Nagy eltérések elmélete. *Független, valós értékű valószínűségi változók.*

1.) Legyen $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók sorozata, $P(\xi_j = 1-p) = 1 - P(\xi_j = -p) = p$, $0 < p < 1$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. (Ilyen választással $E\xi_1 = 0$, $\operatorname{Var} \xi_1 = p(1-p)$.) Az egyszerűség kedvéért tegyük fel, hogy $p = \frac{k}{l}$ racionális szám, és n osztható l-lel. Ekkor $P(S_n = 0) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi np(1-p)}}$. Ha pedig $P(\xi_j = 1-p) = 1 - P(\xi_j = -p) = \frac{1}{2}$, akkor $P(S_n = 0) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi np(1-p)}} e^{n(H(p) - \log 2)}$, ahol $H(p) = -(p \log p + (1-p)\log(1-p))$. Azon n hosszúságú 0, 1 sorozatok száma, amelyek pontosan np egyest tartalmaznak $\frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}} e^{nH(p)}$.

2.) Definiáljuk a $H(p_1, \dots, p_k) = -\sum\limits_{j=1}^{k} p_j \log p_j$, függvényt. Tegyük fel, hogy $0 \le p_j \le 1$, és $\sum\limits_{j=1}^{k} p_j = 1$. Legyen $p_j = 0$ esetén $p_j \log p_j = 0$. (A $H(p_1, \dots, p_k)$ függvényt entrópiának hívják.) Akkor

$$0 \le H(p_1, \dots, p_k) \le \log k.$$

A jobboldalon csak akkor van egyenlőség, ha $p_j = \frac{1}{k}$ minden $j = 1, \dots, k$-ra, a baloldalon pedig akkor, ha az egyik p_j 1-gyel egyenlő, az összes többi p_j pedig 0.

3.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, és teljesüljön az $Ee^{t\xi_j} \le R(t)$ egyenlőtlenség valamilyen $t > 0$ számra és $R(t)$ függvényre minden $1 \le j \le n$ indexre. Legyen $S_n = \xi_1 + \cdots + \xi_n$. Ekkor

$$P(S_n \ge nx) \le e^{n(\log R(t) - tx)}.$$

A nagy eltérések elmélete a következő kérdéssel foglalkozik: Legyenek ξ_k, $k = 1, 2, \dots$ független, valószínűségi változók, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Tegyük fel, hogy ezek a valószínűségi változók minden nem túl megszorító, jó tulajdonsággal rendelkeznek. A $P(S_n - ES_n > x(n))$ valószínűségek aszimptotikus viselkedésének minél pontosabb leírását szeretnénk megadni, ha $n \to \infty$. Ha $x(n)^2$ nagyságrendje megegyezik a $\operatorname{Var} S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} (\xi_k - E\xi_k)^2$ szórásnégyzettel, azaz $x(n) \sim \sqrt{n}$, akkor a centrális határeloszlástétel, illetve annak esetleges finomítása megadja a választ erre a kérdésre, de ha $x(n) \gg \operatorname{Var} S_n$ akkor további vizsgálatokra van szükség. Bizonyos problémák megértéséhez különösen fontos az $x(n) = nx$ eset vizsgálata. A továbbiakban elsősorban ezzel az esettel foglalkozunk. A 3. feladat eredményéből és az $R(t) = Ee^{t\xi}$ tulajdonságaiból következik, hogy $x > E\xi_1$ esetén ez a valószínűség az n mintaelemszám exponenciálisan kicsi függvénye. Az $R(t)$ függvény 8. feladatban felsorolt tulajdonságai között ugyanis többek között az is szerepel, hogy ebben az esetben $\inf\limits_{t>0} (\log R(t) - tx) < 0$. Az 1. feladatban pedig bizonyos speciális esetben az $S_n = nx$ valószínűség pontos aszimptotikáját is megadtuk. Meg szeretnénk határozni a $P(S_n = nx)$ és $P(S_n \geq nx)$ valószínűségek jó aszimptotikáját általánosabb esetekben is, amikor az első feladat módszere nem alkalmazható.

Tekintsük először a következő problémát. Legyenek ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $P(\xi_1 = j) = p(j)$, $j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, $\sum\limits_{j=-\infty}^{\infty} p(j) = 1$, azaz a ξ_n valószínűségi változók csak egész értékeket vesznek fel. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, és írjuk le a $p^{(n)}(m) = P(S_n = m)$ valószínűségek viselkedését. Ez egyszerűbb probléma, mint az eredeti kérdés, amelyik a $P(S_n \geq nx)$ valószínűségre adandó jó becslés volt. Viszont az eredeti kérdés megoldásához szükséges összes lényeges gondolat már e kérdés vizsgálatában is megjelenik.

E probléma vizsgálatában a következő észrevétel játszik fontos szerepet. Definiáljuk a

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(k) e^{ikt}$$

Fourier sort. Bizonyítsuk be a következő állításokat:

4.)

$$\varphi^n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p^{(n)}(k) e^{ikt} \quad \text{ahol } p^{(n)}(k) = P(S_n = k) = P(\xi_1 + \dots + \xi_n = k)$$

minden $n = 1, 2, \dots$ számra. Ezért

$$p^{(n)}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ikt} \varphi^n(t)\, dt, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots.$$

A $|\varphi(t)| \leq 1$ egyenlőtlenség teljesül. Továbbá $|\varphi(t)| < 1$ minden $t \neq 0$ és $|t| \leq \pi$ esetén akkor és csak akkor, ha a $\mathcal{K} = \{k\colon\ p(k) > 0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ halmaz nincs egy egynél nagyobb rácsszélességű rács eltoltján, azaz minden $d \geq 2$ és r számra az $\mathcal{L}(d, r) = \{jd + r;\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ halmaz (a d rácsszélességű r számmal eltolt rács) nem tartalmazza a $\mathcal{K}$ halmazt.

Ha $E|\xi_1^l| < \infty$, akkor $E\xi_1^l = (-i)^l \varphi^{(l)}(0)$, $l = 0, 1, 2, \dots$, ahol ξ_1 olyan valószínűségi változó, amelyre $P(\xi_1 = k) = p(k)$, $i = \sqrt{-1}$, és $\varphi^{(l)}(0)$ a $\varphi(t)$ függvény l-ik deriváltja a nullában.

5.) Ha a $\mathcal{K} = \{k\colon\ p(k) > 0,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ halmaz nincs egy egynél nagyobb rácsszélességű rács eltoltján, és $E|\xi_1|^3 < \infty$, akkor rögzített k egész számra és tetszőleges olyan $\varepsilon(n)$ sorozatra, amelyre $\varepsilon(n) \to 0$, ha $n \to \infty$, rögzített n-re alkalmazva a $k = nE\xi_1 + m\sqrt{n \operatorname{Var} \xi_1}$ természetes skálázást felírhatjuk, hogy

$$P(S_n = k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon(n)}^{\varepsilon(n)} \exp\left\{-i\left(nE\xi_1 + m\sqrt{n \operatorname{Var} \xi_1}\right) t\right\} \varphi^n(t)\, dt + O\left(e^{-\text{const.}\, n\varepsilon(n)^2}\right),$$

és

$$\varphi^n(t) = \exp\left\{ n\left(iE\xi_1 t - \operatorname{Var}\xi_1 \frac{t^2}{2} \right) \right\} \left(1 + O(nt^3)\right), \quad \text{ha } |t| < n^{-1/6}.$$

Lássuk be ennek az összefüggésnek a segítségével, hogy az előző feltételek teljesülése esetén

$$P(S_n = k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \operatorname{Var}\xi_1}} e^{-(k-nE\xi_1)^2/2n\operatorname{Var}\xi_1} + O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Hogyan módosul ez az állítás akkor, ha a $\mathcal{K}$ halmaz egy $d > 1$ rácsszélességű rács eltoltja tartalmazza?

Az utolsó feladat eredménye jó aszimptotikát ad a $p^{(n)}(k)$ valószínűség értékére, ha $k - nE\xi_1 \sim \sqrt{n}\operatorname{Var}\xi_1$. Értsük meg, hogy miért nem működik ez a módszer jól a többi esetben. A kívánt valószínűséget egy olyan integrál segítségével számoltuk ki, amelyben az integrandus abszolút értéke, — $|\varphi(t)|^n$ —, egy const. $n^{-1/2}$ nagyságú intervallumon kívül elhanyagolhatóan kicsi. Az integrandus $|\varphi(t)|^n e^{i\alpha(t,x)}$ alakú, ahol kis t-re $\alpha(t,x) \sim -tx + ntE\xi_1$. Ha $\frac{\alpha(t,x)}{t} \sim nE\xi_1 - x$ relative kicsi, ($n^{1/2}$ nagyságrendű), akkor a minket érdeklő valószínűséget kifejező integrált jól lehet becsülni, és ezt tettük az 5. feladatban. Ha azonban $nE\xi_1 - x = nE\xi_1 - x(n)$ nagy, akkor bár az integrandus abszolút értéke egy kis intervallumon kívül rendkívül kicsi, de mivel az integrandusnak (mint komplex számnak) a szöge a maximum közelében erősen oszcillál, ezért az integrált a hagyományos módon nem tudjuk jól becsülni. Az ilyen tipusú problémák vizsgálatára dolgozták ki az analízisben a nyeregpont módszert, amelyben az integrál alkalmas áthelyezésével (a komplex függvénytan néhány standard eredményét felhasználva) azt kívánjuk elérni, hogy az integrandus az abszolút érték maximuma közelében keveset oszcilláljon. Ekkor a kívánt integrált jól tudjuk becsülni, mert annak lényeges hozadékát a függvény maximum körüli értékei adják. A következő feladatban megmutatjuk, hogy a nyeregpont módszer a minket érdeklő probléma vizsgálatában is jól használható, feltéve, hogy a ξ_1 valószínűségi változó eloszlása teljesít bizonyos feltételeket.

6.) Tegyük fel, hogy a $\mathcal{K} = \{k\colon p(k) > 0,\ k = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ halmaz nincs egy egynél nagyobb rácsszélességű rács eltoltján. Tegyük fel továbbá, hogy a $\varphi(z) = Ee^{iz\xi_1}$ függvény, ahol z komplex szám (ez az $\varphi(t) = Ee^{it\xi_1}$ karakterisztikus függvény analitikus kiterjesztése) analitikus egy tartományban, amely tartalmazza a $\{z = x + iy,\ s - \varepsilon < y < 0\}$ sávot valamilyen $s < 0$ és elég kis $\varepsilon > 0$ számra. (A 8. feladatban fogjuk tárgyalni azt, hogy mit jelent ez a feltétel, illetve mikor teljesülnek a feladat további feltételei.) Ekkor

$$p^{(n)}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-ik(t+is)} \varphi^n(t+is)\, dt, \quad k = 0, \pm1, \pm2, \dots.$$

Teljesítse ez az s szám a $\psi'(s) = \alpha$ egyenletet, ahol $\alpha = \frac{k}{n}$, és $\psi(s) = -\log\varphi(is)$. Lássuk be, hogy a $\psi(s)$ függvény szigorúan konkáv, ezért az előző egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. Ha az egyenlet megoldhatóságáról és annak tulajdonságairól tett feltételek teljesülnek, akkor

$$p^{(n)}(k) = \frac{e^{-n\psi(s)+ks}}{\sqrt{2\pi n|\psi''(s)|}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Lássuk be, hogy a 1. feladatban szereplő $R(S_n = 0)$ valószínűség becslése a $P(\xi_1 = 1-p) = P(\xi_1 = -p) = \frac{1}{2}$ esetben e feladat állításának speciális esete.

Később azt is be fogjuk látni (más jelölékkel), hogy $\alpha = \frac{k}{n} > E\xi_1$ esetén a 6. feladatban szereplő $e^{-n\psi(s)+ks} = e^{-n(\psi(s)-\alpha s)}$ kifejezés exponenciálisan kicsi, azaz $\psi(s)-\alpha > 0$.

Az előbb ismertetett módszer természetes módon alkalmazható sűrűségfüggvények konvolúciójának vizsgálatára, és alkalmas feltételek mellett hasonló eredmények bizonyíthatóak. Ugyanis, enyhe feltételek mellett (például, ha az $f(\cdot)$ sűrűségfüggvény által meghatározott $\varphi(t) = \int e^{itx} f(x)\,dx$ karakterisztikus függvény integrálható,) a sűrűségfüggvény egyszerű inverziós formulával kiszámítható a karakterisztikus függvény segítségével. Nevezetesen,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-itx} \varphi(t)\,dt.$$

Sűrűségfüggvények konvolúciójának aszimptotikus viselkedése ennek a formulának, illetve e formula analitikus kiterjesztésének a segítségével a 6. feladat módszerével vizsgálható. Az eloszlásfüggvényt a karakterisztikus függvény segítségével kifejező inverziós formulák már bonyolultabbak. Ennek ellenére ez a módszer akkor is alkalmazható.

Célszerű viszont az itt alkalmazott nyeregpont módszert átfogalmazni a valószínűségszámítás nyelvére. Ennek érdekében vezessük be egy ξ valószínűségi változó $R(t) = Ee^{t\xi}$ momentumgeneráló függvényét. (Ha ez a várható érték nem létezik valamilyen t számra, akkor $R(t) = \infty$ definició szerint.) Vegyük észre, hogy az $R(it)$ illetve $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény analitikus kiterjesztése megegyezik, továbbá a 6. feladatban megadott inverziós formulában szereplő $\varphi(is+t)$ függvény (mint a t változó függvénye rögzített s számmal) tekinthető úgy, mint alkalmas eloszlásfüggvény karakterisztikus függvénye megszorozva egy konstassal, nevezetesen $\varphi(is+t) = R(-s)\bar{\varphi}_s(t)$, ahol a $\bar{\varphi}_s(\cdot)$ függvény az $\bar{F}_s(dx) = \frac{e^{-sx}F(dx)}{R(-s)}$ valószínűségi mérték karakterisztikus függvénye. Ezt a tényt (némileg eltérő skálázásban), illetve ennek néhány fontos következményét fogalmazzuk meg a következő feladatban.

