A centrális határeloszlástétel bizonyítása és a Fourier analízis I.

A centrális határeloszlástétel a klasszikus valószínűségszámítás egyik legfontosabb eredménye. A valószínűségszámítás egy másik szintén klasszikus eredménye szerint független valószínűségi változók átlaga enyhe feltételek mellett jól közelíthető ennek az átlagnak várható értékével. Ez utóbbi állítás a nagy számok (gyenge) törvényének kissé informális megfogalmazása. Ha pontosabb információt szeretnénk kapni ennek a közelítésnek a pontosságáról, azaz arról, hogy mekkora az átlag fluktuációja annak várható értéke körül, akkor erre a kérdésre a centrális határeloszlástétel ad tartalmas információt. Ez az eredmény azt mondja ki, hogy bizonyos nem túlságosan megszorító feltételek mellett ez a fluktuáció megszorozva $\sqrt{n}$-nel, ahol n az átlagban résztvevő tagok száma, jól közelíthető egy az n számtól független eloszlással. Sőt, és ez külön figyelemre méltó tény, ez a közelítő eloszlás nem függ az egyes összeadandók eloszlásától, hanem bizonyos "univerzális" az átlagban résztvevő tagok eloszlásától független eloszlás. Ezt az "univerzális" közelítő eloszlást nevezik az irodalomban normális eloszlásnak. Természetesen az előbbi állítást pontosabban meg kell fogalmaznunk.

Ezt az előbbiekben csak durván megfogalmazott eredményt nevezik a centrális határeloszlástételnek. Külön figyelemre tarthat számot ennek az eredménynek a klasszikus és ebben a feladatsorban is tárgyalt bizonyítási módszere. Ez a módszer, amelyet az irodalomban karakterisztikus függvény módszernek neveznek nem más mint a Fourier analízis alkalmazása a centrális határeloszlástétel bizonyításában. Ebben a feladatsorban azt is meg szeretnénk mutatni, hogy ez a tárgyalásmód természetes. A Fourier sorok elmélete természetes módszert ad a centrális határeloszlástétel úgynevezett lokális változatának a bizonyítására, azaz annak a kérdésnek a vizsgálatára amikor független valószínűségi változók alkalmasan normalizált részletösszegeinek nem az eloszlására, hanem a sűrűségfüggvényére vagyunk kiváncsiak. Továbbá, ha megértjük, hogy milyen kérdéseket kell megválaszolni akkor, ha a centrális határeloszlástételt eredeti (és nem lokális) alakjában akarjuk bebizonyítani, továbbá felhasználjuk azt, hogy ezekre a kérdésekre milyen választ adnak a Fourier analízis klasszikus eredményei, megkapjuk a kívánt eredményt. Sőt, ilyen módon természetes módszert kapunk a centrális határeloszlástétel eredményének finomítására is. Azt a kérdést is vizsgálni tudjuk, hogy a centrális határeloszlástétel mennyire jó közelítést ad független valószínűségi változók normalizált részletösszegeinek eloszlására, illetve ezen normalizált részletösszegek eloszlására milyen a centrális határeloszlástételben megadottnál pontosabb közelítés lehetséges. Ez utóbbi problémákat azonban egy másik feladatsorban fogom tárgyalni.

A.) Lokális határeloszlástételek.

Tekintsük először a következő problémát: Legyen ξ_j, $j=1,2,\dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek egész értékeket vesznek fel. Vezessük be a $P(\xi_1=k)=p(k)$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}p(k)=1$ jelölést. Definiáljuk az $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\xi_j$ részletösszegeket, és tekintsük a $p_n(k)=P(S_n=k)$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, $n=1,2,\dots$, valószínűségeket. Próbáljunk meg jó aszimptotikus közelítést adni a $p_n(k)$ valószínűségekre nagy n paraméter esetén.

A következő módszer segítségével jó becslést adhatunk a fenti $p_n(k)$ valószínűségekre:

Definiáljuk a

$$P_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_n(k) e^{ikt}, \quad -\pi \le t \le \pi \tag{1}$$

Fourier sort. Ekkor a Fourier sorok egyik alapvető formulája alapján ennek a Fourier sornak az együtthatóit ki lehet számítani a

$$p_n(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} P_n(t)\, dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2}$$

képlet segítségével. Ezért, ha jó aszimptotikus formulát tudunk adni a $P_n(t)$ Fourier sorra, és jól tudjuk becsülni a (2) formulában szereplő integrált, akkor jó becslést kapunk a minket érdeklő $p_n(k)$ valószínűségekre is. Vegyük észre továbbá, hogy $P_n(t) = Ee^{itS_n}$, $-\pi \le t \le \pi$. Másrészt, mivel S_n független valószínűségi változók összege, ezért

$$P_n(t) = Ee^{it(\xi_1 + \dots + \xi_n)} = \left(Ee^{it\xi_1}\right)^n = (P_1(t))^n ,$$

ahol $P_1(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi_1 = k) e^{ikt}$. Továbbá, $P_1(0) = 1$, és mint látni fogjuk alkalmas, természetes feltevések mellett $|P_1(t)| < 1$, ha $-\pi \le t \le \pi$, és $t \ne 0$. Ezért a (2) képletben olyan úgynevezett szinguláris integrál jelenik meg, amelyben lényeges hozadékot csak az origó kis környezete ad, és amelyiket jól tudunk becsülni az analízis klasszikus módszereinek segítségével. Először lássuk be a következő azonosságokat, amelyekre később szükségünk lesz.

1.) Lássuk be, hogy

$$\frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2a}\, du = 1$$

minden valós $a > 0$ számra. Továbbá,

$$\frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u-z)^2/2a}\, du = 1$$

minden valós $a > 0$ és *komplex* z számra.

A fent vázolt módszert először egy speciális esetben alkalmazzuk. Tekintsük a $\lambda = n$ paraméterű Poisson eloszlást, azaz olyan η valószínűségi változó eloszlását, amelyre $P(\eta = k) = P_n(k) = \frac{n^k}{k!} e^{-n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Egy n paraméterű Poisson eloszlású változó eloszlása megegyezik n darab független 1 paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlásával. Ezért a fentemlített módszer lehetővé teszi a $P_n(k)$ valószínűségek kiszámítását. Ez a módszer akkor ad igazán jó becslést, ha a k szám közel van a valószínűségi változó várható értékéhez, azaz $k \sim n$. Speciálisan, a megfelelő

Fourier sor vizsgálatával jó becslést tudunk adni a $P_n(n)$ számra. Bár ebben a számolásban explicite nem használjuk ki, hogy az előbb definiált $P_n(k)$ együtthatókkal meghatározott Fourier sor együtthatóinak valószínűségszámítási tartalma is van, mégis ez jelzi, hogy milyen technikai problémákat kell megoldani ahhoz, hogy a $P_n(n)$ számra jó becslést kapjunk. Ezt azért is érdemes megtenni, mert ilyen módon megkapjuk az analízis egyik fontos eredményének, a Stirling formulának a bizonyítását, illetve annak egyfajta élesítését is. Ez a következő feladat tartalma.

2.) Számoljuk ki az n paraméterű Poisson eloszlás értékét az n pontban a Poisson eloszlás által a fent tárgyalt módon meghatározott Fourier sor segítségével. Mutassuk meg ennek segítségével, hogy

$$n! = \left(\frac{n}{e}\right)^n \frac{2\pi}{\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt}. \tag{3}$$

Bizonyítsuk be, hogy

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right), \tag{4a}$$

és

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{4b}$$

Mutassuk meg, hogy igaz az előző két állításnak a következő élesebb formája is:

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{c_1}{n^{1/2}}+\frac{c_2}{n}+\cdots+\frac{c_k}{n^{k/2}}+O\left(\frac{1}{n^{(k+1)/2}}\right)\right) \tag{4c}$$

tetszőleges $k \ge 1$ számmal és explicit módon kiszámítható $c_1, \dots, c_k$ együtthatókkal. Speciálisan $c_1 = 0$. Továbbá,

$$n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n\left(1+\frac{\bar c_1}{n^{1/2}}+\frac{\bar c_2}{n}+\cdots+\frac{\bar c_k}{n^{k/2}}+O\left(\frac{1}{n^{(k+1)/2}}\right)\right) \tag{4d}$$

tetszőleges $k \ge 1$ számmal és explicit módon kiszámítható $\bar c_1, \dots, \bar c_k$ együtthatókkal. Speciálisan $\bar c_1 = 0$.

A 2. feladat megoldásához hasonlóan jó aszimptotikus formulát kívánunk adni annak valószínűségére, hogy független, egyforma eloszlású és egész értékeket felvevő valószínűségi változók összegei egy adott értéket vesznek fel. A (2) formula lehetővé teszi ennek a problémának a vizsgálatát. Ez a formula felhasználja, hogy a vizsgált eloszlás által meghatározott Fourier sor 2π periodikus függvény. Vizsgálhatunk azonban olyan eseteket is, amikor olyan valószínűségi változók összegeit tekintjük, amelyek csak páros vagy csak páratlan számokat vesznek fel, és az ilyen eloszlások által definiált Fourier sorok periódusa π és nem 2π. Ahhoz, hogy a Fourier sorok módszere az általunk vizsgált probléma vizsgálatában jól működjön, meg kell határoznunk azt, hogy mi a vizsgálatban tekintett Fourier sor legkisebb periódusa. A következő definició megadja annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az általunk vizsgált Fourier sor legkisebb periódusa 2π legyen. Először csak olyan eloszlásokkal foglalkozunk, amelyek teljesítik ezt a feltételt. Az általános rácsos eloszlású valószínűségi változók esetét könnyű visszavezetni erre a speciális esetre.

Definició A. *A ξ valószínűségi változó értékei az egész számok rácsára vannak koncentrálva (mint legritkább rácsra), ha* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = k) = 1$, *és tetszőleges $A > 1$ és B egész számokra* $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = Ak + B) < 1$.

Általánosabban, egy ξ valószínűségi változót rácsos eloszlásúnak nevezünk, ha azok értékei egy valószínűséggel egy $\{b+kh,\colon\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ alakú halmazra vannak koncentrálva valamilyen $h > 0$ és b valós számokkal. Azt mondjuk, hogy a ξ valószínűségi változó értékei egy h, $h > 0$, szélességű rácsra (mint legritkább rácsra) vannak koncentrálva, ha létezik olyan b valós szám, amelyre $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = kh + b) = 1$, *és*

$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} P(\xi = Akh + B) < 1$ *tetszőleges $A > 1$ egész és B valós számokra.*

A kívánt becslések elvégzéséhez szükségünk lesz a következő eredményre.

3.) Minden nem egy valószínűséggel konstans rácsos eloszlású valószínűségi változóhoz létezik olyan $h > 0$ szám, hogy ξ egy h szélességű rácsra, mint legritkább rácsra van koncentrálva.

Legyen egy ξ valószínűségi változó egy h szélességű rácsra (mint legritkább rácsra) koncentrálva. Válasszunk olyan b valós számot, amelyre $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} P(\xi = nh + b) = 1$, és tekintsük a $\xi - b$ valószínűségi változó eloszlása által meghatározott $P(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} e^{inh} P(\xi - b = nh)$ Fourier sort. A $P(t)$ Fourier sor periódusa $\frac{2\pi}{h}$, $P(0) = 1$, $|P(t)| \le 1$ minden valós t számra, és $|P(t)| < 1$, ha $|t| \le \frac{\pi}{h}$, és $t \ne 0$. Ha a $\xi - b$ valószínűségi változó abszolút értékének létezik k-ik momentuma, azaz $E|\xi - b|^k < \infty$, akkor a $P(t)$ függvény k-szor folytonosan differenciálható, és $\left.\frac{dP^k(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = i^k E(\xi - b)^k$, (ahol $i = \sqrt{-1}$).

4.) Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek értékei az egész számok rácsára (mint a legszűkebb rácsra) vannak koncentrálva. Legyen $E\xi_1 = m$, $E\xi_1^2 = m_2 < \infty$, (tehát feltesszük, hogy a ξ_1 valószínűségi változó második momentuma véges), és legyen $\sigma^2 = m_2 - m_1^2$. (A σ^2 szám jelöli a ξ_1 valószínűségi változó szórásnégyzetét.) Tekintsük az $S_n = \xi_1 + \dots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Ekkor

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left\{-\frac{(k - nm)^2}{2n\sigma^2}\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ahol $o(\cdot)$ egyenletes a k változóban.

5.) Tekintsünk $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók olyan sorozatát, amely teljesíti az előző feladat feltételeit, és ezenkívül teljesül az $E|\xi_1|^3 < \infty$ feltétel is. Ekkor az előző feladat jelöléseit használva bizonyítsuk be az ott megadott aszimptotikus becslés következő élesebb alakját, amelyik kisebb maradéktagot tartalmaz:

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left\{-\frac{(k-nm)^2}{2n\sigma^2}\right\} + \varepsilon(n,k), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ahol $|\varepsilon(n,k)| \le \frac{K}{n}$, és a K konstans csak a ξ_1 valószínűségi változó eloszlásától függ.

Történetileg először azt a speciális esetet tekintették, amikor ξ_1 binomiális eloszlású, azaz $P(\xi_1 = 1) = 1 - P(\xi_1 = 0) = p$, $0 < p < 1$. Ebben az esetben az S_n összeg eloszlása explicit módon felírható a binomiális együttható segítségével, és ezután jól vizsgálható a Stirling formula segítségével. Mivel ennek a speciális esetnek gyakran fontos szerepe van kombinatorikai alkalmazásokban, érdemes ezt külön elemi módon is tárgyalni. Ezért fogalmazom meg a következő feladatot.

5a.) Bizonyítsuk be az ötödik feladat állítását abban a speciális esetben, amikor ξ_1 binomiális eloszlású elemi módon (Fourier analízis nélkül) a Stirling formula segítségével.

6.) Teljesítse független, egyforma eloszlású valószínűségi változók egy $\xi_1, \xi_2, \dots,$ sorozata a 4. feladat feltételeit azzal a különbséggel, hogy a ξ_1 valószínűségi változó értékei egy h, $h > 0$, sűrűségi rácsra (mint legritkább rácsra) vannak koncentrálva. Legyenek ezek az értékek a $kh + b$, $k = \pm 1, \pm 2, \dots,$ számok valamely b valós számmal. Ekkor a 4. feladat jelöléseivel

$$P(S_n = kh + nb) = \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left\{-\frac{(kh+nb-nm)^2}{2n\sigma^2}\right\} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \tag{5}$$

ahol $o(\cdot)$ egyenletes a k változóban. Ha teljesül az $E|\xi_1|^3 < \infty$ feltétel is, akkor

$$P(S_n = kh + nb) = \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \exp\left\{-\frac{(kh+nb-nm)^2}{2n\sigma^2}\right\} + \varepsilon(k,n), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

ahol $|\varepsilon(n,k)| \le \frac{K}{n}$, és a K konstans csak a ξ_1 valószínűségi változó eloszlásától függ.

7.) Ha egy S_n, $n = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változó sorozat teljesíti az (5) relációt, (nincs jelentősége annak, hogy hogyan konstruáltuk ezeket a valószínűségi változókat), akkor

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < x\right) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du$$

minden valós x számra. A konvergencia egyenletes az x paraméter szerint.

A fenti eredmények jó aszimptotikát adnak arra, hogy független, rácsos eloszlású független, egyforma eloszlású valószínűségi változók összege milyen valószínűséggel vesz fel különböző értékeket, illetve ezen eredményeket "kiintegrálva" a 7. feladatban becslést kaptunk az összegek alkalmas normalizáltjának aszimptotikus viselkedéséről. Ezeket az eredményeket lehet élesíteni, de először foglalkozzunk azzal a kérdéssel hogyan lehet vizsgálni általánosabb, nem feltétlenül rácsos eloszlású független valószínűségi változók összegének eloszlásfüggvényét, illetve sűrűségfüggvényét, feltéve, hogy az összegnek létezik sűrűségfüggvénye.

Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és tekintsük az $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, $n = 1, 2, \dots,$ részletösszegeket. Be akarjuk látni, hogy amennyiben a ξ_1 valószínűségi változónak van szép sűrűségfüggvénye, akkor jó aszimptotikát tudunk adni az S_n valószínűségi változó sűrűségfüggvényére, illetve általános feltételek mellett be akarjuk bizonyítani, hogy az S_n összegek alkalmas normalizáltjának létezik határeloszlása, és ezt az eloszlást explicit módon meg akarjuk adni. Láttuk, hogy rácsos eloszlások esetén a Fourier sorok egy alapvető és egyszerű eredménye, a Fourier sor együtthatóinak kifejezése a Fourier sor segítségével lehetővé tette hasonló vizsgálatok elvégzését. Felmerül az a kérdés, hogy lehet-e ezt a módszert adaptálni az általános esetre is. Ehhez egyszerű, jól kezelhető inverziós formulára van szükségünk, amelyik lehetővé teszi egy sűrűségfüggvény vagy valószínűségi mérték kiszámítását a függvény vagy mérték Fourier transzformáltjának a segítségével.

Sűrűségfüggvények esetében létezik ilyen egyszerű inverziós formula. Eloszlásfüggvények esetében azonban csak komplikált, nem igazán jól használható inverziós formulák léteznek. Annak érdekében, hogy eloszlásfüggvényekre határeloszlástételeket bizonyítsunk először meg kell értenünk azt, hogy mit jelent eloszlások konvergenciája. Ezután le tudjuk írni normalizált részletösszegek aszimptotikus viselkedését továbbra is a Fourier analízis alapvető eredményeit használva. Fogalmazzuk meg először azt a számunkra fontos inverziós formulát, amelyet jól tudunk használni sűrűségfüggvények vizsgálatában.

Inverziós formula Fourier transzformáltra. *Legyen $f(u)$ integrálható függvény a számegyenesen, azaz tegyük fel, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |f(u)|\,du < \infty$. Tekintsük az $f(\cdot)$ függvény Fourier transzformáltját, az $\tilde f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} f(u)\,du$, $-\infty < t < \infty$, függvényt. Ha az $\tilde f(t)$ függvény szintén integrálható, azaz $\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde f(t)|\,dt < \infty$, akkor $f(u)$ a Lebesgue mérték szerint majdnem minden $u \in R^1$ pontban megegyezik az alábbi folytonos és korlátos függvénnyel.*

$$f(u) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu} \tilde f(t)\,dt \tag{6}$$

Érvényes a következő állítás is. Legyen μ véges mérték, azaz legyen $\mu(R^1) < \infty$. Jelölje $\tilde f(t) = \int e^{itu}\,d\mu(u)$ e mérték Fourier transzformáltját. Ha az $\tilde f(\cdot)$ függvény integrálható, akkor a μ mértéknek létezik sűrűségfüggvénye, és az egyenlő a fenti (6) formulában definiált $f(\cdot)$ függvénnyel. Sőt, ez az állítás akkor is érvényes, ha μ korlátos változású mérték, azaz két véges mérték különbsége.

A Fourier transzformált fenti definiciója kissé eltér az analízisben általánosan használt definiciótól, ahol az általunk felírt integrált el szokták osztani a $\sqrt{2\pi}$ számmal. Ilyen normálással ugyanis a Fourier transzformált illetve annak inverzét megadó formulák jobban hasonlítanak egymásra. Számunkra viszont az általunk megadott definició a kényelmesebb. A fenti formulát be fogjuk bizonyítani az Appendixben. Vegyük észre, hogy természetes az a megszorítás, amely szerint a (6) formula csak a Lebesgue mérték szerint majdnem minden u számra érvényes. Ugyanis ha egy függvényt megváltoztatunk nulla mértékű halmazon, akkor annak Fourier transzformáltja nem változik meg. Végül megjegyezzük, hogy a Fourier sorok együtthatóiról szóló formula sugallja a (6) képletben megadott inverziós formulát. Ugyanis, ha egy függvényt természetes módon közelítünk egy a $k\varepsilon$, $k=0,\pm1,\pm2,\dots$, pontokban definiált sorozattal, felírjuk az ezen számsorozat által meghatározott Fourier sort (ebben az esetben a $\left[-\frac{\pi}{\varepsilon},\frac{\pi}{\varepsilon}\right]$ intervallumban tekintjük ezt a Fourier sort), kifejezzük a Fourier sor együtthatóit a Fourier sor segítségével és alkalmazzuk az $\varepsilon\to0$ határátmenetet, akkor megkapjuk (legalábbis formális szinten) a (6) formulát.

8.) Legyen $\xi_1,\xi_2,\dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, $E\xi_1=0$, $E\xi_1^2=1$, (azaz nulla várható értékű, egy szórású valószínűségi változókat tekintünk), és legyen $S_n=\xi_1+\dots+\xi_n$, $n=1,2,\dots.$ Tegyük fel, hogy a ξ_1 valószínűségi változónak van $f(x)$ sűrűségfüggvénye, továbbá ennek az $f(x)$ sűrűségfüggvénynek a $\varphi(t)$ Fourier transzformáltja integrálható, illetve ezt a feltételt kissé enyhíthetjük arra a feltételre, hogy létezik olyan $k\ge1$ egész szám, amelyre $\varphi^k(t)$ integrálható. Ekkor az $\frac{S_n}{\sqrt n}$ valószínűségi változó $f_n(x)$ sűrűségfüggvénye teljesíti a

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}\quad\text{minden } x \text{ valós számra}\tag{7}$$

relációt, és a konvergencia egyenletes az x paraméter szerint.

9.) Ha eloszlásfüggvények egy $F_n(x)$, $n=1,2,\dots$ sorozatának létezik $f_n(x)$ sűrűségfüggvénye, és ez teljesíti a (7) formulát, akkor

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x)=\int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du\quad\text{minden } x \text{ valós számra,}$$

és a konvergencia egyenletes az x paraméter szerint.

10.) Ha teljesülnek a 8. feladat feltételei, továbbá $E|\xi_1|^3<\infty$, akkor a (7) formula jobb maradéktaggal is érvényes, nevezetesen

$$f_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}+O\left(\frac{1}{\sqrt n}\right),$$

és $O(\cdot)$ egyenletes az x paraméter szerint.

Megjegyzés: A 10. illetve a 6. feladatban beláttuk, hogy amennyiben a vizsgált összegekben szereplő valószínűségi változók abszolút értékének létezik harmadik momentuma, akkor a vizsgált sűrűségfüggvényeket a normális sűrűségfüggvény $O(n^{-1/2})$ pontossággal közelíti. E feladatsor folytatásában be fogjuk látni ennek az eredménynek egy analogonját, az úgynevezett Berry–Esseen egyenlőtlenséget. Ez független valószínűségi változók normalizált részletösszegeinek eloszlásfüggvényeinek a normális eloszlásfüggvénytől való eltérésére ad felső becslést. A Berry–Esseen egyenlőtlenség is $n^{-1/2}$ nagyságrendű felső becslést ad az eltérésre. Mégis van egy lényeges különbség a Berry–Esseen egyenlőtlenségben az eloszlásfüggvényre és a jelen feladatsorban a sűrűségfüggvényre adott normális közelítésre adott becslések között. Ha n független egyforma eloszlású nulla várható értékű és egy szórású valószínűségi változó normalizált összegének eloszlásfüggvényének a standard normális eloszlásfüggvénnyel való közelítését tekintjük, akkor a Berry–Esseen egyenlőtlenség ezt a hibát egy const. $\mu_3 n^{-1/2}$ alakú kifejezéssel becsüli felül, ahol const. univerzális konstans, μ_3 pedig az összeadandók abszolút értékének harmadik momentumát jelöli. Hasonló univerzális becslést a sűrűségfüggvény normális közelítésére nem lehet adni. Valóban, például, ha a sűrűségfüggvény az origó kis környezetében nagyon nagy értékeket vesz fel, és ennek a kis környezetnek a mértéke viszonylag nagy, mondjuk nagyobb mint $\frac{1}{10}$, akkor kis n indexekre a részletösszegek sűrűségfüggvényét nem lehet jól közelíteni a normális sűrűségfüggvénnyel. Tehát a Berry–Essen tételnek az analogonja a sűrűségfüggvényekre nem érvényes. Hasonló ellenpélda adható rácsos eloszlású valószínűségi változók normalizált összegének sűrűségfüggvényére, ha az összeadandók eloszlásának a rácsszélessége nagyon kicsi. Ez a különbség normalizált valószínűségi változók eloszlásának és sűrűségfüggvényének normális approximációjára azzal függ össze, hogy az egyik esetben eloszlásfüggvényeket a másik esetben pedig ezek deriváltjait vizsgáljuk.

A 8. illetve 9. feladatban megfogalmazott állításnak az a szépséghibája, hogy nem a tipikus konkrét alkalmazásokban megadott sűrűségfüggvényekre, hanem annak Fourier transzformáltjára ír elő bizonyos feltételt. Erre a kérdésre később visszatérünk. Be fogjuk látni, hogy a (7) reláció minden "szép" sűrűségfüggvénnyel rendelkező független egyforma eloszlású független valószínűségi változó normalizált részletösszeg sűrűségfüggvényére érvényes.

B.) A normális eloszlásfüggvény és a karakterisztikus függvény definiciója. Néhány fontos e fogalmakhoz kapcsolódó állítás.

Vezessük be a (standard) normalizált eloszlás definicióját. Az előző feladatok eredményei azt sugallják, hogy határeloszlástételekben a normális eloszlás jelenik meg, mint határeloszlástétel.

Normális eloszlás definiciója. *A $\Phi(x)$ standard normális eloszlásfüggvény az az eloszlásfüggvény, amelyiknek sűrűségfüggvénye, a $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-x^2/2}$ standard normális sűrűségfüggvény, azaz*

$$\Phi(x)=\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du.$$

Általánosabban normális eloszlásfüggvénynek a $\Phi(x)$ standard normális eloszlás lineáris transzformáltját nevezik, azaz egy normális eloszlásfüggvény két paraméterrel, egy valós m és pozitív valós σ számmal jellemezhető, ez a $\Phi_{m,\sigma}=\Phi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$ eloszlásfüggvény, *amelynek sűrűségfüggvénye* $\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sigma}\varphi\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)$*. A* $\varphi_{m,\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}$ *függvényt normális sűrűségfüggvénynek nevezzük* m *és* σ *paraméterekkel.*

Az 1. feladat eredményéből következik, hogy $\Phi(x)$ valóban eloszlásfüggvény.

11.) Lássuk be, hogy egy standard normális eloszlású valószínűségi változó várható értéke nulla, szórása egy, és egy $\Phi_{m,\sigma}(x)$ eloszlású valószínűségi változó várható értéke m, szórásnégyzete σ^2.

Láttuk, hogy szép sűrűségfüggvénnyel rendelkező független, egyforma eloszlású valószínűségi változók alkalmasan normalizált összegeinek sűrűségfüggvénye a standard normális sűrűségfüggvényhez eloszlása pedig a standard normális eloszlásfüggvényhez konvergál. Mint láttuk, hasonló eredmény érvényes rácsos eloszlású valószínűségi változók részletösszegeire. Azt mondjuk, hogy valószínűségi változók alkalmasan normalizált részletösszegei $\bar{S}_n = \frac{S_n - a_n}{b_n}$, $n = 1, 2, \dots$ teljesítik a lokális centrális határeloszlástételt, ha az $\bar{S}_n$ valószínűségi változóknak létezik sűrűségfüggvényük, és ezek egyenletesen konvergálnak a standard normális sűrűségfüggvényhez vagy létezik olyan $kh_n + b_n$ h_n szélességű rács a számegyenesen, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $h_n \to 0$, ha $n \to \infty$ úgy. hogy a $\bar{S}_n$ valószínűségi változó értékeit ezen a rácson veszi fel, és $P(S_n = kh_n + b_n) = h_n\varphi(kh_n + b_n) + o(h_n)$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, ahol $\varphi(x)$ a standard normális sűrűségfüggvény, és $o(\cdot)$ egyenletes a k változóban.

Láttuk, (lást a 6. és 8. feladatot), hogy enyhe feltételek mellett igaz a lokális centrális határeloszlástétel független, egyforma eloszlású rácsos vagy sűrűségfüggvénnyel rendelkező valószínűségi változók alkalmasan normalizált összegeire. A normalizálás természetes módon választható, az előző paragrafus jelölését választva $a_n = nE\xi_1 = ES_n$, $b_n = \sqrt{n \operatorname{Var} \xi_n} = \sqrt{\operatorname{Var} S_n}$, tehát úgy normalizáltunk, hogy a normalizált részletösszegek várható értéke nulla szórása pedig egy legyen. Láttuk továbbá, hogy a lokális centrális határeloszlástételből következik a globális centrális határeloszlástétel is (lásd a 7. és 9.) feladatot. A lokális centrális határeloszlástétel érvényességéhez szükséges volt néhány extra feltételt tenni arról, hogy az összeadandóknak létezik sűrűségfüggvényük, vagy azok rácsos eloszlásúak. Azt várhatjuk, hogy a (nem lokális) centrális határeloszlástételek érvényességéhez ezek a feltételek nem szükségesek. Ez valóban így van. Be akarjuk létni a centrális eloszlásfeltételt minél általánosabb feltételek mellett független és nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók összegére.

A lokális centrális határeloszlástételt az eloszlásfüggvények Fourier transzformáltjának vizsgálatának segítségével bizonyítottuk. Meg akarjuk mutatni, hogy ez a módszer alkalmazható a (globális) centrális határeloszlástétel bizonyításában is. Felidézzük általános mértékek Fourier transzformáltjának a definicióját, amelyet a valószínűségszámítási irodalom szóhasználatát követve karakterisztikus függvénynek fogunk nevezni. Mivel később vektor-értékű valószínűségi változók összegeit is vizsgálni akarjuk, ezért — ismétlések elkerülése érdekében — a karakterisztikus függvényeket többdimenziós eloszlásokra fogjuk definiálni.

Karakterisztikus függvény definiciója. *Legyen* $F(u) = F(u_1, \dots, u_k)$ *egy* k *változós* *eloszlás függvény. Az F eloszlásfüggvény vagy egy F eloszlású $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ k-dimenziós, $k \geq 1$, véletlen vektor $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_k)$, $t = (t_1, \dots, t_k)$ karakterisztikus függvényét, ahol $t = (t_1, \dots, t_k)$ a k-dimenziós tér tetszőleges pontja, az alábbi formula definiálja:*

$$
\begin{aligned}
\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_k) &= Ee^{i(t,\xi)} = Ee^{i(t_1\xi_1 + \dots + t_k\xi_k)} \\
&= \int e^{i(t,u)} F(\,du) = \int e^{i(t_1u_1 + \dots + t_ku_k)} F(\,du_1, \dots, \,du_k).
\end{aligned}
$$

(Itt a következő jelölést használtuk. Ha $u = (u_1, \dots, u_k)$, $v = (v_1, \dots, v_k)$ két k-dimenziós vektor, akkor $(u, v) = u_1v_1 + \dots + u_kv_k$ az u és v vektor skaláris szorzata.)

12.) Egy $\varphi(t_1, \dots, t_k)$ karakterisztikus függvény egyenletesen folytonos függvény az R^k k-dimenziós euklideszi térben, $\varphi(0, \dots, 0) = 1$, és

$$
|\varphi(t_1, \dots, t_k)| \leq 1 \quad \text{minden } (t_1, \dots, t_k) \in R^k \text{ pontban.}
$$

Legyen a $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_k)$ valószínűségi vektor karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = \varphi(t_1, \dots, t_k)$, $t = (t_1, \dots, t_k)$, a valós szám, $m = (m_1, \dots, m_k)$ k-dimenziós vektor. Ekkor az $a\xi + m = (a\xi_1 + m_1, \dots, a\xi_k + m_k)$ valószínűségi vektor karakterisztikus függvénye

$$
e^{i(m,t)}\varphi(at) = e^{i(m_1t_1 + \dots + m_kt_k)}\varphi(at_1, \dots, at_k).
$$

Ha $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi vektorok sorozata, a $\xi_j = (\xi_j^{(1)}, \dots, \xi_j^{(k)})$, $1 \leq j \leq n$, vektor karakterisztikus függvénye $\varphi_j(t) = \varphi_j(t_1, \dots, t_k)$, $j = 1, \dots, n$, $t = (t_1, \dots, t_k)$, akkor a $\xi_1 + \dots + \xi_n$ vektor karakterisztikus függvénye $\prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t) = \prod_{j=1}^{n} \varphi_j(t_1, \dots, t_k)$.

Számítsuk ki néhány fontos eloszlás karakterisztikus függvényét.

13.) Mutassuk meg, hogy ha a ξ valószínűségi változó

a.) standard normális eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye $f(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$, akkor karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = e^{-t^2/2}$.

b.) egyenletes eloszlású a $[0, 1]$ intervallumban, azaz $f(u) = 1$, ha $0 \leq u \leq 1$, és $f(u) = 0$ egyébként, akkor karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = \frac{e^{it}-1}{it}$.

c.) exponenciális eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, azaz sűrűségfüggvénye $f(u) = \lambda e^{-\lambda u}$, ha $u \geq 0$, $f(u) = 0$, ha $u < 0$, akkor karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$.

d.) Cauchy eloszlású, azaz sűrűségfüggvénye $f(u) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+u^2}$, akkor karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = e^{-|t|}$.

e.) Poisson eloszlású $\lambda > 0$ paraméterrel, azaz $P(\xi = k) = \frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, akkor karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = \exp\left\{\lambda(e^{it} - 1)\right\}$.

f.) binomiális eloszlású n, és p paraméterekkel, ahol $n \geq 1$ egész szám és $0 < p < 1$, azaz $P(\xi = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$, $k = 0, 1, \dots, n$, akkor karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = (1 - p + pe^{it})^n$.

g.) negativ binomiális eloszlású n és p paraméterrel, ahol $n \geq 1$ egész szám, $0 < p < 1$, azaz $P(\xi = k) = \binom{n+k-1}{k} p^k (1-p)^n$, $k = 0, 1, 2, \dots$, akkor a karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = \left(\frac{1-p}{1-pe^{it}}\right)^n$.

h.) γ eloszlású s paraméterrel, $s > 0$, azaz sűrűségfüggvénye $\gamma_s(u) = \frac{1}{\Gamma(s)} u^{s-1} e^{-u}$, ha $u > 0$, $\gamma_s(u) = 0$, ha $u < 0$, ahol $\Gamma(s) = \int_0^\infty u^{s-1} e^{-u}\, du$, akkor karakterisztikus függvénye $\varphi_s(t) = \frac{1}{(1-it)^s}$.

Érdemes megjegyezni, hogy a h.) pontban vizsgált $\gamma_s(u)$ függvény, mutat némi hasonlóságot a Poisson eloszlással, és ezt fel lehet használni arra, hogy a második feladat megoldásához hasonló módon jó aszimptotikus formulát kapjunk a $\Gamma(s)$ függvényre $s \to \infty$ esetén. Ilyen módon a Stirling formula általánosítását tudjuk bizonyítani, mert mint némi parciális integrálással végrehajtott számolás mutatja $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Vegyük észre, hogy $\gamma_{s_1}(u) * \gamma_{s_2}(u) = \gamma_{s_1+s_2}(u)$, ahol $*$ konvoluciót jelöl. Ez következik például a γ_s karakterisztikus függvényének alakjából. Továbbá a $\gamma_s(s) = \frac{s^{s-1}e^{-s}}{\Gamma(s)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{-ts}}{(1-it)^s}\, ds$ azonosságot a sűrűségfüggvényre vonatkozó inverziós formula segítségével, és ezen azonosság jobb oldalát aszimptotikusan akiszámolva, (hasonlóan a 2. feladat megoldásához), azt kapjuk, hogy $\Gamma(s) \sim \sqrt{2\pi(s-1)}(\frac{s-1}{e})^{s-1}$, ha $s \to \infty$.

C.) A konvolució definiciója és néhány fontos tulajdonsága.

