-(x) = \overline{f(-x)}$ függvényt. Nyílván $\bar{f}^- \in \bar{\mathcal{K}}_G$, ha $f \in \bar{\mathcal{K}}_G$. Azt állítom, hogy

$$J(\bar{f}^-) = \overline{J(f)} \quad \text{minden } f \in \bar{\mathcal{K}}_G \text{ függvényre.} \tag{2.13}$$

Elég ezt az azonosságot az $f(x) = \sum c_k e^{it_k x}$ vagy $f(x) = \sum c_k e^{in_k x}$ alakú véges összegekre belátni, mert ezek mindenütt sűrűn vannak a $\bar{\mathcal{K}}_G$ térben, és az $f \to \bar{f}^-$ leképezés normatartó. Viszont ebben az esetben az azonosság könnyen ellenőrizhető, mert $J(\bar{f}^-) = \sum \bar{c}_k X(t_k)$, és $J(f) = \sum c_k X(t_k)$ a folytonos idejű esetben, és $J(\bar{f}^-) = \sum \bar{c}_k X(n_k)$, és $J(f) = \sum c_k X(n_k)$ a diszkrét idejű esetben.

A G mérték szerinti Z_G véletlen spektrál mértéket a következő módon fogom definiálni. Legyen $Z_G(A) = J(\chi_A)$ minden $A \in B$ halmazra, ahol χ_A az A halmaz indikátor függvényét jelöli. Ez valóban egy a G mérték szerinti véletlen spektrál mérték. Ugyanis a J operátor definiciójából következik a véletlen spektrál mérték (i) és (ii) tulajdonsága. A (iii) tulajdonság következik a (2.12) képletből, ha azt az $f = \chi_A$ és $g = \chi_B$ függvényekre alkalmazzuk, a (iv) tulajdonság pedig a (2.13) formula következménye az $f = \chi_A$ választással, mert ekkor $\bar{f}^-(x) = \chi_{(-A)}(x)$.

A (2.3) formulából és a J operátor linearitásából következik, hogy $J(f) = I(f)$ minden elemi függvényre, ha az I operátort a most definiált Z_G véletlen spektrál mérték segítségével definiáljuk. Mivel az elemi függvények a $\bar{\mathcal{K}}_G$ halmaznak mindenütt sűrű részhalmazát alkotják, ebből következik, hogy $J(f) = I(f)$ minden $f \in \bar{\mathcal{K}}_G$ függvényre. Ez viszont speciálisan azt jelenti, hogy $X(t) = J(e^{itx}) = I(e^{itx}) = \int e^{itx} Z_G(\,dx)$ minden $-\infty < t < \infty$ számra egy folytonos idejű, és $X(n) = J(e^{inx}) = I(e^{inx}) = \int e^{inx} Z_G(\,dx)$ minden $n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ számra egy diszkrét idejű stacionáris Gauss folyamat esetén, és ezt kellett belátni.

Az, hogy az $X(t)$ illetve $X(n)$ valószínűségi változók által generált σ-algebra megegyezik a $Z_G(A)$, $A \in \mathcal{A}$, valószínűségi változók által generált σ-algebrával viszonylag egyszerűen látható. A $Z_G(A)$ valószínűségi változókat ki tudtuk fejezni, mint az $X(t)$ vagy $X(n)$ valószínűségi változók (mérhető) függvényeit, ezért benne vannak az általuk generált σ-algebrában. Megfordítva, az $X(t)$ vagy $X(n)$ valószínűségi változókat ki tudtuk fejezni (véletlen integrálként), mint a $Z_G(A)$ valószínűségi változók függvényeit, ezért benne vannak az általuk generált σ-algebrában. Tehát a két σ-algebra megegyezik. A 2.4. lemmát beláttuk.