7.) Legyenek ξ_k, $k = 1, 2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók $F(x)$ eloszlás és $\varphi(t)$ karakterisztikus függvénnyel. Legyen $R(t) = \varphi(-it) = Ee^{t\xi_1}$. Rögzítve egy t valós számot vezessük be az

$$\bar{F}(x) = \bar{F}^{(t)}(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{tu} F(\,du)}{R(t)} = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{tu} F(\,du)}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{tu} F(\,du)}$$

eloszlásfüggvényt, és legyen $\bar{\xi}_k = \bar{\xi}_k(t)$, $k = 1, 2, \dots$, független (egyforma) $\bar{F}(x)$ eloszlású valószínűségi változók sorozata. Legyen a $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ és $\bar{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k$, valószínűségi változók eloszlásfüggvénye $F_n(x)$ illetve $\bar{F}_n(x) = \bar{F}_n^{(t)}(x)$. Lássuk be, hogy $Ee^{s\bar{S}_n} = \frac{R^n(t+s)}{R^n(t)}$, $Ee^{is\bar{S}_n} = \frac{R^n(t+is)}{R^n(t)}$, és az $F_n(x)$ és $\bar{F}_n(x)$ függvények között a következő az $F(x)$ és $\bar{F}(x)$ függvények közötti kapcsolathoz hasonló összefüggés áll fenn:

$$1 - \bar{F}_n(x) = \frac{\int_{[x,\infty]} e^{tu} F_n(\,du)}{R^n(t)}, \quad 1 - F_n(x) = R^n(t) \int_{[x,\infty)} e^{-tu} \bar{F}_n(\,du).$$

Lássuk be ennek az összefüggésnek a segítségével azt, hogy

$$1 - F_n(nx) \le \inf_{t \ge 0} e^{n(\log R(t) - tx)} = \exp\left\{ -n \sup_{t \ge 0} (tx - \log R(t)) \right\}.$$

Ha az $R(t)$ momentumgeneráló függvény $R(t+is)$ analitikus kiterjesztése teljesíti az $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t+is)|\,ds < \infty$ tulajdonságot valamilyen $0 \le t \le T$ intervallumban (ez azt jelenti, hogy az $\bar{F}^{(t)}(\cdot)$ eloszlás karakterisztikus függvénye integrálható, ami erősebb feltétel, mint az, hogy az $\bar{F}^{(t)}(\cdot)$ eloszlásnak létezik korlátos sűrűségfüggvénye), akkor az $F_n(\cdot)$ eloszlásfüggvény $f_n(\cdot)$ sűrűségfüggvénye teljesíti az

$$f_n(nx) \le \inf_{0 \le t \le T} \frac{e^{-n(tx - \log R(t))}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{R(t+is)}{R(t)} \right|^n ds$$

egyenlőtlenséget. Az $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t+is)|\,ds < \infty$ feltétel helyettesíthető azzal a gyengébb feltétellel, hogy $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t+is)|^k\,ds < \infty$ valamilyen $k \ge 1$ számmal.

Szükségünk lesz az $R(t)$ momentumgeneráló függvények néhány tulajdonságára, és ezeket a 8. feladatban fogalmazzuk meg. Ezekből az eredményekből speciálisan következik, hogy az $R(t)$ és $\log R(t)$ függvények szigorúan konvexek, ezért a $[\log R(s)]' = x$ egyenletnek legfeljebb egy megoldása van. Ha a t szám a megoldása ennek az egyenletnek, és $\bar{F} = \bar{F}^{(t)}$ az ehhez a paraméterhez tartozó a 7. feladatban definiált eloszlás, akkor egy $\bar{F}$ eloszlású valószínűségi változó várható értéke x. Ezért a centrális határeloszlástétel segítségével a $\bar{F}_n^{(t)}$ eloszlását jól lehet becsülni az nx pont környezetében, ahol $\bar{F}_t^{(n)}$ a $\bar{F}_t$ eloszlás n-szeres konvolúcióját jelöli. A 7. feladat eredménye alapján a $\bar{F}_t^{(n)}$ eloszlás segítségével ki tudjuk fejezni az F_n eloszlást is. Ilyen módon jó aszimptotikát tudunk adni az $1 - F_n(nx)$ mennyiségre is.

Vegyük észre, hogy a fent vázolt módszer, amelyben $1 - F_n(nx)$-re jó aszimptotikát adtunk a momentumgeneráló függvény segítségével lényegében ugyanaz mint a 6. feladat megoldásában alkalmazott nyeregpont módszer. Mivel a valószínűségszámításban a nagy eltéres eredményekben adott aszimptotikát az $R(t)$ momentumgeneráló függvény segítségével szokták megadni, a 6. feladatban szereplő aszimptotikát megfogalmazzuk ezen a nyelven. Ez így szól:

$$p^{(n)}(k) = \frac{e^{nR(t)-kt}}{\sqrt{2\pi n[\log R(t)]''}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

ahol $R(t) = Ee^{t\xi_1}$, és t az $[\log R(t)]' = \frac{k}{n}$ egyenlet megoldása.

Ezután megfogalmazzuk a momentumgeneráló függvény minket érdeklő tulajdonságait a 8. feladatban.

8.) Létezzen a ξ valószínűségi változó $R(t) = Ee^{t\xi}$ momentumgeneráló függvénye valamilyen $t > 0$ számra. Azon $t \ge 0$ pontok halmaza, amelyre $R(t) < \infty$ vagy a teljes $t \ge 0$ félegyenes vagy egy véges $[0,T)$ vagy $[0,T]$ balról zárt és jobbról nyílt vagy zárt intervallum. A $\log R(t)$ és az $R(t)$ függvények második deriváltja az $R(t)$ függvény értelmezési tartomány a belsejében pozitív, és az $R(t)$ a függvény tetszőleges e tartomány belsejében levő (a,b) intervallumra való megszorítása analitikusan folytatható a $\{z\colon\ z = x+iy,\, x \in (a,b)\}$ tartományba, azaz az (a,b) nyílt intervallumra támaszkodó sávba a komplex számsíkon. Az $R(t)$ és $\log R(t)$ függgvények és azok deriváltjai folytonosak az origóban, és $\log R(0) = 0$, $R'(0) = [\log R(0)]' = E\xi$, ahol $R'(0)$ és $[\log R(0)]'$ jobboldali deriváltat jelöl. Ez az azonosság akkor is igaz, ha $E\xi = -\infty$. Ezért az $R(t)$, $\log R(t)$ függvények szigorúan konvexek, az $R'(t)$ és $[\log R(t)]'$ függvények pedig szigorúan monoton növekvőek a $[0,T)$ vagy $[0,T]$ intervallumban vagy pedig a $t \ge 0$ félegyenesen (attól függően, hogy az $R(t)$ függvény hol van értelmezve). (Innen levezethető az is, hogy $\sup\limits_{T>t\ge 0}(tx - \log R(t)) > 0$ minden $x > E\xi_1$ számra, de ezt az állítást a 11. feladatban fogjuk megfogalmazni és bebizonyítani.)

Ha $t \ge 0$ a ξ valószínűségi változó $R(\cdot)$ momentumgeneráló függvény értelmezési tartományában van, akkor legyen $\xi(t)$ egy $\bar{F}(dx) = \bar{F}^{(t)}(dx) = \frac{e^{tx}F(dx)}{R(t)}$ eloszlású valószínűségi változó, ahol $F(\cdot)$ a ξ valószínűségi változó eloszlása. Ezzel a jelöléssel $E\xi(t) = [\log R(t)]'$ és $\operatorname{Var}\xi(t) = [\log R(t)]''$. (Választhatjuk a $= 0$ értéket is, és ha $R(\cdot)$ értelmezési tartománya a $[0,T]$ intervallum, akkor $t = T$-t is választhatunk.) Ha ezeknek az azonosságoknak a bal vagy jobboldala véges értéket vesz fel, akkor a másik oldalon levő kifejezés is értelmes, (és az azonosság fennáll.)

Ha $R(t)$ egy véges $[0,T)$ vagy $[0,T]$ intervallum valamelyikén van értelmezve, az értelmezési tartomány akkor és csak akkor tartalmazza a T végpontot, ha $\lim\limits_{t\to T} R(t) < \infty$. Ha az értelmezési tartomány egy véges zárt $[0,T]$ intervallum, akkor $\lim\limits_{t\to T} R(t) = R(T)$, és ezen intervallum jobboldali T végpontjában akkor és csak akkor létezik az $R'(T)$ (baloldali) derivált ha $\lim\limits_{t\to T} R'(t) = R'(T) < \infty$. Ekkor $\lim\limits_{t\to T} R'(t) = R'(T) = E\xi e^{T\xi}$.

Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, és legyen az $R(t) = Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvény véges alkalmas $t > 0$-ra. Tegyük fel, hogy az $x > E\xi_1$. ($E\xi_1 = -\infty$ megengedett.) szám olyan, hogy létezik olyan $t > 0$ szám az $R(t)$ függvény értelmezési tartományának *belsejében*, amelyre $[\log R(t)]' = x$. A 7. és 8.

feladat eredményei alapján

$$P(S_n \geq nx) = R(t)^n e^{-tnx} \int_{nx}^{\infty} e^{-t(y-nx)} \bar{F}_n(\,dy), \qquad (+)$$

ahol $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $\bar{F}_n$ a $\sum\limits_{k=1}^{n} \bar{\xi}_k$ eloszlása, ahol $\bar{\xi}_k$, $k = 1, \dots, n$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók $\bar{F}(dx) = \frac{e^{tx} F(dx)}{R(t)}$ eloszlással (a fenti t paraméterrel.) $E\bar{\xi}_1 = [\log R(t)]' = x$, $\operatorname{Var} \bar{\xi}_1 = [\log R(t)]''$. Ezenkívül a $\bar{\xi}_1$ valószínűségi változónak létezik az összes momentuma, sőt kis abszolút értékű u számra az $Ee^{u\bar{\xi}_1} = \bar{R}(u) = \frac{R(t+u)}{R(t)}$ momentumgeneráló függvénye.

9.) A fenti jelölésekkel és a fenti feltételek mellett

$$C_1 \frac{e^{-n(tx - \log R(t))}}{\sqrt{n}} \leq P(S_n \geq nx) \leq C_2 \frac{e^{-n(tx - \log R(t))}}{\sqrt{n}}$$

alkalmas, az n paramétertől nem függő $0 < C_1 < C_2$ konstansokkal. (Feltettük, hogy a $E[\log R(t)]' = x$ egyenlet megoldható, és a megoldás az $R(\cdot)$ függvény értelmezési tartományának a belsejében van, valamint $x > E\xi_1$.)

(A 9. feladat állításának a bizonyításában felhasználhatjuk a következő Berry–Esseen egyenlőtlenséget: Ha $\eta_1, \dots, \eta_n$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, $E\eta_1 = 0$, $E\eta_1^2 = \sigma^2 > 0$, $E|\eta_1|^3 = \mu_3 < \infty$, és $\Phi(x)$ jelöli a standard normális eloszlásfüggvényt, akkor létezik olyan univerzális $K > 0$ konstans, amelyre $\left|P\left(\frac{T_n}{\sigma\sqrt{n}} < x\right) - \Phi(x)\right| \leq \frac{K\mu_3}{\sigma^3\sqrt{n}}$. (A Berry–Esseen egyenlőtlenség valójában általánosabb eredmény, nem feltétlenül egyforma eloszlású, független valószínűségi változók normált részletösszegeinek távolságát becsüli a standard normális eloszlásfüggvénytől.)

Szeretnénk a 9. feladat eredményét élesíteni, és abban az alsó és felső becslés helyett pontos aszimptotikát írni. Ez lesz a 10. feladat eredménye. Ahhoz, hogy ezt megtehessük a $(+)$ kifejezésben szereplő integrált kell jól becsülni. Ezt megtehetjük, ha jó aszimptotikát adunk a $\bar{F}_n(nx+y) - \bar{F}_n(nx)$ különbségre, ahol a $\bar{F}_n$ eloszlásfüggvényt a 7. feladatban definiáltuk. Ez egy lokális centrális határeloszlástétel tipusú probléma, mivel annak valószínűségét akarjuk aszimptotikusan jól megbecsülni, hogy független valószínűségi változók (nem normalizált) összege egy rögzített (n-től független) hosszúságú intervallumba esik. A kívánt eredmény következik az alább idézett állításból, amely megtalálható például W. Feller: An Introduction to Probability Theory and its Applications II. könyvében (XVI. fejezet, 4. paragrafus 1. tétel.)

Tétel. *Legyen az F valószínűségi változó olyan, hogy egy F eloszlású ξ valószínűségi változóra $E\xi = m_1$, $\operatorname{Var} \xi^2 = \sigma^2$, $E\,|\xi - E\xi|^3 < \infty$, $E(\xi - E\xi)^3 = m_3$, és az F eloszlás nem rácsos, azaz nincs olyan $h > 0$ és a szám, amelyre a $\{a + kh,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ halmaz F mértéke 1. Jelölje $\Phi(y)$ a standard normális eloszlás és $\varphi(y)$ a standard* *normális sűrűségfüggvényt. Jelölje F^{*n} az F eloszlásfüggvény n-szeres konvolúcióját önmagával. Ekkor*

$$F^{*n}(nm_1 + \sqrt{n}\sigma y) - \Phi(y) - \frac{m_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(1-y^2)\varphi(y) = o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad (++)$$

ahol az $o(\cdot)$ egyenletes y-ban.