Ebben a feladatsorban független valószínűségi változók normalizált részletösszegeinek eloszlás és sűrűségfüggvényét vizsgáljuk. Ezeknek a normalizált részletösszegeknek az eloszlását vagy sűrűségfüggvényét ki lehet fejezni az eredeti eloszlásfüggvények és sűrűségfüggvényeknek a segítségével is. Ilyen módon a feladatsorban kimondott határeloszlástételeket meg lehet fogalmazni az eloszlásfüggvények nyelvén is, anélkül hogy független valószínűségi változók összegeiről beszélnénk. Annak érdekében, hogy ezt megtehessük bevezetjük a konvolució operátor definicióját. Ezt kissé általánosabban, integrálható (nem feltétlenül sűrűség)függvényekre és előjeles mértékekre is definiálni fogjuk. A konvolució fogalmát ebben a feladatsorban nem fogjuk használni, ezért a következő definició illetve az azt követő 14.–17. feladatok elhagyhatóak lennének ebből a feladatsorból. Mégis, határeloszlások tárgyalása a konvolúció fogalmának bevezetése nélkül hiányos lenne, ezért ezt a fogalmat külön tárgyalom. Ráadásul ez a fogalom az analízis és valószínűségszámítás számos vizsgálatában természetes módon megjelenik. Sok esetben a konvolució alább megadott kissé általánosabb nem pusztán sűrűségfüggvényekre és valószínűségi mértékekre bevezetett definicióját érdemes használni.

A konvolució operátor definiciója. *Ha $f(x_1, \dots, x_k)$ és $g(x_1, \dots, x_k)$ két k-dimenziós mérhető és integrálható függvény, azaz $\int |f(x_1, \dots, x_k)|\, dx_1 \dots dx_k < \infty$, és $\int |g(x_1, \dots, x_k)|\, dx_1 \dots dx_k < \infty$, akkor az f és g függvények $f * g$ konvoluciója a* *következő k-változós függvény:*

$$f * g(x_1, \ldots, x_k) = \int f(u_1, \ldots, u_k) g(x_1 - u_1, \ldots, x_k - u_k)\, du_1 \ldots du_k \tag{8}$$

minden olyan $(x_1, \ldots, x_k)$ pontban, ahol a fenti integrál értelmes. (A többi pontban tetszőleges módon definiáljuk az $f * g$ függvényt.)

Legyen μ és ν két véges variációjú mérték az R^k k-dimenziós euklideszi tér mérhető részhalmazain, azaz tegyük fel, hogy létezik $\mu = \mu_1 - \mu_2$ illetve $\nu = \nu_1 - \nu_2$ reprezentáció, ahol μ_i és ν_i, $i = 1, 2$, véges mértékek az R^k tér véges részhalmazain, azaz $\mu_k(R^k) < \infty$, és $\nu_k(R^k) < \infty$, $k = 1, 2$. Legyen $\mu \times \nu$ a μ és ν mértékek direkt szorzata az $R^k \times R^k = R^{2k}$ szorzattéren. Ekkor a $\mu * \nu$ konvolució a következő halmazfüggvény az R^k tér mérhető halmazain:

$$\mu * \nu(A) = \mu \times \nu\{(u, v)\colon\ u + v \in A\} \quad \textit{minden mérhető } A \subset R^k \textit{ halmazra.}$$

Legyen $f(x_1, \ldots, x_k)$ mérhető és integrálható k-változós függvény, ν véges variációjú mérték az R^k mérhető részhalmazain. Ekkor ezek konvoluciója $f * \nu(x_1, \ldots, x_k)$ a következő k-változós függvény:

$$f * \nu(x_1, \ldots, x_k) = \int f(u_1, \ldots, u_k) \nu(x_1 - du_1, \ldots, x_k - du_k)$$

minden olyan $(x_1, \ldots, x_k)$ pontban, ahol a fenti integrál értelmes. Azaz az $f(\cdot)$ függvényt azon $\bar\nu_{x_1, \ldots, x_k}$ mérték szerint integráljuk, amelynek definiciója:

$$\bar\nu_{x_1, \ldots, x_k}(A) = \nu((x_1, \ldots, x_k) - A).$$

(A többi pontban tetszőleges módon definiáljuk az $f * \nu$ függvényt.)

14.) Ha $f(x_1, \ldots, x_k)$ és $g(x_1, \ldots, x_k)$ két mérhető és integrálható függvény az R^k téren, akkor a (8) képletben definiált $f * g(x_1, \ldots, x_k)$ véges, és az $f * g$ konvolució is integrálható függvény.

Ha μ és ν két korlátos változású mérték az R^k téren, akkor a $\mu * \nu$ konvolució is az.

Ha μ és ν két korlátos változású mérték az R^k téren, és a μ mértéknek létezik $f(u_1, \ldots, u_k)$ sűrűségfüggvénye, azaz $\mu(A) = \int_A f(u_1, \ldots, u_k)\, du$ minden mérhető $A \subset R^k$ halmazra, akkor a $\mu * \nu$ konvoluciós mértéknek létezik sűrűségfüggvénye, és ez az $f * \nu$ függvény. Ez speciálisan azt is jelenti, hogy az $f * \nu(x)$ függvény integrálható. Ha a μ és ν mértékeknek létezik $f(u_1, \ldots, u_k)$ illetve $g(u_1, \ldots, u_k)$ sűrűségfüggvénye akkor a $\mu * \nu$ konvoluciós mértéknek létezik sűrűségfüggvénye, és ez az $f * g$ konvolució.

15.) Ha ξ és η két független valószínűségi vektor az R^k téren, ξ eloszlása μ, η eloszlása ν, akkor $\xi + \eta$ eloszlása $\mu * \nu$. Ha a ξ valószínűségi vektornak létezik $f(u_1, \ldots, u_k)$ sűrűségfüggvénye, akkor $\xi + \eta$-nak is létezik sűrűségfüggvénye, és ez $f * \nu$. Ha ξ-nek létezik f ν-nek pedig g sűrűségfüggvénye, akkor $\xi+\eta$-nak is létezik sűrűségfüggvénye, és ez az $f*g$ függvény.

Következésképpen, ha ξ_j, $j=1,\dots,n$, független valószínűségi vektorok $F_j(x)=F_j(x_1,\dots,x_k)$ eloszlásfüggvénnyel, $j=1,\dots,n$, $\bar S_n=\frac{\sum\limits_{j=1}^n \xi_j-A}{B}$ valamilyen $A=(A_1,\dots,A_k)$ és $B>0$ normálási tényezőkkel, akkor $\bar S_n$ eloszlása $F_1*\cdots*F_n(Bx+A)$. Ha a ξ_j valószínűségi vektoroknak van f_j sűrűségfüggvényük, $1\le j\le n$, akkor $\bar S_n$ sűrűségfüggvénye $Bf_1*\cdots*f_n(Bx+A)$.

$f*g=g*f$, $\mu*\nu=\nu*\mu$, $(f*g)*h=f*(g*h)$, $(\mu_1*\mu_2)*\mu_3=\mu_1*(\mu_2*\mu_3)$, azaz a konvolúció operátor kommutativ és asszociativ.

A következő feladatban megadjuk a konvolució és Fourier transzformált közötti kapcsolatot.

16.) Ha $f(u_1,\dots,u_k)$ és $g(u_1,\dots,u_k)$ két integrálható függvény R^k-n

$$\varphi(t_1,\dots,t_k)=\int e^{i(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)}f(u_1,\dots,u_k)\,du_1\dots du_k$$

és

$$\psi(t_1,\dots,t_k)=\int e^{i(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)}g(u_1,\dots,u_k)\,du_1\dots du_k$$

Fourier transzformáltakkal, akkor az $f*g(u_1,\dots,u_k)$ konvolució Fourier transzformáltja a $\varphi(t_1,\dots,t_k)\psi(t_1,\dots,t_k)$ függvény.

Ha μ és ν két korlátos változású mérték R^k-n

$$\varphi(t_1,\dots,t_k)=\int e^{i(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)}\mu(\,du_1,\dots,\,du_k)$$

és

$$\psi(t_1,\dots,t_k)=\int e^{i(t_1u_1+\cdots+t_ku_k)}\nu(\,du_1,\dots,\,du_k)$$

Fourier transzformáltakkal (vagy más terminológiában karakterisztikus függvényekkel), akkor $\mu*\nu$ Fourier transzformáltja a $\varphi(t_1,\dots,t_k)\psi(t_1,\dots,t_k)$ függvény.

A következő feladat célja annak megmutatása, hogy informálisan fogalmazva a konvolució operátor simító operátor. Ha két síma függvényt tekintünk, akkor azok konvoluciója még símább lesz. Az egyszerűség érdekében ebben a feladatban csak egyváltozós függvényeket fogunk tekinteni.

17.) Legyen $f(u)$ és $g(u)$ két integrálható függvény. Tegyük fel, hogy a $\frac{d^jf(u)}{du^j}$ deriváltak léteznek, ezek is integrálható függvények, és $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{d^jf(u)}{du^j}=0$ minden $0\le j\le k$ egésszel valamilyen k egész számmal. Tegyük fel továbbá, hogy a $\frac{d^jg(u)}{du^j}$ deriváltak is léteznek, ezek is integrálható függvények, és $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{d^jg(u)}{du^j}=0$ minden $0\le j\le l$

egészre valamilyen l egész számmal. Ekkor létezik a $\frac{d^{k+l}f*g(u)}{du^{k+l}}$ derivált, amelyik integrálható függvény, és $\lim\limits_{u\to-\infty}\frac{d^{k+l}f*g(u)}{du^{k+l}}=0$.

Legyen $f(u)$ és $g(u)$ két integrálható függvény úgy, hogy az $f(u)$ függvény analitikus egy $\{z\colon |\mathrm{Im}\, z|<A\}$ tartományban valamilyen $A>0$ számmal. Tegyük fel továbbá, hogy $\int|f(u+ix)|\,du<\infty$ minden $|x|<A$ számra, és tetszőleges $\varepsilon>0$, $B>0$ számokra létezik olyan $K=K(A,B,\varepsilon)$ szám, amelyre $\int_{|u|>K}|f(y-u+ix)g(u)|\,du<\varepsilon$, ha $|y|<B$ és $|x|<A$. Ekkor az $f*g$ konvolució is analitikus függvény a $\{z\colon |\mathrm{Im}\, z|<A\}$ tartományban.

D.) Eloszlásban való konvergencia.

Bár nincs kényelmesen használható inverziós formula, amely egy eloszlásfüggvényt kifejez annak karakterisztikus függvénye segítségével, és lehetővé teszi eloszlások konvergenciájának vizsgálatát azok karakterisztikus függvényének segítségével, mégis a lokális centrális határeloszlástétel bizonyítása a következő képet sugallja: Eloszlásfüggvények konvergenciáját be lehet bizonyítani úgy, hogy az eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényeinek konvergenciáját igazoljuk. Ilyen tipusú eredményt be lehet bizonyítani, és ez az eredmény nagyon hasznos határeloszlástételek vizsgálatában. De az állítás megfogalmazásában és bizonyításában különösképpen figyelni kell bizonyos részletekre.

Először meg kell pontosan fogalmazni azt, hogy mit értünk eloszlásfüggvények, illetve az ezen eloszlásfüggvények által meghatározott valószínűségi mértékek konvergenciáján. A definició megadása előtt tekintsük a következő egyszerű példát. Legyen x_n, $n=1,2,\dots$, negatív számok olyan sorozata, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$, és vezessük be az $x_0=0$ jelölést. Tekintsük azokat az (elfajult) μ_n, $n=0,1,2,\dots$, valószínűségi mértékeket a számegyenesen, amelyek az x_n, $n=0,1,2,\dots$, pontokba vannak koncentrálva, azaz $\mu_n(\{x_n\})=1$, $n=1,2,\dots$. Természetes elvárni, hogy valószínűségi mértékek konvergenciáját úgy definiáljuk, hogy e szerint a definició szerint az előbb definiált μ_n, $n=1,2,\dots$, mértékek konvergálnak a μ_0 mértékhez. Másrészt a μ_n, $n=0,1,2,\dots$, eloszlásfüggvényeket az $F_n(u)=0$, ha $u\le x_n$, és $F_n(u)=1$, ha $u>x_n$, $n=0,1,2,\dots$, definiálja, azaz $\mu_n([a,b))=F_n(b)-F_n(a)$ tetszőleges $a<b$ számpárra. Jegyezzük meg, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}F_n(x)=F_0(x)$ minden $x\neq0$ számra, de ez a reláció nem érvényes $x=0$ esetén, mert $F_0(0)=0$ és $F_n(0)=1$, ha $n\neq0$. Ez a példa azt mutatja, hogy az a naív elképzelés, amely szerint eloszlásfüggvények konvergenciája egy határeloszláshoz azt jelentené, hogy ezek az eloszlásfüggvények minden pontban konvergálnak a limesz eloszlásfüggvényhez nem volna szerencsés definició. Az eloszlásfüggvény konvergenciája a fenti példában az origóban nem teljesül. Ez az a pont, ahol a határeloszlásfüggvény nem folytonos. Az alább megadott (alkalmas) definicióban nem kívánjuk meg az eloszlásfüggvények konvergenciáját azokban a pontokban, ahol a határeloszlásfüggvény nem folytonos. Ezt a definiciót többdimenziós eloszlások esetében is meg fogjuk adni.

Eloszlásfüggvények konvergenciájának definiciója. *Legyen $F_n(x_1,\dots,x_k)$, $n=0,1,2,\dots$, k-dimenziós, $k\ge1$, eloszlásfüggvények sorozata. Azt mondjuk, hogy az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszlásfüggvényhez, vagy az F_n,*

$n = 1, 2, \ldots$, eloszlások által meghatározott μ_n valószínűségi mértékek eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszlás által meghatározott μ_0 mértékhez, illetve az F_n eloszlású $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$, $n = 1, 2, \ldots$ véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak az F_0 eloszlású $\xi_0 = (\xi_0^{(1)}, \ldots, \xi_0^{(k)})$, $n = 1, 2, \ldots$ véletlen vektorhoz $n \to \infty$ esetén, ha

$$\lim_{n \to \infty} F_n(x_1, \ldots, x_k) = F_0(x_1, \ldots, x_k)$$

az $F_0(x_1, \ldots, x_k)$ eloszlásfüggvény minden folytonossági pontjában. Ezt az eloszlásban való konvergenciát időnként gyenge konvergenciának is nevezik az irodalomban.

A további vizsgálatokban fontos szerepet játszik az alábbi tétel, amely ekvivalens definiciót ad eloszlások konvergenciájára. A következő feladat ennek a tételnek a bizonyítása. Ez a feladat megegyezik a *Valószínűségi mértékek gyenge konvergenciája metrikus terekben* feladatsor első feladatával.

Tétel A. *Az $F_n(x_1, \ldots, x_k)$ eloszlásfüggvények akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban az $F_0(x_1, \ldots, x_k)$ eloszlásfüggvényhez, ha tetszőleges $f(x_1, \ldots, x_k)$ a k-dimenziós térben folytonos és korlátos függvényre*

$$\int f(x_1, \ldots, x_k)\, dF_n(x_1, \ldots, x_k) \to \int f(x_1, \ldots, x_k)\, dF_0(x_1, \ldots, x_k), \quad \text{ha } n \to \infty. \tag{9}$$

18.) Bizonyítsuk be a Tétel A-t.

Megjegyezzük, hogy az eloszlásban való konvergencia Tétel A-ban megadott jellemzése azért is fontos, mert ennek segítségével tudjuk definiálni valószínűségi mértékek konvergenciáját általános topológikus terekben. Ugyanis az eredeti definició használja az eloszlásfüggvények fogalmát, azaz bizonyos téglatestek valószínűségét. Ez olyan fogalom, amelyik az euklideszi terek geometriájához kötődik, és nem definiálható általános topológikus terekben. Ezért szerepel ez az eredmény a fent említett feladatsorban is.

Érdemes megjegyezni, hogy a (9) formulában megfogalmazott feltétel interpretálható úgy is mint a funkcionálanalízisben használt gyenge konvergencia. Az R^k k-dimenziós euklideszi térben levő valószínűségi mértékek felfoghatók, mint az R^k tér folytonos függvényeinek (a szokásos szuprémum normával ellátott) (Banach) terén értelmezett korlátos (lineáris) funkcionálok. A (9) formulában megadott reláció ekvivalens azzal, hogy az F_n eloszlások által meghatározott μ_n mértékek, mint korlátos funkcionálok gyengén konvergálnak az F_0 eloszlás által meghatározott μ_0 mértékhez mint korlátos funkcionálhoz. Itt a funkcionális analízis szokásos terminológiáját használtuk. Ez a tény teszi természetessé azt, hogy az eloszlásban való konvergenciát időnként gyenge konvergenciának nevezik.

Az eloszlásban való konvergencia (9) formulában megadott definiciója természetes módszert ad arra, hogy a karakterisztikus függvények illetve a Fourier analízis módszerét hogyan használjuk határeloszlástételek bizonyításában. Tetszőleges $t = (t_1, \ldots, t_k)$ k-dimenziós vektor esetén az $e_t(x) = e_{t_1,\ldots,t_k}(x_1, \ldots, x_k) = e^{i(t,x)} = e^{i(t_1x_1 + \cdots + t_kx_k)}$

függvények folytonos, korlátos függvények a k-dimenziós térben, ezért a (9) reláció speciálisan azt is megköveteli, hogy minden $(t_1,\dots,t_k)$ vektorra teljesüljön a

$$\varphi_n(t_1,\dots,t_k)\to\varphi_0(t_1,\dots,t_k),\quad \text{ha } n\to\infty$$

reláció, ahol $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ az $F_n(t_1,\dots,t_k)$ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye, $n=0,1,2,\dots$.

Ahhoz, hogy a karakterisztikus függvények konvergenciájából az eloszlások konvergeciájára tudjunk következtetni, szükség van olyan eredményre, amelyik olyan tényt fejez ki, hogy az $e_{t_1,\dots,t_k}(x_1,\dots,x_k)=e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}$ trigonometrikus függvények, illetve azok lineáris kombinációi a k-dimenziós térben folytonos és korlátos függvények elég gazdag részosztálya. A mi tárgyalásunkban Weierstrass második approximációs tételének segítségével fogjuk kifejezni a trigonometrikus függvények osztályának gazdagságát. Ennek bizonyítását meg fogjuk adni az Appendixben.

Weierstrass második approximációs tétele. *Tetszőleges folytonos és 2π szerint periodikus $f(t)$ függvényre és $\varepsilon>0$ valós számra létezik olyan $P_n(t)=\sum\limits_{k=-n}^{n}a_ke^{ikt}$ trigonometrikus polinom, amelyre*

$$\sup_{-\infty<t<\infty}|f(t)-P_n(t)|<\varepsilon.$$

(A P_n polinom foka és a benne szereplő a_k együtthatók függnek mind az $f(\cdot)$ folytonos függvénytől és az $\varepsilon>0$ számtól. Ha az $f(\cdot)$ függvény valós értékű, akkor az a_k együtthatókat választhatjuk úgy, hogy $a_{-k}=\bar a_k$ minden $k=0,1,\dots,n$ indexre, ahol $\bar z$ a z szám konjugáltja. Ekkor a $P_n(t)$ trigonometrikus polinom is valós értékű.)

Igaz ennek az állításnak a következő többdimenziós változata is. Ha $f(t_1,\dots,t_k)$ folytonos függvény a k-dimenziós euklideszi térben, amely minden koordinátájában 2π szerint periodikus, azaz $f(t_1+2j_1\pi,\dots,t_k+2j_k\pi)=f(t_1,\dots,t_k)$ minden egész $j_1,\dots j_k$ számra, és $\varepsilon>0$ valós szám, akkor létezik olyan k változós trigonometrikus polinom

$$P_n(t_1,\dots,t_k)=\sum_{(j_1,\dots,j_k)\colon |j_1|+\cdots+|j_k|\le n}a_{j_1,\dots,j_k}e^{i(j_1t_1+\cdots+j_kt_k)},$$

ahol $j_1,\dots,j_k$ egész számok, amelyre

$$|f(t_1,\dots,t_k)-P_n(t_1,\dots,t_k)|<\varepsilon\quad \textit{minden valós } t_1,\dots,t_k \textit{ számra.}$$

Weierstrass második approximációs tételének alkalmazása megfelelő átskálázással lehetővé teszi, hogy egy k-dimenziós folytonos függvényt tetszőleges pontossággal közelítsünk valamely véges tartományban olyan minden argumentámában egy általunk választott nagy T szám szerint periodikus függvénnyel amelynek integrálját egy valószínűségi mérték szerint egyszerűen ki lehet fejezni e mérték karakterisztikus függvényének segítségével. Nevezetesen a karakterisztikus függvény különböző pontokban vett értékének alkalmas lineáris kombinációja megegyezik ennek a közelítő függvénynek az integráljával. Az, hogy Weierstrass második approximációs tétele csak véges tartományban ad lehetőséget jó approximációra, az nem ennek az eredménynek a gyengeségéből, hanem a vizsgált feladat jellegéből következik. Azt akarjuk vizsgálni, hogy mikor teljesül a (9) reláció *minden* folytonos és korlátos függvényre. A következő feladatokban belátjuk, hogy ez csak akkor lehetséges, ha a (9) formulában szereplő integrálokban a "végtelen környezetének" a hozadéka elhanyagolhatóan kicsi. Először bevezetjük a következő definiciót.

Eloszlások relatív kompaktságának és feszességének definiciója. *Legyen adva* $F_n(t_1,\dots,t_k)$, $n=1,2,\dots$, *eloszlásfüggvényeknek sorozata a* k*-dimenziós euklideszi térben, és jelölje* μ_n *az* F_n *eloszlásfüggvény által meghatározott valószínűségi mértéket az* R^k *térben. Azt mondjuk, hogy az* F_n *eloszlásfüggvények illetve* μ_n *valószínűségi mértékek sorozata relatív kompakt, ha az* F_n *(vagy* μ_n*) sorozat tetszőleges* F_{n_k} *(illetve* μ_{n_k}*) részsorozatának* $k=1,2,\dots$, *létezik* $F_{n_{k_j}}$ *(illetve* $\mu_{n_{k_j}}$*),* $j=1,2,\dots$, *eloszlásban konvergens részsorozata.*

Azt mondjuk, hogy az F_n *eloszlásfüggvények (*μ_n *valószínűségi mértékek) sorozata feszes, ha tetszőleges* $\varepsilon>0$ *számra létezik olyan* $K=K(\varepsilon)$ *szám, hogy a* $\mathbf{K}(K)^k=\underbrace{[-K,K]\times\cdots\times[-K,K]}_{k\text{-szoros szorzat}}$ k*-dimenziós kockára* $\mu_n(\mathbf{K}(K)^k)\ge 1-\varepsilon$ minden $n=1,2,\dots$ *indexre.*

19.) Legyen μ valószínűségi mérték a k-dimenziós euklideszi tér Borel mérhető részhalmazain és $\varepsilon>0$ valós szám. Létezik olyan $K=K(\mu,\varepsilon)$ szám, amelyre a $\mathbf{K}^k(K)=\underbrace{[-K,K]\times\cdots\times[-K,K]}_{k\text{-szoros szorzat}}$ k-dimenziós kocka teljesíti a $\mu(\mathbf{K}(K)^k)>1-\varepsilon$ egyenlőtlenséget. Bizonyítsuk be ennek az állításnak és Weierstrass második approximációs tételének a segítségével, hogy egy valószínűségi mérték karakterisztikus függvénye egyértelműen meghatározza a valószínűségi mértéket, azaz ha két μ_1 és μ_2 valószínűségi mértéknek ugyanaz a karakterisztikus függvénye, akkor $\mu_1=\mu_2$.

    Továbbá tetszőleges véges variációjú μ mértéket az R^k k-dimenziós téren egyértelműen meghatároz annak $\varphi(t_1,\dots,t_k)=\int e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}\mu(\,dx_1,\dots,dx_k)$ Fourier transzformáltja, $(t_1,\dots,t_k)\in R^k$.

20.) Mutassunk példát arra, hogy egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye egy véges intervallumban nem határozza meg az eloszlásfüggvényt. Azaz minden $T>0$ számra létezik két különböző $F_1(\cdot)$ és $F_2(\cdot)$ eloszlásfüggvény, amelyekre a $\varphi_i(t)=\int e^{itu}\,dF(u)$, $i=1,2$, karakterisztikus függvények teljesítik a $\varphi_1(t)=\varphi_2(t)$ azonosságot minden $-T\le t\le T$ számra.

21.) Legyen μ_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi mértékek sorozata az az R^k k-dimenziós euklideszi téren. Ez a valószínűségi mértékekből álló sorozat akkor és csak akkor relatív kompakt, ha feszes. Speciálisan valószínűségi mértékek eloszlásban konvergens sorozata feszes.

Teszek egy kis kitérőt. Ismertetem az előbb tárgyalt eredmények természetes általánosítását teljes, szeparábilis metrikus terekben definiált valószínűségi mértékek sorozatára.

Ezeket az eredményeket ebben a jegyzetben nem használjuk, de azok hasznosak például az úgynevezett funkcionális centrális határeloszlástétel bizonyításában. Itt csak az eredményeket ismertetem bizonyítások nélkül, bár a bizonyításban komoly segítséget adhatnak ez ebben a fejezetben bizonyított eredmények.

A Tétel A és az abbban szereplő (9) formula természetes lehetőséget ad szeparábilis metrikus terekben definiált valószínűségi mértékek eloszlásbeli (vagy más néven gyenge) konvergenciájának a definiálására. Azt mondjuk, hogy valószínűségi mértékeknek egy (X,ρ) szeparábilis metrikus téren definiált μ_n sorozata eloszlásban (vagy gyengén) konvergál egy μ valószínűségi mértékhez, ha minden az (X,ρ) téren definiált folytonos és korlátos $f(x)$ függvényre

$$\lim_{n\to\infty}\int f(x)\mu_n(\,dx)=\int f(x)\mu(\,dx).$$

Érdemes megjegyezni, hogy egy szeparábilis metrikus téren definiált μ mértéket egyértelműen meghatároz a korlátos, folytonos függvények segítségével definiált $\int f(x)\mu(\,dx)$ integrálok családja. Innen az is következik, hogy μ_n valószínűségi mértékeknek egy ilyen téren definiált sorozatának eloszásbeli határértéke egyértelműen meg van határozva, (ha az létezik). Ugyancsak definiálhatjuk valószínűségi mértékek relatív kompaktságát és feszességét általános metrikus terekben, és megfogalmazhatjuk a róluk szóló, az ebben a fejezetben tárgyalt eredményekhez hasonló tételeket. Itt érdemes figyelmünket a teljes szeparábilis metrikus terekre korlátozni.

Azt mondjuk, hogy egy (X,ρ) teljes szeparábilis metrikus téren definiált μ_n mértékek sorozata relatíve kompakt, ha minden μ_{n_k} részsorozatának létezik $\mu_{n_{k_j}}$ (eloszlásban vagy másképp mondva gyengén) konvergens rész-részsorozata. Be lehet látni, hogy egy teljes szeparábilis metrikus térben minden μ valószínűségi mértékre és $\varepsilon>0$ valós számra létezik olyan $\mathbf{K}$ kompakt halmaz, amelyre $\mu(\mathbf{K})>1-\varepsilon$. Ezután definiálni tudjuk mértéksorozat feszességét is. Azt mondjuk, hogy valószínűségi mértékeknek egy (X,ρ) teljes szeparábilis metrikus téren definiált μ_n, $n=1,2,\dots$, sorozata feszes, ha minden $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\mathbf{K}=\mathbf{K}(\varepsilon)$ kompakt halmaz, amelyre $\mu_n(\mathbf{K})>1-\varepsilon$ minden $n=1,2,\dots$ számra. Igaz a következő Tétel.

Tétel mértékek feszességének és relatív kompaktságának kapcsolatáról. *Legyen μ_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi mértékek sorozata egy (X,ρ) teljes szeparábilis metrikus téren. Ez a mértéksorozat akkor és csak akkor relatív kompakt, ha feszes. Speciálisan, valószínűségi mértékek tetszőleges egy kompakt teljes metrikus téren definiált sorozata (relatív) kompakt.*

Ez az eredmény nagyon hasznos valószínűségi mérték sorozatok konvergenciájának vizsgálatában általános metrikus terekben. (Ilyen vizsgálatok eredménye például a funkcionális centrális határeloszlástétel.) Ahhoz, hogy ezt az eredményt jól tudjuk használni szükségünk van a metrikus terek kompakt halmazainak a leírására. Ez az eredmény ismert a $C([0,1])$ térben, (azaz a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények Banach terében a szuprémum normával).

Tétel a $C([0,1])$ tér kompakt halmazainak jellemzéséről. *A $C([0,1])$ tér (és általában minden teljes szeparábilis metrikus tér) kompakt halmazai zárt halmazok. Egy* $\mathbf{F}$ *zárt halmaz a $C(0,1])$ térben akkor és csak akkor kompakt, ha*

(a) A $C = \{x(0)\colon\ x(\cdot) \in \mathbf{F}\}$ halmaz korlátos, és

(b) Az $\mathbf{F}$ halmazban levő $x(\cdot)$ függvények egyenlő mértékben, egyenletesen folytonosak, azaz minden $\delta > 0$ számhoz létezik olyan $\eta = \eta(\delta) > 0$ szám, amelyre

$$\sup_{x(\cdot)\in\mathbf{F}} \sup_{0\le s,t\le 1,\ |t-s|\le\eta} |x(t) - x(s)| \le \delta.$$

Bizonyos vizsgálatokban, például a funkcionális centrális határeloszlástétel bizonyításában hasznos a fenti eredmények alábbi következménye.

Következmény. *Legyen $X_n(t)$, $0 \le t \le 1$, $n = 1, 2, \dots$, $C([0,1])$-térbeli értéket felvevő valószínűségi változók sorozata. Az $X_n(t)$ sorozat akkor és csak akkor konvergál eloszlásban (gyengén) valamely $X(t)$, $0 \le t \le 1$, $C([0,1])$ térbeli valószínűségi változóhoz, ha*

(a) Tetszőleges $0 \le t_1 < \cdots < t_k \le 1$ véges sorozatra az $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k))$ véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak, ha $n \to \infty$.

(b) Minden $\varepsilon > 0$ és $\delta > 0$ számhoz létezik olyan $\eta = \eta(\delta, \varepsilon) > 0$ szám, amelyre

$$P\left(\omega\colon \sup_{0\le s,t\le 1,\ |t-s|\le\eta} |X_n(t,\omega) - X_n(s,\omega)|) \le \delta\right) > 1 - \varepsilon$$

minden $n = 1, 2, \dots$ indexre.

Megjegyzés. A fenti következmény (a) pontja azt biztosítja, hogy az $X_n(\cdot)$ valószínűségi változók μ_n eloszlásaira az összes konvergens részsorozatnak ugyanaz a határértéke. Továbbá be lehet látni, hogy a (b) pont és az $X_n(0)$, $n = 1, 2, \dots$ valószínűségi változók konvergenciája biztosítja azt, hogy ezek a μ_n eloszlások egy relatív kompakt sorozatot alkotnak.

E.) Eloszlások konvergenciájának kapcsolata a karakterisztikus függvények konvergenciájával.

Annak érdekében, hogy az eloszlásban való konvergencia feltételét ki tudjuk fejezni a karakterisztikus függvények segítségével, hasznos megfogalmazni egy olyan eredményt, amely megadja annak szükséges és elégséges feltételét eloszlások karakterisztikus függvényeinek segítségével, hogy eloszlások egy sorozata feszes, vagy ami az előző feladat szerint ezzel ekvivalens, relatív kompakt sorozat legyen.

22.) Legyen adva eloszlásfüggvények $F_n(u)$, $n = 1, 2, \dots$, sorozata $\varphi_n(t)$, $n = 1, 2, \dots$, karakterisztikus függvénnyel a számegyenesen. Az $F_n(\cdot)$ eloszlás függvény sorozat akkor és csak akkor feszes, ha

$$\lim_{\delta\to 0} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\ (1 - \varphi_n(t))\, dt = 0, \tag{10}$$

ahol $\operatorname{Re} z$ a z komplex szám valós részét jelöli.

Bár a későbbiekben nem lesz szükségünk a következő észrevételre, mutassuk meg, hogy a (10) reláció ekvivalens azzal, hogy

$$\lim_{\delta\to 0}\sup_n \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}\,(1-\varphi_n(t))\,dt = 0. \tag{10'}$$

A fenti eredmények és Weierstrass második approximációs tételének segítségével meg tudjuk fogalmazni és be tudjuk bizonyítani annak szükséges és elégséges feltételét a karakterisztikus függvények nyelvén, hogy eloszlások egy sorozatának legyen határeloszlása. Ezt az eredményt, amelyet alább fogunk megfogalmazni, fontossága miatt alaptételnek fogjuk nevezni.

Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel. *Legyen $F_n(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvények egy sorozata az R^k k-dimenziós euklideszi téren $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ karakterisztikus függvényekkel, $n=1,2,\dots$. Ha a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ határérték létezik minden $(t_1,\dots,t_k)$ pontban, és a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ limeszfüggvény folytonos az origóban, akkor létezik olyan $F_0(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvény a k-dimenziós térben, amelynek a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ függvény a karakterisztikus függvénye. Sőt a φ_0 függvény folytonosságáról szóló feltétel némileg enyhíthető. Elég feltenni, hogy a $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ függvény megszorítása mindegyik koordinátatengelyre folytonos az origóban. Továbbá e feltétel teljesülése esetén az $F_n(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az $F_0(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvényhez.*

Megfordítva, ha $F_n(u_1,\dots,u_k)$, $n=1,2,\dots,$ eloszlásfüggvényeknek egy az R^k k-dimenziós euklideszi téren definiált sorozata, amely egy $F_0(u_1,\dots,u_k)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$, $n=1,2,\dots,$ jelöli az $F_n(u_1,\dots,u_k)$, $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)$ pedig az $F_0(x_1,\dots,x_k)$ karakterisztikus függvényét, akkor $\varphi_0(t_1,\dots,t_k)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ minden $(t_1,\dots,t_k)\in R^k$ pontban. Továbbá, ez a konvergencia egyenletes az R^k tér minden kompakt részhalmazán.

Az Alaptételt a szokásosnál kissé élesebb formában fogalmaztuk meg. Megjegyeztük, hogy az Alaptétel érvényességéhez elég feltenni azt, hogy a $\varphi_0(\cdot)$ határfüggvénynek a koorditnátatengelyekre való megszorításai folytonosak az origóban. Ezt a megjegyzést azért tettük, mert egyrészt ez az enyhe élesítés semmilyen nehézséget nem okoz a bizonyításban, másrészt egyszerűbbé teszi a később megfogalmazandó 45. feladat megoldását.

Be kívánjuk bizonyítani az előbb megfogalmazott Alaptételt. Ennek érdekében először megoldunk egy önmagában is érdekes feladatot.

23.) Legyen $\xi^{(n)}=(\xi_1^{(n)},\dots,\xi_k^{(n)})$ k-dimenziós valószínűségi vektorok sorozata, és jelölje $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ ezek karakterisztikus függvényét, $n=1,2,\dots$. Bizonyítsuk be (a 22. feladat eredményének a segítségével), hogy amennyiben az origó egy kis környezetében a $\varphi_n(t_1,\dots,t_k)$ függvények konvergálnak egy $\varphi(t_1,\dots,t_k)$ függvényhez, amely az origóban folytonos, akkor a $\xi^{(n)}=(\xi_1^{(n)},\dots,\xi_k^{(n)})$ véletlen vektorok eloszlásfüggvényei feszesek. Sőt, ahhoz, hogy ez a feszesség teljesüljön, elég az, hogy a $\varphi(t_1,\dots,t_k)$ függvény megszorításai a koordinátatengelyekre az origóban folytonos függvények legyenek.

24.) Bizonyítsuk be az eloszlások konvergenciájáról szóló alaptételt.

25.) Mutassunk példát karakterisztikus függvények olyan $\varphi_n(t)$, $n=0,1,2,\dots$, sorozatára, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty}\varphi_n(t)=\varphi_0(t)$, ez a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban, de nem egyenletes az egész számegyenesen.