Megjegyezzük, hogy ez a tétel csak nem rácsos eloszlású valószínűségi változókra érvényes. Ha ugyanis F rácsos eloszlású valószínűségi változó, h rácsszélességgel, akkor az $F^{*n}(nm_1 + \sqrt{n}\sigma y)$ függvény konstans egymást követő $\frac{h}{\sqrt{n}\sigma}$ hosszúságú szakaszokon. Másrészt a $\Phi(y) + \frac{m_3}{6\sigma^3\sqrt{n}}(1-y^2)\varphi(y)$ függvény megváltozása egy ilyen szakaszon nagyobb mint const. $n^{-1/2}$. A tétel bizonyítását nem adjuk meg, csak néhány megjegyzést teszünk a bizonyítás módszeréről. A bizonyítás hasonló a Berry–Esseen bizonyításához. Ebben a részletösszegek eloszlását konvolváljuk egy szép sűrűségfüggvénnyel rendelkező eloszlással. Ez utóbbi simított eloszlást, mivel szép sűrűségfüggvénye van, jól tudjuk becsülni, és ugyancsak becsülni tudjuk a konvolúció által elkövetett hibát. Azt, hogy nem rácsos eloszlásról van szó a következőképpen használjuk ki. Egy ξ valószínűségi változó eloszlása akkor és csak akkor nem rácsos eloszlású, ha a ξ valószínűségi változó $\varphi(t)$ karakterisztikus függvénye minden $\varepsilon > 0$-a teljesíti a $\sup\limits_{\varepsilon<|t|<\varepsilon^{-1}} |\varphi(t)| < 1$ egyenlőtlenséget. Ez biztosítja, hogy a konvolvált eloszlásfüggvényt a karakterisztikus függvény n-ik hatványának segítségével kifejező integrálban kis hibát követünk el, ha az integrál értelmezési tartományát egy az n paramétertől független nagy véges intervallumra koncentráljuk.

Ha a tekintett valószínűségi változók rácsos eloszlásúak, akkor az összeg sűrűségfüggvényére már bizonyított nagy eltérés tétel eredményét összegezve megkaphatjuk az összeg jó aszimptotikáját. A sűrűségfüggvény értékét a momentumgeneráló függvény illetve annak analitikus kiterjesztését felhasználó inverz Fourier formula segítségével pontosan kifejezhetjük, és a sűrűségfüggvényre adott aszimptotikus formulák helyett lehet ezeket a pontos kifejezéseket összegezni. Ekkor ugyanazzal a módszerrel, amellyel a sűrűségfüggvény jó aszimptotikáját fejeztük ki, megadhatjuk az eloszlásfüggvény jó aszimptotikáját is. Mi ezt a módszert fogjuk követni.

10.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre létezik olyan $t > 0$, hogy $R(t) = Ee^{t\xi_1} < \infty$. Legyen $x > E\xi_1$, ($E\xi_1 = -\infty$ megengedett), és tegyük fel, hogy létezik olyan $t > 0$ az $R(t)$ függvény értelmezési tartományának belsejében, amelyre $[\log R(t)]' = x$. Ekkor

$$P(S_n \ge nx) = \frac{C}{\sqrt{n}} e^{-n(tx - \log R(t))}(1 + o(1)) \quad \text{ha } \xi_1 \text{ nem rácsos eloszlású}$$

$$\begin{aligned} P(S_n \ge nx) &= P(S_n \ge nx') = \frac{\bar{C}}{\sqrt{n}} e^{-n(t'x' - \log R(t'))}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \frac{\bar{C}}{\sqrt{n}} e^{-n(tx - \log R(t)) + K(x)}\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \end{aligned} \qquad (*)$$

ha ξ_1 rácsos eloszlású a $hk + a$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (legtágabb) rácson, ahol $x' = \left]\frac{nx-a}{h}\right[\,\frac{h}{n} + \frac{a}{n}$, $]u[$ jelöli a legkisebb u-nál nagyobb egész számot, t' az $R'(t) = x'$ egyenlet megoldása. Létezik olyan $K > 0$ szám, hogy $|K(x)| < K$ minden a tétel feltételeinek eleget tevő $x > E\xi_1$ számra. Továbbá

$$C = \frac{1}{t\sqrt{2\pi[\log R(t)]''}}, \qquad \bar{C} = \frac{h}{(1-e^{-ht'})\sqrt{2\pi[\log R(t')]''}}.$$

Megjegyzés A $(*)$ becslésben szereplő ($o(1)$ illetve $0\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ maradéktag egyenletes az x változóban, ha a $P(S_n \geq nx)$ valószínűséget olyan x számokra tekintjük, amelyekre a $[\log R(t)]' = x$ egyenlet $t = t(x)$ megoldását tartalmazza egy olyan $[0, b]$ intervallum, amelyre a b pont az $R(t)$ függvény értelmezési tartományának a belsejében van. Ehhez azt kell ellenőrizni, hogy a bizonyításban szereplő becslések egyenletesek ilyen x számokra. Ez a tulajdonság teljesül, mert a hibatagok becslésében szereplő momentumok egyenletesen becsülhetőek, továbbá minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan t-től független $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, amelyre $|1 - \bar{\varphi}_t(u)| < 1 - \delta$, ha $t \in [0, a]$, és $\varepsilon < |u| < \varepsilon^{-1}$, ahol $\varphi_t(\cdot)$ a 7. feladatban definiált $\bar{F} = \bar{F}_t$ eloszlás karakterisztikus függvénye. Nem rácsos eloszlású valószínűségi változókra gyengébb becslést kaptunk, mint a rácsos esetben. Bízonyos simasági feltételek mellett a $o(1)$ maradéktag helyettesíthető $O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$-nel. Ez megtehető például akkor, ha a ξ_1 valószínűségi változó $\varphi(\cdot)$ karakterisztikus függvénye, illetve annak analitikus kiterjesztése teljesíti a $\lim\limits_{|u|\to\infty} \varphi(u) = 0$ feltételt. Ez a feltétel a Riemann lemma alapján teljesül például akkor, ha a ξ_1 valószínűségi változó eloszlásának létezik sűrűségfüggvénye.

A 10. feladatben szereplő aszimptikus becslés fő tagjának exponensében szerepel a $\log R(t) - tx$ kifejezés. Érdemes észrevenni, hogy ez minden $x > E\xi_1$ esetén negatív. Ez a tartalma a következő (egyszerű) 11. feladatnak.

11.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyekre az $R(t) = Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvény létezik valamilyen $t > 0$-ra. Legyen $R(t) = \infty$, ha az $Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvény nem létezik. Ekkor

$$\sup_{t \geq 0}(tx - \log R(t)) > 0$$

minden $x > E\xi_1$-re, és az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ valószínűségi változó teljesíti a

$$-\frac{1}{n}\log P(S_n > nx) \geq \sup_{t\geq 0}(tx - \log R(t))$$

egyenlőtlenséget minden $x > E\xi_1$ számra és $n \geq 1$ indexre. (A feladatban az $E\xi_1 = -\infty$ esetet is megengedjük.)

A 10. feladatban a $P(S_n \geq nx)$ valószínűség jó aszimptotikáját adtuk meg akkor, ha a $[\log R(t)]' = x$ egyenlet megoldható. A felső becslés bizonyításában nem használtuk fel, hogy ez az egyenlet megoldható. Be akarjuk látni, hogy ez a felső becslés mindig éles. Részletesebben fogalmazva, feltesszük, hogy ξ_k, $k=1,2,\dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és van olyan $t>0$ szám, amelyre $Ee^{t\xi_1}<\infty$. Legyen $S_n=\sum\limits_{k=1}^n \xi_k$. Be fogjuk látni, hogy ekkor

$$-\lim \frac{1}{n}\log P(S_n\ge nx)=\sup_{t\ge 0}(tx-\log R(t))>0 \quad \text{minden } x>E\xi_1\text{-re.} \qquad (**)$$

A $(**)$ reláció úgy értendő, hogy $R(t)=\infty$, ha $R(t)$ nincs definiálva. Az $E\xi_1=-\infty$ reláció is megengedett.

A $(**)$ állítás bizonyítását az általános esetben visszavezetjük a már bebizonyított esetekre alkalmas approximációval. Annak érdekében, hogy ezt megtehessük, részletesebben vizsgáljuk azt, hogy mikor nincs megoldása a $[\log R(t)]'=x$ egyenletnek. Ezt tesszük a következő feladatokban.

Megjegyezzük, hogy a $(**)$ relációban a $P(S_n\ge nx)$ esemény valószínűségét becsüljük, azaz $\ge$ és nem $>$ jel szerepel ennek az eseménynek a definiciójában. Vannak olyan esetek, amikor a $(**)$ reláció csak ilyen formában érvényes. Ilyen eset fordul elő például akkor, ha $P(\xi_1=1)=P(\xi_1=-1)=\frac12$, és $x=1$. Ekkor $-\frac1n\log P(S_n\ge nx)=\log 2$ és $-\frac1n\log P(S_n>nx)=\infty$ minden $n\ge 1$-re. Másrészt, $tx-\log R(t)=t-\log\frac{e^t+e^{-t}}{2}=\log 2-\log\left(1+e^{-2t}\right)$ ebben az esetben ($x=1$), ezért $\sup\limits_{t\ge0}(tx-R(t))=\lim\limits_{t\to\infty}(tx-\log R(t))=\log 2$.

12.) Legyen a ξ_1 valószínűségi változó $R(t)$ momentumgeneráló függvénye a teljes $t\ge 0$ félegyenesen értelmezve. A $[\log R(t)]'=x$ egyenletnek létezik egyértelmű megoldása minden $x>E\xi_1$ számra, ha $\lim\limits_{t\to\infty}[\log R(t)]'=\infty$, illetve minden $E\xi_1<x<z$ számra, ha a $\lim\limits_{t\to\infty}[\log R(t)]'=z<\infty$. Ez utóbbi esetben $\sup\limits_{t\ge0}(tx-\log R(t))=\infty$, ha $x>z$.

13.) Ha a ξ_1 valószínűségi változó $R(t)$ momentumgeneráló függvénye a teljes $t\ge 0$ félegyenesen értelmezve van, és $\lim\limits_{t\to\infty}[\log R(t)]'=z<\infty$, akkor $P(\xi_1>z)=0$, és $\sup\limits_{t\ge0}(tz-\log R(t))=\lim\limits_{t\to\infty}(tz-\log R(t))=-\log P(\xi_1=z)$. Ezen állítás és az előző feladat segítségével lássuk be a $(**)$ relációt abban az esetben, ha a ξ_1 valószínűségi változó $R(t)$ momentumgeneráló függvénye az egész $t\ge 0$ félegyenesen értelmezve van.

14.) Ha a ξ_1 valószínűségi változó $R(t)$ momentumgeneráló függvénye egy jobbról nyílt $[0,T)$ intervallumban vagy egy zárt $[0,T]$ intervallumban van értelmezve, de az utóbbi esetben is teljesül a $\lim\limits_{t\to T}R'(t)=\infty$ reláció, akkor a $[\log R(t)]'=x$ egyenletnek minden $x>E\xi_1$ számra létezik egyértelmű megoldása. Lássuk be a $(**)$ állítást ebben az esetben is.

15.) Legyen ξ_n, $n=1,2,\dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, $Ee^{t\xi_1}=\infty$ minden $t>0$-ra, $S_n=\sum\limits_{k=1}^n\xi_k$. Válasszunk egy tetszőleges

$[a, b]$ intervallumot, amelyre $E\xi_1 \le a < b$. (Ez úgy értendő, hogy nincs ilyen intervallum, ha $E\xi_1 = \infty$, ha pedig $E\min(0, \xi_1) = -\infty$, akkor tetszőleges $[a, b]$ $a < b$ intervallumot választhatunk. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log P\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right) = 0.$$

azaz, tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra és a feltételeknek eleget tevő $[a, b]$ intervallumra

$$P\left(\frac{S_n}{n} \in [a, b]\right) \ge e^{-n\varepsilon}, \quad \text{ha } n > n(\varepsilon, a, b).$$

Megjegyzés: Érdemes a 15. feladat eredményének egyik következményét külön megfogalmazni. Ha ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, $E\xi_1 = 0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, és léteznek olyan $A > 0$, $B > 0$ számok, amelyekre $P(S_n > nA) \le e^{-nB}$ minden elég nagy n-re, akkor az $R(t) = Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvény létezik és véges kis $t > 0$ számokra.

16.) Lássuk be az előző feladat segítségével a $(**)$ relációt abban a még nem vizsgált esetben is, amikor a ξ_1 valószínűségi változó $R(t)$ momentumgeneráló függvénye egy zárt $[0, T]$ intervallumban van értelmezve, és $\lim\limits_{t\to T} R'(t) < \infty$.

17.) A 16. feladat bizonyításában külön tekintettük azt az esetet, amikor az $R(t) = Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvény egy jobbról nyílt $[0, a)$ intervallumban van értelmezve, amikor egy zárt $[0, a]$ intervallumban van értelmezve és $R'(a) = \infty$ illetve $R'(a) < \infty$. Mutassunk példát arra, hogy mind a három eset valóban előfordulhat.