Tegyünk néhány megjegyzést a fent megfogalmazott alaptétellel kapcsolatban.

i.) Az alaptételben olyan feltételeket adtunk, amelyek automatikusan biztosítják, hogy a vizsgált karakterisztikus függvények limesze is karakterisztikus függvény. Ez a tény azért is fontos, mert ez teszi lehetővé számunkra, hogy jellemezzük a lehetséges határeloszlásokat illetve azok karakterisztikus függvényeit, (ha például független valószínűségi változók alkalmasan normalizált részletösszegeit vizsgáljuk).

ii.) Az alaptételben csak azt követeltük meg, hogy a tekintett karakterisztikus függvények limesze, (amelyik az alaptétel szerint szintén karakterisztikus függvény) az origóban legyen folytonos, noha tudjuk, hogy a karakterisztikus függvények az egész téren (egyenletesen) folytonosak, (lásd a 12. feladat eredményét). Jegyezzük meg, hogy a karakterisztikus függvények a lehetséges függvényeknek egy kitüntetett speciális osztályát alkotják, és ezért bizonyos extra tulajdonságokkal rendelkeznek. A karakterisztikus függvényeknek létezik nem triviális jellemzése. Ilyen jellemzést ad a Bochner tétel, amely az úgynevezett pozitív definit függvények írja le. A Bochner tétel fontos szerepet játszik mind az analízisban mind a valószínűségszámítás bizonyos problémáinak vizsgálatában. Bár mi ezt az eredményt nem fogjuk használni, azt be fogjuk bizonyítani egy későbbi feladatsorban. A bizonyításban hasznosnak bizonyulnak majd a határeloszlástételek vizsgálatában kapott eredmények.

iii.) Az a feltétel, hogy a karakterisztikus függvények határértéke folytonos biztosítja azt, hogy az eloszlások sorozata feszes, azaz "nem folyik ki tömeg a végtelenbe." Ha az eloszlások sorozata "kifolyhat a végtelenbe", akkor nem lehet eloszlások aszimptotikus viselkedését olyan áttekinthető módon leírni a karakterisztikus függvények segítségével mint azt az Alaptételben tettük. Erre ad példát a következő feladat.

26.) Mutassunk példát valószínűségi mértékek μ_n sorozatára a számegyenesen úgy, hogy $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_n(\mathbf{K})=0$ minden korlátos $\mathbf{K}$ halmazra, és a μ_n mértékek $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényeinek

a.) van határértéke.

b.) nincs határértéke.

F.) Egy függvény illetve e függvény Fourier transzformáltjának viselkedése közötti kapcsolat.

Ha eloszlások viselkedését akarjuk vizsgálni karakterisztikus függvények segítségével vagy általánosabban a Fourier-transzformációt akarjuk alkalmazni bizonyos vizsgálatokban, akkor szükségünk van egyfajta "szótárra", amely megadja, hogy egy mérték vagy függvény tulajdonságai hogyan tükröződnek e mérték vagy függvény Fourier transzformáltjának a viselkedésében, és megfordítva, hogyan lehet a Fourier transzformált viselkedéséből az erdeti mérték vagy függvény tulajdonságaira következtetni. A következő feladatok eredményei által megadott "szótár" korántsem lesz teljes, de belátunk néhány olyan állítást is, amelyekre nem lesz közvetlen szükségünk. Ezeket az eredményeket csak egy dimenziós valószínűségi változókra fogalmazzuk meg, bár azok több-dimenziós általánosítása nem okoz nehézséget.

Informális módon ennek a "szótárnak" a tartalmát a következő módon fogalmazhatjuk meg: Minél símább egy függvény vagy mérték, pontosabban a mérték sűrűségfüggvénye, annál gyorsabban tart annak Fourier transzformáltja a végtelenben nullához. Minél kevesebb tömeget tartalmaz egy valószínűségi mérték a végtelen egy kis környezetében, vagy más szóval minél több momentuma van egy valószínűségi változónak, amelynek ez a mérték az eloszlása, annál símább e mérték karakterisztikus függvénye. Továbbá a karakterisztikus függvény deriváltjai az origóban meghatározzák a valószínűségi változó momentumait.

Megfordítva: Ha egy eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye síma, és ezt a símaságot elég csak az origó kis környezetében feltenni, akkor annál gyorsabban cseng le az eloszlásfüggvény a végtelenben minél símább a karakterisztikus függvény. Másrészt minél gyorsabban tart nullához a karakterisztikus függvény a végtelenben, annál símább az eredeti eloszlásfüggvény. Továbbá bizonyos eredmények azt is mutatják, hogy ha egy függvény néhány pontot kivéve síma, és ezekben a pontokban ennek a függvénynek szingularitása van, akkor a Fourier transzformált viselkedése a végtelenben jól tükrözi ezeknek a szingularitásoknak a jellegét. Ez utóbbi kérdést, amelynek vizsgálatára e feladatsor eredményeinek bizonyításában nem lesz szükségünk csak felületesen és a bizonyítások elhagyásával fogom tárgyalni.

Tulajdonképpen a 22. feladat állítása is felfogható úgy, mint egy ebbe a "szótár"-ba tartozó eredmény, és annak tartalma összhangban van az előbb vázolt heurisztikus képpel. Az, hogy a tekintett eloszlásfüggvények családja feszes azt fejezi ki, hogy meg lehet adni a végtelen olyan kis környezetét, amelyben az ezen eloszlásfüggvények által meghatározott valószínűségi mértékek mindegyike valamilyen előírt kis korlátnál kisebb tömeget tartalmaz. Másrészt, az erre a tulajdonságra a (10) formulában megadott szükséges és elégséges feltétel olyan relációt fejez ki, hogy ezen eloszlások $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényei valamilyen bonyolult értelemben egyenletesen folytonosak az origó egy kis környezetében. (Emlékezzünk arra, hogy $1 - \varphi(0) = 0$.)

Ugyancsak konzisztens a fenti heurisztikával a 17. és 16. feladat eredménye is. A 17. feladat olyan állítást fejez ki, amely szerint két sűrűségfüggvény konvolució ja még símább, mint a konvolucióban résztvevő függvények. Másrészt a sűrűségfüggvények konvoluciójának Fourier transzformaáltja egyenlő e függvények Fourier transzformáltjának szorzatával. Az előbb vázolt heurisztikus érv szerint egy függvény annál simább, minél gyorsabban tart e függvény Fourier transzformáltja nullához a végtelenben. Viszont két nullához tartozó függvény szorzata gyorsabban tart nullához mint az egyes függvények, és ez felel meg a konvolució operátor simító tulajdonságának a Fourier transzformáltak terében.

27.) Ha a ξ valószínűségi változó abszolút értékének létezik k-ik momentuma, azaz $E|\xi^k| < \infty$ akkor a ξ valószínűségi változó $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvénye k-szor folytonosan differenciálható, és $\left.\frac{d^j\varphi(t)}{dt^j}\right|_{t=0} = i^j E\xi^j$ minden $0 \le j \le k$ számra.

A ξ valószínűségi változónak akkor és csak akkor létezik exponenciális momentuma, ha a $|\xi|$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye exponenciális gyorsan tart egyhez a végtelenben, azaz $Ee^{u\xi} < \infty$ minden $|u| \le t$ esetén valamilyen alkalmas $t > 0$ számmal, akkor és csak akkor ha a $P(|\xi| > x) < Ce^{-\alpha x}$ minden $x > 0$-ra alkalmas $C > 0$ és $\alpha > 0$ konstansokkal. Ebben az esetben a $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvény analitikus a $\{z\colon |\mathrm{Re}\, z| < a\}$ tartományban, alkalmas $a > 0$ számmal.

28.) Ha az $f(u)$ függvény abszolút értéke integrálható a számegyenesen, akkor az $f(u)$ függvény $\varphi(t) = \int e^{itu} f(u)\, du$ Fourier transzformáltja teljesíti a $\lim\limits_{t\to\infty} \varphi(t) = 0$ és $\lim\limits_{t\to-\infty} \varphi(t) = 0$ relációkat. (Riemann lemma.)

Ha az $f(u)$ függvény abszolút értéke integrálható, $f(u)$ k-szor differenciálható, továbbá a $\frac{d^j f(u)}{du^j}$ függvények abszolút értéke integrálható minden $1 \le j \le k$ számra, akkor $\int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} f(u)\, du = o\left((1+|t|)^{-k}\right)$ $|t| \to \pm\infty$ esetében.

Ha az $f(u)$ függvény egyenlő valamely $\{z\colon |\mathrm{Re}\, z| < A\}$, $A > 0$ tartományban analitikus $f(z)$ függvény megszorításával a számegyenesre, amelyre teljesül az $|\int |f(u + iv)|\, du < \infty$ egyenlőtlenség, ha $|v| < A$, akkor $\varphi(t) = \int e^{itu} f(u)\, du = O\left(e^{-\alpha|t|}\right)$ $t \to \pm\infty$ esetében valamilyen $\alpha > 0$ konstanssal.

29.) Tekintsük egy ξ nem elfajuló, azaz nem egy valószínűséggel konstans valószínűségi változó $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvényét. Akkor és csak akkor létezik olyan $t \ne 0$ szám, amelyre $|\varphi(t)| = 1$, ha ξ rácsos eloszlású. (A rácsos eloszlás definicióját lásd Definició A-ban.) Legyen a ξ valószínűségi változó egy h sűrűségi rácsra (mint legritkább rácsra) koncentrálva. Ilyen legritkább rács egy rácsos eloszlású, nem konstans valószínűségi változó esetén mindig létezik. A $|\varphi(t)| = 1$ reláció akkor és csak akkor érvényes ezen ξ valószínűségi változó $\varphi(\cdot)$ karakterisztikus függvényére, ha $t = 2\pi\frac{k}{h}$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$. Ha ξ nem rácsos eloszlású valószínűségi változó, akkor minden $0 < A < B < \infty$ számpárra $\sup\limits_{A \le |t| \le B} |\varphi(t)| < 1$.

30.) Legyen a ξ valószínűségi változó eloszlása $P(\xi = 1) = P(\xi = \sqrt{2}) = P(\xi = -1) = P(\xi = -\sqrt{2}) = \frac{1}{4}$. Ekkor a $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvény egyrészt teljesíti a $|\varphi(t)| < 1$, ha $t \ne 0$ relációt, másrészt $\limsup\limits_{t\to\infty} |\varphi(t)| = 1$. A $\limsup\limits_{t\to\infty} |\varphi(t)| = 1$ és $|\varphi(t)| < 1$, ha $t \ne 0$ relációk abban az általánosabb esetben is érvényesek, amikor ξ tetszőleges véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok pontba koncentrált, de nem rácsos eloszlású valószínűségi változó.

Megjegyzés 1: A mértékelmélet egy klasszikus eredménye szerint tetszőleges (véges) mérték felbontható egy abszolút folytonos, egy diszkrét, (azaz megszámlálható sok pontba koncentrált) valamint egy szinguláris mérték összegeként. (Egy szinguláris mérték olyan mérték, amely szerint minden pont mértéke nulla, viszont a mérték egy nulla Lebesgue mértékű halmazra van koncentrálva.) Egy abszolút folytonos mérték előáll, mint egy $f(u)$ integrálható függvény integrálja. Ezért a 28. feladat állítása szerint egy ilyen mérték $\varphi(t)$ Fourier transzformáltja nullához tart $t \to \infty$ esetén, és minél símább ez az $f(u)$ függvény annál gyorsabban tart a Fourier transzformált nullához a végtelenben. A 29. és 30. feladat állítása azt mondja ki, hogy diszkrét mérték Fourier transzformáltja ellenkező módon viselkedik a végtelenben. Ebben az esetben a Fourier transzformált abszolút értékének $\limsup$-ja a végtelenben megegyezik a számegyenes mértékével. Egy szinguláris mérték Fourier transzformáltjának a viselkedését a végtelenben nem tudjuk általános módon jellemezni.

Megjegyzés 2: Tekintsük egy olyan a számegyenesen definiált $f(s)$ függvény $\tilde{f}(u)$ Fourier transzformáltjának a viselkedését az $u \to \infty$ vagy $u \to -\infty$ esetében, amely síma, elég sokszor differenciálható, kivéve egy a pontot. E pont pont kis környezetében legyen a függvénynek $f(s) \sim C|s-a|^\alpha$, $\alpha > -1$, $\alpha \neq 2k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, alakú szingularitása. Ekkor belátható, hogy $\tilde{f}(u) \sim \bar{C}e^{iua}u^{-\alpha-1}$ $u \to \infty$ esetén, és a $\bar{C}$ konstans explicit módon megadható. Heurisztkusan ez az állítás a következő módon magyarázható. Az $f(s)$ függvény símasága miatt a függvény Fourier transzformáltjának aszimptotikus viselkedését a végtelenben e függvény a pontbeli szingularitása határozza meg, és az körülbelül a

$$
\begin{aligned}
\tilde{g}(u) = C\int_{-\infty}^{\infty} e^{ius}|s-a|^\alpha\,ds &= Ce^{iau}\int_{-\infty}^{\infty} e^{ius}|s|^\alpha\,ds \\
= Ce^{iau}u^{-\alpha-1}\int_{-\infty}^{\infty} e^{is}|s|^\alpha\,ds &= \bar{C}e^{iau}u^{-\alpha-1}
\end{aligned}
$$

kifejezéssel egyenlő, ha $u \to \infty$. A fenti számolás nagyon pongyola. A fő probléma az, hogy a tekintett integrálok az integrandusban szereplő $|s|^\alpha$ faktor miatt, legalábbis mint Lebesgue integrálok értelmetlenek. Ennek ellenére a számolás helyes eredményt ad, sőt az integrál áthelyezése az imaginárius tengelyre lehetővé teszi a $\bar{C}$ konstans meghatározását is a $\Gamma(\cdot)$ függvény segítségével. Ha több pontban van az f függvénynek hasonló szingularitása, akkor ezek hatása összeadódik, amikor a Fourier transzformált viselkedését írjuk le a végtelen környezetében.

Bár az ebben a megjegyzésben tett eredményeket ebben a feladatsorban nem használjuk, az ilyen jellegű eredmények fontos szerepet játszanak a valószínűségszámítás és analízis számos problémájának vizsgálatában. Az $\alpha = 2k$, $k = 0, 1, \dots$, paramétereket azért kellett kizárni, mert ebben az esetben az $f(s)$ függvény síma az a pontban. Az $|s-a|^\alpha$ függvény másfajta viselkedése ezen paraméterek esetében fontos szerepet játszik bizonyos statisztikus fizika problémában.

A következő 31.–34. feladatok egy mérték viselkedéséről adnak információt a mérték Fourier transzformáltjának a segítségével.

31.) Ha egy ξ valószínűségi változó $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvénye kétszer differenciálható az origóban, akkor a ξ valószínűségi változónak létezik véges második momentuma, azaz $E\xi^2 < \infty$. Lássuk be teljes indukcióval, hogy amennyiben a karakterisztikus függvény $2k$-szor differenciálható az origóban, akkor $E\xi^{2k} < \infty$.

32.) Ha egy ξ valószínűségi változó $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvénye differenciálható az origó egy kis környezetében, és a derivált ott Lipschitz α függvény valamilyen $\alpha > 0$ számmal, azaz $|\varphi'(t)-\varphi'(s)| < C|t-s|^\alpha$ alkalmas $C > 0$ számmal, ha $|s| < \varepsilon$, $|t| < \varepsilon$ valamilyen $\varepsilon > 0$ számmal, akkor $E|\xi| < \infty$. Érvényes a következő némileg tartalmasabb becslés is: $P(|\xi| > u) < \text{const.}\, u^{-1-\alpha}$ minden $u > 0$ számra.

Ha a $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény $2k+1$-szer differenciálható az origó egy kis környezetében, és ott a $2k+1$-ik derivált Lipschitz α függvény valamilyen $\alpha > 0$ számmal, akkor $E|\xi|^{2k+1} < \infty$.

Megjegyzés: A 31. és 27. feladat eredményeiből következik, hogy hogy egy valószínűségi változó második momentuma akkor és csak akkor véges, ha ennek a valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye az origóban kétszer differenciálható. Ha egy valószínűségi változó első momentumának abszolút értéke véges, akkor ennek a valószínűségi változónak a karakterisztikus függvénye differenciálható az origóban (és mindenütt). De az első momentum várható értékének létezésének biztosításához erősebb megszorítást követeltünk meg mint a karakterisztikus függvény deriválhatósága az origóban. (Ez lenne a 31. feladat eredményének természetes analogonja.) Bár a 32. feladat feltételei gyengíthetőek, a karakterisztikus függvény deriválhatósága az origóban nem elegendő ahhoz, hogy a valószínűségi változó abszolút értékének első momentuma véges legyen. Valóban, ismeretes az eloszlásfüggvénnyel kifejezhető szükséges és elégséges feltétele annak, hogy a karakterisztikus függvény az origóban differenciálható legyen. Mivel ez a kérdés természetes módon felmerül a nagy számok gyenge törvényének vizsgálatában független egyforma eloszlású valószínűségi változók átlagára, ez az eredmény szerepel a *Sztochasztikus és egy valószínűségi konvergencia* feladatsor 12. feladatában is. Ez a feltétel a következő: Egy F eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a deriváltja az origóban akkor és csak akkor egyenlő egy ia, $-\infty < a < \infty$, számmal, ha

$$\lim_{x\to\infty} x\,[F(-x) + (1-F(x))] = 0, \quad \text{és} \quad \lim_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} xF(\,dx) = a.$$

33.) Ha egy ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye analitikus a nulla kis környezetében, akkor létezik olyan $\alpha > 0$ szám, amelyre $P(|\xi| > x) \le \text{const.}\, e^{-\alpha x}$ minden $x > 0$-ra.

34.) Ha egy ξ valószínűségi változó $\varphi(u) = Ee^{iu\xi}$ karakterisztikus függvénye integrálható, azaz $\int |\varphi(u)|\,du < \infty$, akkor a ξ valószínűségi változónak létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye. Ha $|\varphi(u)| < \text{const.}\, |u|^{-(k+1+\varepsilon)}$ valamilyen $\varepsilon > 0$ számmal, akkor az $f(x)$ sűrűségfüggvénynek létezik folytonos és korlátos k-ik deriváltja. Ha $|\varphi(u)| < \text{const.}\, e^{-\alpha|u|}$ valamilyen $\alpha > 0$ számmal, akkor az $f(x)$ sűrűségfüggvény analitikus.

Megjegyzés 1: A 34. feladat állítása részben élesíthető. Ahhoz, hogy a ξ valószínűségi változónak legyen sűrűségfüggvénye elegendő feltenni azt, hogy a ξ változó $\varphi(u) = Ee^{iu\xi}$

karakterisztikus függvénye négyzetesen integrálható. Ugyanis érvényes a sűrűségfüggvényt a karakterisztikus függvény inverz Fourier transzformáltjának segítségével kifejező képlet négyzetesen integrálható Fourier transzformáltakra is, csak ebben az esetben a felírt integrált nem a szokásos Lebesgue integrálként értelmezzük, hanem azt alkalmas L_2-beli kiterjesztéssel kell definiálni. Ez egy a Fourier analízisben klaszikus eredmény, amelyet itt nem tárgyalok. Az említett állítás innen következik.

Megjegyzés 2: A 8. feladatban megfogalmazott lokális centrális határeloszlástételben megjegyeztük, hogy a karakterisztikus függvény integrálhatóságára kirótt feltétel gyengíthető, elég azt feltenni, hogy a karakterisztikus függvény elég magas hatványa integrálható. Az exponenciális eloszlás mutat példát olyan eloszlásra, amelynek karakterisztikus függvénye nem integrálható (lásd 13.c) feladatot), viszont a karakterisztikus függvény négyzete integrálható. Tehát ebben az esetben a 8.) feladatnak csak ez az élesebb formája alkalmazható. Ennek a példának mélyebb hátterét jobban megvilágítják az előbbi eredmények. Jegyezzük meg, hogy az exponenciális eloszlásfüggvény sűrűségfüggvényének szakadása van az origóban, és a karakterisztikus függvény eloszlása e miatt a szakadás miatt tart lassan nullához a végtelenben. Viszont az exponenciális sűrűségfüggvény konvoluciója önmagával símábbá teszi ezt a függvényt. Az, hogy a karakterisztikus függvény négyzete integrálható ennek a ténynek felel meg. Hasonló a helyzet olyan sűrűségfüggvények esetében, amelyeknek van néhány nem túl erős szingularitásuk.

G.) A centrális határeloszlástétel.

A korábbi eredmények lehetővé teszik a centrális határeloszlástétel bizonyítását a karakterisztikus függvények segítségével.

35.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 = 1$. Legyen $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Lássuk be, hogy az $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$, $n = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszlásfüggvényhez.

Vizsgálni kívánjuk a centrális határeloszlástételt általánosabb esetben is, amikor független, de nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizált részletösszegeit tekintjük. Érdemes a feladatot kissé általánosabb megfogalmazásban tekinteni, amikor minden k pozitív egész számra egymástól független valószínűségi változók részletösszegeit tekintjük, de a különböző k indexekhez tartozó valószínűségi változók kapcsolatáról semmit nem teszünk fel. Ha feltesszük, hogy az k-ik sorban levő valószínűségi változók kicsik, akkor bebizonyíthatjuk enyhe feltételek mellett azt, hogy az k-ik sorban levő valószínűségi változók összegeinek eloszlása tart a standard normális eloszláshoz.

Lényegében meg tudjuk adni annak szükséges és elégséges feltételét, hogy ezek az összegek eloszlásban tartsanak a standard normális eloszláshoz. Ezt az állítást a késóbbiekben pontosabban meg fogjuk fogalmazni. Ennek a pontosabb és általánosabb problémának a megfogalmazásához érdemes bevezetni az alább definiálandó széria sorozat fogalmát. A független, de nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizált részletösszegeiről szóló centrális határeloszlástételek következnek a széria sorozatokról bizonyítandó centrális határeloszlástételből.

Szériasorozatok definiciója. *A*

$$
\begin{array}{l}
\xi_{1,1}, \dots, \xi_{1,n_1} \\
\vdots \qquad\ \ \vdots \\
\xi_{k,1}, \dots, \xi_{k,n_k} \\
\vdots \qquad\ \ \vdots
\end{array}
$$

valószínűségi változók rendszere, $k \to \infty$, szériasorozat, ha az egy sorban levő $\xi_{k,1}$, ..., ξ_{k,n_k} valószínűségi változók függetlenek. (A különböző sorokban levő valószínűségi változók kapcsolatáról nem tételezünk fel semmit.)

A centrális határleloszlástelnek a karakterisztikus függvények segítségével adandó bizonyításához az általános esetben érdemes megmutatni, hogy az e^{it} függvényt jól közelíti az első k tag összege e függvény Taylor sorában. Ez a következő feladat tartalma.

36.) Tetszőleges k nem negatív egész és t valós számra

$$\left| e^{it} - \left(1 + \frac{it}{1!} + \cdots + \frac{(it)^k}{k!} \right) \right| \le \frac{|t|^{k+1}}{(k+1)!}. \tag{11}$$

Ha adva van egy szériasorozat, és be akarjuk látni, hogy az egyes sorokban levő összegek eloszlásainak van határeloszlása $k \to \infty$ esetében, akkor természetes a következő érvelés. Tekintsük az egyes sorokban levő $\xi_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$, valószínűségi változók $\varphi_{k,j}(\cdot)$ karakterisztikus függvényeit. Azt kell belátnunk, hogy ezen karakterisztikus függvények szorzatai konvergálnak. Vegyük ezen szorzatok logaritmusát. Ekkor a $\log \varphi_{k,j}(t)$ függvények összegét kell tekinteni rögzített k-ra és t-re. Ha van olyan feltétel, amely szerint az egyes $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók kicsik, akkor természetes azt várni, hogy $\varphi_{j,k}(t) \sim 1$ rögzített t-re, és a $\log \varphi_{k,j}(t) \sim (1 - \varphi_{k,j}(t))$ reláció elég jó közelítés. Ekkor elég ezen utóbbi kifejezések összegét vizsgálni. A következő feladat célja ennek a heurisztikus érvelésnek pontos megfogalmazása és bizonyítása. Ez az eredmény lehetővé teszi, hogy a centrális határeloszlástétel feltételeinek ne csak az elégségességét, hanem a szükségességét is vizsgáljuk.

37.) Tekintsük egy ξ valószínűségi változó $\varphi(t)$ karkakterisztikus függvényét valamilyen rögzített t számra.

a.) Ha $E\xi = 0$, $E\xi^2 \le \varepsilon$ egy elég kis $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$ számmal akkor $|1 - \varphi(t)| \le \frac{t^2}{2} E\xi^2$, és $|\log \varphi(t) + (1 - \varphi(t))| \le t^4 \left(E\xi^2 \right)^2$.

b.) Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j} = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, $\lim\limits_{k \to \infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$, és a szériasorozat tagjai teljesítik a $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{1\le j\le n_k} E\xi_{k,j}^2\right)=0$ kicsiségi feltételt. Jelölje $\varphi_{k,j}(t)=Ee^{it\xi_{k,j}}$, $-\infty<t<\infty$, a $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$, $1\le k<\infty$, véletlen összegek akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban az m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális eloszláshoz, ha

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}(\varphi_{k,j}(t)-1)=-\frac{\sigma^2t^2}{2}+imt \tag{12}$$

minden $-\infty<t<\infty$ számra.

Bár elsősorban arra vagyunk kiváncsiak, hogy az adott feltételek mellett az S_k részletösszegek mikor konvergálnak eloszlásban a standard normális eloszlásfüggvényhez, mégis érdemes volt annak a feltételét is megfogalmazni, hogy a limesz egy m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális valószínűségi változó legyen. Fogunk arra is példát mutatni, hogy bár nulla várható értékű valószínűségi változók összegét vizsgáljuk, a határeloszlás lehet $m\neq 0$ várható értékű is.

A szériasorozatokról szóló centrális határeloszlásfeltétel vizsgálatában alapvető fontosságú az alább megfogalmazandó Lindeberg feltétel. Látni fogjuk, hogy a 37. feladat b.) részében megadott feltételeket teljesítő szériasorozatok $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ összegei akkor és csak akkor konvergálnak a standard normális eloszlásfüggvényhez, ha ez a szériasorozat teljesíti a Lindeberg feltételt.

Lindeberg feltétel definiciója: *Legyen $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j}=0$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, és $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}E\xi_{k,j}^2=1$. Ez a szériasorozat akkor és csak akkor teljesíti a Lindeberg feltételt, ha tetszőleges $\varepsilon>0$ számra*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}E\xi_{k,j}^2 I\left(\{|\xi_{k,j}|>\varepsilon\}\right)=0,$$

ahol $I(A)$ egy A halmaz indikátor függvénye.

38.) Legyen $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j}=0$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}E\xi_{k,j}^2=1$, és amelyik sorozat teljesíti a Lindeberg feltételt. Ekkor

a.) a szériasorozat tagjai teljesítik a $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{1\le j\le n_k} E\xi_{k,j}^2\right)=0$ kicsiségi feltételt.

b.) Az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$, $1\le k<\infty$, véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a standard, azaz nulla várható értékű és 1 szórásnégyzetű normális eloszláshoz, ha $k\to\infty$.

Érvényes az előbbi feladat következő megfordítása:

39.) Legyen $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $E\xi_{k,j}=0$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}E\xi_{k,j}^2=1$, és teljesíti a következő kicsiségi feltételt: $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{1\le j\le n_k}E\xi_{k,j}^2\right)=0$. Tegyük fel ezen kívül azt, hogy az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$, $1\le k<\infty$, véletlen összegek eloszlásban konvergálnak egy 1 szórásnégyzetű és tetszőleges várható értékű normális normális eloszláshoz, ha $k\to\infty$. Ekkor a $\xi_{k,j}$, $1\le k<\infty$, $1\le j\le n_k$, szériasorozat teljesíti a Lindeberg feltételt.

Külön hangsúlyozzuk, hogy a 39. feladatban nem csak azt követeltük meg annak biztosítására, hogy a Lindeberg feltétel teljesüljön, hogy az S_k részletösszegek eloszlásban egy normális eloszláshoz konvergáljanak, hanem azt is, hogy a határeloszlásnak a "helyes" 1 szórásnégyzete legyen. Fogunk mutatni példát arra, hogy lehetséges az, hogy a $\xi_{k,j}$, $1\le k<\infty$, $1\le j\le n_k$, szériasorozat teljesíti az $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\sup\limits_{1\le j\le n_k}E\xi_{k,j}^2\right)=0$ kicsiségi feltételt, nem teljesíti a Lindeberg feltételt, és az S_k véletlen összegek eloszlásban konvergálnak egy normális eloszláshoz. De ebben az esetben a normális határeloszlás szórásnégyzete kisebb mint 1. Az ilyen példák vizsgálata előtt megtárgyaljuk, hogy az előző eredmények milyen eredményt adnak független, nem feltétlenül egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizált részletösszegeinek határeloszlására. Ennek érdekében megfogalmazzuk a Lindeberg feltétel alkalmas verzióját független valószínűségi változók sorozatára.

Lindeberg feltétel független valószínűségi változók sorozataira: *Legyen ξ_n, $n=1,2,\dots$, független valószínűségi változók sorozata, amelyre $E\xi_n=0$, $\sigma_n^2=E\xi_n^2<\infty$, $n=1,2,\dots$, és az $s_n^2=\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2$, $n=1,2,\dots$, sorozat teljesíti a $\lim\limits_{n\to\infty}s_n^2=\infty$ feltételt. Azt mondjuk, hogy a ξ_n, $n=1,2,\dots$, sorozat teljesíti a Lindeberg feltételt, ha minden $\varepsilon>0$ számra*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{s_n^2}\sum_{k=1}^{n}E\xi_k^2I(\{|\xi_k|>\varepsilon s_n\})=0.$$

A Lindeberg feltétel szemléletes tartalma az, hogy az egyes valószínűségi változók túlságosan nagy (az összeg szórásával összemérhető) értékeinek a hatása elhanyagolhatóan kicsi. Az ilyen rendkívül nagy értékek kevéssé befolyásolják mind a normalizált összeg eloszlását mind az összeg szórásnégyzetét, tehát a normalizáló faktort. Ezt a tényt fejezi ki a következő feladat. E feladat eredményének a később tárgyalandó 42. feladattal együtt a következő következménye is van. Tekintsünk egy szériasorozatot, amely teljesíti a Lindeberg feltételt. Ha e szériasorozat tagjainak a túl nagy (nagyobb mint $\varepsilon>0$) értékeit levágjuk, majd a csonkított valószínűségi változókat úgy normalizáljuk, hogy várható értékük nulla legyen, akkor e módosított valószínűségi változókból képzett részletösszegek ugyanolyan határeloszlás tételt teljesítenek mint az eredeti szériasorozat tagjaiból képzett részletösszegek.

40.) Ha egy $\xi_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozat $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$, $E\xi_{k,j} = 0$, teljesíti a Lindeberg feltételt, $\varepsilon > 0$ tetszőleges pozitív szám, $\bar{\xi}_{k,j} = \bar{\xi}_{k,j}(\varepsilon) = \xi_{k,j} I(|\xi_{k,j}| < \varepsilon) - E\xi_{k,j} I(|\xi_{k,j}| < \varepsilon)$, akkor $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\bar{\xi}_{k,j}^2 = 1$. Továbbá, bevezetve az $\bar{S}_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \bar{\xi}_{k,j}$ és $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ részletösszegeket az $S_k - \bar{S}_k$ különbségek sztochasztikusan tartanak nullához, ha $k \to \infty$.

Adva független valószínűségi változók egy ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata, amelyre $E\xi_n = 0$, $\sigma_n^2 = E\xi_n^2 < \infty$, és az $s_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2$ teljesíti a $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^2 = \infty$ relációt, definiáljuk e sorozat segítségével a következő $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $j = 1, \dots, n_k$, szériasorozatot: $n_k = k$ és $\xi_{k,j} = \frac{\xi_j}{s_k}$, ha $1 \le j \le k$. A ξ_n, $n = 1, 2, \dots$ akkor és csak akkor teljesíti a Lindeberg feltételt, ha az előbb definiált $\xi_{k,j}$ sorozat teljesíti azt. Ezért a széria-sorozatokról szóló centrális határeloszlástétel, illetve annak megfordítása átfogalmazható független valószínűségi változók normálizált részletösszegeire is. (A megfordítás esetében a szériasorozatokra vonatkozó egyenletes kicsiségi feltétel megfelelője a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1\le k\le n} \sigma_k^2}{s_n^2} = 0$ feltétel.) A következő feladatban megadunk olyan tulajdonságokat, amelyekből következik a Lindeberg feltétel.

41.) Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független valószínűségi változók sorozata, amelyre $E\xi_n = 0$, $\sigma_n^2 = E\xi_n^2 < \infty$, $n = 1, 2, \dots$, $\lim\limits_{n\to\infty} s_n^2 = \infty$, ahol $s_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \sigma_k^2$. Ez a sorozat teljesíti a Lindeberg feltételt, ha a következő tulajdonságok egyike teljesül.

a.) $E|\xi_k|^{2+\alpha} < \infty$, minden $k = 1, 2, \dots$ számra valamilyen $\alpha > 0$ konstanssal, és $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\left(\sum\limits_{k=1}^{n} E|\xi_k|^{2+\alpha}\right)^{2/(2+\alpha)}}{s_n^2} = 0$. Speciálisan, ez a feltétel teljesül akkor, ha $E\xi_k^2 \ge K$ valamilyen $K > 0$ számmal minden $k = 1, 2, \dots$ indexre, és ezenkívül érvényes az $E \lim\limits_{k\to\infty} k^{-\alpha/2} E|\xi_k|^{2+\alpha} = 0$ reláció.

b.) A független ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók egyforma eloszlásúak. (Tehát a 35. feladat eredménye következik az általános feltételek között megfogalmazott centrális határeloszlástételből is.)

Példát akarunk mutatni, olyan a kicsiségi feltételt teljesítő független, nulla várható értékű véges szórású, a kicsiségi feltételt teljesítő valószínűségi változókra, amelyek alkalmasan normalizált részletösszegei eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz, viszont a normálás nem tipikus, azaz nem a részletösszegek szórásaival osztunk. Egy ilyen konstrukció egyben példát ad arra, hogy a független valószínűségi változók normalizált részletösszegei (nem tipikus normálással) teljesíthetik a centrális határeloszlástételt akkor is, ha a Lindeberg feltétel nem teljesül. A konstrukció elvégzéséhez érdemes előbb belátni egy egyszerű és sok vizsgálatban hasznos állítást. Ez azt mondja ki, hogy eloszlásban konvergens valószínűségi változók sorozata ugyanahhoz a határeloszláshoz konvergál mint e valószínűségi változók kis perturbációi. Megjegyezzük, hogy hasonló állítás nem csak valós szám értékű valószínűségi változókra érvényes.

42.) Legyen adva valószínűségi változók két S_n és T_n, $n=1,2,\dots$, sorozata, amelyekre az S_n, $n=1,2,\dots$, sorozat eloszlásban konvergál valamilyen F eloszláshoz, és a T_n, $n=1,2,\dots$, sorozat sztochasztikusan konvergál nullához, azaz $P(|T_n|>\varepsilon)\to 0$ minden $\varepsilon>0$ számra, ha $n\to\infty$. Ekkor az S_n+T_n, $n=1,2,\dots$, sorozat szintén konvergál eloszlásban az F eloszláshoz.

43.) Konstruáljunk független ξ_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változókból álló sorozatot, amelyre $E\xi_n=0$, $E\xi_n^2=1$, $n=1,2,\dots$, és az $S_n=\sum\limits_{k=1}^n \xi_k$, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változók teljesítik a következő állítást:

a.) A $\sqrt{\frac{2}{n}}S_n$, $n=1,2,\dots$, sorozat eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz.

b.) A $\sqrt{\frac{2}{n}}S_n$, $n=1,2,\dots$, sorozat eloszlásban konvergál egy $m\neq 0$ várható értékű és 1 szórásnégyzetű normális eloszláshoz.

A 38. feladat eredményéből következik, hogy egy a 43. feladat állítását kielégítő konstrukció nem teljesíti a Lindeberg feltételt. A Lindeberg feltétel teljesülése esetén ugyanis a $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ sorozat konvergálna eloszlásban a standard normális eloszláshoz.

H.) A többdimenziós centrális határeloszlástétel.

A többdimenziós határeloszlástételek hasonlóan vizsgálhatóak az egydimenziós határeloszlástételekhez a karakterisztikus függvények segítségével. Sőt, a következő két (szintén a karakterisztikus függvények segítségével bizonyítható) feladat lehetővé teszi, hogy a többdimenziós határeloszlástételek vizsgálatát közvetlenül visszavezessük az egydimenziós esetre.

44.) Legyen $\mathbf{Z}=(Z_1,\dots,Z_m)$, $n=1,2,\dots$, m-dimenziós valószínűségi vektor. Tekintsük tetszőleges valós $a_1,\dots,a_m$ számokra az $Z=Z(a_1,\dots,a_m)=\sum\limits_{j=1}^m a_jZ_j$ valószínűségi változót. A $\mathbf{Z}$ valószínűségi vektor eloszlását meghatározza az összes $Z=Z(a_1,\dots,a_m)$ egydimenziós valószínűségi változó eloszlása.

45.) Legyen $\mathbf{Z}_n=(Z_{1,n},\dots,Z_{m,n})$, $n=1,2,\dots$, m-dimenziós valószínűségi vektorok sorozata. A $\mathbf{Z}_n$ valószínűségi vektorok akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban valamilyen m-dimenziós eloszláshoz $n\to\infty$ esetén, ha tetszőleges $a_1,\dots,a_m$ valós számokra a $Z_n=Z_n(a_1,\dots,a_m)=\sum\limits_{j=1}^m a_jZ_{j,n}$, $n=1,2,\dots$, egydimenziós valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak $n\to\infty$ esetén. Ha a $\mathbf{Z}_n$ valószínűségi vektorok eloszlásban konvergálnak, akkor létezik egy olyan egyértelműen meghatározott μ valószínűségi mérték az m-dimenziós euklideszi térben, amelyre egy μ eloszlású $\mathbf{Z}=(Z_1,\dots,Z_m)$ vektorra és tetszőleges $a_1,\dots,a_m$ valós számokra a $Z = Z(a_1, \dots, a_m) = \sum_{j=1}^{m} a_j Z_j$ valószínűségi változó eloszlása megegyezik a $Z_n = Z_n(a_1, \dots, a_m)$ valószínűségi változók határeloszlásával. Továbbá ez a μ valószínűségi mérték a $\mathbf{Z}_n$ véletlen vektorok eloszlásainak a határértéke.

Definiáljuk a többdimenziós normális eloszlás fogalmát. Ez az eloszlás hasonló szerepet játszik a többdimenziós határeloszlástételekben, mint a normális eloszlás az egydimenziós esetben. A definició megfogalmazása előtt idézzük fel, hogy egy $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m)$ m-dimenziós valószínűségi vektor várható értéke az $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_m)$, $M_j = E\xi_j$, $1 \le j \le m$, m-dimenziós vektor, kovariancia mátrixa pedig az az $m \times m$-es $(D_{j,k})$, $1 \le j, k \le m$, mátrix, amelyre $D_{j,k} = EZ_jZ_k - EZ_jEZ_k = E(Z_j - EZ_j)(Z_k - EZ_k)$. Megjegyezzük, hogy egy $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ vektoron egy sorvektort fogunk érteni, és az ennek a transzponáltjaként kapott oszlopvektort $\mathbf{b}^*$-gal fogjuk jelölni. Ha $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m) \in R^m$ és $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \in R^n$ két m-dimenziós vektor, akkor ezek skalárszorzatát $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$-nal jelöljük, azaz $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{j=1}^{m} x_j y_j$.

Többdimenziós normális eloszlás definiciója. *Legyenek ξ_j, $1 \le j \le m$, m független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Ekkor a $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ véletlen vektort m-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változónak, eloszlását pedig az m-dimenziós standard normális eloszlásnak nevezzük. Ha $B = (b_{j,k})$, $1 \le j, k \le m$, $m \times m$-es mátrix, $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_m)$ m-dimenziós vektor $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ pedig m-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi vektor, akkor $\xi B + \mathbf{M}$ m-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó. Egy μ m-dimenziós eloszlás akkor és csak akkor normális eloszlás, ha megegyezik egy előbb definiált m-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó eloszlásával alkalmas B $m \times m$-es mátrix-szal és $\mathbf{M} \in R^m$ vektorral.*

Jellemezzük először a több-dimenziós normális eloszlásokat.

46.) Tetszőleges m-dimenziós valószínűségi vektor Σ kovariancia mátrixa szimmetrikus pozitív (szemi)definit mátrix, azaz minden m-dimenziós $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_m)$ vektorra $\mathbf{x}\Sigma\mathbf{x}^* = (\mathbf{x}\Sigma, \mathbf{x}) \ge 0$. Megfordítva, tetszőleges Σ $m \times m$ szimmetrikus, pozitív definit mátrixra és $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_m)$ m-dimenziós vektorra létezik Σ kovariancia mátrix-szal és $\mathbf{M}$ várható értékkel rendelkező m-dimenziós normális eloszlás. Ennek az eloszlásnak a karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t_1, \dots, t_m) = Ee^{i(\mathbf{t}, \xi)} = Ee^{i(t_1\xi_1 + \dots + t_m\xi_m)} = \exp\left\{-\frac{(\mathbf{t}\Sigma, \mathbf{t})}{2} + i(\mathbf{t}, \mathbf{M})\right\}, \quad (13)$$

ahol $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$, és $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m)$ egy $\mathbf{M}$ várható értékű és Σ covariancia mátrixú m-dimenziós normális eloszlású valószínűségi változó. Speciálisan egy $\mathbf{M}$ várható értékű és Σ kovariancia mátrixú normális eloszlást egyértelműen meghatároz annak $\mathbf{M}$ várható értéke és Σ kovariancia mátrixa.

Megjegyzem, hogy annak a ténynek, hogy egy m-dimenziós $\mathbf{M}$ várható értékű és Σ kovariancia mátrixú normális eloszlást egyértelműen meghatároz az eloszlás $\mathbf{M}$ várható értéke és Σ kovariancia mátrixa, illetve annak a ténynek, hogy egy normális eloszlás karakterisztikus függvényét a (13) formula írja le számos viszonylag egyszerű, de fontos következménye van. Bár ez nem témája ennek a feladatsornak, tárgyalok két olyan eredményt, amelyek hasznosak ilyen vizsgálatokban.

47.) Legyen ξ_j, $1 \le j \le m$, m független standard normális eloszlású valószínűségi változó, $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_l)$ egy l-dimenziós (determinisztikus) vektor, és B egy $l \times m$ méretű (téglalap) mátrix. Ekkor $(\eta_1, \dots, \eta_l) = (\xi_1, \dots, \xi_m)B + \mathbf{M}$ egy l-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor. Speciálisan, ha egy η m-dimenziós normális eloszlású véletlen vektornak csak l koordinátáját őrízzük meg, akkor íly módon egy l-dimenziós normális eloszlású véletlen vektort kapunk.

48.) Legyen $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_m)$ olyan m-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, amelynek $\Sigma = (\sigma_{p,q})$, $1 \le p, q \le m$, kovariancia mátrixa rendelkezik a következő tulajdonsággal: Az $\{1, \dots, m\}$ halmaznak megadható olyan $\{1, \dots, m\} = \bigcup\limits_{j=1}^{k} L_j$, $1 \le j \le k$, particiója, amelyre a Σ mátrix nem zéró elemei az $L_1 \times L_1, \dots, L_k \times L_k$ négyzetek uniójába vannak koncentrálva, azaz $\sigma_{p,q} = 0$, ha $p \in L_j$, $q \in L_{j'}$, és $j \ne j'$. Ekkor az η vektor koordinátáinak megfelelő csoportosításának segítségével képzett $\bar\eta_j = (\eta_p,\ p \in L_j)$, $1 \le j \le k$, véletlen vektorok egymástól független normális eloszlású véletlen vektorok.

Végül megfogalmazom a több-dimenziós centrális határeloszlástételt független valószínűségi vektorok alkalmasan normalizált részletösszegeire. Ezt az állítást nem fogalmazom meg a lehető legáltalánosabb formában, és nem tárgyalom az eredmény széria-sorozatokról szóló változatát sem, noha az is lehetséges volna.

49.) Legyen $\xi_k = (\xi_{1,k}, \dots, \xi_{m,k})$, $k = 1, 2, \dots$, független m-dimenziós valószínűségi változók sorozata, amelyek várható értéke 0, azaz $\mathbf{M}_k = (E\xi_{1,k}, \dots, E\xi_{m,k}) = (0, \dots, 0)$, minden $k = 1, 2, \dots$, számra. Tegyük fel, hogy a $\xi_k = (\xi_{1,k}, \dots, \xi_{m,k})$ valószínűségi vektoroknak minden $k = 1, 2, \dots$, számra létezik véges Σ_k kovariancia mátrixuk, továbbá teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{A_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \Sigma_k = \Sigma$ feltétel alkalmas Σ mátrix-szal és A_n, $n = 1, 2, \dots$, számokkal, amelyekre $A_n \to \infty$, ha $n \to \infty$. Ha ezenkívül a ξ_k, $k = 1, \dots$, valószínűségi vektorok minden koordinátája teljesíti a Lindeberg feltételt, azaz minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{A_n^2} \sum_{k=1}^{n} E\xi_{p,k}^2 I(|\xi_{p,k}| > \varepsilon A_n) = 0, \qquad \text{minden } p = 1, \dots m \text{ számra }, \tag{14}$$

akkor az $\frac{1}{A_n}\mathbf{S}_n = \frac{1}{A_n}(S_{1,n}, \dots, S_{m,n}) = \frac{1}{A_n} \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_{1,k}, \dots, \xi_{m,k})$ normalizált részletösszegek eloszlásban konvergálnak az $M = (0, \dots, 0)$ várható értékkel és Σ kovarianciával rendelkező m-dimenziós normális eloszláshoz.

Speciálisan, ha $\xi_k = (\xi_{1,k}, \dots, \xi_{m,k})$, $k = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású m-dimenziós valószínűségi változók sorozata, nulla várható értékkel és véges Σ kovariancia mátrix-szal, akkor az $\frac{1}{\sqrt{n}}(S_1, \dots, S_m) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_{1,k}, \dots, \xi_{m,k})$ normalizált részletösszegek eloszlásban konvergálnak az $M = (0, \dots, 0)$ várható értékkel és Σ kovarianciával rendelkező m-dimenziós normális eloszláshoz.

50.) Legyen $\xi_n = (\xi_{1,n}, \dots, \xi_{m,n})$, $n = 1, 2, \dots$, független m-dimenziós valószínűségi változók sorozata, amelyek várható értéke 0, és a $\xi_n = (\xi_{1,n}, \dots, \xi_{m,n})$ valószínűségi vektoroknak létezik véges Σ_n kovariancia mátrixuk minden $n = 1, 2, \dots$, számra. Továbbá teljesüljön a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{A_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \Sigma_n = \Sigma$ feltétel alkalmas Σ mátrix-szal és A_n, $n = 1, 2, \dots$, számokkal, amelyekre $A_n \to \infty$, ha $n \to \infty$, és legyen érvényes a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\max\limits_{1\le j\le m} \max\limits_{1\le k\le n} E\xi_{j,k}^2}{A_n^2} = 0$ kicsiségi feltétel. Ha az $\frac{S_n}{A_n}$ sorozat eloszlásban konvergál egy Σ kovarianciájú m-dimenziós normális eloszláshoz, akkor teljesül a (14) formulában megfogalmazott Lindeberg feltétel.

Néhány további megjegyzés

Felsorolok néhány további problémát, amelyek vizsgálata természetes folytatása az itt tárgyalt feladatsornak.

1.) A centrális határeloszlástételt a vizsgált normalizált részletösszegek karakterisztikus függvényének konvergenciájából vezettük le. Valójában nemcsak a karakterisztikus függvény konvergenciáját tudjuk bizonyítani, hanem meg tudjuk állapítani a konvergencia sebességét is, illetve alkalmas sorfejtéssel a karakterisztikus függvénynek olyan jobb közelítését tudjuk adni, amelyben a normális eloszlás karakterisztikus függvényhez alkalmas korrekciós tagokat adunk hozzá. Természetes azt várni, hogy ennek segítségével pontosabb információt tudunk nyerni arról, hogy a normalizált részletösszegek eloszlásai milyen sebességgel konvergálnak a normális eloszláshoz, illetve a normalizált részletösszegek eloszlására pontosabb sorfejtést tudunk adni.

   Hasonlóan vizsgálhatjuk független valószínűségi változók alkalmasan normalizált részletösszegeinek sűrűségfüggvényének konvergenciáját a standard normális sűrűségfüggvényhez. Ez a probléma egyszerűbb, mert a sűrűségfüggvényt a viszonylag egyszerű inverz Fourier formulával ki tudjuk fejezni a karakterisztikus függvény segítségével. Az eloszlásfüggvények kiszámítására nincs ilyen egyszerű formula, viszont alkalmas simítással eloszlások konvergenciájának vizsgálatát vissza tudjuk vezetni a sűrűségfüggvények vizsgálatának egyszerűbb problémájára. Ilyen módon néhány önmagában is érdekes gondolat segítségével jól tudjuk vizsgálni a konvergenciasebességet a centrális határeloszlástételben. Ez a vizsgálat lesz a témája e feladatsor (lényegesen rövidebb) második részének.

2.) Bár láttuk, hogy független valószínűségi változók alkalmasan normalizált részletösszegei nagyon általános feltételek mellett a normális eloszláshoz konvergálnak, felmerül az a kérdés, hogy milyen egyéb határeloszlástételek lehetségesek független valószínűségi változók alkalmasan normalizált részletösszegeire, illetve szériasorozatok egy sorban levő elemeinek az összegeire. Természetes megkövetelni bizonyos kicsiségi feltételt, amely feltétel azt hivatott biztosítani, hogy a vizsgált összegekben nincsenek olyan domináns tagok, amelyek nagyságrendje ugyanakkora mint a teljes összegé. Erre a kérdésre ismeretes a válasz. A vizsgálatban kulcsszerepet játszik az ebben a feladatsorban *Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel*-nek nevezett állítás, amely lehetővé teszi a probléma ekvivalens megfogalmazását a karakterisztikus függvények nyelvén. Az első vizsgálandó kérdés ebben a problémakörben a lehetséges határeloszlások leírása. Ez bizonyos az eloszlásfüggvények terében definiált operátorok fix-pontjainak a vizsgálatához vezet. Ezek megoldása szolgáltatja az úgynevezett korlátlanul osztható eloszlásokat, amelyek határeloszlástételek lehetséges limeszei. Ezután meg tudjuk adni azt is, hogy adott korlátlanul osztható eloszlások milyen modellek határeloszlásaként jelennek meg.

Bár ezek a vizsgálatok a karakterisztikus függvények nyelvén megfogalmazott matematikai analízis problémák vizsgálatát tartalmazzák, ezen problémák megoldása mögött szemléletes valószínűségszámítási gondolatok vannak. Megjegyzem, hogy bár mint említettük a centrális határeloszlástételen kívül egyéb határeloszlástételek is vannak, a centrális határeloszlástétel az egyetlen ,,univerzális" jellegű határeloszlástétel, amelyben a határeloszlás ,,elfelejti" az egyes összeadandók eloszlását. Ezt a meglehetősen pongyola megfogalmazást pontosabban is meg lehet fogalmazni, de ezt itt nem tesszük. A 2. pontban tárgyalt problémakör elég részletes tárgyalása bizonyításokkal és a bizonyítások hátterében lévő gondolatok kifejtésével együtt megtalálható a homepage-emen *Határeloszlástételek és korlátlanul osztható eloszlások* címen.

3.) Tekintsük független, egyforma eloszlású, nulla várható értékű és véges szórású $\xi_1, \xi_2, \dots,$ valószínűségi változók sorozatát, illetve ezek $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_n$, $n = 1, 2, \dots,$ részletösszegeit. A centrális határeloszlástétel jó becslést ad nagy n és rögzített x számokra a $P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x\right)$ valószínűségekre. Felmerülhet a kérdés, tudunk-e hasonlóan jó becslést adni a $P\left(\frac{S_n}{\sqrt{n}} > x_n\right)$ valószínűségekre, azaz olyan x_n korlát átlépésének a valószínűségére, amely szintén függ az n paramétertől. Különösen fontos az az eset, amikor $x_n = x\sqrt{n}$, azaz amikor annak a valószínűségét vizsgáljuk, hogy független, egyforma eloszlású valószínűségi változók átlaga nagyobb, mint valamilyen x korlát. E kérdést illetve néhány hozzákapcsolódó problémát a *Nagy eltérések elmélete; Független valós értékű valószínűségi változók.* feladatsorban tárgyaltam. Megjegyzem, hogy a fent említett valószínűségekre adott becslés nem egyezik meg azzal a becsléssel, amelyet a centrális határeloszlástétel formális kiterjesztése sugallna.

Természetes lenne a $P(S_n > nx)$ valószínűségeket ugyanannak a módszernek a segítségével vizsgálni, mint amelyik lehetővé tette a centrális határeloszlástételben szereplő $P(S_n > \sqrt{n}x)$ valószínűségek vizsgálatát. Ez a módszer azonban nem működik, és ha megértjük ennek az okát, akkor könnyebben megtalálhatjuk a matematikai analízisnek azt az egyébként is fontos módszerét, amely lehetővé teszi a minket érdeklő probléma megoldását. Tegyük fel, hogy a vizsgált valószínűségi változók szépen viselkednek, például van szép sűrűségfüggvényük, és vizsgáljuk a $P(S_n > nx)$ eloszlásfüggvény helyett annak $f_n(x) = \frac{d}{dx}P(S_n > nx)$ sűrűségfüggvényét. Ekkor az $f_n(x) = \frac{n}{2\pi}\int e^{-intx}\varphi^n(t)\,dt$ integrált kell vizsgálnunk, ahol $\varphi(t)$ a ξ_1 valószínűségi változó karakterisztikus függvénye. Amikor az ezzel a kérdéssel analóg lokális centrális határeloszlástételt vizsgáltuk, hasonló integrált kellett becsülnünk. Az egyetlen különbség az volt, hogy ott az e^{itnx} faktor helyett az $e^{it\sqrt{n}x}$ tényező szerepelt a vizsgálandó integrálban. A lokális centrális határeloszlástétel vizsgálatát az tette lehetővé, hogy egy szinguláris integrált kellett vizsgálni, amely erősen lokalizálva volt az origó kis környezetében. Az analóg nagy eltérés probléma vizsgálatában is elmondhatjuk ugyanezt. Mégis, ekkor a probléma nehezebb lesz. Ennek az az oka, hogy az integrandus komplex értékű, és hiába van az integrandus abszolút értékének éles maximuma az origó környezetében, az imaginárius részben szereplő nagy fluktuáció a maximum hozadékát erősen csökkenti, és ilyen egyszerűen nem kapunk jó eredményt. A lokális centrális határeloszlástételben ez a probléma azért nem jelenik meg, mert az itt vizsgált integrálban az integrandus imaginárius részének a fluktuációja viszonylag kicsi. Ez azért van így, mert csak $e^{-i\sqrt{n}tx}$ és nem e^{-intx} faktor szerepel az integrálban, és $\left.\frac{d\varphi(t)}{dt}\right|_{t=0} = E\xi_1 = 0$.

Ilyen jellegű problémák sokszor megjelennek az analízisben, és ezek vizsgálatára dolgozták ki a nyeregpont módszert. Írjuk a minket érdeklő integrált $f_n(x) = \frac{n}{2\pi}\int e^{n(-itx+\log\varphi(t))}\,dt$ formában. (A most tárgyalt heurisztikus szinten eltekintünk néhány technikai kényelmetlenségektől, mint például attól, hogy egy függvénynek nem mindig vehetjük a logaritmusát.) Ha az integrandus exponensében szereplő $n(-itx + \log\varphi(t))$ függvény a t változó analitikus függvénye, akkor a nyeregpont módszer azt javasolja, hogy helyezzük át az integrálási utat egy a nyeregponton, azaz a

$$\frac{d(-izx + \log\varphi(z))}{dz} = 0$$

egyenlet megoldásán átmenő alkalmas görbére. Ekkor az áthelyezett integrálban szereplő integrandus abszolút értékének (lokális) maximuma lesz a nyeregpontban, és az imaginárius rész fluktuációja is viszonylag kicsi és kezelhető lesz. Ennek a gondolatnak a következetes végigvitele lehetővé teszi a nagy eltérés problémakör megfelelő vizsgálatát. Jegyezzük meg, hogy sok valószínűségszámítási tankönyvben a nagy eltérés problémakör vizsgálatában nem beszélnek a nyeregpont módszerről, hanem ehelyett úgynevezett konjugált eloszlások bevezetésével vizsgálják a problémát. Viszont, ha megértjük e módszer mélyebb hátterét, akkor láthatjuk, hogy a konjugált eloszlások bevezetése interpretálható úgy is, mint a nyeregpont módszer alkalmazása a nagy eltérés problémakör vizsgálatában, csak maga a módszer le van fordítva a valószínűségszámítás nyelvére.

Még egy fontos megjegyzés: Ahhoz, hogy a nyeregpont módszer működjön fel kellett tennünk, hogy analitikus függvényekkel dolgozunk. Felmerülhet a kérdés, nem jelent-e ez a technikai feltétel fölösleges megszorítást. A részletes vizsgálat azt mutatja, hogy nem. A számolásokban megjelenő függvények analitikusságának konkrét valószínűségi tartalma van, és mint azt a részletes analízis mutatja, a nagy eltérés problémákban vizsgált valószínűségek viselkedése függ attól, hogy ez az analiticitási feltétel teljesül-e vagy sem.

Megoldások

1.) Legyen $I = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2a}\,du$. Ekkor kiszámítva I^2-et, mint kétszeres integrált, majd áttérve polár koordinátarendszerre kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I^2 &= \frac{1}{2a\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)/2a}\,du \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{r}{a} e^{-r^2/2a}\,dr\,d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi}\,d\varphi = 1. \end{aligned}$$

Innen következik a feladat első állítása.

Rögzítsünk egy $a > 0$ számot. Ekkor $\bar{u} = u - z$ helyettesítéssel kapjuk, hogy

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2/2a}\,du = 1$$

minden *valós* z számra. Ha z komplex számokra akarjuk ezt az azonosságot belátni, akkor a következő két komplexfüggvénytani érvelés valamelyike segít befejezni a bizonyítást.

Első érvelés: Mivel mind a fent definiált $F(z)$ mind a $G(z) \equiv 1$ analitikus függvények a komplex számsíkon, és megegyeznek a valós számegyenesen, ezért megegyeznek az egész komplex számsíkon. Az $F(z)$ függvény azért analitikus, mert az $F(z)$ függvényt megkapjuk, mint analitikus függvények kompakt halmazokon egyenletesen konvergens limeszét, ha az $F(z)$ függvényt definiáló integrált a természetes integrálközelítő összegekkel approximáljuk. Másrészt tudjuk, hogy analitikus függvények egyenletes limesze szintén analitikus függvény.

Második érvelés: $\bar{u} - z$ helyettesítéssel

$$F(z) = \frac{1}{\sqrt{2a\pi}} \int_{-\infty-\operatorname{Im} z}^{\infty-\operatorname{Im} z} e^{-u^2/2a}\,du = 1,$$

mivel $\lim\limits_{|u|\to\infty} e^{-(u+iv)^2/2a} = 0$, és a konvergencia egyenletes a v paraméter szerint, ha $|v|$ egy korlátos intervallumban van. Innen, illetve abból a tényből, hogy egy (szinguláris pontokat nem tartalmazó) analitikus függvény körintegrálja nulla következik, hogy a vizsgált integrál értéke nem változik, ha a $[-\infty - i\operatorname{Im} z, \infty - \operatorname{Im} z]$ integrálási utat áthelyezzük a $[-\infty, \infty]$ integrálási útra. Ezért igaz a bizonyítandó állítás.

2.) Legyen ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda = n$ paraméterrel, azaz $P(\xi = k) = \frac{n^k}{k!} e^{-n}$, $k = 0, 1, 2, \dots$. Ekkor a tekintendő Fourier sor a következő $P_n(t)$ függvény.

$$P_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\xi = k) e^{itk} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} e^{-n+ikt} = e^{-n+ne^{it}}.$$

Innen, illetve a (2) formulából $k = n$ választással kapjuk a (3) formulát.

Vegyük észre, hogy a (4b) formula a (3) és (4a) formula valamint az $\frac{1}{1+x}=1-x+O(x^2)=1+O(x)$, ha $|x|\le\frac12$ reláció egyszerű következménye.

A (4a) formula bizonyítása érdekében adjunk felső becslést az integrál hozadékára a $\{t\colon\ |t|\ge n^{-1/3}\}$ tartományban. Azután tekintsük az integrál megszorítását a $\{t\colon\ |t|<n^{-1/3}\}$ tartományra, és számítsuk ki ennek aszimptotikáját pontosan.

Az első becslés elvégzésének érdekében vegyük észre, hogy

$$\left|e^{n(e^{it}-1-it)}\right|=e^{n\mathrm{Re}\,(e^{it}-1-it)}=e^{n(\cos t-1)}<e^{-nt^2/4}<e^{-n^{1/3}/4}\ \text{ha } n^{-1/3}\le t\le\pi$$

és innen

$$\left|\int_{\{n^{-1/3}\le|t|\le\pi\}}e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt\right|=O\left(e^{-\mathrm{const.}\,n^{1/3}}\right).\tag{2.1}$$

A másik becslés végrehajtása érdekében számítsuk ki a (4a) formula integráljában szereplő integrandus aszimptotikáját Taylor-sorfejtés segítségével pontosabban az origó kis környezetében. Azt kapjuk, hogy $n(e^{it}-1-it)=n\left(-\frac{t^2}{2}-i\frac{t^3}{6}+O(t^4)\right)$, és

$$\begin{aligned}e^{n(e^{it}-1-it)}&=e^{-nt^2/2}e^{-int^3/6+O(nt^4)}\\&=e^{-nt^2/2}\left(1-\frac{i(\sqrt{n}t)^3}{6\sqrt{n}}+O\left(\frac{(\sqrt{n}t)^4}{n}\right)+O\left(\frac{\sqrt{n}t)^6}{n}\right)\right),\end{aligned}$$

ha $|t|\le n^{-1/3}$. Felhasználva ezt a becslést és elvégezve az $\bar t=\sqrt{n}t$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_{-n^{-1/3}}^{n^{-1/3}}e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt&=\frac{1}{\sqrt{n}}\int_{-n^{1/6}}^{n^{1/6}}e^{-\bar t^2/2}\left(1-i\frac{\bar t^3}{6\sqrt{n}}+\frac{O\left(\bar t^4+\bar t^6\right)}{n}\right)\,d\bar t\\&=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\int_{-\infty}^{\infty}-\int_{|\bar t|>n^{1/6}}\right).\end{aligned}$$

Másrészt

$$\int_{|t|\ge n^{1/6}}e^{-t^2/2}\left(1-i\frac{t^3}{6\sqrt{n}}+\frac{O(t^4+t^6)}{n}\right)\,dt=O\left(e^{-n^{1/3}/4}\right),$$

és

$$\begin{aligned}&\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\left(1-i\frac{t^3}{6\sqrt{n}}+\frac{O(t^4+t^6)}{n}\right)\,dt\\&\quad=\int_{-\infty}^{\infty}e^{-t^2/2}\,dt-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{i}{6\sqrt{n}}t^3e^{-t^2/2}\,dt+O\left(\frac1n\right)=\sqrt{2\pi}+O\left(\frac1n\right)\end{aligned}$$

az első feladatban bizonyított azonosság miatt, illetve mert a $t^3e^{-t^2}$ függvény páratlan. Ezekből a becslésekből következik, hogy

$$\int_{-n^{-1/3}}^{n^{1/3}} e^{n(e^{it}-1-it)}\,dt = \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{n}}\left(1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right). \tag{2.2}$$

A (4a) reláció következik a (2.1) és (2.2) formulákból.

A (4d) reláció hasonlóan következik a (4c) relációból mint a (4b) reláció a (4a) relációból. Az egyetlen különbség, hogy a pontosabb $\frac{1}{1+x} = 1-x+x^2-\cdots+(-1)^kx^k+O\left(|x|^{k+1}\right)$ sorfejtést alkalmazzuk, ha $|x|\le\frac{1}{2}$. A (4c) formulát a (4a) formulához hasonlóan bizonyíthatjuk. A különbség az, hogy jelen esetben az $n(e^{it}-1-it)$ és az $e^{n(e^{it}-1-it)}=e^{-nt^2/2}(1+P_n(t))$ formula által definiált $P_n(t)$ függvények Taylor sorát nem az első hanem a k-ik tagig számoljuk ki a $|t|\le n^{-2/3}$ intervallumban. Ilyen módon az integrandust $e^{-nt^2/2}O\left(\frac{\sum_{j=1}^k(\sqrt{n}|t|)^{j(l(j))}}{n^{(k+1)/2}}\right)$ pontossággal tudjuk közelíteni egy $e^{-nt^2/2}Q_n(t)$ alakú kifejezéssel, ahol $l(j)=\min\{l\colon\ lj\ge k+1\}$, és a $Q_n(t)$ függvény $Q_n(t)=\sum\limits_{j=3}^{k}\frac{\bar Q_j(\sqrt{n}t)}{n^{k/2}}$, alakú. Az utolsó kifejezésben szereplő $\bar Q_j$ függvények explicit módon kiszámítható az n paramétertől független polinomok. Speciálisan $\bar Q_3(t)=\frac{-i}{6}t^3$. Elvégezve a $\bar t=\sqrt{n}t$ helyettesítést a (4a) formula bizonyítása a pontosabb (4c) közelítést adja.

3.) Vegyük észre, hogy a ξ valószínűségi változó eloszlásnak az h szám akkor és csak akkor periódusa, ha $|Ee^{2\pi i\xi/h}|=1$. Valóban, ha $|Ee^{2\pi i\xi/h}|=1$, akkor $Ee^{2\pi i\xi/h}=e^{2\pi ib/h}$ valamilyen, valós b számra. Ez viszont csak akkor lehetséges, ha a $\frac{\xi-b}{h}$ valószínűségi változó eloszlása az $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, azaz a ξ valószínűségi változó a $nh+b$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, rácsra van koncentrálva. Megfordítva, ha a ξ valószínűségi változó eloszlása egy $nh+b$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, rácsra van koncentrálva, akkor $E|e^{2\pi i\xi/h}|=1$. Továbbá, ha a ξ rácsos eloszású valószínűségi változó nem egyetlen pontba van koncentrálva, azaz léteznek olyan a és b számok, $a\neq b$, amelyekre $P(\xi=a)>0$ és $P(\xi=b)>0$, akkor minden elég kis $t>0$ számra $|Ee^{it\xi}|<1$, sőt az $|Ee^{it\xi}|$ függvény folytonossága miatt létezik egy legkisebb $t>0$ szám, amelyre $|Ee^{it\xi}|=1$.

Vegyük a legkisebb $t>0$ számot, amelyre $|Ee^{it\xi}|=1$. Ekkor $h=\frac{2\pi}{t}$ a legnagyobb h, amelyre ξ egy h sűrűségű $nh+b$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, rácsra van koncentrálva. Ekkor a $\xi-b$ függvény $P(t)=Ee^{i(\xi-b)}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}P(\xi-b=nh)e^{itnh}$ Fourier sorának a periódusa $\frac{2\pi}{h}$. Továbbá, a h konstrukciójából látszik, hogy $|P(t)|<1$, ha $0<t<\frac{2\pi}{h}$. Ezért a $P(t)$ függvény szimmetriájából következik, hogy $|P(t)|<1$, ha $0<|t|<\frac{\pi}{h}$. Nyílván, $P(0)=1$.

Formális, tagonkénti deriválás adja, hogy $\frac{P^{(k)}(t)}{dt^k}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}i^k(nh)^ke^{itnh}P(\xi-b=nh)$, és $\left.\frac{P^{(k)}(t)}{dt^k}\right|_{t=0}=\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}i^k(nh)^kP(\xi-b=nh)=i^kE(\xi-b)^k$. Az

$E|\xi-b|^k<\infty$ feltétel miatt a fenti számolásban végrehajtott tagonkénti deriválás jogos. Ugyanis a $P(t)$ függvény k-ik deriváltjainak közelítő részletösszegei teljesítik a $\sum\limits_{n=-N}^{N}|i^k(nh)^k e^{itnh}P(\xi-b=nh)|\le E|\xi-b|^k$ egyenlőtlenséget.

4.) A (2) formula illetve az utána felírt formula alapján

$$P(S_n=k)=\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-ikt}P^n(t)\,dt=\int_{|t|<\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}}+\int_{\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}<|t|<\varepsilon}+\int_{\varepsilon<|t|<\pi}=I_1+I_1+I_3,$$

ahol $P(t)=\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty}e^{ikt}P(\xi_1=k)$, és $\varepsilon>0$ tetszőleges kis pozitív szám. A feladatot megoldjuk, ha az I_1, I_2 és I_3 integrálokra jó becslést adunk.

Az I_3 integrál becslése egyszerű. A 3. feladat eredményéből és a $P(t)$ függvény folytonosságából következik, hogy $\sup\limits_{\varepsilon\le|t|<\pi}|P(t)|<1$ valamilyen $0<q=q(\varepsilon)<1$ számmal, ezért

$$|I_3|=\left|\int_{\varepsilon<|t|<\pi}\frac{1}{2\pi}e^{-ikt}P^n(t)\,dt\right|<q^n$$

alkalmas $0<q<1$ számmal. Az I_1 és I_2 integrálok kiszámításához jó becslést kell adnunk a $P^n(t)$ függvényre, ha $|t|<\varepsilon$. Kényelmesebb a $\log P(t)$ függvénnyel dolgozni. (Ez kis $\varepsilon>0$ számra lehetséges, mert ebben az esetben a $P(t)$ függvény értéke a $[-\varepsilon,\varepsilon]$ intervallumban szeparálva van nullától.) Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$\frac{d\log P(t)}{dt}=\frac{P'(t)}{P(t)},\qquad \left.\frac{d\log P(t)}{dt}\right|_{t=0}=im,$$
$$\frac{d^2\log P(t)}{dt^2}=\frac{P''(t)P(t)-P'(t)^2}{P^2(t)},\qquad \left.\frac{d^2\log P(t)}{dt^2}\right|_{t=0}=-m_2+m^2=-\sigma^2,$$

ezért Taylor sorfejtéssel az origó körül kapjuk, hogy

$$\log P(t)=imt-\frac{\sigma^2}{2}t^2+o(t^2),\quad \text{ha } |t|<\varepsilon.$$

Innen, mivel $|P^n(t)|=e^{n\mathrm{Re}\,\log P(t)}=e^{-n\sigma^2t^2/2+o(nt^2)}\le e^{-n\sigma^2t^2/3}$, ha $|t|<\varepsilon$ és $n\ge n(\varepsilon)$, ezért

$$|I_2|\le\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}<|t|<\varepsilon}|P^n(t)|\,dt\le\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}<|t|<\varepsilon}e^{-n\sigma^2t^2/3}\,dt$$
$$\le\frac{1}{\pi\sqrt{n}}\int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\infty}e^{-\sigma^2t^2/3}\,dt\le\frac{1}{\sqrt{n}}e^{-\sigma^2/4\varepsilon^2}.$$

Továbbá

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_{-\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}}^{\frac{1}{\varepsilon\sqrt{n}}} \frac{1}{2\pi} e^{-ikt+inmt-n\sigma^2t^2/2+o(nt^2)}\,dt \\
&= \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} e^{i(mn-k)t/\sqrt{n}-\sigma^2t^2/2+o(t^2)}\,dt \\
&= \int_{-\frac{1}{\varepsilon}}^{\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} e^{i(mn-k)t/\sqrt{n}-\sigma^2t^2/2}(1+o(t^2))\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} e^{i(nm-k)t/\sqrt{n}-\sigma^2t^2/2}\,dt - \int_{|t|>\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} e^{i(nm-k)t/\sqrt{n}-\sigma^2t^2/2}\,dt \\
&\qquad + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).
\end{aligned}$$

Másrészt

$$\left|\int_{|t|>\frac{1}{\varepsilon}} \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} e^{i(nm-k)t/\sqrt{n}-\sigma^2t^2/2}\,dt\right| \le \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\sigma^2/4\varepsilon^2}$$

és az alábbi integrál exponensében szereplő kvadratikus alakot kiegészítve teljes négyzetté kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi\sqrt{n}} e^{i(nm-k)t/\sqrt{n}-\sigma^2t^2/2}\,dt \\
&\quad = \frac{e^{-(nm-k)^2/2n\sigma^2}}{2\pi\sqrt{n}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{-\frac{\sigma^2}{2}\left(t-i\frac{nm-k}{\sqrt{n}}\right)^2\right\}dt = \frac{e^{-(nm-k)^2/2n\sigma^2}}{\sqrt{2\pi n}\sigma}
\end{aligned}$$

az első feladat eredménye alapján. Ezekből a becslésekből következik, hogy

$$\left|I_1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sigma}\exp\left\{-\frac{(k-nm)^2}{2n\sigma^2}\right\}\right| \le \text{const.}\,\frac{1}{\sqrt{n}} e^{-\sigma^2/4\varepsilon^2},$$

ha $n > n(\varepsilon)$. Mivel az I_1, I_2 és I_3 kifejezésekre adott becslések tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra érvényesek, ha n elég nagy, innen következik a feladat állítása.