A 8. és 10. — 16. feladatok eredményeiből következik, hogy a $(**)$ reláció igaz tetszőleges ξ_1 valószínűségi változóra, ha $x > E\xi_1$-re és ξ_1 valószínűségi változó $R(t) = Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvénye létezik elég kis $t > 0$-ra. A következő feladatban belátjuk, hogy a $(**)$ becslésben szereplő azonosság érvényes ezen feltételek teljesülése nélkül is. Csak az azonosságban szereplő kifejezések nullával is lehetnek egyenlőek, ha megengedjük azt a lehetőséget is, hogy $E^{t\xi_1} = \infty$ minden $t > 0$ szám esetén.

18.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, $R(t) = Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvénnyel, ahol $R(t) = \infty$, ha $e^{t\xi_1}$ nem integrálható. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Ekkor

$$\lim_{n\to\infty} -\frac{1}{n} \log P(S_n \ge nx) = \sup_{t\ge 0}(tx - \log R(t)) \quad \text{minden } -\infty < x < \infty \text{ számra.}$$

18a.) Mutassuk meg, hogy $x \ge E\xi_1$ esetén $\sup\limits_{t\ge 0}(tx - \log R(t)) = \sup\limits_{-\infty<t<\infty}(tx - \log R(t))$.

19.) Legyenek $\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)}$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók $F_t(x) = \frac{\int_{-\infty}^{x} e^{tu}F(\,du)}{R(t)}$, $R(t)=\int_{-\infty}^{\infty} e^{tu}F(\,du)$, eloszlásfüggvénnyel, és legyen $S_n^{(t)} = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k^{(t)}$. (Olyan t paramétereket tekintünk, amelyekre $R(t)<\infty$.) A $(\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)})$ vektor feltételes eloszlása az $S_n^{(t)}=x$ feltétel mellett nem függ a t paramétertől.

Nagy eltérés tipusú becsléseket adhatunk akkor is, ha a tekintett S_n valószínűségi változók nem független valószínűségi változók részletösszegei, viszont ezek $R_n(t) = Ee^{tS_n}$ momentumgeneráló függvényei teljesítenek bizonyos feltételeket. A következő feladatban ilyen tipusú állítást fogalmazunk meg.

20.) Legyen S_n, $n=1,2,\dots$, valószínűségi változók sorozata, és definiáljuk az $R_n(t) = Ee^{tS_n}$ függvényeket. Tegyük fel, hogy létezik a $\psi(t)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac1n\log R_n(t)$ határérték egy $[0,T]$ intervallumban. Lássuk be, hogy a $\psi(t)$, $t\in[0,T]$, függvény konvex. Tegyük fel, hogy $\psi'(0)=0$, és egy $x>0$ számra a $\psi'(t)=x$ egyenletnek létezik egy $0<t<T$ megoldása (jelentsen $\psi'(t)$ jobboldali deriváltat, amelyik konvex függvény esetén mindig létezik.) Tegyük fel továbbá, hogy a $\psi(\cdot)$ függvény a t pont alkalmas környezetében szigorúan konvex. Lássuk be, hogy ebben az esetben

$$\lim_{n\to\infty} -\frac1n \log P(S_n>nx) = tx-\psi(t).$$

A nagy eltérés tételben szereplő az $\log R(t)$ függvény $\rho(x)=\sup\limits_{t\ge0}(tx-\log R(t))$ transzformáltja nemcsak a valószínűségszámításban hanem a konvex geometriában, sőt a matematikai fizikában is fontos szerepet játszik. Ezt a leképezést nevezik Legendre transzformációnak. Megjegyezzük, — bár ez a tény ennek a feladatsornak a vizsgálataiban nem játszik fontos szerepet, — hogy egy konvex függvény Legendre transzformáltja szintén konvex, és konvex függvény Legendre transzformáltjának a Legendre transzformáltja az eredeti függvényt adja. A matematikai fizikában a Legendre transzformáció azért játszik fontos szerepet, mert ez teremti meg a kapcsolatot a mechanikai rendszerek viselkedését leíró Euler–Lagrange és Hamilton–Jacobi egyenletek között.

A fenti feladatokban leírtuk a $P(S_n\ge nx)$ valószínűség aszimptotikáját akkor, ha S_n n darab független egyforma eloszlású ξ_k, $1\le k\le n$, valószínűségi változó összege, és a szigorú $x>E\xi_1$ egyenlőtlenség teljesül. Az aszimptotikus számításokban kihasználtuk, hogy x szeparálva van a várható értéktől, illetve azt, hogy ennek következtében a $[\log R(t)]'=x$ egyenlet megoldása (a t változóban) szigorúan pozitív. A következő feladatokban a tipikus tartományból a nagy eltérések tartományba való átmenetet írjuk le, azaz a $P(S_n>x(n))$ esemény valószínűségét vizsgáljuk akkor,ha $x(n)-nE\xi_1>\sqrt{n}$, és $x(n)-nE\xi_1\le\varepsilon n$ alkalmas $\varepsilon>0$ számmal. Ezenkívül vizsgálni fogjuk ennek a kérdésnek a megfelelőjét a sűrűségfüggvények aszimptotikus viselkedéséről is.

Ezek az eredmények fontos szerepet játszanak annak a kérdésnek a vizsgálatában, hogy egy független valószínűségi változók normalizált részletösszegeiből természetes módon készített töröttvonalfüggvényt milyen jól tudunk közelíteni Wiener folyamattal.

Ezzel a problémával egy másik feladatsorban fogunk foglalkozni, és ott hivatkozni fogunk ennek a feladatsornak az eredményeire. Az alábbi kérdések a vizsgálatában is a 8. feladat után felírt (+) formulát használhatjuk, de a becslésekben megjelenő technikai problémák különböznek. A bizonyításokban fel fogjuk használni azokat az eredményeket, amelyek lehetővé teszik, hogy analitikus függvényekkel kényelmesen számolhassunk. Ezek közül az egyik (egyszerű) komplex függvénytani tételt felidézzük, mert a valószínűségszámításban ez az eredmény ritkán szokott megjelenni.

Tétel. *Legyen $f(z)$ olyan analitikus függvény egy z_0 pont kis környezetében, amelyre $f'(z_0) \neq 0$. Ekkor az $f(z)$ pontnak létezik egyértelmű analitikus inverze az $f(z_0)$ pont kis környezetében, azaz létezik (egyetlen) olyan $z = g(u)$ analitikus függvény az $u_0 = f(z_0)$ pont kis környezetében, amelyre $f(g(u)) = u$, $g(f(z)) = z$ az $u_0 = f(z_0)$ illetve z_0 pont kis környezetében.*

21.) Legyenek ξ_k, $k = 1, 2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, $E\xi_1 = 0$, $E\xi_1^2 = 1$ és $Ee^{t\xi_1} < \infty$, ha $|t| < \alpha$ alkalmas $\alpha > 0$-val. Legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Létezik olyan $\varepsilon > 0$ szám és $\lambda(u)$ analitikus függvény az $|u| < \varepsilon$ tartományban, amelyekre

$$P\left(\frac{S_n}{n} > x\right) = \left[1 - \Phi(\sqrt{n}x)\right] e^{nx^3\lambda(x)} \left(1 + O\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right), \quad \text{ha } 0 \leq x \leq \varepsilon,$$

ahol $\Phi(\cdot)$ a standard normális eloszlásfüggvényt jelöli, és a $O(\cdot)$ egyenletes az $0 \leq x \leq \varepsilon$ intervallumban.

Tegyük fel, hogy a 21. feladat feltételei teljesülnek, és tekintsük a $P(S_n > nx)$ valószínűség aszimptotikus viselkedését kis $x > 0$ szám esetén. Ekkor mind a 10. mind a 21. feladat eredményét alkalmazhatjuk, és érdemes a két eredményt összehasonlítani. Felhasználva az $1 - \Phi(\sqrt{n}x) = \frac{e^{-nx^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{1}{\sqrt{n}x} + O(n^{-3/2}x^{-3})\right)$ relációt kapjuk, hogy a két feladatban ugyanaz az exponens jelenik meg más formában. Ez $e^{n(\log R(t) - tx)}$ a 10. feladatban, ahol t a $[\log R(t)]' = x$ egyenlet megoldása, és $e^{n(x^3\lambda(x) - x^2/2)}$ a 21. feladatban. Azt, hogy a két kifejezésben ugyanaz a kifejezés jelenik meg más formában a következő számolás segítségével láthatjuk. A 0 szám körüli Taylor sorfejtéssel azt kapjuk, hogy $\log R(t) = \frac{t^2}{2} + \frac{\alpha}{6}t^3 + \cdots$, $[\log R(t)]' = t + \frac{\alpha}{2}t^2 + \cdots$, az $x = [\log R(t)]'$ egyenlet megoldásának sorfejtése $t = x - \frac{\alpha}{2}x^2 + \cdots$. Innen a 10. feladat képletében szereplő exponenciális tag $e^{-n(tx - \log R(t))} = e^{-n(\frac{x^2}{2} - \frac{\alpha}{6}x^3 + \cdots)} = e^{-nx^2/2}e^{-nx^3\lambda(x)}$ alkalmas analitikus $\lambda(\cdot)$ függvénnyel. Másrészt $e^{-nx^2/2} \sim \sqrt{2\pi n}x[1 - \Phi(\sqrt{n}x)]$ egy rögzített $x > 0$ számra.

A pre-exponenciális faktor a két aszimptotikában eltér. Ez mind a két esetben $n^{-1/2}$ nagyságrendű. De míg a 10. feladatban $n^{-1/2}$ egy bonyolultan megadható kifejezéssel és egy $(1 + o(1))$ hibafaktorral van megszorozva, (bizonyos simasági feltételek teljesülése esetén $o(1)$ helyett $O(n^{-1/2})$-t is írhatunk), a 21. feladatban a hibatag $O(1)$. Tehát ebben az esetben az aszimptotika kevésbé pontos. Ekkor ugyanis a pre-exponenciális tagot nem számoltuk ki elég pontosan. Finomabb számolással és a 10. feladat bizonyításához hasonlóan a Berry-Esseen egyenlőtlenség helyett független valószínűségi változók összegének eloszlására jobb becslést alkalmazva a 21. feladat becslése élesíthető, és az $\left(1+O\left(x+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$ faktor helyett $(1+x\mu(x)+o(x)+O(n^{-1/2}))$ írható alkalmas $\mu(x)$ analitikus függvénnyel.

A következő feladatban, amely tulajdonképpen a 21. feladat következménye, leírjuk, hogy milyen pontos a $P(S_n > \sqrt{n}y)$ valószínűségre adott normális közelítés, ha y nagy, de nem túl nagy.

22.) Teljesüljenek a 21. feladatban megadott feltételek. Ekkor ennek a feladatnak a jelölésével

$$P\left(S_n > \sqrt{n}y\right) = (1-\Phi(y))\exp\left\{O\left(\frac{1+y^3}{\sqrt{n}}\right)\right\}, \quad \text{ha } 0 \le y \le \varepsilon\sqrt{n},$$

ahol $O(\cdot)$ egyenletes az y és n változóban. Továbbá

$$P(S_n > nx+z) \le \text{const.}\sqrt{n}\; P(S_n > nx)e^{-tz}, \quad \text{ha } 0 \le x \le \varepsilon,$$

ahol $t>0$ a $[\log R(t)]' = x$ egyenlet megoldása, és z tetszőleges valós szám.

A 22. feladat második állítása akkor érdekes, ha z viszonylag nagy szám, és ezért $e^{-tz} \ll \frac{1}{\sqrt{n}}$.

A 22. feladat feltételeit lehet némileg gyengíteni. Elég feltenni, hogy az $R(t) = Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvény véges kis pozitív $t>0$ számokra, az $R(t)$ függvény viselkedéséről negatív t argumentumokra e feladat állításának bizonyításához nem kell semmit sem feltenni. Ha a 21. feladat állítását gyengítjük, a benne szereplő $\lambda(x)$ függvény analitikussága helyett megelégszünk enyhébb simasági feltételekkel, akkor elég az $R(t)$ függvény végességét nem negatív t számokra megkövetelni. Ez a feltétel viszont nem hagyható el, mint az a 15. feladat után tett megjegyzésből következik. Felmerülhet a kérdés, mit lehet mondani akkor, ha $Ee^{t\xi_1} = \infty$ minden $t>0$ számra, vagy ami ezzel ekvivalens, akkor ha a ξ_1 valószínűségi változó $F(t)$ eloszlásfüggvénye kielégíti az $1-F(x) \ge \text{const.}(\varepsilon)e^{-\varepsilon x}$ egyenlőtlenséget minden $\varepsilon > 0$ és $x > 0$ számra. Ekkor a $P(S_n > nx(n))$ valószínűségre a 21. feladathoz hasonló becslést lehet adni abban az esetben, ha $x(n)$ elég gyorsan tart 0-hoz. Annak a $[0, x(n)]$ sávnak a nagysága ahol ilyen becslés adható, attól függ, hogy az $1-F(x)$ milyen gyorsan tart 0-hoz $x \to \infty$ esetén. A bizonyítás, amelyet itt nem tárgyalunk, az előző feladatok bizonyításának természetes adaptációja a ξ_k, $1 \le k \le n$, valószínűségi változók megfelelő csonkításával kombinálva. A csonkított valószínűségi változók részletösszegeit jól lehet becsülni a tárgyalt módszerekkel, a ξ_k-k túl nagy értékeinek hatását elég durva becslések segítségével vizsgálni. A csonkítási szint jó megválasztásával, amely az $F(x)$ eloszlás viselkedésétől függ a végtelenben, éles eredményeket lehet kapni.

Ha a ξ_1 valószínűségi változó eloszlásáról a 21. feladat feltételén kívül szép simasági feltételeket is teszünk, akkor nemcsak a $F_n(x) = P(S_n < nx)$ eloszlásfüggvényre, hanem annak sűrűségfüggvényére is jó aszimptotikus formulákat lehet felírni. Ez lesz a következő feladat állítása. Emlékeztetőül: Ha az $F(\cdot)$ eloszlásfüggvény $\varphi(t)$ karakterisztikus függvénye integrálható, akkor az F eloszlásfüggvénynek létezik korlátos sűrűségfüggvénye, mint az az inverz Fourier transzformációs formulából kiolvasható. Ezért az F függvény folytonosságára a karakterisztikus függvény, illetve annak analitikus folytatásának segítségével is jó feltétel adható.

23.) Teljesüljenek a 21. feladatban megadott feltételek. Alkalmazzuk ennek a feladatnak a jelöléseit. Tegyük fel azt is, hogy létezik olyan $K > 0$ és $k > 0$ egész szám, amelyre $|t| < \alpha$ esetén $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t + is)|^k \, ds \le K$. Jelölje $f_n(x)$ az $F_n(x) = P(S_n \le nx)$ eloszlás (tehát független egyforma eloszlású valószínűségi változók átlagának) sűrűségfüggvényét. Ekkor

$$\begin{aligned} f_n(x) &= e^{-nx^3\lambda(x)} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi(1 + x\mu(x))}} e^{-nx^2/2} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \sqrt{n}\varphi(\sqrt{n}x) \exp\left\{O\left(\frac{1 + (\sqrt{n}x)^3}{\sqrt{n}}\right)\right\}, \quad \text{ha } |x| \le \varepsilon, \end{aligned}$$

ahol $\mu(x)$ alkalmas analitikus függvény, $\lambda(x)$ ugyanaz az analitikus függvény, mint amelyik a 21. feladatban szerepel, és $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ a standard normális sűrűségfüggvény.

$$f_n\left(x + \frac{z}{n}\right) \le \text{const.}\, f_n(x) e^{-tz}, \quad \text{ha } 0 < x \le \varepsilon$$

tetszőleges z számra, ahol $t > 0$ a $[\log R(t)]' = x$ egyenlet megoldása.

Ha a 21. feladat feltételei teljesülnek, és a ξ_1 valószínűségi változó rácsos eloszlású, és egy $\{a + lh,\ l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$, $h > 0$, halmaz az a legkisebb szélességű rács, amelyre a ξ_1 valószínűségi változó eloszlása koncentrálódik, akkor a $p^{(n)}(x) = P(S_n = x)$ valószínűségekre a következő aszimptotikus formula érvényes:

$$\begin{aligned} p^{(n)}(x) &= \exp\left\{-\frac{x^3}{n^2}\lambda\left(\frac{x}{n}\right)\right\} \frac{1}{h\sqrt{2\pi n\left(1 + x\mu\left(\frac{x}{n}\right)\right)}} e^{-x^2/2n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\ &= \frac{\varphi\left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)}{h\sqrt{n}} \exp\left\{O\left(\frac{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{n}}\right)^3}{\sqrt{n}}\right)\right\}, \quad \text{ha } x = a + lh,\ |x| \le n\varepsilon, \end{aligned}$$

ahol $\mu(x)$ alkalmas analitikus függvény, és $\lambda(x)$ ugyanaz az analitikus függvény mint amelyik a 21. feladatban szerepel. Továbbá,

$$p^{(n)}\left(x + kh\right) \le \text{const.}\, p^{(n)} n(x) e^{-tkh}, \quad \text{ha } x = a + lh,\ |x| \le n\varepsilon,$$

ahol t a $[\log R(t)]' = \frac{x}{n}$ egyenlet megoldása.

Megoldások.

1.) A Stirling formula szerint, $n! = \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n(1+o(1))$. $S_n = 0$ akkor és csak akkor, ha a ξ_j valószínűségi változók közül $k = np$ darab vesz fel $1-p$ és $n-k = n(1-p)$ vesz fel $-p$ értéket. Az ilyen $\xi_1,\dots,\xi_n$ sorozatok száma $\binom{n}{k}$, és a Stirling formula alapján $\binom{n}{k} = \sqrt{\frac{n}{2\pi k(n-k)}}\frac{n^n}{k^k(n-k)^{n-k}}(1+o(1)) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}p^{-np}(1-p)^{-n(1-p)}$. Ha $P(\xi_j = 1-p) = 1 - P(\xi_j = -p) = p$, akkor $P(S_n = 0) = \binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}$, ha pedig $P(\xi_j = 1-p) = 1 - P(\xi_j = -p) = \frac{1}{2}$, akkor $P(S_n = 0) = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi np(1-p)n}}e^{n(H(p)-\log 2)}$. Az np 1-t tartalmazó 0–1 sorozatok száma $\binom{n}{k} = \frac{1+o(1)}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}p^{-np}(1-p)^{-n(1-p)} = \frac{e^{nH(p)}}{\sqrt{2\pi p(1-p)n}}(1+o(1))$.

2.) Mivel az $f(x) = x\log x$ függvényre, $f'(x) = \log x + 1$, $f''(x) = \frac{1}{x} > 0$ $x > 0$ esetén, ezért $f(x)$ szigorúan konvex, és

$$p_j \log p_j \ge \frac{1}{k}\log\frac{1}{k} + \left(p_j - \frac{1}{k}\right)\left(\log\frac{1}{k} + 1\right)$$

és az egyenlőség csak $p_j = \frac{1}{k}$ esetén teljesül. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva $j = 1,\dots,k$-ra kapjuk, hogy $-H(p_1,\dots,p_k) \ge \log\frac{1}{k}$, és egyenlőség csak $p_j = \frac{1}{k}$ esetén van. Ez a jobboldali egyenlőtlenség. A baloldali egyenlőtlenség nyílvánvaló, mert $-p\log p > 0$, ha $0 < p < 1$.

3.)

$$P(S_n \ge nx) = P\left(e^{tS_n} \ge e^{tnx}\right) \le Ee^{tS_n}e^{-ntx} = \prod_{k=1}^{n} Ee^{t\xi_k}e^{-ntx} \le e^{n(\log R(t) - tx)}.$$

4.) Mivel $\varphi_n(t) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} P(S_n = k)e^{itk} = Ee^{itS_n} = \left(Ee^{it\xi_1}\right)^n = \varphi(t)^n$, a Fourier sor k-ik együtthatóját meghatározó képletből következik a $p^{(n)}(k) = P(S_n = k)$ valószínűséget meghatározó formula.

Mivel $p_k \ge 0$, minden k-ra, és $\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} p_k = 1$, ezért $|\varphi(t)| = 1$ akkor és csak akkor, ha létezik olyan α, hogy $e^{ikt} = e^{i\alpha}$, ha $\{k \in \mathcal{K}\}$, ahol $\mathcal{K} = \{k\colon p_k > 0\}$. Válasszzunk egy tetszőleges $k_0 \in \mathcal{K}$ számot, és legyen $\mathcal{K}' = \{k - k_0\colon k \in \mathcal{K}\}$. Ekkor $0 \in \mathcal{K}'$, és $|\varphi(t)| = 1$ akkor és csak akkor, ha $e^{ikt} = 1$ minden $k \in \mathcal{K}'\}$ számra. Ez csak úgy lehetséges, ha $t = 2\pi\frac{p}{q}$, és q osztható minden $k \in \mathcal{K}'$-vel. Ha a $\mathcal{K}'$-beli elemek legnagyobb közös osztója 1, akkor $t = 0$-n kívül nincs $-\pi \le t < \pi$, amelyre $|\varphi(t)| = 1$, ha pedig a legnagyobb közös osztó $q > 1$, akkor a $t = \frac{2p\pi}{q}$, $-\frac{q}{2} \le p < q$ számok (és csak ezek a számok) ilyenek.

$\varphi^{(l)}(0) = \sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} i^l k^l P(\xi_1 = k) = i^l E\xi_1^l$. Innen következik a feladat utolsó állítása is.

5.) Mivel $\log\varphi(0)=0$, $[\log\varphi(0)]'=iE\xi_1$, és $[\log\varphi(0)]''=-\frac{1}{2}\mathrm{Var}\,\xi_1$, ezért a második tagig végzett Taylor sorfejtés adja, hogy $|\varphi^n)t)|=e^{n\Re\log\varphi(t)}\le e^{-n\mathrm{Var}\,\xi_1 t^2/3}$, ha $|t|\le\varepsilon$ alkalmas $\varepsilon>0$-val. Másrészt, $|\varphi(t)|<1-\delta$ alkalmas $\delta=\delta(\varepsilon)$-nal, ha $\varepsilon\le|t|\le\pi$. Innen $|\int_{\varepsilon(n)\le|t|\le\pi}e^{itk}\varphi^n(t)\,dt|\le e^{-\mathrm{const.}\,n\varepsilon(n)^2}$. Innen és a $p_n(k)$-ra az előző feladatban adott becslésből következik a feladat első állítása.

A $\log\varphi(t)$ függvény Taylor sorfejtéséből adódik, hogy $\log\varphi(t)=itE\xi_1-\frac{t^2}{2}\mathrm{Var}\,\xi_1+O(t^3)$, $\varphi(t)^n=\exp\left\{inE\xi_1 t-\frac{nt^2}{2}\mathrm{Var}\,\xi_1+O(nt^3)\right\}$, ha $|t|\le n^{-1/6}$. Innen következik a feladat második állítása.

Az előző két állításból következik, hogy

$$\begin{aligned}
P(S_n=k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-itk}\varphi(t)^n\,dt\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-n^{-1/6}}^{n^{-1/6}}\exp\left\{-itk+itnE\xi_1-\frac{nt^2}{2}\mathrm{Var}\,\xi_1\right\}\left(1+O(nt^3)\right)\,dt\\
&\qquad+O\left(e^{-\mathrm{const.}\,n^{2/3}}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi}\int_{-n^{1/3}}^{n^{1/3}}\exp\left\{-i\frac{ku}{\sqrt{n}}+i\sqrt{n}uE\xi_1-\frac{u^2}{2}\mathrm{Var}\,\xi_1\right\}\left(1+O\left(\frac{u^3}{\sqrt{n}}\right)\right)\frac{du}{\sqrt{n}}\\
&\qquad+O\left(e^{-\mathrm{const.}\,n^{2/3}}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-i\frac{ku}{\sqrt{n}}+i\sqrt{n}uE\xi_1-\frac{u^2}{2}\mathrm{Var}\,\xi_1\right\}du+O\left(\frac{1}{n}\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2\pi n\mathrm{Var}\,\xi_1}}e^{-(k-nE\xi_1)^2/2n\mathrm{Var}\,\xi_1}+O\left(\frac{1}{n}\right).
\end{aligned}$$

Ha a ξ_1 valószínűségi változó egy d szélességű rácsra van koncentrálva, akkor a 4.) feladat állítása a következőképpen módosul:

$$p^{(n)}(kd)=\frac{d}{2\pi}\int_{-\pi/d}^{\pi/d}e^{-ikt}\varphi^n(t)\,dt,\quad k=0,\pm1,\pm2,\dots,$$

és innen az előző számolás természetes módosításával

$$P(S_n=kd)=\frac{d}{\sqrt{2\pi n\mathrm{Var}\,\xi_1}}e^{-(kd-nE\xi_1)^2/2n\mathrm{Var}\,\xi_1}+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Megjegyzés: A feladat eredménye alkalmas (momentum) feltételek mellett élesíthető, és ilyen módon megkapható az ún. Edgeworth sorfejtés a sűrűségfüggvényre. Ha a karakterisztikus függvény logaritmusára több tagú sorfejtést alkalmazunk, akkor a karakterisztikus függvényre egy pontosabb

$$\varphi(t)^n=e^{-nt^2/2}\left(1+\sum_{j=3}^{l}c_j n^{-(j-2)/2}t^j+O(n^{(l-1)/2})\right)$$

alakú becslést kapunk. (Feltesszük az egyszerűség kedvéért, hogy $E\xi_1 = 0$, és $E\xi_1^2 = 1$.) A karakterisztikus függvény pontosabb aszimptotikája segítségével a $p_n(k)$ valószínűséget kifejező integrálra is pontosabb becslést adhatunk. Ez

$$p_n(k) = \frac{e^{-k^2/2n}}{\sqrt{2\pi n}} \left(1 + \sum_{j=3}^{l} \bar{c}_j n^{-(j-2)/2} H_j \left(\frac{k}{\sqrt{n}} \right) + O(n^{(l-1)/2}) \right)$$

alakú, ahol H_j a j-ik Hermite polinom. (Ahhoz, hogy egy ilyen tipusú becslést bebizonyítsunk érdemes észrevenni, hogy $i^j \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} t^j e^{itx} e^{-t^2/2}\, dt = \frac{d^j}{dx^j} e^{-x^2/2} = H_j(x) e^{-x^2/2}$.)