5.) A feladat megoldása hasonló a 4. feladatéhoz. Mivel jelen esetben a ξ_1 valószínűségi változónak három véges momentuma van ezért a $\log P(t)$ függvénynek a következő pontosabb közeltítése érvényes: $\log P(t) = imt - \frac{\sigma^2}{2}t^2 + O(t^3)$, ezért $P^n(t) = e^{imnt-n\sigma^2t^2/2+O(nt^3)}$. A további számolásokban az egyetlen lényeges különbség az, hogy az I_1 és I_2 kifejezést definiálió integrálokban másképp definiáljuk az integrálási tartományt. Jelen esetben $I_1 = \int_{|t|<n^{-1/3}}$ és $I_2 = \int_{n^{-1/3}\le|t|<\varepsilon}$. Az I_1 kifejezésben szereplő integrálási tartományt azért érdemes a fenti módon választani, mert a $\{|t| < n^{-1/3}\}$ tartományban alkalmazhatjuk az $e^{O(nt^3)} = 1 + O(nt^3)$ és $e^{-ikt}P^n(t) = e^{i(mn-k)t-n\sigma^2t^2/2}\left(1+O(nt^3)\right)$ közelítést. Ezután alkalmazva a 4. feladatban végrehajtott számolás természetes adaptációját kapjuk, hogy az $O(nt^3)$

elhagyása az I_1-et definiáló integrálból $O\left(\frac{1}{n}\right)$ hibát ad. Az összes többi becslés hibájának a nagyságrendje lényegesen kisebb $e^{O(-\text{const.}\, n^{1/3})}$ nagyságrendű. Ezért megkapjuk az 5. feladat becslését.

5a.) Jegyezzük meg, hogy $P(S_n = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$. Tekintsük először azt az esetet, amikor $\alpha n < k < \beta n$ valamely $0 < \alpha < \beta < 1$ számokkal. A Stirling formula alapján

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n}{\left(\frac{n-k}{e}\right)^{n-k}\left(\frac{k}{e}\right)^k} \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$
$$= \left(1 - \frac{k}{n}\right)^{-(n-k)} \left(\frac{k}{n}\right)^{-k} \frac{1}{\sqrt{2\pi n}\sqrt{\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)}} \left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right).$$

A $\log x$ függvény p pont körüli Taylor-sorfejtéséből kapjuk, hogy

$$p^k \left(\frac{k}{n}\right)^{-k} = \exp\left\{k\left(\log p - \log\frac{k}{n}\right)\right\}$$
$$= \exp\left\{-\frac{k}{p}\left(\frac{k}{n} - p\right) + \frac{k}{2p^2}\left(\frac{k}{n} - p\right)^2 + O\left(n\left(\frac{k}{n} - p\right)^3\right)\right\}.$$

Hasonlóan,

$$(1-p)^{n-k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{-(n-k)}$$
$$= \exp\left\{\frac{n-k}{1-p}\left(\frac{k}{n} - p\right) + \frac{n-k}{2(1-p)^2}\left(\frac{k}{n} - p\right)^2 + O\left(n\left(\frac{k}{n} - p\right)^3\right)\right\}.$$

Az utolsó két fejezést összeszorozva és felhasználva azt, hogy a vizsgálandó kifejezésben a $\left(\frac{k}{n} - p\right)^2$ tag együtthatója

$$\frac{k}{2p^2} + \frac{n-k}{2(1-p)^2} = \frac{(k-np)^2}{2p(1-p)} + (1-2p)\frac{(k-np)^3}{n^2}$$

kapjuk, hogy

$$p^k\left(\frac{k}{n}\right)^{-k}(1-p)^{n-k}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{-(n-k)} = \exp\left\{-\frac{(kn-p)^2}{2np(1-p)} + O\left(n\left(\frac{k}{n} - p\right)^3\right)\right\}.$$

Mivel $\frac{k}{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right) = p(1-p)\left(1 + O\left(\frac{k-np}{n}\right)\right)$ a fenti becslésekből következik, hogy

$$P(S_n = k) = \frac{\exp\left\{-\frac{(kn-p)^2}{2np(1-p)} + O\left(n\left(\frac{k}{n} - p\right)^3\right) + O\left(\frac{k}{n} - p\right) + O\left(\frac{1}{n}\right)\right\}}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}$$

Mivel $E\xi_1 = p$, $\operatorname{Var}\xi_1 = p(1-p)$ az utolsó becslés egy a kívánt formulánál élesebb becslést ad abban az esetben, ha $|k-np| < \gamma n$ elég kis $\gamma > 0$ számmal. Valóban, bevezetve az $z = \frac{k-np}{\sqrt{n}}$ mennyiséget a vizsgált approximáció hibáját a következő $\varepsilon(n)$ mennyiséggel becsültük:

$$\varepsilon(n) = \varepsilon(n,z) \le \frac{C}{\sqrt{n}} e^{-K_1 z^2} \left[\exp\left\{ K_2 \frac{|z|^3}{\sqrt{n}} + K_3 \frac{|z|}{\sqrt{n}} + \frac{K_4}{n} \right\} - 1 \right]$$

alkalmas $C > 0$, és $K_j > 0$, $j = 1, \dots, 4$, konstansokkal. Azt kell megmutatnunk, hogy $\varepsilon(z,n) \le \frac{\text{const.}}{n}$, ha $|z| \le \gamma\sqrt{n}$. Ez a becslés $n^{1/6} > |z| < \gamma\sqrt{n}$ esetében azért érvényes, mert ekkor $\varepsilon(n,z) \le e^{-K_1 z^2/2}$. Ha $|z| \le n^{1/6}$ akkor $e(n,z) \le \frac{C}{\sqrt{n}} e^{-K_1 z^2} \left(\frac{|z|^3 + |z| + 1}{\sqrt{n}} \right) \le \frac{\text{const.}}{n}$, tehát a kívánt becslés ekkor is érvényes.

Ha $|k - np| \ge \gamma n$, akkor az állítás következik a $P(S_n = k) \le \frac{\text{const.}}{n}$ és az $e^{-(k-np)^2/2np(1-p)} < \frac{\text{const.}}{n^2}$ relációkból. Valójában sokkal élesebb becslések érvényesek. Az első állítás a Csebisev egyenlőtlenség következménye, mert $P(S_n = k) \le P(|S_n - ES_n| \ge \gamma n) \le \frac{\operatorname{Var} S_n}{\gamma^2 n^2} \le \frac{\text{const.}}{n}$. A második egyenlőtlenség nyilvánvaló.

6.) Vezessük be a $\bar{\xi}_j = \frac{\xi_j - b}{h}$, $j = 1, \dots, n$, és $\bar{S}_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \bar{\xi}_j$ valószínűségi változókat. Ekkor $E\bar{\xi}_j = \frac{m-b}{h}$ és $\operatorname{Var}\bar{\xi}_j = \frac{\sigma^2}{h^2}$. Mivel $P(S_n = kh + nb) = P(\bar{S}_n = k)$, és $\bar{S}_n$ az egész pontokra van koncentrálva mint legritkább rácsra, ezért a feladat állítása a 4. és 5. feladat következménye.

7.) Az (5) formulából következik, hogy tetszőleges $-\infty < A < B < \infty$ intervallumra igaz a

$$\lim_{n\to\infty} P\left(A < \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < B \right) = \int_A^B \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2}\, du, \tag{2.3}$$

továbbá a fenti reláció egyenletes mindazon (A,B) pontpárokra, amelyekre $C_1 \le a < b \le C_2$ valamilyen rögzített $-\infty < C_1 < C_2 < \infty$ számokra. Valóban,

$$\begin{aligned}
P\left(A < \frac{S_n - nm}{\sqrt{n}\sigma} < B \right) &= P(A\sqrt{n}\sigma + nm - nb < S_n - nb < B\sqrt{n}\sigma + nm - nb) \\
&= \sum_{k\colon k \in \mathcal{K}(A,B)} P(S_n = kh + nb) \\
&= \frac{h}{\sqrt{2\pi n}\sigma} \sum_{k\colon k \in \mathcal{K}(A,B)} \exp\left\{ -\frac{(kh + nb - nm)^2}{2n\sigma^2} \right\} + \sqrt{n}\, o\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \right) \\
&= \frac{h}{\sqrt{n}\sigma} \sum_{l(k,n) \in \mathcal{L}(A,B)} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-l(k,n)^2/2} + o(1)
\end{aligned}$$

ahol $\mathcal{K}(A,B) = \{k\colon A\sqrt{n}\sigma < kh + nb - nm > B\sqrt{n}\sigma\}$ és

$$\mathcal{L}(k,n) = \left\{ \frac{kh - nm + nb}{\sqrt{n}\sigma},\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \right\} \cap (a,b),$$

azaz az $\frac{nb-nm}{\sqrt{n}\sigma}$ pontot tartalmazó $\frac{h}{\sqrt{n}\sigma}$ sűrűségű rácsnak az (a,b) intervallumba eső pontjai. Innen következik a (2.3) formula, mert adott n számra a baloldalon szereplő valószínűség a jobboldalon szereplő integrálnak egy $\frac{h}{\sqrt{n}\sigma}$ finomságú rácson vett közelítő összege plusz egy hiba, amely nullához tart.

Belátjuk, hogy a fenti állítás $A=-\infty$ esetén is érvényes. Valóban minden $\varepsilon>0$-ra választhatunk olyan $K=K(\varepsilon)$ számot, amelyre $\int_{-K}^{K}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du\ge 1-\varepsilon$. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}\right|<K\right)>1-\varepsilon$, és $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}<-K\right)<\varepsilon$. Innen

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{n\to\infty}\left|P\left(\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}<x\right)-\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du\right| \\
&\qquad\le \limsup_{n\to\infty}\left|P\left(-K\le\frac{S_n-nm}{\sqrt{n}\sigma}<x\right)-\int_{-K}^{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du\right|+\varepsilon\le\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Mivel ez a reláció igaz minden $\varepsilon>0$ számra, innen következik az állítás.

8.) Ha a ξ_1 Fourier transzformáltja $\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itx}f(x)\,dx=Ee^{it\xi_1}$, akkor $S_n=\xi_1+\cdots+\xi_n$ Fourier transzformáltja $Ee^{it(\xi_1+\cdots+\xi_n)}=\left(Ee^{it\xi_1}\right)^n=\varphi^n(t)$. Mivel $|\varphi(t)|\le 1$ ezért a $\varphi^n(t)$ függvény integrálható $n\ge k$ esetben, és az $f_n(t)$ sűrűségfüggvény kiszámítható a (6) formula segítségével, ha abban a $\varphi(t)$ függvény helyett $\varphi^n(t)$ függvényt írjuk. Ezért a 8. feladat hasonlóan bizonyítható a 4. feladathoz, csak az ott vizsgált (2) integrál helyett a (6) integrált kell becsülni, (ahol $\varphi^n(t)$-t írunk $\varphi(t)$ helyett). Továbbá a $E\xi^2<\infty$ feltétel teljesülése esetén a $\varphi(t)$ Fourier transzformált kétszer deriválható, és $\varphi'(0)=iE\xi_1$, $\varphi(0)''=-E\xi_1^2$, azaz teljesülnek azon a $P(t)$ függvényre felhasznált relációk analogonjai, amelyeket a 4. feladat megoldásában használtunk. (A $\varphi(t)$ Fourier transzformált tulajdonságait az általános esetben később részletesen tárgyaljuk.)

A most vizsgált integrál becslésében az egyetlen lényeges különbség az, hogy a 4. feladatban szereplő $I_1=\int_{\varepsilon<|t|<\pi}e^{-ikt}P^n(t)\,dt$ integrál helyett az $I_1'=I_1'(x)=\int_{\varepsilon<|t|<\infty}e^{-itx}\varphi^n(t)\,dt$ integrált kell becsülni. Vegyük észre, hogy

$$
\begin{aligned}
I_1'\le\int_{\varepsilon<|t|<\infty}|\varphi(t)|^n\,dt &\le \sup_{\varepsilon\le|t|<\infty}|\varphi(t)|^{n-k}\int_{\varepsilon<|t|<\infty}|\varphi(t)|^k\,dt \\
&\le \text{const.}\sup_{\varepsilon\le|t|<\infty}\varphi(t)|^{n-k},
\end{aligned}
$$

mivel $\varphi^k(\cdot)$ integrálható függvény. Rögzített t, $t\ne0$, számra $|\varphi(t)|<1$. Továbbá a Riemann lemma szerint $\lim\limits_{|t|\to\infty}|\varphi(t)|=0$, és $\varphi(t)$ folytonos függvény. (Későbbi feladatok tartalmazzák ezen állítás bizonyítását.) Innen következik a $\sup\limits_{\varepsilon<|t|<\infty}|\varphi(t)|<q<1$ állítás, ezért az előző becslésekből következik, hogy $|I_1'|\le\text{const.}\,q^n$. Az egyetlen további különbség a bizonyításban az, hogy az I_1 és I_2 kifejezéseket definiáló integrálokban az $e^{-ikt}P^n(t)$ integrandust az $e^{-itx}\varphi^n(t)$ függvénnyel helyettesítjük. Ezeket a kifejezéseket ugyanúgy becsülhetjük, mint a nekik megfelelő integrálokat a 4. feladatban.

9.) A feladat bizonyítása hasonló a 6. feladat megoldásához, csak a jelölés egyszerűbb. A feltételből közvetlenül következik, hogy

$$\lim_{n\to\infty}(F_n(B)-F_n(A))=\int_A^B \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du,$$

és a konvergencia egyenletes egy korlátos halmazba eső (A, B) pontpárokra. Ezután az 6. feladathoz hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy a fenti formulában az A számot helyettesíthetjük $-\infty$-nel.

10.) A bizonyítást a 8. feladatban vázolt bizonyításnak bizonyos módosításával tehetjük. Ez hasonló ahhoz, ahogy az 5. feladat megoldásában a 4. feladat vizsgálatának módszerét módosítottuk. Mivel jelen esetben $E|\xi_1|^3<\infty$, ezért a

$$\log\varphi(t)=itE\xi_1-\frac{t^2}{x}E\xi_1^2+O(t^3)$$

közelítést írhatjuk fel az origó egy kis környezetében. Ez lehetővé teszi, hogy az I_2 és I_3 integrálok definiciójában az 5. feladat megoldásához hasonlóan megváltoztatva az integrálási tartományt megkapjuk az állítás bizonyítását.

11.) Legyen ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Ekkor

$$E\xi=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}ue^{-u^2/2}\,du=0,$$

mivel az integrandus páratlan függvény ebben az integrálban. Másrészt parciális integrálással

$$\begin{aligned}E\xi^2&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u^2e^{-u^2/2}\,du=-\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}u\left(\frac{d}{du}e^{-u^2/2}\right)du\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}\,du=1.\end{aligned}$$

Ha ξ $\Phi_{m,\sigma}$ eloszlású valószínűségi változó, akkor $\frac{\xi-m}{\sigma}$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, tehát nulla várható értékű és egy szórású. Ezért ξ várható értéke m és szórásnényzete σ^2.

12.) Legyen $\varphi(t)=\varphi(t_1,\dots,t_k)=Ee^{i(t,\xi)}=Ee^{i(t_1\xi_1+\cdots+t_k\xi_k)}$ egy $\xi=(\xi_1,\dots,\xi_k)$ k-dimenziós véletlen vektor karakterisztikus függvénye, ahol $t=(t_1,\dots,t_k)$ és $(t,\xi)=\sum\limits_{j=1}^k t_j\xi_j$. Ekkor $|\varphi(t)|\le E|e^{i(t,\xi)}|=1$. Tetszőleges $\varepsilon>0$ számra létezik olyan $R=R(\varepsilon)$, amelyre $P(|\xi|>R)=P\left(\sum\limits_{j=1}^k\xi_j^2>R^2\right)<\frac{\varepsilon}{2}$. Ekkor $|t|^2=\sum\limits_{j=1}^k t_j^2<\delta$, $\delta=\frac{\varepsilon}{2R(\varepsilon)}$ és $|x|<R(\varepsilon)$ esetén $|e^{i(t,\xi)}-1|\le|(t,\xi)|\le\frac{\varepsilon}{2}$. Ezért $|\varphi(t)-\varphi(\bar t)|=|Ee^{i(t,\xi)}-Ee^{i(\bar t,\xi)}|=|Ee^{i(t-\bar t,\xi)}-1|\le E|e^{i(t-\bar t,\xi)}-1|I(|\xi|\le R)+P(|\xi|>R)\le$

$E|(t-\bar{t},\xi)|I(|\xi|\le R)+\frac{\varepsilon}{2}\le\varepsilon$, ha $|t-\bar{t}|\le\delta$, ahol $I(A)$ egy A halmaz indikátor függvénye. Ezért a $\varphi(t)$ függvény egyenletesen folytonos.

Az $a\xi+m$ véletlen vektor karakterisztikus függvénye egy $t\in R^k$ pontban, $a\in R$, az $Ee^{i(t,a\xi+m)}=e^{(it,m)}Ee^{i(at,\xi)}=e^{(it,m)}\varphi(at)$ függvény, ahol φ a ξ véletlen vektor karakterisztikus függvénye.

Ha ξ_j, $j=1,\dots,n$, független véletlen vektorok $\varphi_j(t)$ karakterisztikus függvényekkel, akkor a $\xi_1+\cdots+\xi_n$ véletlen összeg karakterisztikus függvénye egy $t\in R^k$ pontban $Ee^{i(t,\xi_1+\cdots+\xi_n)}=Ee^{i(t,\xi_1)}\dots e^{i(t,\xi_n)}=Ee^{i(t,\xi_1)}\dots Ee^{i(t,\xi_n)}=\prod\limits_{j=1}^{k}\varphi_j(t)$.

13.)

a.) Ha ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$Ee^{it\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{itu-u^2/2}\,du=e^{-t^2/2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-(it-u)^2/2}\,du=e^{-t^2/2}$$

az első feladat eredménye alapján.

b.) Ha ξ egyenletes eloszlású valószínűségi változó a $[0,1]$ intervallumban, akkor

$$Ee^{it\xi}=\int_0^1 e^{itu}\,du=\frac{e^{itu}-1}{it}.$$

c.) Ha ξ exonenciális eloszlású valószínűségi változó λ paraméterrel, akkor

$$Ee^{it\xi}=\int_0^{\infty}\lambda e^{itu-\lambda u}\,du=\frac{\lambda}{\lambda-it}.$$

d.) Ha ξ Cauchy eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$Ee^{it\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\pi}\frac{e^{itu}}{1+u^2}\,du.$$

Ezt az integrált a komplex függvénytan rezidium tétele segítségével tudjuk kiszámítani.

A $g(z)=g(z,t)=\frac{e^{itz}}{\pi(1+z^2)}$ függvény analitikus a komplex számsíkon, két pólusa van a $z=\pm i$ pontokban. A $g(z)$ függvény rezidiuma az i pontban e^{-t} a $-i$ pontban e^{t}. Tekintsük a következő körintegrált. A $g(z)=g(z,t)$ függvényt integráljuk a $[-R,R]$ szakaszon, majd a a $|z|=R$ $\operatorname{Im}z\ge0$ félkörön, ha $t\ge0$ és a $|z|=R$, $\operatorname{Im}z\le0$ félkörön, ha $t\le0$. Ekkor ennek a körintegrálnak az értéke a $g(z)$ függvény i pontbeli rezidiumával egyenlő $t>0$ és a $-i$ pontbeli rezidiumával a $t<0$ esetben. Másrészt az integrál megszorítása az R sugarú félkörre nullához tart, ha $R\to0$. Innen következik, hogy $Ee^{it\xi}=\int_{-\infty}^{\infty}g(t,u)\,du=e^{-|t|}$.

A feladatnak egy másik, kissé mesterkélt, de korrekt bizonyítását adja a következő érvelés. Az $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|}$ sűrűségfüggvény karakterisztikus függvénye az

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|+itx}\,dx=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+it}+\frac{1}{1-it}\right)=\frac{1}{1+t^2}$$

függvény. Mivel $\frac{1}{1+t^2}$ integrálható függvény, az inverz Fourier transzformációs képletből következik a kívánt állítás.

e.) Ha ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel, akkor

$$Ee^{it\xi}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{k!}e^{ikt}=\exp\left\{\lambda(e^{it}-1)\right\}.$$

f.) Ha ξ binomiális eloszlású valószínűségi változó n és p paraméterekkel, akkor

$$Ee^{it\xi}=e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k e^{ikt}(1-p)^{n-k}=\left(1-p+pe^{it}\right).$$

g.) Ha ξ negatív binomiális eloszlású valószínűségi változó n és p paraméterekkel, akkor ξ eloszlása megegyezik a $\xi_1+\cdot+\xi_n$ összeg eloszlásával, ahol ξ_j, $1\le j\le n$, független negatív binomiális eloszlású valószínűségi változók 1 és p paraméterekkel. (A ξ valószínűségi egy lehetséges interpretációja a következő. Ha egymás után egymástól független kisérleteket végzünk, amelyek p valószínűséggel sikeresek, akkor hány sikertelen kisérlet történt az n-ik sikeres kisérlet beköveztéig. Ha ξ_j jelöli a $j-1$-ik és j-ik sikeres kisérletek közötti sikertelen kisérletek számát, akkor megkapjuk a fenti repzerentációt.) Ezért $Ee^{it\xi}=\left(Ee^{it\xi_1}\right)^n$. Másrészt

$$Ee^{it\xi_1}=\sum_{k=0}^{\infty}(1-p)p^k e^{itk}=\frac{1-p}{1-pe^{it}}.$$

h.) $\bar u=(1-it)u$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\varphi_s(t)=\frac{1}{\Gamma(s)}\int_0^{\infty} e^{-u+itu}u^{s-1}\,du=\frac{1}{\Gamma(s)}\frac{1}{1-it)^s}\int_0^{\infty} e^{-\bar u}\bar u^{s-1}\,d\bar u=\frac{1}{(1-it)^s}.$$

Ebben a számolásban használtunk némi komplex függvénytani érvelést. Az $\bar u=(1-it)u$ helyettesítésnél az integrálási tartomány az abszcissza tengely pozitív feléről áthelyeződött az $(1-it)u$, $u>0$ tengelyre. De hagyományos komplex függvénytani érveléssel be lehet látni, hogy az integrál visszahelyezhető az abszcissza tengelyre. Fel kell használni, hogy az e^{-z} függvény gyorsan tart nullához, ha $\operatorname{Re} z\to\infty$.

14.) Ha $f(x_1,\dots,x_k)$ és $g(x_1,\dots,x_k)$ két integrálható függvény, akkor

$$\begin{aligned}
\infty &> \int\int |f(x_1,\dots,x_k)||g(u_1,\dots,u_k)|\,dx_1\cdots dx_k du_1\dots du_k \\
&\qquad\qquad\qquad (\bar u_j = x_j + u_j \ j=1,\dots,k \text{ helyettesítéssel,}) \\
&= \int\int |f(x_1,\dots,x_k)||g(\bar u_1 - x_1,\dots,\bar u_k - x_k)|\,dx_1\cdots\,dx_k\,d\bar u_1\dots\,d\bar u_k \\
&= \int\left(\int |f(x_1,\dots,x_k)||g(\bar u_1 - x_1,\dots,\bar u_k - x_k)|\,dx_1\cdots dx_k\right) d\bar u_1\dots du_k \\
&= \int |f|*|g|(x_1,\dots,x_k)\,dx_1\dots dx_k.
\end{aligned}$$

Innen következik, hogy az $|f*g(x_1,\dots,x_k)| \le |f|*|g|(x_1,\dots,x_k)$ függvény majdnem minden $(x_1,\dots,x_k)\in R^k$ pontban véges, sőt integrálható függvény. A továbbiakban $(x_1,\dots,x_k)$ helyett x-et $(u_1,\dots,u_k)$ helyett u-t írunk.

Ha μ és ν két korlátos változasú függvény, akkor létezik $\mu=\mu_1-\mu_2$, $\nu=\nu_1-\nu_2$ reprezentáció, amelyre μ_i, ν_i, $i=1,2$, véges mértékek, és $\mu*\nu=(\mu_1*\nu_1+\mu_2*\nu_2)-(\mu_1*\nu_2+\mu_2*\nu_1)$. Mivel $\mu_i*\nu_j(R^k)<\infty$ minden $i,j=1,2$-re ezért $\mu*\nu$ korlátos változású mérték.

Ha a μ mértéknek létezik f sűrűségfüggvénye, akkor tetszőleges mérhető $A\subset R^k$ halmazra

$$\begin{aligned}
\int_A f(x)*\nu\,dx &= \int_A\left(\int f(u)\nu(x-\,du)\right)\,dx = \int_A\left(\int f(x-u)\nu(\,du)\right)\,dx \\
&= \int\left(\int I(x\colon\ x\in A)f(x-u)\,dx\right)\nu(\,du) \\
&= \int\left(\int I(v\colon\ u+v\in A)f(v)\,dv\right)\nu(\,du) \\
&= \int\int I(v\colon\ u+v\in A)\mu(\,dv)\nu(\,du) \\
&= \mu\times\nu\,(\{(u,v)\colon\ u+v\in A\}) = \mu*\nu(A)
\end{aligned}$$

és ez azt jelenti, hogy $f*\nu$ a $\mu*\nu$ konvoluciós mérték sűrűségfüggvénye.

Vegyük észre, hogy a fenti számolásból az is következik, hogy a $f(x)*\nu$ függvény majdnem minden $x\in R^k$ pontban véges és integrálható függvény. Valóban, $A=R^k$ választással a fenti számolás bizonyítja ezt az állítást abban az esetben, ha μ és ν (véges) pozitív mértékek. Az általános eset pedig visszavezethető erre az esetre, ha a μ és ν mértékeket felbontjuk két pozitív (véges) mérték különbségére. (Feltehetjük, hogy a $\mu=\mu_1-\mu_2$ felbontásban szereplő mértékeknek van sűrűségfüggvényük.)

Ha a μ mértéknek létezik f a ν mértéknek pedig g sűrűségfüggvénye, akkor definiáljuk minden $x\in R^k$-re a $\bar\nu_x(A)=\nu(x-A)$ mértéket. Ennek a $\bar\nu_x$ mérték sűrűségfüggvénye az $u\in R^k$ pontban $g(x-u)$, és a $\mu*\nu$ mérték sűrűségfüggvénye a már bizonyított eredmények alapján

$$\int f(u)\bar\nu_x(du) = \int f(u)g(x-u)\,du = f*g(x).$$

15.) Mértékek konvoluciójának a definiciójából következik, hogy amennyiben ξ és η független valószínűségi változók μ és ν eloszlásokkal, akkor $\xi+\eta$ eloszlása $\mu*\nu$. Az előző feladat eredményéből következik, hogy amennyiben a ξ valószínűségi változó μ eloszlásának létezik f sűrűségfüggvénye, akkor $\xi+\eta$ $\mu*\nu$ eloszlásának $f*\nu$ a sűrűségfüggvénye. Ha ezenkívül a ν mértéknek létezik g sűrűségfüggvénye, akkor $\mu*\nu$ sűrűségfüggvénye $f*g$.

Ha egy Z valószínűségi változó eloszlása $F(x)$, akkor $\bar Z = \frac{Z-A}{B}$, $B>0$, eloszlása $F(Bx+A)$, ha a Z valószínűségi változónak létezik $f(x)$ sűrűségfüggvénye akkor $\bar Z$ sűrűségfüggvénye $Bf(Bx+A)$. Innen, illetve az előzőekből következnek a $\bar S_n$ eloszlásáról és sűrűségfüggvényéről szóló állítások.

Az, hogy $\mu*\nu=\nu*\mu$ következik mértékek konvoluciójának a definiciójából. Az, hogy $(\mu_1*\mu_2)*\mu_3=\mu_1*(\mu_2*\mu_3$ következik abból, hogy minden A halmazra

$$(\mu_1*\mu_2)*\mu_3(A)=\mu_1*(\mu_2*\mu_3)(A)=\mu_1\times\mu_2\times\mu_3(\{(u,v,w)\colon\ u+v+w\in A\}).$$

Az analóg állítások függvények konvoluciójára visszavezethetőek erre az állításra, ha függvények konvolucióját, mint megfelelő mértékek konvoluciójának a sűrűségfüggvényét reprezentáljuk. Egyébként egyszerű számolással is bizonyíthatóak ezek az állítások.

16.) Ha μ és ν két korlátos változású előjeles mérték $\tilde f(t_1,\dots,t_k)$ és $\tilde g(t_1,\dots,t_k)$ Fourier transzformáltakkal, akkor

$$\begin{aligned}&\tilde f(t_1,\dots,t_k)\tilde g(t_1,\dots,t_k)\\ &\qquad=\int e^{i(t_1(u_1+v_1)+\cdots+t_k(u_k+v_k))}\mu(\,du_1,\dots,\,du_k)\nu(\,dv_1,\dots,\,dv_k).\end{aligned}$$

A $\mathbf{T}(u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_k)=(u_1+v_1,\dots,u_k+v_k)$, $(u_1,\dots,u_k)\in R^k$, $(v_1,\dots,v_k)\in R^k$, leképezés egy mértéktartó transzformáció az $(R^k\times R^k,\mathcal{B}_{2k},\mu\times\nu)$ térről az $(R^k,\mathcal{B}_k,\mu*\nu)$ térre, ahol $\mathcal{B}_{2k}$ és $\mathcal{B}_k$ az R^{2k} iletve R^k téren tekintett Borel σ-algebrát jelöli. Alkalmazva azt a mértékelméleti eredményt, amely leírja, hogy mértéktartó leképezések hogyan transzformálnak integrálokat a

$$h(x_1,\dots,x_k)=e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}$$

és

$$g(u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_k)=h(\mathbf{T}(u_1,\dots,u_k,v_1,\dots,v_k))=e^{i(t_1(u_1+v_1)+\cdots+t_k(u_k+v_k))}$$

függvényekre kapjuk a megoldás elején felírt relációból, hogy

$$\tilde f(t_1,\dots,t_k)\tilde g(t_1,\dots,t_k)=\int e^{i(t_1x_1+\cdots+t_kx_k)}\mu*\nu(\,dx_1,\dots,\,dx_k)$$

Ezzel bebizonyítottuk a mértékek konvoluciójának Fourier transzformáltjáról kimondott állítást. Innen, illetve mértékek és azok sűrűségfüggvényeinek konvoluciója közötti kapcsolatból következik a feladatnak az az állítása, amely sűrűségfüggvények konvoluciójának Fourier transzformáltjáról szól.

17.) Az $f*g(x)=\int f(x-u)g(u)\,du$ azonosságot k-szor differenciálva kapjuk, hogy

$$\frac{df*g^k(x)}{dx^k}=\int \left.\frac{df^k(v)}{dv^k}\right|_{v=x-u} g(u)\,du=\int \left.\frac{df^k(v)}{dv^k}\right|_{v=u} g(x-u)\,du.$$

A feladat feltételei lehetővé teszik ezt a szukcessziv differenciálást. A továbbiakban az utolsó formula jobboldalát használva további l deriválás lehetséges, és azt kapjuk, hogy

$$\frac{df*g^{k+l}(x)}{dx^{k+l}}=\int \left.\frac{df^k(v)}{dv^k}\right|_{v=u} \left.\frac{dg^l(v)}{dv^l}\right|_{v=x-u} du.$$

Ha $f(u)$ analitikus függvény, és teljesíti a többi feltételt is akkor az

$$F(z)=\int f(z-u)g(u)\,du$$

függvény az $f*g(x)$ konvolució analitikus folytatása a $\{z\colon \operatorname{Im} z<A\}$ tartományba.

18.) a.) Az eloszlásban való konvergenciából következik az integrálok konvergenciája: Mivel $F(x_1,\dots,x_k)\to 1$, ha $x_j\to\infty$ minden $j=1,\dots,k$-ra, és $F(x_1,\dots,x_k)\to 0$, ha $x_j\to-\infty$ valamelyik $1\le j\le k$-ra, ezért tetszőleges $\varepsilon>0$-ra létezik olyan $\mathbf{K}$ téglatest, amelyre $\mu_F(\mathbf{K})>1-\varepsilon$. (Adva egy F eloszlásfüggvény μ_F-fel fogjuk a továbbiakban jelölni az F eloszlás által indukált valószínűségi mértéket.) Továbbá, mivel $F_n\to F$, ha $n\to\infty$, ezért elérhető a $\mathbf{K}$ halmazt esetleg nagyobbra választva, hogy $\mu_{F_n}(\mathbf{K})>1-\varepsilon$ legyen minden F_n, $n=1,2,\dots,$ eloszlásfüggvényre. Azt is feltehetjük, hogy a $\mathbf{K}$ halmaz minden határpontja folytonossági pontja az F eloszlásfüggvénynek, mivel az F eloszlás vetülete a j-ik koordinátára olyan 1 dimenziós eloszlás, amelyiknek csak megszámlálható sok atomja van minden $j=1,\dots,k$-ra.

Az f függvény korlátossága miatt $|\int_{R^k\setminus\mathbf{K}} f(x_1,\dots,x_k)\,dF(x_1,\dots,x_k)|<\text{const.}\,\varepsilon$, és $|\int_{R^k\setminus\mathbf{K}} f(x_1,\dots,x_k)\,dF_n(x_1,\dots,x_k)|<\text{const.}\,\varepsilon$ minden $n=1,2,\dots$-ra. Továbbá, az f folytonos függvény egyenletesen folytonos a $\mathbf{K}$ téglatesten, ezért létezik olyan $\delta>0$ szám, amelyre $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$, ha $|x-y|\le\delta$. A $\mathbf{K}$ téglatest felbontható véges sok, közös belső ponttal nem rendelkező, legfeljebb δ átmérőjű Δ_j, $j=1,\dots,p(\mathbf{K})$ téglatest uniójára, amelyeknek a határa 0 mértékű az F által indukált μ_F mérték szerint. Így $\lim\limits_{n\to\infty}\mu_{F_n}(\Delta_j)=\mu_F(\Delta_j)$ minden $j=1,\dots,p(\mathbf{K})$-ra, és az f függvény egyenletes folytonossága miatt a $\mathbf{K}$ halmazon

$$\limsup\left|\int_{\mathbf{K}} f\,dF_n-\int_{\mathbf{K}} f\,dF\right|<\varepsilon.$$

A fenti egyenlőtlenségekből következik, hogy $\limsup \left|\int f\,dF_n - \int f\,dF\right| < \text{const.}\,\varepsilon$, ahol const. független az ε-tól. Mivel ez igaz minden $\varepsilon > 0$-ra, innen következik a kívánt állítás.

b.) Az integrálok konvergenciájából következik az eloszlásban való konvergencia:

Legyen $x = (x_1, \dots, x_k)$ az F eloszlásfüggvény folytonossági pontja. Ekkor minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy az $y = (y_1, \dots, y_k) = (x_1 - \delta, \dots, x_k - \delta)$ és $z = (z_1, \dots, z_k) = (x_1 + \delta, \dots, x_k + \delta)$ pontokra $F(y) > F(x) - \varepsilon$ és $F(z) < F(x) + \varepsilon$. Léteznek olyan $f_1(u)$ és $f_2(u)$ folytonos függvények az R^k-n, amelyek teljesítik a következő tulajdonságokat: $0 \le f_i(u) \le 1$ minden $u \in R^k$-ra, $i = 1, 2$. Továbbá $f_1(u) = 1$, $u = (u_1, \dots, u_k)$-ra, ha $u_j \le y_j$, minden $j = 1, \dots, k$, és $f_1(u) = 0$, ha $u_j \ge x_j$ valamely $1 \le j \le k$-re. Az $f_2(\cdot)$ függvény pedig teljesíti a következő relációkat: $f_2(u) = 1$, ha $u_j \le x_j$ minden $j = 1, \dots, k$-ra, és $f_2(u) = 0$, ha $u_j \ge z_j$ valamely $1 \le j \le k$-ra. Ekkor

$$\limsup_{n\to\infty} F_n(x) \ge \lim_{n\to\infty} \int f_1(u)\,dF_n(u) = \int f_1(u)\,dF(u) \ge F(x) - \varepsilon$$
$$\liminf_{n\to\infty} F_n(x) \le \lim_{n\to\infty} \int f_2(u)\,dF_n(u) = \int f_2(u)\,dF(u) \le F(x) + \varepsilon.$$

Mivel ezek az egyenlőtlenségek minden $\varepsilon > 0$-ra igazak, innen következik az állítás.