6.) A kívánt azonosság bizonyításához használjuk fel a $p_n(k)$ valószínűségekre a 4. feladatban megadott kifejezést,és azt hogy

$$\oint_{\mathcal{C}} e^{-ikz} \varphi^n(z)\, dz = 0 \tag{a}$$

feltéve, hogy a $\mathcal{C}$ görbe, illetve annak belseje egy olyan tartomány belsejében van, ahova a $\varphi(t)$ függvény analitikusan kiterjeszthető. Válasszuk a $\mathcal{C}$ görbét a következő módon: Álljon a $\mathcal{C}$ a következő vízszintes és függőleges szakaszokból: $\mathcal{C} = [-\pi, \pi] \cup [\pi + i \cdot 0, \pi + is] \cup [\pi + is, -\pi + is] \cup [-\pi + is, -\pi + i \cdot 0]$. (Megjegyezzük, hogy bár a fenti görbe $[-\pi, \pi]$ darabja nincs feltétlenül a $\varphi(t)$ függvény analiticitási tartományának belsejében, lehetséges, hogy annak csak a határán van, viszont mivel a $\varphi(z)$ függvény korlátos $0 \geq \Re z > -\varepsilon$ halmazon elég kis $\varepsilon > 0$-ra, ezért a fenti körintegrál ekkor is 0.) Továbbá, mivel a karakterisztikus függvény analitikus kiterjesztése is teljesíti a $\varphi(z) = \varphi(z + 2\pi)$ periodicitási feltételt, ezért $\int_{\pi+i0}^{\pi+is} + \int_{-\pi+is}^{-\pi+i0} e^{-ikz} \varphi^n(z)\, dz = 0$, ezért az (a) relációból és a $p_n(k)$ kifejezésre a 4. feladatban megadott képletből következik az erre a kifejezésre ebben a feladatban megadott kifejezés.

Mivel a vizsgált valószínűségi változók nem koncentrálódnak egy egynél nagyobb rácsszélességű rács eltoltján a 5. feladat bizonyításához hasonlóan, (felhasználva, hogy $|e^{ik(t+is)}| = e^{-ks}$, $\varphi(t+is) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(k) e^{ik(t+is)}$, $\varphi(is) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p(k) e^{-ks}$, hogy $|\varphi(t+is)| < \varphi(is)$ ha $|t| \leq \pi$, és $t = 0$. Továbbá mivel a $\varphi(t+is)$ függvény folytonos, ezért minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, hogy $\sup_{\varepsilon \leq |t| \leq \pi} |\varphi(t + is)| < e^{-\delta} \varphi(is)$, ahonnan

$$\sup_{\varepsilon \leq t \leq \pi} |e^{-i(k(s+it)} \varphi^n(s + it)| \leq e^{-n\psi(s)+k-n\delta}.$$

Ezért

$$p^{(n)}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left\{ -n \left(\psi(s - it) - \frac{k}{n}(s - it) \right) \right\} dt + O\left(e^{-n(\psi(s)+\delta)+ks} \right). \tag{b}$$

A nyeregpont módszer azt sugallja, hogy az előző képletben az integrálban szereplő s paramétert válasszuk úgy, hogy az exponensben levő kifejezés deriváltja legyen 0 az $s+i\cdot 0$ pontban. Ez a meggondolás vezet a $\psi'(s)=\frac{k}{n}=\alpha$ egyenlethez.

Egyszerű számolás adja, hogy $\psi'(s)=-i\frac{\varphi'(is)}{\varphi(is)}$, $\psi''(s)=\frac{\varphi(is)\varphi''(is)-\varphi'(is)^2}{\varphi^2(is)}$, és $\varphi'(is)=iE\xi_1e^{-s\xi_1}$, $\varphi''(is)=-E\xi_1^2e^{-s\xi_1}$. Továbbá $\varphi'(is)^2>\varphi(is)\varphi''(is)$, mivel ez az egyenlőtlenség ekvivalens az $\left(E\xi_1e^{-s\xi_1}\right)^2<E\varepsilon^{-s\xi_1}E\xi_1^2e^{-s\xi_1}$ egyenlőtlenséggel, és ez utóbbi egyenlőtlenség a Cauchy–Schwartz egyenlőtlenség következménye (szigorú egyenlőtlenséggel, ha a ξ_1 valószínűségi változó nem konstans.) (Megjegyezzük, hogy más jelőléssel ez az érvelés jelenik meg a 8. feladat bizonyításában is.) Innen $\psi(s)''<0$, Innen a $\psi'(s)$ függvény szigorúan monoton csökken, $\psi(s)$ szigorúan konkáv, és a $\psi'(s)=\alpha$ egyenletnek legfeljebb egyetlen megoldása van. (Ha $\alpha>E\xi_1$, akkor az s megoldásra $s<0$.) A (b) kifejezés becsléséhez alkalmazzunk Taylor sorfejtést az integrál exponensében a t változó szerint.

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t}\left(\psi(s-it)-\frac{k}{n}(s-it)\right)\bigg|_{t=0}=0,\\
&\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\psi(s-it)-\frac{k}{n}(s-it)\right)\bigg|_{t=0}=-\psi''(s)>0.
\end{aligned}$$

Ezért $\psi(s-it)-\frac{k}{n}(s-it)=\psi(s)-\frac{k}{n}s-\frac{\psi''(s)}{2}t^2+O(t^3)$. Innen és a (b) formulából

$$\begin{aligned}
p^{(n)}(k)&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\exp\left\{-n\left(\psi(s)-\frac{ks}{n}-\frac{\psi''(s)}{2}t^2+O(t^3)\right)\right\}dt\\
&\qquad+O\left(e^{-n(\psi(s)+\delta)+ks}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-\varepsilon\sqrt{n}}^{\varepsilon\sqrt{n}}\exp\left\{-n\psi(s)+ks+\frac{\psi''(s)}{2}t^2+O\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right)\right\}dt\\
&\qquad+O\left(e^{-n(\psi(s)+\delta)+ks}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-n^{1/6}}^{n^{1/6}}\exp\left\{-n\psi(s)+ks+\frac{\psi''(s)}{2}t^2+O\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right)\right\}dt\\
&\qquad+O\left(e^{-n\psi(s)+ks-\text{const.}\,n^{1/3})}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-n^{1/6}}^{n^{1/6}}\exp\left\{-n\psi(s)+ks+\frac{\psi''(s)}{2}t^2\right\}\left(1+O\left(\frac{t^3}{\sqrt{n}}\right)\right)dt\\
&\qquad+O\left(e^{-n(\psi(s)+ks-\text{const.}\,n^{1/3}}\right)\\
&=\frac{1}{2\pi\sqrt{n}}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left\{-n\psi(s)+ks+\frac{\psi''(s)}{2}t^2\right\}dt+O\left(\frac{e^{-n\psi(s)+ks}}{n}\right)\\
&=\frac{e^{-n\psi(s)+ks}}{\sqrt{2\pi n|\psi''(s)|}}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).
\end{aligned}$$

Innen következik a feladat fő állítása. Ez alkalmazható az 1. feladatban alkalmazott példában. Ha $P(\xi_j = 1-p) = 1 - P(\xi_j = -p) = p$, $0 < p < 1$, akkor némi számolás adja, hogy a $\psi(s)' = 0$ egyenlet megoldása az $s = 0$ pont. Ha $P(\xi_j = 1-p) = 1 - P(\xi_j = -p) = \frac{1}{2}$, akkor $\varphi(is) = \frac{1}{2}\left[e^{-(1-p)s} + e^{ps}\right]$. A keresett s pontot meghatározó $\psi'(s) = 0$ egyenlet ekvivalens a $\varphi'(s) = 0$ egyenlettel, és némi számolással kapjuk, hogy a megoldás $s = \log\frac{1-p}{p}$. Innen $\psi(s) = -\log\varphi(s) = \log 2 - \log\left(e^{-(1-p)s} + e^{ps}\right) = \log 2 - \log\left[\left(\frac{1-p}{p}\right)^{p-1} + \left(\frac{1-p}{p}\right)^{p}\right] = \log 2 - \log\left(\frac{1-p}{p}\right)^{p} - \log\left(1 + \frac{p}{1-p}\right) = \log 2 - p\log\frac{1-p}{p} - \log\frac{1}{1-p} = \log 2 - H(p)$. Innen, mivel esetünkben $k = 0$ $e^{-n\psi(s)+k} = e^{n(H(p)-\log 2)}$. Némi számolással kapjuk, hogy $\psi''(s) = -\frac{e^{-s}}{(1+e^{-s})^2} = -p(1-p)$ az általunk választott s számmal. Ezért a 6. feladatban adott képlet a $p_n(k)$ valószínűségre megadja az első feladat eredményét jobb maradéktaggal. ($O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ maradéktag szerepel $o(1)$ helyett.)

7.) $Ee^{s\bar{S}_n} = Ee^{s(\bar{\xi}_1+\cdots+\bar{\xi}_n)} = \left(Ee^{s\bar{\xi}_1}\right)^n = \bar{R}(s)^n$, és

$$\bar{R}(s) = \int e^{sx}\bar{F}(\,dx) = \frac{1}{R(t)}\int e^{sx}e^{tx}F(\,dx) = \frac{R(t+s)}{R(t)}.$$

Innen $Ee^{s\bar{S}_n} = \frac{R^n(t+s)}{R^n(t)}$. Hasonlóan $Ee^{is\bar{S}_n} = \frac{R^n(t+is)}{R^n(t)}$. Másrészt,

$$\begin{aligned}1 - \bar{F}_n(x) = P(\bar{S}_n \ge x) &= \int_{u_1+\cdots+u_n\ge x}\bar{F}(\,du_1)\dots\bar{F}(du_n)\\ &= \frac{1}{R(t)^n}\int_{u_1+\cdots+u_n\ge x} e^{t(u_1+\cdots+u_n)}F(\,du_1)\dots F(du_n) = \frac{\int_{[x,\infty)} e^{tu}F_n(\,du)}{R(t)^n}.\end{aligned}$$

Az utolsó azonosság a következő tényből következik: Ha $\mathbf{T}$ mértéktartó leképezés egy $(X,\mathcal{A},\mu)$ térből egy $(Y,\mathcal{B},\nu)$ térbe, azaz tetszőleges mérhető $B \subset Y$-ra $\nu(B) = \mu(\mathbf{T}^{-1}B)$, akkor tetszőleges az $(Y,\mathcal{B},\nu)$ téren értelmezett, mérhető, integrálható f függvényre $\int_Y f(y)\mu(dy) = \int_X f(\mathbf{T}x)\mu(\,dx)$. Ezt a tételt használjuk $(X,\mathcal{A},\mu) = (R^n,\mathcal{B}_n,F(du_1)\cdots F(du_n))$, $(Y,\mathcal{B},\nu) = (R^1,\mathcal{B}_1,F_n(du))$, $\mathbf{T}(u_1,\dots,u_n) = u_1 + \cdots + u_n$, és $f(u) = e^{tuI(u\ge x}$ választással, ahol $\mathcal{B}_n$ és $\mathcal{B}_1$ a Borel σ-algebra R^1-en illetve R^n-en. Az $\bar{F}_n$-et F_n segítségével kifejező képletből következik az F_n-t a $\bar{F}_n$ segítségével kifejező képlet, mivel ezek ekvivalensek a $\frac{d\bar{F}_n(x)}{dF_n(x)} = \frac{e^{tx}}{R^n(t)}$ illetve $\frac{dF_n(x)}{d\bar{F}_n(x)} = \frac{R^n(t)}{e^{tx}}$ képlettel. Végül tetszőleges $t \ge 0$ számra

$$1 - F_n(nx) = R^n(t)\int_{[nx,\infty)} e^{-tu}\bar{F}_n(\,du) \le R^n(t)\int_{[nx,\infty)} e^{-tnx}\bar{F}_n(du) \le e^{n(\log R(t)-tx)}$$

Mivel ez minden $t \ge 0$ számra igaz, innen következik a bizonyítandó egyenlőtlenség. Az $\bar{F}(\cdot)$ karakterisztikus függvénye $\varphi_t(s) = \frac{R(t+is)}{R(t)}$, $\bar{F}_n^{(t)}$ karakterisztikus függvénye pedig $\varphi_t(s) = \frac{R^n(t+is)}{R^n(t)}$. Ezért a sűrűségfüggvényt kifejező inverz Fourier transzformáció alapján ha f_n jelöli az F_n és $\bar{f}_n$ a $\bar{F}_n$ eloszlásfüggvány sűrűségfüggvényét, akkor

$$f_n(nx) = R^n(t)e^{-tnx}\bar f_n(nx) = \frac{R^n(t)e^{-tnx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-isnx}\frac{R^n(t+is)}{R^n(t)}\,ds$$
$$\le \frac{R^n(t)e^{-ntx}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{R^n(t+is)}{R^n(t)}\right|\,ds = \frac{e^{-n(tx-\log R(t))}}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{R^n(t+is)}{R^n(t)}\right|\,ds.$$

Innen, infimumot véve minden $0\le t\le T$ számra következik a feladat utolsó állítása.

8.) Ha $R(t)=Ee^{t\xi}<\infty$ valamilyen $t>0$ számra, akkor $|Ee^{z\xi}|\le 1+Ee^{t\xi}<\infty$, $0\le \Re z\le t$ esetében. Továbbá a ξ valószínűségi változó $F(x)$ eloszlásfüggvényét approximálhatjuk alkalmas $F_N(x)$ függvényekkel, amelyeket a például a következőképp definiálhatunk: $F_N(x)=F\left(\frac{k}{N}\right)$, ha $\frac{k}{N}\le x<\frac{k+1}{N}$, $-N^2\le k<N^2$, $F_N(x)=0$, ha $x<-N$, $F_N(x)=F(N)$, ha $x\ge N$, ahol $F(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor $Ee^{z\xi}=\lim\limits_{N\to\infty}\int e^{zx}F_N(\,dx)$, és a konvergencia egyenletes a $\{z\colon\ \varepsilon<\Re z<t-\varepsilon\}$ tartományban tetszőleges $\varepsilon>0$-ra. Ezért az $R(z)=Ee^{z\xi}$ függvény is analitikus az adott tartományban, mivel előáll mint analitikus függvények egyenletes limesze. A fentiekből következik, hogy $R(t)$, $t\ge 0$, vagy az egész $\{t\colon\ t\ge 0\}$ félegyenesen vagy egy balról zárt jobbról nyílt vagy zárt intervallumon van értelmezve, a $t=0$ pontban folytonos, és analitikusan kiterjeszthető a kívánt tartományra. Mivel $R(0)=1$, az $R(t)$ nullabeli folytonosságából következik, hogy a $\log R(t)$ függvény is folytonos az origóban.

$R''(t)=\int x^2e^{tx}F(\,dx)$, $[\log R(t)]''=\frac{R'(t)^2-R(t)R''(t)}{R^2(t)}>0$, ha t az $R(\cdot)$ értelmezési tartományának belsejében van. Az utóbbi egyenlőtlenség azért igaz, mert a Cauchy–Schwartz egyenlőtlenség alapján $R'(t)^2=\left(E\xi e^{t\xi}\right)^2>Ee^{t\xi}E\xi^2e^{t\xi}=R(t)R''(t)$. Mivel a ξ valószínűségi változó nem konstans, az utolsó relációban is szigorú egyenlőtlenség írható. (Jegyezzük meg, hogy $E|\xi^k|e^{t\xi}<\infty$ minden $t>0$-ra az $R(t)$ függvény értelmezési tartományának belsejében és $k=1,2,\dots$-ra, bár $t=0$-ra ez az egyenlőtlenség nem feltétlenül teljesül, mivel $E\xi=-\infty$ is lehetséges, amikor $E|\xi|=\infty$. Ennek az állításnak az igazolásához azt vegyük észre, hogy $xe^{tx}>-K(t)$ alkalmas $K(t)>0$ konstanssal minden $x>-\infty$-re.) $R(0)=1$, és $\lim\limits_{t\to0,\,t>0}R'(t)=\lim\limits_{t\to0,\,t>0}E\xi e^{t\xi}=E\xi$ a monoton konvergencia tétel szerint, mivel $\lim\limits_{t\to0,\,t>0}\xi e^{t\xi}=\xi$, és $\xi e^{t\xi}$ a t változó monoton csökkenő függvénye. Mivel $\frac{R(h)-R(0)}{h}=R'(u)$ alkalmas $0\le u\le h$-val $h\to0$ határátmenettel kapjuk, hogy $R'(0)=E\xi$, és az $R'(t)$ függvény folytonos az origóban. Továbbá $[\log R(0)]'=\frac{R'(0)}{R(0)}=E\xi$, és a $[\log R(t)]'$ függvény is folytonos az origóban. Mivel $R'(0)=[\log R(0)]'=E\xi$, $R(t)$, és $\log R(t)$ szigorúan konvex (pozitív második deriválttal), $[tx-\log R(t)]'$ szigorúan monoton csökkenő függvény $x\ge E\xi$ esetén. Mivel $R(0)=1$ $\log R(0)=0$, ez igaz az $R(t)$ és $\log R(t)$ függvényekre is.

A feladatban definiált $\xi(t)$ valószínűségi változóra $E\xi(t)=\frac{\int xe^{tx}F(\,dx)}{R(t)}=\frac{R'(t)}{R(t)}=[\log R(t)]'$, és hasonlóan $\operatorname{Var}\xi(t)=\frac{R''(t)R(t)-R'(t)^2}{R(t)^2}=[\log R(t)]''$. A fenti azonosságok mindkét oldala véges, ha t az $R(\cdot)$ értelmezési tartományának a belsejében van. Ha a t szám az értelmezési tartomány végpontjában van az első azonosság két oldala akkor és csak akkor véges, ha $E\xi e^{t\xi} < \infty$. Nem nehéz belátni, hogy ebben az esetben $R''(t) = \lim_{u\to t} R''(u)$, és $R''(t) < \infty$ akkor és csak akkor, ha $E\xi^2 e^{t\xi} < \infty$. A második azonosság két oldala akkor és csak akkor véges, ha ez a feltétel teljesül.

Ha $R(t)$ egy jobbról nyílt $[0,T)$ intervallumon van értelmezve, akkor $\lim_{t\to T} R(t) < \infty$ nem lehetséges. Ebben az esetben ugyanis a monoton konvergenciatétel miatt $R(T) = \lim_{t\to T} R(t) < \infty$ lenne, (Az $e^{\xi t}$ függvények az $e^{\xi T}$ függvényhez konvergálnak $t \to T$ esetén, a $\xi \ge 0$ halmazon monoton növekvő, a $\xi < 0$ pedig halmazon monoton csökkenő módon.) Ezért az $R(t)$ függvény definiálva lenne az értelmezési tartomány jobboldali végpontjában is. Másrészt, ha $R(T) < \infty$, akkor mivel $e^{t\xi} \le e^{T\xi} + 1$, $0 < t < T$ esetén, $R(t) \le R(T) + 1$ $0 \le t \le T$ esetén, ezért a monoton $R(t)$ függvénynek létezik véges határértéke, ha $t \to T$. A monoton konvergenciatételből következik, hogy $\lim_{t\to T} R(t) = R(T)$ ebben az esetben.

Ha $R(t)$ egy véges, zárt $[0,T]$ intervallumban van értelmezve, akkor minden $h > 0$ számra teljesül a $\frac{R(T)-R(T-h)}{h} = R'(u)$ reláció valamilyen $T-h \le u \le T$ számmal. Mivel az $R'(t)$ függvény monoton nő, innen $h \to 0$ határátmenettel adódik, hogy $\lim_{t\to T} R'(t) = R'(T)$, ahol a két oldal egyszerre véges vagy végtelen. Ezzel a feladat minden állítását beláttuk.

9.) A (+) reláció alapján elég belátni, hogy $\frac{C_1}{\sqrt{n}} \le \int_{nx}^{\infty} e^{-t(y-nx)} \bar F_n(\,dy) \le \frac{C_2}{\sqrt{n}}$. A Berry–Esseen egyenlőtlenség alapján léteznek olyan (n-től független) $A > 0$, $B_1 > 0$ és $B_2 > 0$ számok, amelyekre $B_1 \le \frac{u+1}{\sqrt{n}} \bar F_n(x+u) - \bar F_n(x) \le B_2 \frac{u+1}{\sqrt{n}}$ $A \le u \le n^{1/4}$ esetén. Ugyanis a Berry–Esseen egyenlőtlenség alapján

$$|\bar F_n(x) - \Phi(0)| \le \frac{K}{\sqrt{n}}, \qquad \left| \bar F_n(x+u) - \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{n[\log R(t)]''}} \right) \right| \le \frac{K}{\sqrt{n}},$$

és $\frac{D_1 u}{\sqrt{n}} \le \Phi\left(\frac{u}{\sqrt{n[\log R(t)]''}} \right) - \Phi(0) < \frac{D_2 u}{\sqrt{n}}$ alkalmas $D_1 > 0$ és $D_2 > 0$ konstansokkal. Ezekből az egyenlőtlenségekből következik a kívánt egyenlőtlenség például $B_1 = \frac{D_1}{2}$, $B_2 = 2D_2$, $A = \max\left(\frac{2K}{D_1}, \frac{K}{D_2} \right)$ választással.

Innen $\int_{nx}^{\infty} e^{-t(y-nx)} \bar F_n(\,dy) \ge \int_{nx}^{nx+A} e^{-t(y-nx)} \bar F_n(\,dy) \ge e^{-tA}(\bar F_n(x+A) - \bar F_n(x) \ge \frac{C_1}{\sqrt{n}}$. Másrészt $\int_{nx}^{\infty} e^{-t(y-nx)} \bar F_n(\,dy) \le \int_{nx}^{nx+n^{1/4}} e^{-t(y-nx)} \bar F_n(\,dy) + e^{-tn^{1/4}}$, és parciális integrálással $\bar F_n^*(z) = \bar F_n(nx+z) - \bar F_n(nx)$ jelöléssel

$$\begin{aligned} \int_{nx}^{nx+n^{1/4}} e^{-t(y-nx)} \bar F_n(\,dy) &= \int_0^{n^{1/4}} e^{-tz} \bar F_n^*(\,dz) \\ &= \int_0^{n^{1/4}} te^{-tz} \bar F_n^*(z)\,dz - e^{-tn^{1/4}} \bar F_n^*(n^{1/4}) \le \int_0^{n^{1/4}} B_2 te^{-tz} \frac{z+1}{\sqrt{n}}\,dz \le \frac{C_2}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Innen következik az bizonyítandó egyenlőtlenség másik fele.

10.) Tekintsük először azt az esetet, amikor ξ_1 nem rácsos eloszlású. A (+) formula miatt elég az $\int_{nx}^{\infty} e^{-t(y-nx)} \bar{F}_n(\,dy)$ integrált jól becsülni. Alkalmazható a feladat előtt megfogalmazott tétel az $\bar{F}$ eloszlásra, és abból következik, hogy $\bar{F}_n(nx+u) - \bar{F}_n(nx) = \frac{u}{\sqrt{2\pi n[\log R(t)]''}} + o(n^{-1/2})$, ha $0 \le u < n^{1/5}$. Valóban, alkalmazva a (++) formulát $m_1 = x$ és $u = \frac{y}{\sqrt{n}\sigma}$ illetve $u = 0$ választással, és a két azonosságot kivonva egymásból kapjuk, hogy $\bar{F}_n(nx+u) - \bar{F}_n(x) = \Phi(\frac{u}{\sqrt{n}\sigma}) - \Phi(0) + o(n^{-1/2})$. (A számolásbam megjelenő többi tag betehető az $o(n^{-1/2})$ maradéktagba.) Másrészt $\Phi(\frac{u}{\sqrt{n}\sigma}) - \Phi(0) = \frac{u}{\sqrt{n}\sigma}\varphi(0) + O(\frac{u^2}{n}) = \frac{u}{\sqrt{2\pi n[\log R(t)]''}}\varphi(0) + o(n^{-1/2}))$, ha $0 \le u \le n^{1/5}$. Innen következik a fenti reláció.

Az előző feladat bizonyításához hasonlóan érvelve vezessük be $\bar{F}_n^*(z) = \bar{F}_n(nx + z) - \bar{F}_n(nx)$ jelölést. Parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\int_{nx}^{\infty} e^{-t(y-nx)} \bar{F}_n(\,dy) &= \int_{nx}^{nx+n^{1/5}} e^{-t(y-nx)} \bar{F}_n(\,dy) + O\left(e^{-tn^{1/5}}\right) \\
&= \int_0^{n^{1/5}} e^{-tz} \bar{F}_n^*(\,dz) + O\left(e^{-tn^{1/5}}\right) \\
&= \int_0^{n^{1/5}} te^{-tz} \bar{F}_n^*(z)\,dz - e^{-tn^{1/5}} \bar{F}_n^*(n^{1/5}) + O\left(e^{-tn^{1/5}}\right) \\
&= \int_0^{n^{1/5}} \frac{t(z + o(n^{-1/2}))e^{-tz}}{\sqrt{2\pi n[\log R(t)]''}}\,dz + O\left(e^{-tn^{1/5}}\right) \\
&= \frac{C}{\sqrt{n}}(1 + o(1)).
\end{aligned}$$

$C = \frac{1}{t\sqrt{2\pi n[\log R(t)]''}}$ konstanssal. Innen következik az állítás abban az esetben, ha ξ_1 nem rácsos eloszlású.

Ha ξ_1 rácsos eloszlású az $a + kh$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ rácson akkor $P(S_n \ge nx) = P(S_n \ge nx')$, mert S_n nem eshet az $[nx, nx')$ intervallumba. A $P(S_n \ge nx')$ valószínűség becsülhető a $p^{(n)}(kh + a)$, $a + kh \ge nx'$, valószínűségekre kapott aszimptotikus formulák összegezésének a segítségével. Ehelyett a $p^{(n)}(kh + a)$ valószínűségeket a 6. feladatban megadott inverz Fourier transzformált (illetve annak analitikus folytatásával) pontos formulák segítségével fejezzük ki. Így a kívánt valószínűséget ki tudjuk fejezni egy szinguláris integrál segítségével, és ezt az integrált a 6. feladat bizonyításában szereplő módszerhez hasonlóan tudjuk becsülni. A 6. feladatban bizonyított formulát, illetve annak természetes általánosítását az $a + kh$, $k = 0, \pm1, \pm2, \dots$ rácsra koncentrált mértékre átírva a $\varphi(z) = R(iz)$ azonosság segítségével kapjuk, hogy

$$p^{(n)}(a + kh) = \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-(a+kh)(t'+is)} R^n(t' + is)\,ds,$$

ahol t' a $[\log R(t')]' = x'$ egyenlet megoldása.