19.) Mivel $\bigcup\limits_{K=1}^{\infty} \mathbf{K}(K)^k = R^k$ és a $\mathbf{K}(K)^k$, $K = 1, 2, \dots$, monoton növekvő halmazsorozat, ezért $\lim\limits_{K\to\infty} \mu(\mathbf{K}(K)^k) = \mu(R^k) = 1$, azaz $\mu(\mathbf{K}(K)^k) \ge 1 - \varepsilon$, ha $K \ge K(\varepsilon)$.

Annak érdekében, hogy megmutassuk azt, hogy a μ mérték karakterisztikus függvénye meghatározza a μ mértéket vegyük észre először azt, hogy az $\int f(u)\,d\mu(u)$ integrálok egyértelműen meghatározzák a μ mértéket, ha az összes folytonos és kompakt tartójú $f(\cdot)$ függvény integrálját tekintjük. Valóban azon $\mathbf{P} = [K_1, L_1) \times \cdots \times [K_k, L_k)$ téglatestek μ mértéke, amelyek határának a μ mértéke nulla meghatározzák a μ mértéket, másrészt tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra és minden $\mathbf{P}$ téglatestre létezik olyan $f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(\cdot)$ függvény, amelyre $0 \le f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(u) \le 1$ minden $u \in R^k$ pontra, $f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(u) = 1$, ha $u \in \mathbf{P}$ $f_{\varepsilon,\mathbf{P}}(u) = 0$, ha $\rho(u, \mathbf{P}) > \varepsilon$. A továbbiakban $\rho(\cdot, \cdot)$ jelöli a szokásos euklideszi távolságot az R^k téren. Ekkor a $\mu(\mathbf{P}) = \lim\limits_{\varepsilon\to 0} \int f_{\mathbf{P},\varepsilon}\,d\mu(u)$ relációból következik az állítás. Egy adott tulajdonságú $f_{\mathbf{P},\varepsilon}$ függvény lehetséges konstrukciója a következő: $f_{\mathbf{P},\varepsilon}(u) = 1 - g_{\mathbf{P},\varepsilon}(u)$, és $g_{\mathbf{P},\varepsilon}(u) = \min\left(1, \frac{1}{\varepsilon}\rho(u, \mathbf{P})\right)$.

Adva egy $f(\cdot)$ kompakt tartójú folytonos függvény, és egy nagy $K > 0$ szám, amelyre a $[-K, K] \times \cdots \times [-K, K]$ kocka tartalmazza az $f(\cdot)$ függvény tartója definiáljuk az $f(\cdot)$ függvény $2K$ periodusú $f_K(\cdot)$ periodikus kiterjesztését az $f_K(u_1 + 2Kj_1, \cdots, u_k + 2Kj_k) = f(u_1, \cdots, u_k)$, $-K \le u_j < K$, $l_j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $j = 1, \dots, k$, képlet segítségével. Ezen periodikus kiterjesztések $\int f_K(u)\,d\mu(u)$ integráljai meghatározzák a μ mértéket, mert $\int f(u)\,d\mu(u) = \lim\limits_{K\to\infty} \int f_K(u)\,d\mu(u)$ a μ mérték feszessége miatt.

Végül Weierstrass második approximációs tétele alapján tetszőleges $f_K(\cdots)$ K periódusú folytonos függvényhez és $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan

$$g_\varepsilon = g_{\varepsilon, f_K}(u_1, \cdots, u_k) = \sum c^\varepsilon_{j_1,\dots,j_k} e^{i\pi(j_1u_1+\cdots+j_ku_k)/K}$$

trigonometrikus polinom, amelyre $\sup\limits_{u\in R^k} |f_K(u) - g_\varepsilon(u)| \le \varepsilon$. Ezért

$$\left| \int f_K(u)\, d\mu(u) - \int g_\varepsilon(u)\, d\mu(u) \right| \le \varepsilon.$$

Viszont $\int g_\varepsilon(u)\, d\mu(u) = \sum c^\varepsilon_{j_1,\dots,j_k} \varphi\left(\frac{\pi j_1}{K}, \dots, \frac{\pi j_k}{K}\right)$, azaz ez az integrál kiszámítható a karakterisztikus függvény segítségével. Innen következik, hogy a karakterisztikus függvény meghatározza az $\int f_K(u)\, d\mu(u)$ alakú integrálokat, ezért a μ mértéket is.

A bizonyítás lényegében változtatás nélkül átvihető tetszőleges korlátos változású μ mértékre.

20.) Először azt mutatjuk meg, hogy tetszőleges $a > 0$ számra létezik olyan $f(u)$ páros sűrűségfüggvény, amelynek $\varphi(t)$ Fourier transzformáltja elég síma, például kétszer differenciálható, és a $[-a, a]$ intervallumon kívül zéró.

Valóban, legyen $g(u)$ egy a $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$ intervallumba koncentrált folytonosan differenciálható függvény, $g^-(u) = g(-u)$, $h(u) = g * g(u)$, $f(u) = \frac{2\pi}{M} \int e^{itu} h(u)\, du$, ahol $*$ konvoluciót jelöl, és $M = h(0) = \int |f(u)|^2\, du$. Azt állítjuk, hogy az így definiált f függvény sűrűségfüggvény, és ennek karakterisztikus függvénye a $\frac{h(u)}{M}$ függvény, amely a $[-a, a]$ intervallumon kívül eltünik. Ugyanis a $h(\cdot)$ függvény kétszer differenciálható, (lásd 17. feladatot), ezért ennek Fourier transzformáltja a plusz–minusz végtelenben $|t|^{-2}$ nagyságrendben cseng le (lásd például a később tárgyalandó 28. feladatot), ezért a $\frac{2\pi h(t)}{M}$ függvény előbb definiált $f(\cdot)$ Fourier transzformáltja integrálható, és alkalmazható rá az inverz Fourier transzformációs formula. Mivel $f(\cdot)$ páros függvény, ez azt jelenti, hogy $\frac{h(u)}{M} = \int e^{itx} f(u)\, du$, az $f(u)$ függvény Fourier transzformáltja, speciálisan $\frac{h(0)}{M} = 1 = \int f(u)\, du$. Végül az $f(t) \ge 0$ minden $t \in R^1$-re, mivel az $g * g^-(\cdot)$ függvény Fourier transzformáltja $\int e^{itu} g * g^-(u)\, du = \int e^{itu} g(u)\, du \int e^{itu} g^-(u)\, du = \left|\int e^{itu} g(u)\, du\right|^2 \ge 0$. Tehát $f(\cdot)$ sűrűségfüggvény. (Az itt tárgyalt problémához a feladatsor második részében vissza fogunk térni.)

Tekintsünk egy $f(u)$ páros sűrűségfüggvényt, amelynek $\varphi(t)$ karakterisztikus függvénye kétszer differenciálható, és egy $[-a, a]$ intervallumon kívül eltűnik. Legyen $T > a$ és definá́ljuk az $a_k = \frac{1}{4\pi T} \int e^{\pi ikt/T} \varphi(t)\, dt$ számokat. Azt állítjuk, hogy ha az $\frac{\pi k}{T}$ pontokba a_k súlyt rendelünk, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$, akkor egy olyan rácsos eloszlású valószínűségi mértéket definiálunk, amelynek karakterisztikus függvénye a $[-T, T]$ intervallumon a $\varphi(t)$ függvény megszorítása erre az intervallumra, ezen kívül pedig e függvénynek a $2T$ periodus szerinti periodikus kiterjesztése. Ez speciálisan azt is jelenti, hogy ez az eloszlás és az $f(\cdot)$ sűrűségfüggvény által meghatározott eloszlás együtt a feladat állítását kielégítő példát szolgáltat.

Ez az állítás azért igaz, mert összehasonlítva az a_k szám definicióját az $f(\cdot)$ függvényt kifejező inverz Fourier-transzformációval kapjuk, hogy $a_k = \frac{1}{2T} f\left(\frac{\pi k}{T}\right) \geq 0$, és a $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{2\pi i k/T}$ összeg a $\varphi(t)$ függvénynek a $[-T, T]$ intervallumra való megszorításának a Fourier sora. Speciálisan $\varphi(0) = 1 = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k$. (Mivel $\varphi(\cdot)$ kétszer differenciálható függvény, ezért minden pontjában megegyezik a Fourier sorával.)

21.) Lássuk először azt be, hogy amennyiben a valószínűségi mértékek μ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozata relatív kompakt akkor feszes is.

Tegyük fel indirekt módon, hogy ez a μ_n mérték sorozat nem feszes. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$ szám, a μ_n valószínűségi mértékeknek olyan μ_{n_k} részsorozata, és olyan $K_n \to \infty$ számsorozat, amelyekre $\mu_{n_k}([-K_n, K_n] \times \cdots \times [-K_n, K_n]) < 1 - \varepsilon$. Megmutatjuk, hogy ennek a μ_{n_k} mértéksorozatnak nincs eloszlásban konvergens részsorozata. Innen következik, hogy az indirekt feltevés ellentmondáshoz vezet.

Valóban, tegyük fel, hogy a μ_{n_k} mértéksorozat valamely $\mu_{n_{k_j}}$ részsorozata eloszlásban konvergál egy μ valószínűségi mértékhez. Ekkor létezik olyan $K > 0$ szám, amelyre $\mu([-K, K] \times \cdots \times [-K, K]) > 1 - \frac{\varepsilon}{2}$, és az $u_j = \pm K$, $j = 1, 2, \dots, k$, hipersíkok μ mértéke nulla. Ekkor a $\lim\limits_{k \to \infty} \mu_{n_{k_j}}([-K, K] \times \cdots \times [-K, K]) = \mu([-K, K] \times \cdots \times [-K, K])$ relációnak teljesülni kellene. Ez azonban nem lehetséges, mert a baloldalon szereplő $\limsup$ kisebb mint $1 - \varepsilon$, míg a jobboldal nagyobb mint $1 - \frac{\varepsilon}{2}$.

Mutassuk meg, hogy amennyiben a μ_n mértékek sorozata feszes, akkor relatív kompakt. Azt kell belátnunk, hogy a μ_n sorozat tetszőleges részsorozatának létezik eloszlásban konvergens részorozata. Az egyszerűbb jelölés érdekében a részsorozat újra indexelésével jelöljük ezt a részsorozatot is μ_n-nel. Azt kell belátnunk, hogy ennek az új (szintén feszes) μ_n mértéksorozatnak létezik eloszlásban konvergens részsorozata.

Jelölje $F_n(u) = F_n(u_1, \dots, u_k)$ a μ_n mérték által meghatározott $F_n(u_1, \dots, u_k) = \mu_n(\{(v_1, \dots, v_k)\colon v_j < u_j,\ j = 1, \dots, k\})$ eloszlásfüggvényt. Legyen

$$u^{(p)} = \left(u_1^{(p)}, \dots, u_k^{(p)}\right), \quad p = 1, 2, \dots,$$

a racionális koordinátájú $u^{(p)} \in R^k$ pontok (megszámlálható) halmaza valamilyen indexeléssel felsorolva. Először belátjuk az úgynevezett átlós módszer segítségével, hogy egy alkalmas n_j, $j = 1, 2, \dots$, számsorozatra a

$$\lim_{j \to \infty} F_{n_j}\left(u_1^{(p)}, \dots, u_k^{(p)}\right) = \tilde{F}\left(u_1^{(p)}, \dots, u_k^{(p)}\right) \tag{2.4}$$

határérték létezik minden $p = 1, 2, \dots$ számra.

Valóban, mivel $0 \leq F_n(u) \leq 1$ létezik az egész számoknak olyan $\bar{n}_j = (n_{j,1})$ részsorozata, amelyre létezik a $\lim\limits_{j \to \infty} F_{n_{j,1}}(u^{(1)}) = \tilde{F}(u^{(1)})$ határérték. Ennek létezik olyan $n_{j,2}$ részsorozata, amelyre létezik a $\lim\limits_{j \to \infty} F_{n_{j,2}}(u^{(2)}) = \tilde{F}(u^{(2)})$ határérték. Ezt az eljárást folytatva kapunk egymásba skatulyázott $n_{j,p}$, $j = 1, 2, \dots$, sorozatot minden $p = 1, 2, \dots$ sorozatokat, amelyekre $\{n_{p+1,j},\ j = 1, 2, \dots\} \subset \{n_{p,j},\ j = 1, 2, \dots\}$, $p = 1, 2, \dots$, és minden $p = 1, 2, \dots$ számra létezik a $\lim\limits_{j\to\infty} F_{n_{j,p}}(u^{(p)}) = \tilde{F}(u^{(p)})$ határérték. Ekkor az $n_j = n_{j,j}$ sorozat teljesíti a (2.4) relációt.

Vezessük be az

$$F(u_1, \dots, u_k) = \sup_{\left\{(u_1^{(p)},\dots,u_k^{(p)}):\ u_s^{(p)}<u_s,\ s=1,\dots,k\right\}} \tilde{F}\left(u_1^{(p)}, \dots, u_k^{(p)}\right) \tag{2.5}$$

függvényt. Azt állítjuk, hogy $F(u_1, \dots, u_k)$ eloszlásfüggvény, és az $F_{n_j}(u_1, \dots, u_k)$ eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak ehhez az $F(u_1, \dots, u_k)$ eloszlásfüggvényhez, ahol az n_j számsorozat olyan, amely teljesíti a (2.4) relációt. Ha ezt az állítást belátjuk, akkor ily módon befejezzük a 21. feladat megoldását.

Annak érdekében, hogy megmutassuk azt, hogy $F(u_1, \dots, u_k)$ eloszlásfüggvény felhasználjuk az eloszlásfüggvények következő ,,belső" azaz csak az F függvény tulajdonságaitól függő jellemzését. Az $F(u_1, \dots, u_k)$ függvény akkor és csak akkor eloszlásfüggvény, ha teljesíti a következő négy tulajdonságot.

(i) $F(u_1, \dots, u_k)$ minden változójának balról folytonos függvénye.

(ii) $$\lim_{\substack{u_j\to\infty \\ \text{minden } j=1,\dots,k \text{ számra}}} F(u_1, \dots, u_k) = 1.$$

(iii) $$\lim_{\substack{u_j\to-\infty \\ \text{valamely } 1\le j\le k \text{ számrra}}} F(u_1, \dots, u_k) = 0.$$

Végül definiáljuk egy az R^k téren definiált F függvényre és egy $\mathbf{K} = [a_1, b_1) \times \dots \times [a_k, b_k)$ téglatestre a

$$\mu(\mathbf{K}) = \mu_F(\mathbf{K}) = \sum_{\substack{u_j=\ a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\chi(u_1,\dots,u_k)} F(u_1, \dots, u_k)$$

mennyiséget, ahol $\chi(u_1, \dots, u_k)$ jelöli az a_j-k számát az $u_1, \dots, u_k$ sorozatban. Ekkor

(iv) $\mu_F(\mathbf{K}) \ge 0$ minden $\mathbf{K}$ téglatestre.

Mivel a racionális koordinátájú pontokon definiált $\tilde{F}(u_1, \dots, u_k)$ minden koordinátájának monoton függvénye, ezért a (2.5) formulában definiált $F(\cdot)$ függvény teljesíti az (i) tulajdonságot. Továbbá, ebből a monotonitásból az is következik, hogy a (2.5) formulában a sup helyett limeszt írhatunk, ahol olyan $\left(u_1^{(p)}, \dots, u_k^{(p)}\right)$, $p = 1, 2, \dots$, sorozatot tekintünk a limeszben, amelyre $u_j^{(p)} < u_j$ minden $1 \le k \le k$ és $p = 1, 2, \dots$ számokra, továbbá $\lim\limits_{p\to\infty} u_j^{(p)} = u_j$ minden $j = 1, \dots, k$ számra. Tekintsünk olyan $\mathbf{K}(p)$ racionális koordinátájú téglatesteket, amelyekben minden pont összes koordinátája szigorú monoton növekvő módon tart a $\mathbf{K}$

téglatest megfelelő pontjának a koordinátához. Ekkor $\mu_{\tilde{F}}(\mathbf{K}(p)) \geq 0$, mivel $\tilde{F}$ eloszlásfüggvények limesze. Ezért $\mu_F(\mathbf{K}) = \lim\limits_{p\to\infty} \mu_{\tilde{F}}(\mathbf{K}(p)) \geq 0$, azaz az F függvény teljesíti a (iv) tulajdonságot. Vegyük észre, hogy a (ii) és (iii) tulajdonság érvényes akkor, ha az F_n függvényeket a $\tilde{F}$ függvénnyel helyettesítjük, és a limeszt csak racionális koordinátájú pontokban tekintjük. (A bizonyásnak ebben a pontjában használjuk ki, hogy a μ_n mértékek feszesek.) Innen és a (2.5) formulából következik, hogy az F függvény a (ii) és (iii) tulajdonságokat is teljesíti.

Annak érdekében, hogy megmutassuk azt, hogy az F_{n_k} eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak az F eloszlásfüggvényhez tekintsük az F függvény valamely $u = (u_1, \dots, u_k)$ folytonossági pontját, majd minden rögzített $\varepsilon > 0$ számhoz válasszunk olyan $\delta = \delta(\varepsilon)$ számot, amelyre $F(u)-\varepsilon \leq F(u-\delta) \leq F(u) \leq F(u+\delta) \leq F(u)+\varepsilon$, ahol $u \pm \delta = (u_1 \pm \delta, \dots, u_k \pm \delta)$. Válasszunk ezután két racionális koordinátájú $r = (r_1, \dots, r_k) \in R^k$ és $\bar{r} = (\bar{r}_1, \dots, \bar{r}_k) \in R^k$ pontot, amelyekre $u_j - \delta < r_j < u_j < \bar{r}_j < u_j + \delta$ minden $j = 1, \dots, k$ indexre. Ekkor a $\tilde{F}(\cdot)$ függvény monotonitási tulajdonságai és az F függvény definiciója alapján

$$F(u) - \varepsilon \leq F(u - \delta) < \tilde{F}(r) \leq F(u) \leq \tilde{F}(\bar{r}) \leq F(u + \delta) \leq F(u) + \varepsilon$$

Innen, a $\tilde{F}$ függvény definiciója és az F_{n_j} függvények monotonitási tulajdonságai miatt

$$\begin{aligned} F(u) - \varepsilon &\leq \lim_{j\to\infty} F_{n_j}(r) \leq \liminf_{j\to\infty} F_{n_j}(u) \\ &\leq \limsup_{j\to\infty} F_{n_j}(u) \leq \lim_{j\to\infty} F_{n_j}(\bar{r}) \leq F(u) + \varepsilon, \end{aligned}$$

ezért

$$-\varepsilon \leq \liminf_{j\to\infty} F_{n_j}(u) - F(u) \leq \limsup_{j\to\infty} F_{n_{j(u)}} - F(u) \leq \varepsilon.$$

Mivel ez a reláció minden $\varepsilon > 0$-ra igaz, innen következik, hogy $\lim\limits_{j\to\infty} F_{n_j}(u) = F(u)$.

22.) Írjuk fel a következő azonosságot:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} \operatorname{Re}\,[1 - \varphi_n(t)]\,dt = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{1}{2\delta} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - \cos tx]\; dF_n(x)\,dt \\ &\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\delta} \int_{-\delta}^{\delta} [1 - \cos tx]\,dt\,dF_n(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{t}{2\delta} - \frac{\sin tx}{2\delta x}\right]_{t=-\delta}^{t=\delta} dF_n(x) \\ &\quad = \int_{-\infty}^{\infty} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x) = \int_{-K}^{K} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x) \\ &\qquad + \int_{|x|>K} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x) = I_{1,n}^{\delta}(K) + I_{2,n}^{\delta}(K). \end{aligned} \tag{2.6}$$

Lássuk be először a (2.6) reláció segítségével azt, hogy ha a (10) formula teljesül, akkor az F_n mértékek feszesek. Mivel $\left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) \geq 0$ minden x-re és δ-ra, ezért a (2.6) formula baloldala felső becslést ad az $I^\delta_{2,n}(K)$ kifejezésre tetszőleges $\delta > 0$, $n \ge 1$ és $K > 0$ számokra. Ezért a (10) formula alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ számhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám és $n_0 = n_0(\delta)$ küszöbindex, amelyekre $\frac{\varepsilon}{2} \ge \int_{|x|>K} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x)$. Legyen $K = \frac{2}{\delta}$. Akkor minden $|x| \ge K$-ra $1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x} \ge \frac{1}{2}$. Ezért az előző becslésből következik, hogy $\frac{\varepsilon}{2} \ge \int_{|x|>K} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x) \ge \frac{1}{2}[(1 - F_n(K)) + F_n(-K)]$, azaz $\varepsilon \ge [(1 - F_n(K)) + F_n(-K)]$, ezzel a K számmal ha $n \ge n_0$. A $K > 0$ szám esetleges megnövelésével elérhetjük, hogy a fenti egyenlőtlenség minden $n \ge 1$ számra érvényes legyen. Tehát az F_n, $n = 1, 2, \dots,$ eloszlásfüggvények feszesek.

Mutassuk meg a (2.6) formula segítségével, hogy az F_n mértékek feszességéből következik a (10) formula, sőt annak az a némileg erősebb változata, amelyben a $\limsup\limits_{n\to\infty}$ helyett $\sup\limits_{n\ge1}$-et írjunk. Mivel $\left|1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right| \le 2$, az F_n mértékek feszessége lehetővé teszi, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra olyan $K = K(\varepsilon) > 0$ számot válasszunk, amelyre $|I^\delta_{2,n}(K)| = \left|\int_{|x|>K} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$ minden $\delta > 0$ és $n = 1, 2, \dots$ számra. A $K > 0$ szám rögzítése után választhatunk olyan $\bar\delta = \bar\delta(\varepsilon, K) > 0$ számot, amelyre $\varepsilon \ge 1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x} \ge 0$ minden $|x| < K$ és $0 < \delta < \bar\delta$ számra. Ezért $|I^\delta_{1,n}(K)| = \left|\int_{-K}^{K} \left(1 - \frac{\sin \delta x}{\delta x}\right) dF_n(x)\right| \le \frac{\varepsilon}{2}$. E becslésekből és a (2.6) formulából következik, hogy $\left|\frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,[1 - \varphi_n(t)]\, dt\right| \le \varepsilon$ minden $n \ge 1$-re, ha $\delta \le \delta(\varepsilon)$. Ezzel az állítást beláttuk.

23.) Tekintsük a $\xi^{(n)}$ véletlen vektorok j-ik koordinátáját, $1 \le j \le k$, azaz a $\xi^{(n)}_j$ valószínűségi változókat minden $n = 1, 2, \dots,$ számra. A $\xi^{(n)}_j$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye a

$$\varphi^{(j)}_n(t) = \varphi_n(\underbrace{0, \cdots, 0,}_{\substack{j-1 \\ 0 \text{ koordináta}}}\ t,\ \underbrace{0, \cdots, 0}_{\substack{n-j-1 \\ 0 \text{ koordináta}}})$$

függvény. A feltételek szerint a $\varphi^{(j)}_n(t)$ függvények az origó egy kis környezetében konvergálnak egy a nullában folytonos $\varphi^{(j)}(t)$ függvényhez. Vegyük észre, hogy $\varphi^{(j)}(0) = \lim\limits_{n\to\infty} \varphi^{(j)}_n(0) = 1$. Ezért a $\varphi^{(j)}(t)$ függvény folytonosságából következik, hogy minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik egy $\bar\delta = \bar\delta(\varepsilon) > 0$ küszöb úgy, hogy minden $0 < \delta < \bar\delta$ számra

$$0 \le \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,[1 - \varphi^{(j)}(t)]\, dt < \varepsilon.$$

Továbbá mivel $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\,[1 - \varphi^{(j)}_n(t)] = \mathrm{Re}\,[1 - \varphi^{(j)}(t)]$, ha $|t| < \delta < \bar\delta$ (a $\bar\delta > 0$ küszöböt csökkentjük, ha ez szükséges), és $0 \le \mathrm{Re}\,[1 - \varphi^{(j)}_n(t)] \le 2$, a Lebesgue tételből következik, hogy $0 \le \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2\delta}\int_{-\delta}^{\delta} \mathrm{Re}\,[1 - \varphi^{(j)}_n(t)]\, dt < \varepsilon$. Ezért a 22. feladat eredménye alapján a $\xi^{(j)}_n$, $n = 1, 2, \dots,$ valószínűségi változók eloszlásai feszesek, azaz minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $K = K(\varepsilon) > 0$ szám, amelyre teljesül a

$P\left(\left|\xi_n^{(j)}\right| > K\right) < \frac{\varepsilon}{k}$ egyenlőtlenség. Mivel ez az állítás minden $j = 1, \ldots, k$ számra igaz, innen következik, hogy a $\bar\xi_n = (\xi_1^{(n)}, \ldots, \ldots, \xi_k^{(n)})$ véletlen vektorok eloszlásai feszesek.

24.) A 21. és 23. feladat eredménye alapján az $F_n(u_1, \ldots, u_k)$ eloszlásfüggvények sorozata relatív kompakt, azaz az F_n eloszlásfüggvénysorozat tetszőleges részsorozatának van konvergens részsorozata, ha ezen eloszlások karakterisztikus függvényei konvergálnak egy az origóban folytonos függvényhez. Ahhoz, hogy belássuk, hogy az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak elég azt belátni azt, hogy ezen eloszlásfüggvények tetszőleges konvergens részsorozatának ugyanaz a határeloszlása. Valóban, válasszunk ki egy konvergens részsorozatot, amely konvergál valamely $F(u_1, \ldots, u_k)$ eloszlásfüggvényhez. Ha az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény nem lenne az F_n eloszlások határeloszlása, akkor létezne ennek egy $u = (u_1, \ldots, u_k)$ folytonossági pontja, egy $\varepsilon > 0$ szám és n_j, $j = 1, 2, \ldots,$ indexek olyan sorozata, amelyekre $|F_{n_j}(u_1, \ldots, u_k) - F(u_1, \ldots, u_k)| > \varepsilon$. Ekkor viszont ennek az F_{n_j}, $j = 1, 2, \ldots,$ eloszlásfüggvénysorozat konvergens részsorozatainak más lenne a határértéke.

Az, hogy az F_n eloszlásfüggvénysorozat konvergens részsorozatainak ugyanaz a határértéke következik a Tétel A-ból és a 19. feladat eredményéből. A Tétel A-ból ugyanis következik, hogy ezen eloszlások egy konvergens részsorozatának a karakterisztikus függvénye a tekintett eloszlások karakterisztikus függvényeinek a limesze, amelyik független attól, hogy milyen részsorozatot vettünk. Viszont a 19. feladat eredménye alapján a karakterisztikus függvény egyértelműen meghatározza az eloszlást. Tehát abból, hogy az eloszlások karakterisztikus függvényei konvergálnak egy az origóban folytonos függvényhez következik, hogy az eloszlások konvergálnak valamint az is, hogy a határeloszlás karakterisztikus függvénye a karakterisztikus függvények limesze.

Ha $F_n(u_1, \ldots, u_k)$ eloszlásfüggvények sorozata egy $F_0(u_1, \ldots, u_k)$ eloszlásfüggvényhez konvergál eloszlásban, akkor a Tétel A-ból következik, hogy ezen eloszlásfüggvények $\varphi_n(t_1, \ldots, t_k)$ karakterisztikus függvényei konvergálnak az F_0 eloszlás $\varphi_0(t_1, \ldots, t_k)$ karakterisztikus függvényéhez minden $(t_1, \ldots, t_k)$ pontban. Az alaptétel bizonyításának befejezéséhez azt kell még megmutatni, hogy ez a konvergencia minden kompakt halmazon egyenletes.

Ezen állítás bizonyításának az érdekében vegyük észre, hogy mivel az F_n eloszlásfüggvények eloszlásban konvergálnak, ezért feszesek. Tehát tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $K = K(\varepsilon)$ szám, hogy az F_n eloszlású $\xi_n = (\xi_n^{(1)}, \ldots, \xi_n^{(k)})$, $n = 1, 2, \ldots,$ véletlen vektorok teljesítik a $P(|\xi_n| > K) < \frac{\varepsilon}{3}$ egyenlőtlenséget minden $n = 0, 1, 2, \ldots$ számra. (A bizonyítás további részében $\xi(\omega)$, $t \in R^k$, $u \in R^k$ a k-dimenziós tér pontjait jelöli, és (u, t), $u \in R^k$, $t \in R^k$, jelöli az u és t vektor skalárszorzatát.) Válasszunk egy olyan kis $\delta = \delta(K, \varepsilon)$ számot, amelyre $\left|e^{i(t,u)} - 1\right| < \frac{\varepsilon}{3}$, ha $u \in R^k$, $t \in R^k$, $|u| < \delta$ és $|t| < K$. Válasszunk ezután egy olyan véges $\mathbf{T} = \left\{t^{(1)}, \ldots, t^{(s)}\right\} \subset \mathbf{K}$, $s = s(\mathbf{K}, \delta)$, ponthalmazt a $\mathbf{K} \subset R^k$ kompakt halmazban, amelyre igaz, hogy tetszőleges $t \in \mathbf{K}$ létezik olyan $t^{(j)} \in \mathbf{T}$ pont, amelyre $\rho(t, t^{(j)}) < \delta$. Ekkor

$$\left|\varphi_n(t) - \varphi_n(t^{(j)})\right| = \left|Ee^{i(t,\xi_n)} - e^{i(t^{(j)},\xi_n)}\right|$$
$$\leq E\left|e^{i(t-t^{(j)},\xi_n)} - 1\right| I\left(|\xi_n| \leq K\right) + P(|\xi_n| > K) \leq \frac{2\varepsilon}{3}$$

minden $n = 1, 2, \ldots$ számra. Továbbá választhatunk olyan $n_0 = n_0(\varepsilon)$ küszöbindexet, amelyre teljesül a $\sup\limits_{n \geq n_0} \sup\limits_{t^{(j)} \in \mathbf{T}} \left|\varphi_n(t^{(j)}) - \varphi_0(t^{(j)})\right| < \frac{\varepsilon}{3}$ egyenlőtlenség. Az utolsó két egyenlőtlenségből következik, hogy $\sup\limits_{t \in \mathbf{K}} |\varphi_n(t) - \varphi_0(t)| < \varepsilon$, ha $n \geq n_0$, tehát a $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$ konvergencia egyenletes a $\mathbf{K}$ halmazon.

25.) Legyen $\varphi_0(t)$ a $[-1, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlás karakterisztikus függvénye, azaz $\varphi_0(t) = \int_{-1}^{1} \frac{1}{2} e^{it}\, dt = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$. Definiáljuk a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvényeket, mint a $[-1, 1]$ intervallumon egyenletes eloszlás következő μ_n, $n = 1, 2, \ldots$, diszkretizáltjainak a karakterisztikus függvényeit: $\mu_n\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{2n+1}$, $-n \leq k \leq n$. Tehát

$$\varphi_n(t) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} e^{ikt/n} = \frac{e^{i(n+1)t/n} - e^{i(-n+1)t/n}}{(2n+1)(e^{it/n} - 1)}.$$

Egyszerű számolás mutatja, hogy $\varphi_n(t) \to \varphi_0(t)$ minden $t \in R^1$ pontra, és a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban. Másrészt ez a konvergencia nem egyenletes az egész számegyenesen, mert $\lim\limits_{t \to \infty} \varphi(t) = 0$, míg $\varphi_n(t) = 1$ a $t = 2\pi k n$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$, alakú pontokban. (A konstrukció háttere: Sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlás karakterisztikus függvényét közelítettük az eloszlást egyre jobban közelítő rácsos eloszlású eloszlás karakterisztikus függvényével. Ekkor a karakterisztikus függvények véges intervallumban egyenletesen konvergálnak a határmértékhez az alaptétel szerint. Másrészt a sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlás karakterisztikus függvénye a végtelenben nullához tart a Riemann lemma szerint. Másrészt a rácsos eloszlású eloszlás karakterisztikus függvénye periodikus, ezért bizonyos pontokban 1 az abszolút értéke.

26.) Példa az a) esetre: Legyen a μ_n mérték az egyenletes mérték a $[-n, n]$ intervallumon. Ekkor $\varphi_n(t) = \frac{1}{2n} \int_{-n}^{n} e^{it}\, dt = \frac{e^{itn} - e^{-itn}}{2in}$. Ekkor $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(t) = 0$, ha $t \neq 0$, és $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi_n(0) = 1$.

Példa a b) esetre: Legyen $\mu_{2n}(\{n\}) = \mu_{2n}(\{-n\}) = \frac{1}{2}$, és μ_{2n+1} az a) esetben definiált μ_n mérték. Ekkor $\varphi_{2n}(t) = \frac{1}{2}(e^{itn} + e^{-itn})$, és ez eggyel egyenlő a $\frac{2k\pi}{n}$ alakú pontokban. Ez azt jelenti, hogy a $t = \varphi\left(\frac{2k\pi}{l}\right)$ alakú pontokban bizonyos n_k részsorozatra $\varphi_{n_k}(t) = 0$, és bizonyos $\bar{n}_k$ részsorozatra $\varphi_{\bar{n}_k}(t) = 1$.

27.) Jelölje $F(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor $\varphi(t) = \int e^{itu} dF(u)$, és e formula szukcesszív deriválásával kapjuk, hogy $\frac{d^k \varphi(t)}{dt^k} = i^k \int u^k e^{itu}\, dF(u)$, speciálisan $\left.\frac{d^k \varphi(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = i^k \int u^k\, dF(u) = i^k E\xi^k$, feltéve hogy a deriválás és integrálás sorrendje felcserélhető a fenti számolásokban. Ekkor a fenti formulákból az is látható, hogy $\frac{d^k\varphi(t)}{dt^k}$ folytonos függvény. Ez a felcserélhetőség teljesül akkor, ha az F eloszlás valamely véges $[-K,K]$ intervallumba van koncentrálva, mert az a $\frac{\varphi(t+h)-\varphi(t)}{h}$ differenciahányadost kifejező integrálban szereplő integrandus teljesíti $\frac{e^{i(t+h)u}-e^{itu}}{h}=iue^{itu}+O(h)$ relációt, ahol rögzített t-re $O(h)$ egyenletes, ha $u\in[-K,K]$.

Ha $E|\xi|=\int|u|\,dF(u)<\infty$ akkor az első deriváltra vonatkozó állítás bizonyításának érdekében vezessük be a $G_n(t)=\int_{-n}^n e^{iut}\,dF(u)$, $H_n(t)=i\int_{-n}^n ue^{iut}\,dF(u)$, $n=1,2,\dots$, és a $G(t)=\int_{-\infty}^\infty e^{iut}\,dF(u)$ és $H(t)=i\int_{-\infty}^\infty ue^{iut}\,dF(u)$ függvényeket. Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty}G_n(t)=G(t)$, $\frac{dG_n(t)}{dt}=H_n(t)$, és $\lim\limits_{n\to\infty}H_n(t)=H(t)$. Ennek alapján megmutatjuk, hogy $G(t)$ differenciálható függvény, és $\frac{dG(t)}{dt}=H(t)$. Ugyanis $G(t)=\lim\limits_{n\to\infty}G_n(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\left[G_n(0)+\int_0^t H_n(s)\,ds\right]$, ezért a $\lim\limits_{n\to\infty}G_n(0)=G(0)$, $\lim\limits_{n\to\infty}H_n(s)=H(s)$ relációk, a minden n és s számra érvényes $|H_n(s)|\le E|\xi|$ egyenlőtlenség, és a Lebesgue 'dominated convergence' tétel alapján $G(t)=G(0)+\int_0^t H(s)\,ds$, ahonnan $\frac{dG(t)}{dt}=H(t)$. és ezt az állítást kellett bizonyítani. A Fourier transzformált k-ik deriváltjáról szóló formula $E|\xi|^k<\infty$ esetén hasonlóan bizonyítható k szerinti indukcióval a $\frac{dG^k(t)}{dt^k}=\frac{d}{dt}(\frac{dG^{k-1}(t)}{dt^{k-1}})$ azonosság felhasználásával. Csak ekkor a

$$G_n(t)=i^{k-1}\int_{-\infty}^\infty u^{k-1}e^{iut}\,dF(u),\quad H_n(t)=i^k\int_{-n}^n u^ke^{iut}\,dF(u),$$

$n=1,2,\dots$, és $G(t)=i^{k-1}\int_{-\infty}^\infty u^{k-1}e^{iut}\,dF(u)$, $H(t)=i^k\int_{-\infty}^\infty u^ke^{iut}\,dF(u)$ függvényekkel kell dolgoznunk. Ekkor is a $G(t)=G(0)+\int_0^t H(s)\,ds$ azonosságot igazoljuk.

Ha $Ee^{t\xi}<\infty$ valamilyen $t>0$ számmal, akkor $P(\xi>x)=P(e^{t\xi}>e^{tx})\le e^{-tx}Ee^{t\xi}\le\text{const.}\,e^{-tx}$ minden $x\ge0$ számra. Hasonlóan $P(\xi<-x)\le\text{const.}\,e^{-tx}$, ha $Ee^{-t\xi}<\infty$, tehát $P(|\xi|>x)\le\text{const.}\,e^{-tx}$, ha $Ee^{ux}<\infty$ $|u|\le t$ esetén. Megfordítva, ha $G(u)=P(|\xi|>x)\le\text{const.}\,e^{-\alpha x}$, akkor $0<t<\alpha$ esetén parciális integrálással kapjuk, hogy $Ee^{t|\xi|}=\int_0^\infty e^{tu}\,dG(u)=[e^{tu}G(u)]_0^\infty-\int_0^\infty te^{tu}G(u)\,du<\infty$, ezért $Ee^{\pm t\xi}\le1+Ee^{t|\xi|}<\infty$.

Végül, ha $P(|\xi|>x)\le\text{const.}\,e^{-\alpha}$, akkor a $G(z)=\int e^{izx}\,dF(x)$ függvény analitikus a $\{z\colon|\mathrm{Im}\,z|<\alpha\}$ sávban, mert tetszőleges e tartomány belsejében levő kompakt halmazban előállítható, mint analitikus függvények (integrál közelítő összegek) egyenletes limesze. Így ez a $G(z)$ függvény a $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény analitikus kiterjesztése a fenti sávba.

28.) Lássuk be először a Riemann lemmát. Ha $g(u)=I([a,b])$, egy $[a,b]$ intervallum indikátor függvénye, akkor $\int e^{itu}g(u)\,du=\frac{e^{ibt}-e^{iat}}{t}\to0$, ha $t\to\infty$ vagy $t\to-\infty$. Ez a reláció érvényes akkor is, ha $g(u)=\sum\limits_{j=1}^k c_jI([a_j,b_j])$, azaz $g(\cdot)$ intervallumok indikátorfüggvényeinek lineáris kombinációja. Az ilyen függvények mindenütt sűrű halmazt alkotnak az integrálható függvények terében az L_1 normában, azaz tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra és integrálható $f(\cdot)$ függvényre létezik olyan alábbi alakú $g(\cdot)$ függvény, amelyre $\int |f(u) - g(u)|\, du < \varepsilon$. Mivel innen következik, hogy $\left|\int e^{itu} f(u)\, du - \int e^{itu} g(u)\, du\right| < \varepsilon$ minden $t \in R^1$ számra. A Riemann lemma a fenti relációk következménye.

Ha $f(t)$ k-szor differenciálható függvény, és a differenciálhányadosok a számegyenesen integrálható függvények, akkor szukcessziv parciális integrálással kapjuk, hogy $\varphi(t) = i^k t^{-k} \int e^{itu} \left.\frac{df^k(s)}{ds^k}\right|_{s=u} du$. Innen, illetve a Riemann lemmából következik, hogy $\varphi(t) = o(t^{-k})$, ha $t \to \pm\infty$.

Ha az $f(\cdot)$ függvény analitikus egy a valós számegyenes körüli $\{z\colon \operatorname{Re} z \in [-A, A]\}$ sávban, és $f(-ia + \cdot)$ integrálható függvény, $a < A$, akkor mivel $\left|e^{i(u-ia)t}\right| < e^{-at}$, ezért

$$|\varphi(t)| = \left|\int_{-ia-\infty}^{-ia+\infty} e^{itu} f(u)\, du\right| \le e^{-at} \int_{-\infty}^{\infty} |f(u - ia)|\, du \le \text{const.}\, e^{-at},$$

ha $t > 0$. A $t < 0$ eset hasonlóan bizonyítható csak ebben az esetben az integrált a $[-\infty + ia, \infty + ia]$ egyenesre helyezzük át.

29.) A $|\varphi(t)| = 1$ reláció akkor és csak akkor érvényes, ha $\varphi(t) = e^{ita}$, azaz, ha $Ee^{it(\xi-a)} = 1$ valamilyen a valós számmal. Ez utóbbi azonosság akkor és csak akkor teljesül, ha $P(2\pi t(\xi - a) \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots,\}) = 1$. Tehát $|\varphi(t)| = 1$ valamely $t \ne 0$ esetén akkor és csak akkor, ha a ξ valószínűségi változó értékei egy valószínűséggel valamely $\left\{\frac{k}{2\pi t} + a,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\right\}$ rácsra vannak koncentrálva. Ha ξ rácsos eloszlású, és nem egyetlen pontba van koncentrálva, akkor van egy legnagyobb $h > 0$ szám, hogy ξ eloszlása egy h sűrűségű rácsra van koncentrálva. Ugyanis ekkor léteznek olyan a és b számok, hogy $P(\xi = a) > 0$, és $P(\xi = b) > 0$. Ekkor ξ egy csak egy $\frac{b-a}{k}$ periódusú rácsra lehet koncentrálva, ahol k pozitív egész szám. Mivel ξ eloszlásának létezik $h > 0$ periódusa, innen következik az állítás.

A feladat megoldásának befejezéséhez, csak azt kell észrevenni, hogy a $\varphi(\cdot)$ függvény folytonos, és egy nem rácsos eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye teljesíti a $|\varphi(t)| < 1$ egyenlőtlenséget, ha $t \ne 0$. Ezért $\sup\limits_{A \le |t| \le B} |\varphi(t)| < 1$.

30.) A feladatban definiált ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = \frac{1}{2}(\cos t + \cos(\sqrt{2}t))$. Léteznek olyan (p_n, q_n), $n = 1, 2, \dots$, egész számokból álló számpárok, amelyekre $q_n \to \infty$, és $|\sqrt{2}q_n - p_n| \le \frac{1}{q_n}$. (Ha a (p_n, q_n) számpárokat úgy választjuk meg, hogy a $\frac{p_n}{q_n}$ törtek a $\sqrt{2}$ szám lánctörtjei, akkor ezek a számok teljesítik a kívánt feltételt.) Legyen $t_n = 2\pi q_n$. Ekkor $\cos t_n = 1$, és teljesül a $\lim\limits_{n\to\infty} \cos(\sqrt{2}t_n) = 1$ azonosság. Ezért $t_n \to \infty$, és $\varphi(t_n) \to 1$, ha $n \to \infty$. Másrészt $\varphi(t) \ne 1$, ha $t \ne 0$.

Ha ξ valamely véges vagy megszámlálhatóan végtelen sok értéket felvevő valószínűségi változó, akkor minden $\varepsilon > 0$ számra létezik olyan $s = s(\varepsilon) < \infty$ egész szám, és $u_1, \dots, u_s$ értékek, amelyekre $P(\xi \in \{u_1, \dots, u_s\}) \ge 1 - \frac{\varepsilon}{3}$. Továbbá a számelmélet egyik klasszikus eredménye, a Dirichlet tétel szerint minden $N \ge 1$ számra létezik olyan $1 \le q_N \le N$ egész szám, és $p_1, \dots, p_s$ egész számok, amelyekre $|q_N u_k - p_k| \le$

$N^{-1/s}$, minden $k = 1, \dots, s$ számra. Ezért, ha elég nagyra választjuk az N számot, elérhetjük, hogy $t = 2\pi q_N$ választással $\operatorname{Re} e^{itu_k} \ge 1 - \frac{\varepsilon}{3}$ minden $1 \le k \le s$ indexre. Ekkor $\operatorname{Re} Ee^{it\xi} \ge \sum\limits_{k=1}^{s} P(\xi = u_k)(1 - \frac{\varepsilon}{3}) - \frac{\varepsilon}{3} \ge 1 - \varepsilon$. Mivel tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra tudunk ilyen számot találni, ezért létezik pozitív egész számoknak olyan q_N, $N = 1, 2, \dots$, sorozata, amelyekre a $t_N = 2\pi q_N$ sorozat teljesíti a $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi(t_N) = 1$ relációt. Mivel a ξ valószínűségi változó nem rácsos eloszlású, ezért minden $B > 2\pi$ számra $\sup\limits_{2\pi \le t \le B} |\varphi_n(t)| \le q < 1$ alkalmas $q = q(B) < 1$ számmal. Ezért az előbb konstruált t_N számsorozatra $t_N \to \infty$, ha $N \to \infty$.

31.) Legyen a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye $F(u)$, karakterisztikus függvénye $\varphi(t)$, és $\operatorname{Re} \varphi(t) = u(t)$. Ekkor minden $h \ge 0$-ra

$$\frac{1 - u(h)}{h^2} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos hu}{h^2 u^2} u^2 \, dF(u)$$

és mivel $\lim\limits_{h\to 0} \frac{1-\cos hu}{h^2u^2} = \frac{1}{2}$, $\frac{1-\cos hu}{h^2u^2} \ge 0$ minden $u \in R^1$ és $h \in R^1$ számra, ezért a Fatou lemma alapján $\liminf\limits_{h\to 0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-\cos hu}{h^2u^2} u^2 \, dF(u) \ge \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \, dF(u) = \frac{1}{2} E\xi^2$. Ezért a feladat megoldásához elég megmutatni, hogy $\limsup\limits_{h\to 0} \frac{1-u(h)}{h^2} < \infty$, ha $\varphi(t)$ az origóban kétszer deriválható. De ha $\varphi(t)$ az origóban differenciálható akkor ugyanez érvényes az $u(t)$ függvényre. Ekkor az $u'(t) = \frac{du(t)}{dt}$ derivált létezik az origó egy kis környezetében, és $u'(0) = 0$, mivel $u(\cdot)$ páros függvény. Továbbá $u(0) = 1$, $u(t) \le 1$ minden $t \in R^1$ számra, ezért $0 \le \frac{1-u(h)}{h^2} = \frac{u(0)-u(h)}{h^2} = -\frac{u'(\vartheta h)}{h} \le \sup\limits_{0 \le s \le h} \frac{u'(0)-u'(s)}{s} < \infty$ kis $h > 0$-ra, ha $u(\cdot)$ kétszer differenciálható az origóban, ahol $0 \le \vartheta \le 1$ alkalmas szám, és $u'(\cdot)$ jelöli az $u(\cdot)$ függvény deriváltját. Ezért $\limsup\limits_{h\to 0} \frac{1-u(h)}{h^2} < \infty$ ebben az esetben.

A k paraméter szerinti teljes indukcióval beláthatjuk, hogy amennyiben az F eloszlású ξ valószínűségi változó $2k$-ik deriváltja véges az origóban, akkor a ξ valószínűségi változónak létezik véges $2k$-ik momentuma. Ekkor az indukciós feltevés szerint létezik az $F^{(k-1)}(du) = \frac{(u^{(2k-2)}F(du)}{m_{2k-2}}$ valószínűségi eloszlás, ahol $m_{2k-2} = \int u^{2k-2} \, dF(u)$. Továbbá, az $F^{(k-1)}$ eloszlás karakterisztikus függvényének létezik második deriváltja az origóban, mert ezen eloszlás karakterisztikus függvénye megegyezik az F eloszlás karakterisztikus függvényének a $2k-2$-ik deriváltjával megszorozva $(-1)^{k-1} m_{2k-2}^{-1}$-gyel. Ezért a már bizonyítottak alapján egy $F^{(k-1)}$ eloszlású valószínűségi változónak létezik második momentuma, és ez ekvivalens azzal, hogy egy F eloszlású valószínűségi változónak létezik $2k$-ik momentuma.

32.) A bizonyítás hasonló a 22. feladat megoldásához. A 22. feladatban a karakterisztikus függvények nullában való bizonyos jellegű folytonosságából vezettünk le becslést az eloszlásfüggvények farokeloszlására. Ebben a feladatban azt használjuk ki, hogy amennyiben erősebb folytonossági feltételek érvényesek, akkor az eloszlásfüggvények végtelenben való viselkedéséről élesebb becsléseket bizonyíthatunk.

Jelölje $F(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét, $u(t) = \operatorname{Re}\varphi(t)$ a karakterisztikus függvény valós részét. Az $\left|\frac{1-u(h)}{h}\right| = |u'(\vartheta h)| \le \text{const.}\, h^\alpha$ becslés teljesül egy alkalmas $0 < \vartheta < 1$ számmal, ha a feladat feltételei teljesülnek. Ekkor érvényes a (2.6) formula következő analogonja.

$$\begin{aligned}\text{const.}\, h^{1+\alpha} &> \int_{-h}^{h} \frac{1-u(t)}{h}\, dt = \int_{-1/2h}^{1/2h} \left(1 - \frac{\sin hx}{hx}\right) dF(x) \\ &\quad + \int_{|x|>\frac{1}{2h}} \left(1 - \frac{\sin hx}{hx}\right) dF(x) \ge \int_{|x|>\frac{1}{2h}} \frac{1}{2}\, dF(x) \\ &= \frac{1}{2} P\left(|\xi| > \frac{1}{2h}\right).\end{aligned}$$

Innen $P(|\xi| > u|) \le \text{const.}\, u^{-1-\alpha}$ minden $u > 0$ számra. Vezessük be a $G(u) = P(|\xi| > u)$ függvényt. Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$E|\xi| = \int_0^\infty |u|\, dG(u) = [uG(u)]_0^\infty - \int G(u)\, du < \infty.$$

Ha a $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény $2k+1$-szer differenciálható az origó egy kis környezetében, és a $2k+1$-ik differenciálhányados Lipschitz α, $\alpha > 0$, ebben a kis környezetben, akkor vezessük be az $F^{(k)}(du) = \frac{u^{2k} F(du)}{m_k}$ eloszlást, ahol $F(\cdot)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, és $m_k = \int u^{2k}\, dF(u)$. Az elöző feladat érvelését adaptálhatjuk erre az esetre is. Egy $F^{(k)}$ eloszlású valószínűségi változóra alkalmazható a feladat már bizonyított állítása, és innen következik, hogy $E|\xi|^{2k+1} < \infty$.

33.) A Cauchy-féle integrálformula és a 31. feladat eredménye alapján $(-1)^k E\xi^{2k} = \left.\frac{d^k\varphi(t)}{dt^k}\right|_{t=0} = \frac{(2k)!}{2\pi i} \oint_{z=R} \frac{\varphi(z)}{z^{2k+1}}\, dz$, ha az origó küzéppontú és R sugarú kör a $\varphi(z)$ függvény analicitási tartományában van. Ezért $E\xi^{2k} \le (ak)^{2k}$ alkalmas $a > 0$ számmal, és $P(|\xi| > x) \le \left(\frac{ak}{x}\right)^{2k}$ tetszőleges $k \ge 1$ egész számmal. Ha $x \ge C_0$ valamilyen C_0 számmal, akkor válasszunk $k = \left[\frac{x}{2a}\right]$ számot, ahol $[u]$ a legnagyobb u-nál kisebb egész szám. Innen következik a $P(|\xi| > x) < \text{const.}\, e^{-\alpha x}$ egyenlőtlenség minden $x > 0$ számra.

Megjegyzem, hogy azért volt szükség ilyen viszonylag bonyolult bizonyításra, mert a bizonyítás elején még nem tudtuk, hogy a karakterisztikus függvény analitikus kiterjesztése a $\varphi(z) = Ee^{iz}$ függvény.

34.) Ha a ξ eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye integrálható, akkor alkalmazható az inverz Fourier-transzformációról szóló tétel. Innen kapjuk, hogy létezik a ξ valószínűségi változó $f(x)$ sűrűségfüggvénye, és $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int e^{-itx}\varphi(t)\, dt$. Ezt a formulát k-szor deriválva kapjuk, hogy $\frac{d^k f(x)}{dx^k} = \frac{(-i)^k}{2\pi} \int t^k e^{-itx} \varphi(t)\, dt$, feltéve, hogy az inverz Fourier transzformációs formulában az integrálás és deriválás sorrendje felcserélhető. Tulajdonképpen a 27. feladat megoldásában bebizonyítottuk, hogy ez az integrálás és deriválás felcserélhető, ha $|t|^j|\varphi(t)|$ függvények minden $0 \le j \le k$ számokra integrálhatóak. Innen következik a feladat állítása abban az esetben, ha $|\varphi(u)| < \text{const.}\,|u|^{-(k+1+\varepsilon)}$ valamilyen $\varepsilon > 0$ számmal. Ha $|\varphi(u)| < \text{const.}\,e^{-\alpha|u|}$ valamilyen $\alpha > 0$ számmal, akkor az $f(z) = \frac{1}{2\pi}\int e^{-itz}\varphi(t)\,dt$ függvény az $f(x)$ sűrűségfüggvény analitikus kiterjesztése.

35.) Jelölje $\varphi(t) = E^{it\xi}$ a ξ_1 valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Mivel az $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right)$, ezért az eloszlások konvergenciájáról szóló alaptétel és a 13a.) feladat eredménye alapján elég azt megmutatni, hogy $\varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) \to e^{-t^2/2}$ minden $t \in R^1$ számra, ha $n \to \infty$. Viszont a $\varphi(t)$ függvénynek a $t = 0$ körüli Taylor-sorfejtésből és a 27. feladat eredményéből kapjuk, hogy $\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2} + o(t^2)$, ha $t = o(1)$, és $\varphi\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = 1 - \frac{t^2}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right) = e^{-t^2/2n+o(n^{-1})}$, ha $t = O(1)$, ahonnan $\varphi^n\left(\frac{t}{\sqrt{n}}\right) = e^{-t^2/2+o(1)} \to e^{-t^2/2}$ minden rögzített t számra, ha $n \to \infty$.

36.) Vezessük be az $F(t) = e^{it} - \left(1 + \frac{it}{1!} + \cdots + \frac{(it)^k}{k!}\right)$ függvényt, és tekintsük ennek $F^{(j)}(t)$ deriváltjait. $F^{(j)}(0) = 0$, ha $0 \le j \le k$, és $|F^{(k+1)}(t)| = |e^{ikt}| = 1$ minden $t \in R^1$ számra. Teljes indukcióval kapjuk, hogy $|F^{(j)}(t)| \le \int_0^t |F^{(j+1)}(s)|\,ds \le \int_0^t \frac{|s|^{k-j}\,ds}{(k-j)!} = \frac{|t|^{k+1-j}}{(k+1-j)!}$ minden $j = k+1, k, \dots, 0$ számra. Tehát $|F(t)| \le \frac{|t|^{k+1}}{(k+1)!}$, és ez a feladat állítása.

37.a) Alkalmazva a (11) formulát $k = 1$-re kapjuk, hogy $|e^{it\xi} - 1 - it\xi| \le \frac{t^2\xi^2}{2}$. Ezért véve a baloldalon az abszolútérték jelek közötti kifejezés várható értékét kapjuk, hogy $|\varphi(t) - 1| \le \frac{t^2}{2}E\xi^2$. Ha $E\xi^2 < \varepsilon$ elég kis $\varepsilon = \varepsilon(t) > 0$ számmal, akkor $|1 - \varphi(t)| \le \frac{1}{4}$, és $|\log\varphi(t) + (1 - \varphi(t))| = |\log(1 - (1 - \varphi(t))) - (1 - \varphi(t))| \le |1 - \varphi(t)|^2 \le t^4\left(E\xi^2\right)^2$.

b.) Az S_k valószínűségi változók akkor és csak akkor konvergálnak az m várható értékű és σ^2 szórásnégyzetű normális eloszláshoz, ha

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{n_k} \varphi_{k,j}(t) = e^{-\sigma^2 t^2/2 + imt}.$$

Mivel a jobboldal nem zéró, jogunk van e formulában logaritmust venni, azaz ez a reláció ekvivalens a

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \log\varphi_{k,j}(t) = -\frac{\sigma^2 t^2}{2} + imt$$

formulával. (Ez az azonosság úgy értendő, hogy a $\log\varphi_{k,j}(t)$ függvényt úgy definiáljuk, hogy $\log\varphi_{k,j}(0) = 0$, és ez a függvény folytonos. Ekkor a logaritmus függvény megfelelő ágát választottuk, és folytonossági meggondolás alapján látjuk, hogy a fenti azonosság igaz. Másrészt az egyenletes kicsiség feltétele és e feladat a) része miattt $k \geq k_0(t)$ esetén

$$\left|\sum_{j=1}^{n_k} \log \varphi_{k,j}(t) - \sum_{j=1}^{n_k} (\varphi_{k,j}(t)-1)\right| \leq t^4 \sum_{j=1}^{n_k} \left(E\xi_{k,j}^2\right)^2 \leq \text{const.}\, t^4 \max_{1\leq j\leq n_k} E\xi_{k,j}^2,$$

mert $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{j,k}^2 = 1$. Innen, és az egyenletes kicsiség feltétele miatt

$$\lim_{k\to\infty} \left|\sum_{j=1}^{n_k} \log \varphi_{k,j}(t) - \sum_{j=1}^{n_k} (\varphi_{k,j}(t)-1)\right| = 0.$$

E relációkból következik a 37. feladat b) része is.

38.) Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Ekkor

$$E\xi_{k,j}^2 = E\xi_{k,j}^2 I(\{(|\xi_{k,j}| < \varepsilon\}) + E\xi_{k,j}^2 I(\{|\xi_{k,j}| \geq \varepsilon\}) \leq \varepsilon^2 + \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(\{|\xi_{k,j}| \geq \varepsilon\}),$$

ezért a Lindeberg feltétel alapján $\limsup\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{1\leq j\leq n_k} E\xi_{k,j}^2 \leq \varepsilon^2$. Mivel ez az állítás minden $\varepsilon > 0$ számra érvényes, innen következik az egyenletes kicsiség feltétele. A (12) formula alapján ($m = 0$ és $\sigma = 1$ választással) a centrális határeloszlástétel bizonyításához azt kell megmutatni, hogy az adott feltételek teljesülése esetén

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} (\varphi_{k,j}(t)-1) = \lim_{k\to\infty} \sum_{k=1}^{n_k} E\left(e^{it\xi_{k,j}} - 1 - it\xi_{k,j}\right) \to -\frac{t^2}{2},$$

vagy mivel $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$, azt hogy

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} E\left(e^{it\xi_{k,j}} - 1 - it\xi_{k,j} + \frac{t^2}{2}\xi_{k,j}^2\right) \to 0.$$

Alkalmazva a (11) formulát $k = 2$-re, ha $|tx| \leq \varepsilon$ és $k = 1$-re, ha $|tx| \geq \varepsilon$ valamint a Lindeberg feltételt, kapjuk hogy

$$\left|\sum_{j=1}^{n_k} E\left(e^{it\xi_{k,j}} - 1 - it\xi_{k,j} + \frac{t^2}{2}\xi_{k,j}^2\right) I(\{|\xi_{k,j}| \leq \varepsilon\})\right| \leq \sum_{j=1}^{n_k} E\frac{|t\xi_{k,j}|^3}{6} I(\{|\xi_{k,j}| \leq \varepsilon\})$$

$$\leq \varepsilon|t|^3 \sum_{j=1}^{n_k} E\frac{\xi_{k,j}^2}{6} \leq \text{const.}\,\varepsilon,$$

és

$$\lim_{k\to\infty}\left|\sum_{j=1}^{n_k} E\left(e^{it\xi_{k,j}}-1-it\xi_{k,j}+\frac{t^2}{2}\xi_{k,j}^2\right))I(\{|\xi_{k,j}|>\varepsilon\})\right|$$
$$\le \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k} Et^2\xi_{k,j}^2 I(\{|\xi_{k,j}|>\varepsilon\})=0.$$

Mivel ezek a relációk minden $\varepsilon=0$-ra érvényesek, innen következik a (12) formula $m=0$ és $\sigma^2=1$ választással. Így a 38. feladatot megoldottuk.

39.) A feladat feltételeinek teljesülése esetén $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\operatorname{Re}(\varphi_{k,j}(t)-1)=-\frac{t^2}{2}$. Továbbá, mivel nagy k indexre a szériasorozat sorainak az összege közel egy szórásnégyzetű, ezért

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k} E\left(\cos(t\xi_{k,j})-1+\frac{t^2\xi_{k,j}^2}{2}\right)=0 \quad \text{minden } t\in R^1 \text{ számra.}$$

Vegyük észre, hogy $\cos u-1+\frac{u^2}{2}\ge 0$ minden $u\in R^1$ számra, mert az $F(0)=\cos u-1+\frac{u^2}{2}$ függvényre $F(0)=0$, $F'(0)=0$, és $F''(u)=1-\cos u\ge 0$ minden $u\in R^1$ számra. Továbá $\cos u-1+\frac{u^2}{2}\ge\frac{u^2}{4}$, ha $|u|>3$. Ezért a fenti egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\frac{t^2}{4}E\xi_{k,j}^2 I\left(\left\{|\xi_{k,j}|\ge\frac{3}{t}\right\}\right)=0.$$

$t=\frac{3}{\varepsilon}$ választással megkapjuk a feladat állítását.

40.) Vegyük észre, hogy $|E\xi_{k,j}I(|\xi_{k,j}|<\varepsilon)|=|E\xi_{k,j}I(|\xi_{k,j}|>\varepsilon)|\le\frac{1}{\varepsilon}E\xi_{k,j}^2I(|\xi_{k,j}|>\varepsilon)$. Mivel $|E\xi_{k,j}I(|\xi_{k,j}|<\varepsilon)|\le\varepsilon$, ezért a Lindeberg feltételből következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\left(E\xi_{k,j}I(|\xi_{k,j}|<\varepsilon)\right)^2=0$ és $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}E\xi_{k,j}^2I(|\xi_{k,j}|<\varepsilon)=1$. E két relációból következik a feladat első állítása. Másrészt a fenti egyenlőtlenségekből és a Lindeberg feltételből következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{n_k}\bar\xi_{k,j}-\xi_{k,j}I(|\xi_{k,j}|<\varepsilon)=-\sum_{j=1}^{n_k}E(\xi_{k,j}I(|\xi_{k,j}|<\varepsilon))$$
$$=\sum_{j=1}^{n_k}E(\xi_{k,j}I(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon))\to 0,\quad \text{ha } k\to\infty.$$

Továbbá a Lindeberg feltételből és a Csebisev egyenlőtlenségből az is következik, hogy a $\sum\limits_{j=1}^{n_k}(\xi_{k,j}-\xi_{k,j}I(|\xi_{k,j}|<\varepsilon))=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}I(|\xi_{k,j}|>\varepsilon)$ kifejezés sztochasztikusan konvergál nullához, ha $k \to \infty$, mivel

$$\operatorname{Var}\left(\sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j} I(|\xi_{k,j}| > \varepsilon)\right) \le \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(|\xi_{k,j}| > \varepsilon) \to 0 \quad \text{ha } k \to 0.$$

Az utolsó két relációból következik a feladat második állítása is.

41.) A Hölder egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} E\xi_k^2 I(|\xi_k| > \varepsilon s_n) &\le \sum_{k=1}^{n} \left(E|\xi_k|^{(2+\alpha)}\right)^{(2/\alpha+2)} P(|\xi_k| > \varepsilon s_n)^{\alpha/(2+\alpha)} \\ &\le \left(\sum_{k=1}^{n} E|\xi_k|^{(2+\alpha)}\right)^{(2/\alpha+2)} \left(\sum_{k=1}^{n} P(|\xi_k| > \varepsilon s_n)\right)^{\alpha/(2+\alpha)} .\end{aligned}$$

Másrészt, a Csebisev egyenlőtlenség alapján $\sum\limits_{k=1}^{n} P(|\xi_k| > \varepsilon s_n) \le \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{E\xi_k^2}{\varepsilon^2 s_n^2} = \frac{1}{\varepsilon^2}$. Ezért ha teljesülnek a 41. feladat a) részének a feltételei, akkor

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{s_n^2} \sum_{k=1}^{n} E\xi_k^2 I(|\xi_k| > \varepsilon s_n) = 0,$$

azaz teljesül a Lindeberg feltétel.

Az a.) rész végén tekintett esetben $s_n^2 \ge \text{const.}\, n$, és $\sum\limits_{k=1}^{n} E|\xi_k|^{2+\alpha} = o\left(n^{(\alpha+2)/2)}\right)$, ha $n \to \infty$, ezért ekkor teljesül a 41a.) feladatban megfogalmazott feltétel.

Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, $E\xi_1 = 0$, $0 < E\xi_1^2 < \infty$, akkor $\frac{1}{s_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} E\xi_k^2 I(|\xi_k| > \varepsilon s_n) = \frac{1}{E\xi_1^2} E\xi_1^2 I\left(|\xi_1| > \varepsilon\sqrt{nE\xi_1^2}\right) \to 0$, ha $n \to \infty$. Tehát ebben az esetben is teljesül a Lindeberg feltétel.

42.) Ha az x pont az $F(\cdot)$ határeloszlásfüggvény folytonossági pontja, akkor minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta > 0$ amelyre $F(x) - \frac{\varepsilon}{2} < F(x-\delta) < F(x) < F(x+\delta) < F(x+\delta) + \frac{\varepsilon}{2}$. Mivel az $F(\cdot)$ monoton függvénynek csak megszámlálhatóan sok szakadási pontja van, az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy az $x \pm \delta$ pont is folytonossági pontja az $F(\cdot)$ függvénynek. Létezik olyan $n_0 = n_0(\delta, \varepsilon)$, amelyre $P(S_n < x + \delta) < F(x+\delta) + \frac{\varepsilon}{4}$, $P(S_n > x - \delta) < 1 - F(x - \delta) + \frac{\varepsilon}{4}$, és $P(|T_n| \ge \delta) < \frac{\varepsilon}{4}$, ha $n \ge n_0$. Ekkor $P(S_n + T_n < x) \le P(S_n < x + \delta) + P(|T_n| > \delta) < F(x+\delta) + \frac{\varepsilon}{2} < F(x) + \varepsilon$, ha $n \ge n_0(\varepsilon, \delta)$. Hasonlóan kapjuk, hogy $P(S_n + T_n > x) < 1 - F(x) + \varepsilon$, ha $n \ge n_0(\varepsilon, \delta)$. Mivel a fenti állítások tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra igazak, innen következik a feladat állítása.

43.) Legyenek ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független valószínűségi változók a következő eloszlással: $P(\xi_n = n) = P(\xi_n = -n) = \frac{1}{4n^2}$, $P(\xi_n = 2) = P(\xi_n = -2) = \frac{1}{4}$, és $P(\xi_n = 0) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor $E\xi_n = 0$, $E\xi_n^2 = 1$. Legyen $X_n = \xi_n I(|\xi_n| \le 2)$,

$Y_n = \xi_n I(|\xi_n| > 2)$. Ekkor $S_n = \sum\limits_{k=n}^{n} X_k$ és $T_n = \sum\limits_{k=1}^{n} Y_k$ részletösszegek közül $\sqrt{\frac{2}{n}} S_n$ eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz, mert az X_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók részletösszegei teljesítik a centrális határeloszlástétel feltételeit, és $EX_n = 0$, $EX_n^2 = \frac{1}{2}$. A $\sqrt{\frac{2}{n}} T_n$ kifejezések pedig sztochasztikusan konvergálnak nullához, ha $n \to \infty$. Ugyanis $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(Y_k \neq 0) < \infty$, ezért egy valószínűséggel csak véges sok $Y_k(\omega)$ nem egyenlő nullával, és $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |Y_k(\omega)| \le K(\omega)$. Mivel $\sqrt{\frac{2}{n}} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k = \sqrt{\frac{2}{n}} S_n + \sqrt{\frac{2}{n}} T_n$, a fenti számolásokból és a 42. feladat eredményéből következik, hogy a fenti konstrukció példa a 43 a.) feladat állítására.

Alkalmazzunk a fenti ξ_n valószínűségi változók konstrukciójában némi változtatást. Legyen az előbbiekhez hasonlóan $P(\xi_n = 2) = P(\xi_n = -2) = \frac{1}{4}$, és $P(\xi_n = n) = \frac{1}{4n^2}$. Legyen továbbá

$$P\left(\xi_n = \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n^2}, \quad \text{és} \quad P\left(\xi_n = -n - 2n^{3/2}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\right) = \frac{1}{4n^2},$$

$n = 1, 2, \dots$, akkor $E\xi_n = 0$, $n = 1, 2, \dots$. Az a) részben alkalmazott csonkítás és az ottani számolás természetes módosításával kapjuk, hogy ezek a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók példát szolgáltatnak a 43. feladat b) részének az állítására.

44.) A $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_m)$ véletlen vektor eloszlását meghatározza annak karakterisztikus függvénye. (Lásd például a 19. feladat eredményét.) Viszont e véletlen vektor $E^{i(t_1 Z_1 + \cdots + t_m Z_m)}$ karakterisztikus függvénye megegyezik a feladatban definiált $Z(t_1, \dots, t_m)$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényével az 1 pontban. Tehát a $\mathbf{Z}$ véletlen vektor karakterisztikus függvényét meghatározzák a feladatban tekintett egydimenziós valószínűségi változók eloszlásai. Innen következik a feladat állítása.

45.) Az Eloszlások konvergenciájáról szóló Alaptétel alapján láthatjuk, hogy a $\mathbf{Z}_n = (Z_{1,n}, \dots, Z_{m,n})$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi vektorok eloszlásban konvergálnak valamilyen m-dimenziós eloszláshoz $n \to \infty$ esetén, ha a $Z_n = Z_n(a_1, \dots, a_m)$, $n = 1, 2, \dots$, egydimenziós valószínűségi változók tetszőleges valós $a_1, \dots, a_m$ számokra eloszlásban konvergálnak $n \to \infty$ esetén. Valóban a $\mathbf{Z}_n$, $n = 1, 2, \dots$, vektorok karakterisztikus függvényei ebben az esetben minden $(t_1, \dots, t_m) \in R^m$ pontban konvergálnak egy $\varphi(t_1, \dots, t_m)$ függvényhez, és ennek a $\varphi(\cdot)$ függvénynek a megszorítása a koordinátatengelyekre folytonos. Az említett alaptételből közvetlenül adódik az is, hogy a $\mathbf{Z}_n$ valószínűségi vektorok eloszlásban való konvergenciájából következik a $Z_n(a_1, \dots, a_m)$ valószinűségi változók eloszlásban való konvergenciája is. Valóban ekkor ezen valószínűségi változók karakterisztikus függvényei konvergálnak egy folytonos függvényhez.

Ha a $\mathbf{Z}_n$ véletlen vektorok eloszlásban konvergálnak, akkor a határmértéket egyértelműen jellemzi annak karakterisztikus függvénye, amely a $\mathbf{Z}_n$ karakterisztikus függvények limesze. Hasonlóan, a $\mathbf{Z}_n(a_1,\dots,a_m)$ eloszlások limeszének a karakterisztikus függvénye ezen eloszlások karakterisztikus függvényének a limesze. Ebből a tényből következik a μ határeloszlásfüggvénynek a feladatban megadott jellemzése, illetve az a tény, hogy a leírt jellemzés egyértelműen jellemzi a határeloszlás karakterisztikus függvényét, ezért magát a határeloszlást is.

46.) Legyen a $\Sigma = (D_{j,k})$, $1 \le j,k \le m$, egy m-dimenziós $(Z_1,\dots,Z_m)$ véletlen vektor kovariancia mátrixa, azaz legyen $D_{j,k} = E(Z_j - EZ_j)(Z_k - EZ_k)$, $1 \le j,k \le m$. Ekkor a Σ mátrix nyílván szimmetrikus. Másrészt tetszőleges $\mathbf{x} = (x_1,\dots,x_m) \in R^m$ vektorra $\mathbf{x}\Sigma\mathbf{x}^* = \sum\limits_{j=1}^m\sum\limits_{k=1}^m x_jE(Z_j - EZ_j)(Z_k - EZ_k)x_k = E\left(\sum\limits_{j=1}^k x_j(Z_j - EZ_j)\right)^2 \ge 0$, tehát a Σ mátrix pozitív (szemi)definit.

Másrészt, ha Σ egy tetszőleges pozitív (szemi)definit $m \times m$-szeres mátrix, akkor a lineáris algebra eredményeiből következik, hogy létezik olyan (nem egyértelműen meghatározott) B $m\times m$-es mátrix, amelyre $\Sigma = BB^*$. (Egy lehetséges konstrukció: Minden szimmetrikus Σ mátrix előállítható $\Sigma = U\Lambda U^*$ alakban, ahol U unitér, Λ pedig diagonális mátrix $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ elemekkel a diagonálisban. A Σ mátrix akkor és csak akkor pozitív szemidefinit, ha az átlóban szereplő λ_j, $1 \le j \le m$, elemek nem negatívak. Ha $\Sigma = U\Lambda U^*$ pozitív (szemi)definit mátrix, akkor definiáljuk a $B = U\sqrt{\Lambda}U^*$ szimmetrikus mátrixot, ahol $\sqrt{\Lambda}$ az a diagonális mátrix, amelynek diagonális elemei a $\sqrt{\lambda_j}$, $j = 1,\dots,m$, számok. Ekkor $\Sigma = B^2 = BB^*$.)

Legyen $\Sigma = (D_{j,k})$, $1 \le j,k \le m$, tetszőleges pozitív (szemi)definit $m\times m$-es mátrix, és $\mathbf{M} = (M_1,\dots,M_m) \in R^m$ vektor az R^m térben. Legyen $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$ egy m-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó, $B = (b_{j,k})$, $1 \le j,k \le m$, olyan $m \times m$-es mátrix, amelyre $BB^* = \Sigma$. Definiáljuk az $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_m) = \xi B + \mathbf{M}$ m-dimenziós normális eloszlású véletlen vektort. Azt állítjuk, hogy η várható értéke $\mathbf{M}$ kovariancia mátrixa pedig $BB^* = \Sigma$. Ebből az állításból az is következik, hogy tetszőleges pozitív (szemi)definit Σ $m \times m$-es mátixra és $\mathbf{M} \in R^m$ vektorra létezik olyan normális eloszlású vektor, amelynek várható értéke $\mathbf{M}$ kovarianciamátrixa pedig Σ.

Valóban, $E\eta = (E\eta_1,\dots,E\eta_m) = (M_1,\dots,M_m) = \mathbf{M}$, és a kovarianciamátrix elemeit a következőképpen számíthatjuk ki.

$$E(\eta_j - E\eta_j)(\eta_k - E\eta_k) = E\left(\sum_{l=1}^m b_{j,l}\xi_l\right)\left(\sum_{p=1}^m b_{k,p}\xi_k\right) = \sum_{l=1}^p b_{j,l}b_{k,l} = D_{j,k}$$

minden $1 \le j,k \le m$ számra, mert $E\xi_l\xi_p = 0$, ha $l \ne p$, $E\xi_l^2 = 1$, és az utolsó egyenlőség a $B^*B = \Sigma$ azonosságot fejezi ki a megfelelő mátrixok elemeinek a segítségével.

Tekintsünk egy $\eta = (\eta_1,\dots,\eta_m) = \xi B + \mathbf{M}$ m-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektort, ahol $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_m)$ standard normális eloszlású vektor, B, $m\times m$-es mátrix, $\mathbf{M} = (M_1,\dots,M_m) \in R^m$. Legyen $BB^* = \Sigma = (D_{j,k})$, $1 \le j,k \le m$. Számítsuk ki az η vektor $\varphi(t_1,\dots,t_m) = Ee^{i(t_1\eta_1+\dots+t_m\eta_m)}$ karakterisztikus függvényét. Vezessük be a $\zeta = t_1\eta_1 + \cdots + t_m\eta_m$ valószínűségi változót. Ekkor ζ normális eloszlású valószínűségi változó, mert felírható, mint a független, normális eloszlású $\xi_1, \dots, \xi_n$ valószínűségi változók lineáris kombinációja plusz egy konstans. Továbbá ζ várható értéke $\bar{M} = \bar{M}(t_1, \dots, t_m) = \sum\limits_{k=1}^{m} t_k M_k = (\mathbf{M}, \mathbf{t})$, szórásnégyzete pedig $\sigma^2 = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{m} t_j t_k E\eta_j\eta_k = \sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{m} t_j t_k D_{j,k} = \mathbf{t}\Sigma\mathbf{t}^*$, ahol $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$. Ezért ζ karakterisztikus függvénye $\psi(u) = Ee^{iu\zeta} = e^{-u^2\mathbf{t}\Sigma\mathbf{t}^*/2 + i(\mathbf{M},\mathbf{t})u}$. Innen, $\varphi(t_1, \dots, t_m) = Ee^{i(t_1\eta_1 + \cdots + t_m\eta_m)} = \psi(1) = e^{-\mathbf{t}\Sigma\mathbf{t}^*/2 + i(\mathbf{M},\mathbf{t})}$, azaz érvényes a (13) formula.

A (13) formulából következik, hogy ha η m-dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektor, akkor η karakterisztikus függvényét és ezért eloszlását meghatározza annak várható érték vektora és kovariancia mátrixa. Jegyezzük meg, hogy meg lehet adni két különböző B_1 és B_2 $m \times m$-es mátrixot, amelyekre $B_1B_1^* = B_2B_2^*$. Legyen $\mathbf{x}$ m-dimenziós standard normális eloszlású valószínűségi változó, B_1 és B_2 két ilyen $m \times m$-es mátrix, és $\mathbf{M} \in R^m$ tetszőleges vektor. Definiáljuk a $\eta_1 = \xi B_1 + \mathbf{M}$ és $\eta_2 = \xi B_2 + \mathbf{M}$ normális véletlen vektorokat. Akkor e két vektor kovarianciafüggvénye és várható érték vektora, ezért eloszlása is megegyezik, noha ez $B_1 \neq B_2$ miatt nem magától értetendő állítás.

47.) Hasonlóan a (13) formula bizonyításához a 46. feladatban kapjuk, hogy az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_l)$ vektor karakterisztikus függvénye $Ee^{i(\mathbf{t},\eta)} = e^{-\mathbf{t}\Sigma\mathbf{t}^*/2 + i(\mathbf{M},\mathbf{t})}$ függvény, ahol $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_l)$, és $\Sigma = B^*B$. Innen következik, hogy η normális eloszlású véletlen vektor Σ kovariancia mátrixszal és $\mathbf{M}$ várható érték vektorral.

Adva egy η m-dimenziós normális eloszlású véletlen vektor, írjuk ezt $\eta = \xi B + \mathbf{M}$ alakban, ahol ξ m-dimenziós standard normális eloszlású vektor. (Ez mindig lehetséges. Valójában elég lenne számunkra egy η-val azonos eloszlású vektor előállítása ilyen módon, aminek a lehetősége következik a normális eloszlású véletlen vektor definiciójából.) Ha az η vektor koordinátái közül bizonyosakat elhagyunk, és csak l koordinátát őrizünk meg, akkor az így kapott η' vektort előállíthatjuk a következő módon. Hagyjuk el a B vektor sorai közül az olyan indexűeket, mint amelyeket elhagytunk η-ból, és hasonlóan hagyjuk el az $\mathbf{M}$ vektor koordináiból az olyan indexűeket, mint amilyeneket az η vektorból elhagytunk. Jelöljük az így kapott mátrixot és vektort $\mathbf{M}'$-mel és B'-vel. Ekkor $\eta' = \xi B' + \mathbf{M}'$, ezért η' a feladat már bizonyıtott része alapján normális eloszlású.

48.) A feladatnak két különböző megoldását ismertetem, mert az tanulságos lehet.

Első megoldás: Az η vektor $Ee^{i(\mathbf{t},\eta)} = e^{-\mathbf{t}\Sigma\mathbf{t}^*/2 + i(\mathbf{M},\mathbf{t})}$ karakterisztikus függvényét, ahol $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_m)$, és $\mathbf{M} = (M_1, \dots, M_m)$ az η vektor várható értéke a következő módon írhatjuk fel felhasználva a Σ mátrix tulajdonságait. Jelölje $\mathbf{t}_j$ a $\mathbf{t}$ vektor, és $\mathbf{M}_j$ az $\mathbf{M}$ vektor megszorítását a $p \in L_j$ koordinátákra, $1 \le j \le k$, és legyen hasonlóan Σ_j a Σ mátrix megszorítása a $\sigma_{p,q}$, $p \in L_j$ és $q \in L_j$ értékekre, $1 \le j \le k$. Ezzel a jelöléssel $Ee^{i(\mathbf{t},\eta)} = \prod\limits_{j=1}^{k} e^{-\mathbf{t}_j\Sigma_j\mathbf{t}_j^*/2 + i(\mathbf{M}_j,\mathbf{t}_j)}$. Legyenek $\eta_1', \dots, \eta_k'$ független, normális eloszlású vektorok Σ_j kovariancia mátrixszal és $\mathbf{M}_j$ várható érték vektorral, $1 \le j \le k$. Ekkor η'_j karakterisztikus függvénye $Ee^{i(\mathbf{t}_j, \eta'_j)} = e^{-\mathbf{t}_j \Sigma_j \mathbf{t}^*_j/2 + i(\mathbf{M}_j, t_j)}$ minden $1 \le j \le k$ indexre. Ezért az $\eta' = (\eta'_1, \dots, \eta'_k)$ és η vektor karakterisztikus függvénye megegyezik. Ebből következik, hogy η és η' eloszlása is megegyezik, ezért az $\bar\eta_j$ vektorok, $1 \le j \le k$, az η'_j vektorokhoz hasonlóan függetlenek egymástól.

Második megoldás: Használjuk az első megoldásban bevezetett jelöléseket. Az ott definiált η' vektor normális eloszlású Σ kovariancia mátrixszal és $\mathbf{M}$ várható értékkel. Mivel egy normális eloszlású véletlen vektor eloszlását meghatározza annak kovariancia mátrixa és várható érték vektora, ezért η és η' eloszlása megegyezik. Innen az is következik, hogy az $\eta'_1, \dots, \eta'_k$ véletlen vektorokhoz hasonlóan az $\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_k$ véletlen vektorok is függetlenek.

49.) A 45. feladat eredménye alapján elég belátni, hogy tetszőleges $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_m) \in R^m$ vektorra az $\frac{1}{A_n} S_n = \frac{1}{A_n} S_n(a_1, \dots, a_m) = \frac{1}{A_n} \sum\limits_{p=1}^m a_p S_{p,n}$, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók a nulla várható értékű, $\sigma^2 = \mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^*$ szórásnégyzetű normális eloszláshoz konvergálnak, ha $n \to \infty$. Vegyük észre, hogy $\frac{1}{A_n} S_n = \frac{1}{A_n} \sum\limits_{k=1}^n \eta_k$, $n = 1, 2, \dots$, ahol $\eta_k = \sum\limits_{p=1}^m a_p \xi_{p,k}$, $k = 1, 2, \dots$. Jegyezzük meg, hogy η_k, $k = 1, 2, \dots$ független valószínűségi változók, $E\eta_k = 0$ és $E\eta_k^2 = \mathbf{a}\Sigma_k\mathbf{a}^*$.

Tekintsük külön azt az esetet, ha $\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^* = 0$, és ha $\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^* > 0$. Ha $\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^* = 0$, akkor az $\frac{1}{A_n} S_n$ valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak nullához, ha $n \to \infty$. azaz eloszlásban konvergálnak az (elfajult) nulla várható értékű és $\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^* = 0$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változóhoz, és az adott esetben ezt kellett belátni.

Ha $\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^* > 0$, akkor azt kell belátni, hogy az $\frac{1}{A_n} S_n$, $n = 1, 2, \dots$, sorozat eloszlásban konvergál egy nulla várható értékű és $\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^*$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változóhoz. Ennek érdekében vezessük be az $\eta_{k,n} = \frac{\eta_k}{A_n \sqrt{\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^*}}$, $1 \le k \le n$, $n = 1, 2, \dots$, szériasorozatot. Ekkor $\sum\limits_{k=1}^n E\eta_{k,n}^2 = \frac{1}{A_n^2} \sum\limits_{k=1}^n \frac{\mathbf{a}\Sigma_k\mathbf{a}^*}{\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^*} \to 1$, ha $n \to \infty$. Annak érdekében, hogy az $\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^* > 0$ esetben alkalmazhassuk a széria sorozatokról szóló centrális határeloszlástételnek a 38. feladatban megfogalmazott alakját, meg kell mutatnunk, hogy a fent definiált szériasorozat teljesíti a Lindeberg feltételt. Innen a feladat állítása is következik.

Először a következő egyenlőtlenséget látjuk be. Legyen $K = \max\limits_{1 \le p \le m} |a_p|$. Ekkor

$$E(\eta_{k,n}^2 I(|\eta_{k,n}| > \varepsilon) \le \frac{K^2 m^2}{A_n^2 \mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^*} \sum_{p=1}^m E\xi_{p,k}^2 I(|\xi_{p,k}| > \bar\varepsilon A_n) \tag{2.7}$$

minden $1 \le k \le n$ és $n = 1, 2, \dots$ indexre, ahol $\bar\varepsilon = \bar\varepsilon(k) = \frac{\varepsilon}{m \sup\limits_{1 \le p \le m} |a_p|} \cdot \frac{1}{\sqrt{\mathbf{a}\Sigma\mathbf{a}^*}}$.

Ezeket az egyenlőtlenségeket összegezve minden $1 \le k \le n$ indexre, és alkalmazva a (14) formulát minden $1 \le p \le m$ indexre megkapjuk, hogy az $\eta_{k,n}$, $1 \le k \le n$, $n = 1, 2, \dots$ szériasorozat teljesíti a Lindeberg feltételt.

A (2.7) formula belátása érdekében vezessük be azt a véletlen $\bar{p}(k) = \bar{p}(k, \omega)$ indexet, amelyik a (legkisebb) olyan p szám, amelyre $|\xi_{\bar{p}(k),k}(\omega)| = \max\limits_{1 \le p \le m} |\xi_{p,k}(\omega)|$. Vegyük észre, hogy

$$\{\omega\colon\ |\eta_{k,n}(\omega)| > \varepsilon\} \subset \bigcup_{p=1}^{M} \{\omega\colon\ |\xi_{p,k}(\omega)| > \bar{\varepsilon} A_n\},$$

ezért $I(|\eta_k(\omega)| > \varepsilon) \le I(|\xi_{\bar{p}(k,\omega),k}(\omega)| > \bar{\varepsilon} A_n)$. Ezenkívül $|\eta_k(\omega)|^2 \le \frac{m^2 K^2}{A_n^2 \mathbf{a} \Sigma \mathbf{a}^*} \xi^2_{\bar{p}(k),k}$. Innen

$$\begin{aligned} \eta_k^2 I(|\eta_k| > \varepsilon) &\le \frac{m^2 K^2}{A_n^2 \mathbf{a} \Sigma \mathbf{a}^*} \xi^2_{\bar{p}(k),k} I(|\xi_{\bar{p}(k,\omega),k}(\omega)| > \bar{\varepsilon} A_n) \\ &\le \frac{m^2 K^2}{A_n^2 \mathbf{a} \Sigma \mathbf{a}^*} \sum_{p=1}^{m} \xi^2_{p,k} I(|\xi_{p,k}| > \bar{\varepsilon} A_n). \end{aligned}$$

Várható értéket véve ebben az egyenlőtlenségben megkapjuk a (2.7) formulát.

Végül azt vegyük észre, hogy ha $\xi_k = (\xi_{1,k}, \dots, \xi_{m,k})$, $k = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású m-dimenziós valószínűségi változók sorozata, nulla várható értékkel és véges Σ kovariancia mátrix-szal, akkor ez a sorozat teljesíti a (14) relációt $A_n^2 = n$ választással. Ezt az állítást bebizonyítottuk a 41b.) feldatban azon p koordinátákra, amelyekre $E\xi^2_{p,1} > 0$. Azon p koordinátákra, amelyekre $E\xi^2_{p,1} = 0$, $\xi_{p,1} \equiv 0$, és ezeket a koordinátákat elhagyhatjuk.

50.) Rögzítsünk először egy olyan p számot, amelyre a Σ (szintén pozitív (szemi)definit mátrix átlójának p-ik tagja $D_{p,p}$ teljesíti a $D_{p,p} > 0$ egyenlőtlenséget. Definiáljuk az $\eta_{k,n} = \eta_{k,n}(p) = \frac{\xi_{p,k}}{A_n D_{p,p}}$, $1 \le k \le n$, $n = 1, 2, \dots$, szériasorozatot. Ekkor $\lim\limits_{n \to \infty} E\eta^2_{k,n} = 0$, és az $\eta_{k,n}$, $1 \le k \le n$, $n = 1, 2, \dots$ széria sorozat teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét és a centrális határeloszlástételt. Ezért ilyen p indexre a 39. feladat eredménye alapján teljesül a (14) formulában megfogalmazott Lindeberg feltétel.

Ha a p index olyan, hogy $D_{p,p} = 0$, akkor $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{1}{A_n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} E\xi^2_{p,k} = 0$. Mivel $E\xi^2_{p,k} \ge E\xi^2_{p,k} I(|\xi_{p,k}| > \varepsilon A_n)$, ezért a (14) reláció ilyen p indexekre is teljesül.

Appendix

A Fourier inverziós formula bizonyítása:

Vezessük be az $\hat{f}(u) = \int e^{-itu}\tilde{f}(u)\,du$ függvényt. Azt kell belátnunk, hogy $\hat{f}(u) = f(u)$ majdnem minden u számra, és ez az állítás ekvivalens azzal, hogy $\int_0^t f(u)\,du = \int_0^t \hat{f}(u)\,du$ minden t számra. Mivel

$$\int_0^t \hat{f}(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t e^{-ius}\tilde{f}(u)\,ds\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itu}-1}{-itu}\tilde{f}(u)\,du,$$

ezért a következő azonosságot kell belátnunk:

$$\int_{-\infty}^{\infty} I_{[0,t]}(u)f(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itu}-1}{-itu}\tilde{f}(u)\,du, \tag{A1}$$

ahol $I_{[0,t]}(\cdot)$ a $[0,t]$ intervallum indikátorfüggvénye. Ez az azonosság speciális esete a Fourier analízis egyik legfontosabb azonosságának, a Parseval formulának. Ez a következőt mondja ki:

Parseval formula.

$$\int f(u)\bar{g}(u)\,du = \frac{1}{2\pi}\int \tilde{f}(u)\bar{\tilde{g}}(u)\,du, \tag{A2}$$

ahol $\bar{f}(\cdot$ az $f(\cdot)$ konjugáltját jelöli. Ez a formula érvényes akkor, ha a következő két feltétel valamelyike teljesül:

a.) Az f és g függvények mindegyike négyzetesen integrálható.

b.) Az $\tilde{f}$ és $\tilde{g}$ függvények mindegyike négyzetesen integrálható.

Ha az a.) és b.) feltételek egyike teljesül, akkor a másik is teljesül. Ugyanis ebben az esetben (a Parseval formula miatt) $\int |f(u)|^2\,du = \frac{1}{2\pi}\int |\tilde{f}(u)|^2, du$. Az $f \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde{f}$ leképezés automorfizmus a négyzetesen integrálható függvények terében. (A képtér tartalmaz minden négyzetesen integrálható függvényt.)

Annak érdekében, hogy a Parseval formulát pontosan fogalmmazuk meg, a Fourier transzformált fogalmát ki kell terjeszteni olyan $f(\cdot)$ függvényekre is, amelyek négyzetesen integrálhatóak, de nem feltétlenül integrálhatóak. Ez a fent említett L_2 izomorfizmus segítségével tehető meg. Minden négyzetesen integrálható $f(\cdot)$ függvényhez létezik integrálható és négyzetesen integrálható függvényeknek olyan $f_n(\cdot)$ sorozata, amelyik négyzetes normában konvergál az $f(\cdot)$ függvényhez, azaz $\int |f_n(u) - f(u)|^2\,du \to 0$, ha $n \to \infty$. Az $f(\cdot)$ függvény $\tilde{f}(\cdot)$ Fourier transzformáltja az $\tilde{f}_n(\cdot)$ Fourier transzformáltaknak (létező) négyzetes normában vett limesze.

A Parseval formula általunk megadott változatában szerepel egy $\frac{1}{2\pi}$ faktor, amely a tankönyvekben megadott képletben nem szerepel. Ennek oka, hogy mi a szokásostól eltérő normalizálást választottunk a Fourier transzformált definiciójában. (Elhagytuk a $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ faktort a definicióból.)

Ha egy f integrálható függvény Fourier transzformáltja integrálható, akkor az négyzetesen is integrálható, mivel korlátos. Továbbá a $g(u) = I_{[0,t]}(u)$ Fourier transzformáltja a $\tilde{g}(v) = \int_0^t e^{iuv}\,du = \frac{e^{iv}-1}{iv}$ függvény. Ezért az (A1) képlet a Parseval formula következménye a fenti $f(\cdot)$ és $g(\cdot)$ függvényekkel.

Annak érdekében, hogy belássuk az egy integrálható Fourier transzformálttal rendelkező μ mértékről megfogalmazott állítást, tekintsünk minden $\varepsilon > 0$ számhoz egy nulla várható értékű és ε szórásnégyzetű ν_ε normális eloszlású mértéket, amelynek Fourier transzformáltja az $e^{-\varepsilon u^2/2}$ függvény. Jelölje $\varphi_\varepsilon(u)$ a ν_ε mérték sűrűségfüggvényét, és vezessük be a $\mu_\varepsilon = \mu * \nu_\varepsilon$ konvolúciót, azaz a a $\mu_e = \mu * \nu_\varepsilon(A) = \int \mu(A-u)\varphi_e(u)\,du$ mértéket. A μ_ε mértéknek létezik $f_\varepsilon(u) = \int \varphi_\varepsilon(u-v)\mu(\,dv)$ sűrűségfüggvénye, e mérték Fourier transzformáltja pedig az integrálható $\tilde{f}_\varepsilon(u) = e^{-\varepsilon u^2/2}\tilde{f}(u)$ függvény. Ezért az $f_e(u)$ függvény kifejezhető, mint a $\tilde{f}_\varepsilon(u)$ függvény inverz Fourier transzformáltja. Ha $\varepsilon \to 0$, akkor $f_\varepsilon(u) \to f(u)$, ahol $f(u)$ a (6) formulában kifejezett függvény, és ez a konvergencia egyenletes az u változóban. Másrészt a μ mérték a μ_ε mértékek gyenge limesze, ha $\varepsilon \to 0$, azaz az $\frac{\mu_\varepsilon}{\mu(R^1)}$ valószínűségi mértékek gyengén konvergálnak a $\frac{\mu}{\mu(R^1)}$ valószínűségi mértékhez. (Megjegyezzük, hogy $\mu(R^1) = \mu_\varepsilon(R^1)$.) Ezért $\varepsilon \to 0$ határátmenettel kapjuk, hogy $\mu((a,b]) = \int_a^b f(u)\,du$, ha $\mu(\{a\}) = \mu(\{b\}) = 0$. Innen következik, hogy f a μ mérték sűrűségfüggvénye.

A fenti módszer némi változtatásával kapjuk a fenti állítás bizonyítását abban az esetben is, ha μ korlátos változású mérték. Megjegyezzük, hogy a a fenti érvelésben a határmenet indoklását finomítva és felhasználva a Fourier transzformált L_2 izomorfia tulajdonságát a μ mérték sűrűségfüggvényéről szóló állítás némileg élesíthető. Elég azt feltenni, hogy a μ mérték Fourier transzformáltja négyzetesen integrálható. Ekkor viszont a (6) formulában definiált inverz Fourier transzformáltat a Parseval formulában is elmagyarázott L_2 izomorfia segítségével kell definiálni.

A Parseval formula bizonyítása: Lássuk be először a Parseval formulát olyan speciális (f,g) függvénypárokra, amelyek egy korlátos $[-A,A]$ intervallumon kívül eltünnek, és elég símák, például kétszer differenciálhatóak. Ekkor tekintve ezen függvények megszorítását valamely $[-\pi T, \pi T] \supset [-A,A]$ intervallumra, ezek Fourier sorát, illetve a Parseval formula diszrét (egyszerű) változatát, kapjuk, hogy

$$\int f(u)g(u)\,du = 2\pi T \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(T)\bar{b}_k(T),$$

ahol $a_k(T) = \frac{1}{2\pi T}\int e^{iku/T}f(u)\,du = \frac{1}{2\pi T}\tilde{f}\left(\frac{k}{T}\right)$, és $b_k(T) = \frac{1}{2\pi T}\tilde{g}\left(\frac{k}{T}\right)$. Viszont a fenti $2\pi T \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} a_k(T)\bar{b}_k(T)$ kifejezés az $\int \tilde{f}(u)\bar{\tilde{g}}(u)\,du$, integrál közelítő összege, és az $\tilde{f}(u)$ és a $\tilde{g}(u)$ Fourier transzformáltak gyorsan tartanak nullához, ha $|u| \to \infty$ az f és g függvények simasága miatt. (Lásd például a 28. feladat eredményét.) Ezért $T \to \infty$ határátmenettel megkapjuk az (A2) formulát ebben a speciális esetben.

Mivel a Parseval formula $f=g$ választással az $\int |f(u)|^2\,du = \frac{1}{2\pi}\int |\tilde f(u)|^2\,du$ azonosságot adja, továbbá a már tekintett függvények, amelyre ezt a formulát beláttuk a négyzetesen integrálható függvények terében mindenütt sűrűen vannak, ezért a Parseval formula állítását megkapjuk az $\mathbf{T}\colon\ f\to \mathbf{T}f=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\tilde f$ L_2 izometria kiterjesztésével a négyzetesen integrálható függvények terére. Ahhoz, hogy ilyen módon a teljes bizonyítást megkapjuk, azt kell még belátnunk, hogy a $\mathbf{T}$ transzformáció képtere tartalmaz minden négyzetesen integrálható függvényt. Innen ugyanis következik, hogy az f függvény akkor és csak akkor négyzetesen integrálható, ha ugyanez igaz az $\tilde f$ függvényre. Ezért a Parseval formula a.) és b.) feltételei ekvivalensek.

Ennek a hiányzó rész bizonyításának érdekében tekintsünk olyan f függvényeket, amelyek elég símák (mondjuk százszor differenciálhatóak) és elég gyorsan tartanak nullához a végtelenben (például $|f(u)|\le \text{const.}\,\bigl(1+|u|^{100}\bigr)$). Mivel ezek a függvények mindenütt sűrű halmazt alkotnak a négyzetesen integrálható függvények terében elég belátni, hogy e függvények benne vannak a $\mathbf{T}$ transzformáció képterében. Belátjuk, hogy a $\mathbf{T}\sqrt{2\pi}\tilde{f^-}=f$, azonosság, ahol $f^-(u)=f(-u)$, következik a már bizonyított állításokból. Az $\tilde f$ függvény is síma, és gyorsan tart nullához. (Ez következik a 27. és 28. feladat állításából is. Bár a 27. feladat állítása csak eloszlásfüggvények Fourier-transzformációjáról szól, nem nehéz belátni, hogy tetszőleges integrálható függvény Fourier transzformáltjára érvényes.) Ezért az (A1) formula érvényes az $(f,\tilde f)$ függvénypárra is, és az f függvény a $2\pi\tilde{f^-}$, $f^-(u)=f(-u)$, függvény Fourier transzformáltja. Innen következik a kívánt állítás.

Weierstrass második approximációs tételének bizonyítása:

Abból, hogy az $\frac{1}{(2\pi)^{k/2}}e^{i(j_1t_1|+\cdots+j_kt_k)}$ trigonometrikus függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak a minden koordinátájuk szerint 2π szerint periodikus és négyzetesen integrálható függvények teréban, következik, hogy tetszőleges elég síma és minden koordinátája szerint 2π szerint periodikus függvényhez egyenletesen konvergál a Fourier sora. (Ekkor ugyanis a Fourier együtthatók gyorsan tartanak nullához.) Mivel ezek a függvények mindenütt sűrűek a folytonos függvények terében a szuprémum normában, innen következik Weierstrass második approximációs tétele. Ehelyett az indoklás helyett egy másik, direkt bizonyítást adunk, amelyik nem hívatkozik a trigonometrikus függvényekből álló ortogonális rendszer teljességére. Belátjuk a Fejér tételt, pontosabban annak többdimenziós változatát. Weierstrass második approximációs tétele ennek az eredménynek direkt következménye.

Fejér tétel. *Legyen $f(x_1,\dots,x_k)$ k változós folytonos függvény, amely 2π periodikus minden koordinátájában. Minden $(n_1,\dots,n_k)$, nem negatív egész számokból álló k-dimenziós vektorra definiáljuk az $s_{n_1,\dots,n_k}(f)$ Fourier sort a következő képlettel:*

$$s_{n_1,\dots,n_k}(f)(t_1,\dots,t_k)=\sum_{j_1=-n_1}^{n_1}\cdots\sum_{j_k=-n_k}^{n_k}A_{j_1,\dots,j_k}e^{i(j_1t_1+\cdots+j_kt_k)},$$

ahol

$$A_{j_1,\dots,j_k}=\frac{1}{(2\pi)^k}\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i(j_1u_1+\cdots+j_ku_k)}f(u_1,\dots,u_k)\,du_1\dots du_k.$$

Tekintsük a fenti Fourier sorok következő $A_n(f)$ Cezaro közepeit, $n=1,2,\dots$,

$$A_n(f)(t_1,\dots,t_k)=\frac{1}{(n+1)^k}\sum_{\substack{0\le n_j\le n\\ \text{minden } 1\le j\le k\text{-ra}}} s_{n_1,\dots,n_k}(f)(t_1,\dots,t_k).$$

Ekkor $\lim\limits_{n\to\infty}A_n(f)(t_1,\dots,t_k)=f(t_1,\dots,t_k)$*, és a fenti konvergencia egyenletes az összes* $t_1,\dots,t_k$ *argumentumban.*

A Fejér tétel bizonyítása: A Fejér tétel bizonyítása a következő fomulán alapul:

$$A_n(f)(t_1,\dots,t_k)=\int_{-\pi}^{\pi}\cdots\int_{-\pi}^{\pi}f(u_1,\dots,u_k)\bar K_n(t_1-u_1,\dots,t_k-u_k)\,du_1\dots\,du_k \tag{A3}$$

ahol

$$\bar K_n(u_1,\dots,u_k)=K_n(u_1)\cdots K_n(u_k), \tag{A4}$$

és

$$K_n(u)=\frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=-n}^{n}(n+1-|k|)e^{iuk}=\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}u\right)}{2\pi(n+1)\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}. \tag{A4$'$}$$

Valóban, beírva az $A_n(f)$ illetve $s_{n_1,\dots,n_k}$ definiciójába az $A_{j_1,\dots,j_k}$ Fourier együttható definicióját megkapjuk az (A4) formulát, azaz

$$\begin{aligned}\bar K_n(u_1,\dots,u_k)&=\frac{1}{(2\pi(n+1))^k}\sum_{\substack{0\le n_j\le n\\ \text{minden } 1\le j\le k\text{-ra}}}\ \sum_{\substack{|m_j|\le n_j\\ \text{minden } 1\le j\le k \text{ számra}}} e^{i(m_1u_1+\dots+m_ku_k)}\\ &=\frac{1}{(2\pi(n+1))^k}\prod_{j=1}^{k}\left(\sum_{n_j=0}^{n}\sum_{m_j=-n_j}^{n_j}e^{im_ju_j}\right)=K_n(u_1)\dots K_n(u_k),\end{aligned}$$

ahol a $K_n(u)$ függvényt az (A4$'$) formula középső formulája definiálja. Ezt az összeget például a következő módon hozhatjuk zárt alakba.

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi(n+1)}\sum_{k=-n}^{n}(n+1-|k|)e^{iuk}&=\frac{1}{2\pi(n+1)}\left(\sum_{k=0}^{n}e^{iuk}\right)\left(\sum_{k=0}^{n}e^{-iuk}\right)\\ &=\frac{1}{2\pi(n+1)}\left|\frac{e^{i(n+1)u}-1}{e^{iu}-1}\right|^2=\frac{1}{2\pi(n+1)}\frac{\left|e^{i(n+1)u/2}-e^{-i(n+1)u/2}\right|^2}{\left|e^{iu/2}-e^{-iu/2}\right|^2}\\ &=\frac{\sin^2\left(\frac{n+1}{2}u\right)}{2\pi(n+1)\sin^2\left(\frac{u}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Az (A4$'$) formulában definiált $K_n(u)$ függvénynek a következő számunkra fontos tulajdonságai vannak:

(i) $\int_{-\pi}^{\pi} K_n(u)\,du = 1$. Ez a $K_n(\cdot)$ összeg formában megadott alakjából látható.

(ii) $K_n(u) \ge 0$ minden $u \in R^1$ számra.

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{\varepsilon \le |u| \le \pi} K_n(u) =$ minden $\varepsilon > 0$ számra.

A (ii) és (iii) állítás a $K_n(\cdot)$ függvényt zárt alakban definiáló formulából látható.

Mivel egy kompakt halmazon folytonos függvény egyenletesen folytonos, ezért minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon, f)$ korlát, amelyre a folytonos és koordinátáiban periodikus f függvény teljesíti az $|f(x_1,\dots,x_k) - f(y_1,\dots,y_k)| < \varepsilon$ egyenlőtlenséget, ha $|x_j - y_j| < \delta$ minden $j = 1,\dots,k$ indexre. (Itt az $x_j + 2\pi l$, $l = 0 \pm 1, \pm 2, \dots,$ pontokat azonosítjuk, és az $|x_j - y_j| < \delta$ egyenlőtlenség azt jelenti, hogy $|x_j - y_j + 2\pi l_l| < \delta$ alkalmas egész l_j számmal.) Vezessük be a $\mathbf{B}(\delta, (t_1,\dots,t_k)) = \{(u_1,\dots,u_k)\colon |u_j - t_j| < \delta,\ -\pi \le u_j < \pi,\ j = 1,\dots,k\}$ jelölést. Az (i) tulajdonság miatt

$$
\begin{aligned}
&A_n(f)(t_1,\dots,t_k) - f(t_1,\dots,t_k)\\
&\quad = \int_{[-\pi,\pi)^k} (f(u_1,\dots,u_k) - f(t_1,\dots,t_k))\, K_n(t_1 - u_1)\cdots K_n(t_k - u_k)\, du_1 \dots du_k\\
&\quad = \int_{\mathbf{B}(\delta,(t_1,\dots,t_k))} [\cdots]\, du_1 \dots du_k + \int_{[-\pi,\pi)^k \setminus \mathbf{B}(\delta,(t_1,\dots,t_k))} [\cdots]\, du_1 \dots du_k\\
&\quad = I_{1,n}(t_1,\dots,t_k) + I_{2,n}(t_1,\dots,t_k).
\end{aligned}
$$

A $B(\delta, (t_1,\dots,u_t))$ halmaznak és a δ számnak a definiciójából valamint az (i) és (ii) relációkból következik, hogy

$$
|I_{1,n}(t_1,\dots,t_k)| \le \varepsilon \int_{[-\pi,\pi)^k} K_n(t_1 - u_1)\cdots K_n(t_k - u_k)\, du_1 \dots du_k \le \varepsilon
$$

minden $n = 1, 2, \dots$ indexre és $(t_1,\dots,t_k)$ pontra. Másrészt, a $\sup\limits_{(u_1,\dots,u_k)} |f(u_1,\dots,u_k)| = L$ jelölést használva és elvégezve a $t_j - u_j = \bar u_j$ helyettesítéseket az (i), (ii) és (iii) reláció segítségével meg tudjuk mutatni, hogy

$$
|I_{2,n}(t_1,\dots,t_k)| \le 2L \int_{[-\pi,\pi)^k \setminus \mathbf{B}(\delta,(0,\dots,0))} K_n(\bar u_1) \dots K_n(\bar u_k)\, d\bar u_1 \dots d\bar u_k \to 0,
$$

ha $n \to \infty$, mert minden $1 \le j \le k$ számra

$$
\begin{aligned}
\int_{\substack{\delta < |u_j| < \pi \\ -\pi \le u_l < \pi,\, l \ne j,\, 1 \le l \le k}} K_n(\bar u_1) \dots K_n(\bar u_k)\, d\bar u_1 \dots d\bar u_k &= \int_{\delta < |u| < \pi} K_n(u)\, du\\
&\le 2\pi \sup_{\delta < |u| < \pi} K_n(u) \to 0, \quad \text{ha } n \to \infty.
\end{aligned}
$$

Mivel a fenti becsléseket tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra elvégezhetjük (alkalmas $\delta = \delta(\varepsilon, f)$ számmal), e relációkból következik a Fejér tétel.