Jegyezzük meg, hogy mivel $|x-x'| = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $[\log R(t)]' = x$, $[\log R(t')]' = x'$, $\inf\limits_{a\le s\le b} [\log R(s)]'' > 0$, ha az $[a,b]$ intervallum az $R(t)$ függvény értelmezési tartományának belsejében van, $|t-t'| = O\left(\frac{1}{n}\right)$. Ezért t' az $R(\cdot)$ függvény értelmezési tartományának belsejében van, és a későbbi formulák érvényesek ezzel a t' paraméterrel is. Továbbá a benne szereplő $o(\cdot)$ hibatagok egyenletesen kicsik, ha t' a t szám kis környezetében van. A $p^{(n)}(a+kh)$ valószínűségekre kapott kifejezéseket összegezve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
1-F_n(nx') &= \sum_{k:\, a+kh\ge nx'} p^{(n)}(a+kh) \\
&= \sum_{k:\, a+kh\ge nx'} \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} e^{-(a+kh)(t'+is)} R^n(t'+is)\,ds \\
&= \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \sum_{j=0}^{\infty} e^{-(x'-jh)(t'+is)} R^n(t'+is)\,ds,
\end{aligned}$$

ahonnan a geometriai összeget zárt alakba írva kapjuk, hogy

$$1-F_n(nx') = R(t')^n e^{-nt'x'} \frac{h}{2\pi} \int_{-\pi/h}^{\pi/h} \frac{e^{-insx'}}{1-e^{-h(t'+is)}} \left(\frac{R(t'+is)}{R(t')}\right)^n ds.$$

Másrészt $\sup\limits_{\varepsilon<|s|\le\pi/h} \left|\frac{R(t'+is)}{R(t')}\right| < 1$ minden $\varepsilon > 0$ számra, mivel a ξ_1 valószínűségi változó egy (pontosan) h szélességű rácsra van koncentrálva, $[\log R(t')]'' > 0$, és

$$\begin{aligned}
\log \frac{R(t'+is)}{R(t')} &= \left\{ is[\log R(t')]' - \frac{s^2}{2}[\log R(t')]'' + O(s^3) \right\} \\
&= \left\{ isx' - \frac{s^2}{2}[\log R(t')]'' + O(s^3) \right\},
\end{aligned}$$

ha $|s| < \varepsilon$ egy kis $\varepsilon > 0$ számmal. Innen alkalmas $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$-val

$$\begin{aligned}
1-F_n(nx') &= R(t')^n e^{-nt'x'} \frac{h}{2\pi} \\
&\qquad \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\exp\left\{-n[\log R(t')]'' \frac{s^2}{2} + O(ns^3)\right\}}{1-e^{-h(t'+is)}}\,ds + O\left(e^{-n\delta}\right) \right) \\
&= R(t')^n e^{-nt'x'} \frac{h}{2\pi} \left(\int_{-n^{-1/6}}^{n^{-1/6}} \frac{\exp\left\{-n[\log R(t')]'' \frac{s^2}{2} + O(ns^3)\right\}}{1-e^{-h(t'+is)}}\,ds \right. \\
&\qquad \left. + O\left(e^{-\text{const.}\, n^{1/3}}\right) \right).
\end{aligned}$$

Ebből a becslésből valamint a $\frac{1}{1-e^{-h(t'+is)}} = \frac{1+O(s)}{1-e^{-ht'}}$ formulából

$$
\begin{aligned}
1 - F_n(nx') &= \exp\{n(\log R(t') - t'x')\} \frac{h}{2\pi(1-e^{-ht'})} \\
&\quad \left(\int_{-n^{-1/6}}^{n^{-1/6}} e^{-n[\log R(t')]'' s^2/2} (1 + O(s + ns^3)) \, ds + O\left(e^{-\text{const.}\, n^{1/3}}\right) \right) \\
&= \exp\{n(\log R(t') - t'x')\} \frac{h}{2\pi(1-e^{-ht'})} \\
&\quad \left(\int_{-n^{1/3}}^{n^{-1/3}} e^{-n[\log R(t')]'' s^2/2} \left(1 + O\left(\frac{s+s^3}{\sqrt{n}}\right)\right) ds \right. \\
&\qquad \left. + O\left(e^{-\text{const.}\, n^{1/3}}\right) \right) \\
&= \exp\{n(\log R(t') - t'x')\} \frac{h}{2\pi(1-e^{-ht'})} \\
&\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-n[\log R(t')]'' s^2/2} \, ds \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= \frac{h \exp\{n(\log R(t') - t'x')\}}{(1-e^{-ht'})\sqrt{2\pi[\log R(t')]''}} \left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).
\end{aligned}
$$

Innen és a $|t-t'| \le \text{const.}\, \frac{1}{n}$, $|x-x'| \le \text{const.}\, \frac{1}{n}$ becslésekből következik a feladat állítása rácsos eloszlású valószínűségi változókra is.

11.) A 8. feladat alapján $\sup_{t \ge 0} (\log tx - R(t)) > 0$, mivel $(tx - \log R(t))|_{t=0} = 0$ és $[tx - \log R(t)]'|_{t=0} > 0$, ha $x > E\xi_1$. A 7. feladatban felső becslést adtunk az $1 - F_n(nx)$ valószínűségre. Innen következik a feladat második állítása.

12.) Mivel a $\log R(t)$ szigorúan konvex, az értelmezési tartomány belsejében analitikus függvény, és $[\log R(0)]' = E\xi_1$, a $[\log R(t)]' = x$ egyenlet egyértelműen megoldható az adott feltételek mellett. Ha $\lim_{t\to\infty} [\log R(t)]' = z < \infty$, és $x > z$, akkor $[tx - \log R(t)]' > x - z > 0$ minden $t \ge 0$-ra, és $\log R(0) = 0$. Ezért $tx - \log R(t) > t(z-x)$, ahonnan $\lim_{t\to\infty} (tx - \log R(t)) = \infty$, és ebből következik a feladat utolsó állítása is.

13.) Tegyük fel indirekt módon, hogy $P(\xi_1 > z) > 0$. Ekkor létezik olyan $\varepsilon > 0$, amelyre $P(\xi_1 > z + 2\varepsilon) > 0$. Továbbá $\int_{-\infty}^{z+\varepsilon} e^{tx} F(\,dx) \le e^{t(z+\varepsilon)}$ és $R(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} F(\,dx) \ge e^{t(z+2\varepsilon)} P(\xi_1 > z + 2\varepsilon)$, ahonnan

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\int_{z+\varepsilon}^{\infty} e^{tx} F(\,dx)}{R(t)} = 1,$$

mivel

$$\frac{\int_{z+\varepsilon}^{\infty} e^{tx} F(\,dx)}{R(t)} \ge 1 - \frac{e^{t(z+\varepsilon)}}{R(t)} \ge 1 - \frac{e^{t(z+\varepsilon)}}{e^{t(z+2\varepsilon)} P(\xi_1 > z + 2\varepsilon)} \ge 1 - \text{const.}\, e^{-t\varepsilon}.$$

Innen

$$\lim_{t\to\infty}[\log R(t)]' = \lim_{t\to\infty}\frac{R'(t)}{R(t)} \ge \limsup_{t\to\infty}\frac{\int_{z+\varepsilon}^{\infty} xe^{tx}F(\,dx)}{\int_{z+\varepsilon}^{\infty} e^{tx}F(\,dx)}$$
$$\ge \limsup_{t\to\infty}\inf_{x\ge z+\varepsilon}\frac{xe^{tx}}{e^{tx}} = z+\varepsilon,$$

és ez ellentmond a feladat feltételeinek. (A fenti számolásban kihasználtuk, hogy $\lim\limits_{t\to\infty}\int_{-\infty}^{0} xe^{tx}F(\,dx) = 0$, mert $\lim\limits_{t\to\infty} xe^{tx} = 0$, ha $x\le 0$, és $|x|e^{tx}\le$ const., ha $x\le 0$, és $t\ge 1$.

Be akarjuk látni, hogy

$$\sup_{t>0}(tz-\log R(t)) = \lim_{t\to\infty}(tz-\log R(t)) = -\log P(\xi_1 = z).$$

A fenti állítás első azonossága nyílvánvaló, mert a $tz-\log R(t)$ függvény a t változó monoton növekvő függvénye a $[tz-\log R(t)]'>0$ reláció miatt. Továbbá $R(t)\ge P(\xi_1=z)e^{tz}$, ahonnan $tz-\log R(t)\le -\log P(\xi_1=z)$. Ezért a kívánt állítás bizonyításához elég belátni, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-ra

$$R(t)\le (P(\xi_1=z)+\varepsilon)\,e^{tz}\quad \text{ha } t\ge t(\varepsilon).$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a bizonyításához vegyük észre, hogy létezik olyan $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, amelyre $P(z-\delta<\xi_1\le z)\le P(\xi_1=z)+\frac{\varepsilon}{2}$. Továbbá, mivel $P(\xi_1>z)=0$

$$R(t)\le e^{t(z-\delta)} + P(z-\delta<\xi_1\le z)e^{tz}$$
$$\le e^{tz}\left(\frac{\varepsilon}{2}+P(z-\delta<\xi_1\le z)\right)\le (P(\xi_1=z)+\varepsilon)\,e^{tz},$$

ha $t>0$ olyan nagy, hogy $e^{-t\delta}\le\frac{\varepsilon}{2}$.

Ha $R(t)<\infty$ minden $t>0$ számra, $\lim\limits_{t\to\infty}[\log R(t)]' = z<\infty$, és $E\xi_1<x<z$, akkor a $[\log R(t)]'=x$ egyenlet megoldható, és ebben az esetben nemcsak a $(**)$, hanem az élesebb $(*)$ reláció is érvényes. Ha $x>z$, akkor $P(S_n\ge nx)=0$ minden $n\ge 1$-re, így $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n\ge nx)=\infty$, mert $P(\xi_1>x)=0$. A $(**)$ reláció ebben az esetben is igaz, mivel a 12. feladat állítása szerint $\sup\limits_{t\ge 0}(\log tx - R(t))=\infty$. Végül, ha $x=z$, akkor $P(S_n\ge nx)=P(\xi_1=z)^n$, ezért $\lim\limits_{n\to\infty}-\frac{1}{n}\log P(S_n\ge nz) = -\log P(\xi_1=z)=\sup\limits_{t\ge 0}(tz-\log R(t))$. A $(**)$ állítás tehát ebben az esetben is igaz.

14.) Belátjuk, hogy ha a feladat feltételei teljesülnek, akkor $\lim\limits_{t\to T}[\log R(t)]'=\infty$. Innen, továbbá a $[\log R(t)]'|_{t=0}=E\xi_1$ azonosságból, és abból, hogy a $[\log R(t)]'$ függvény folytonos és szigorúan monoton nő, következik, hogy a $[\log R(t)]'=x$, $x>E\xi_1$, egyenlet egyértelműen megoldható a $(0,t)$ intervallum belsejében. Ezért ebben az esetben nemcsak a $(**)$ hanem az élesebb $(*)$ reláció is teljesül az adott feltételek mellett.

Ha $R(t)$ egy jobbról nyílt intervallumban van értelmezve, akkor a 8. feladat alapján $\lim\limits_{t\to T} R(t)=\infty$. Ezért $\lim\limits_{t\to T}\log R(t)=\lim\limits_{t\to T}\int_0^t[\log R(s)]'\,ds=\infty$. Innen és a $[\log R(t)]'$ függvény monotonításából következik, hogy $\lim\limits_{t\to T}[\log R(t)]'=\infty$.

Ha $R(t)$ a a $[0,T]$ zárt intervallumban van értelmezve, és $R'(T)=\infty$ akkor a 8. feladat alapján $\lim\limits_{t\to T} R'(t)=\infty$, és $\sup\limits_{0\le t\le T} R(t)=R(T)<\infty$. Ezért $\lim\limits_{t\to T}[\log R(t)]'=\infty$.

15.) Először röviden leírom a bizonyítás fő gondolatát. Választhatunk olyan $[-K_1,K_2]$ intervallumot, amelyre nagy annak a valószínűsége, hogy egy ξ_j valószínűségi változó ebbe az intervallumba esik, és a ξ_j valószínűségi változó $E=E(K_1,K_2)$ feltételes várható értéke, feltéve, hogy $-K_1\le\xi_j\le K_2$, kisebb mint a. Válasszunk alkalmas K_1 és K_2 konstansokat valamint egy m pozitív egész számot, és tekintsük azt az eseményt, hogy az első m ξ_j valószínűségi változók mindegyike ebbe a $[-K_1,K_2]$ intervallumba esik. A paraméterek alkalmas választása esetén ennek az eseménynek viszonylag nagy a valószínűsége, és ennek teljesülése esetén az első m ξ_j valószínűségi változó átlaga közel van egy $E<a$ számhoz. Továbbá az $Ee^{t\xi_1}=\infty$ minden $t>0$ számra feltétel miatt létezik olyan $[b_1,b_2]$ intervallum, amelyre $b_1>b$, a $\left(\frac{b_2}{b_1}-1\right)$ szám kicsi, és annak a valószínűsége, hogy egy ξ_j valószínűségi változó a $[b_1,b_2]$ intervallumba esik viszonylag nagy. Definiáljuk azt az eseményt, hogy a ξ_j, valószínűségi változók $m<j\le n$ indexre ebbe a $[b_1,b_2]$ intervallumba esnek. Be fogjuk látni, hogy ha $m=\alpha n$, és a $0<\alpha<1$ számot az előbb bevezetett E és b_1, b_2 számoktól függően alkalmasan választjuk meg, akkor annak az eseménynek, hogy az első m illetve az utolsó $n-m$ valószínűségi változó a fent leírt módon viselkedik viszonylag nagy a valószínűsége, és ebben az esetben $\frac{S_n}{n}\in[a,b]$.

Tetszőleges $\varepsilon_1>0$ számhoz választhatunk olyan $K_1=K_1(\varepsilon_1)>0$ és $K_2=K_2(\varepsilon_1)>0$ számokat, amelyekre

$$P(\xi_1\in[-K_1,K_2])>e^{-\varepsilon_1}\quad\text{és } E_1=E(\xi_1|-K_1\le\xi_1\le K_2)\le a.$$

Valóban, elég nagy K_2 számra teljesül a $P(\xi_1\in[-K_2,K_2])>e^{-\varepsilon_1}$ feltétel. Választva egy elég nagy $K_1>K_2$ számot ha szükséges, az $E(\xi_1|\xi_1\le K_2)<E\xi_1\le a$ feltétel miatt elérhetjük, hogy a K_1,K_2 pár mind a két egyenlőtlenséget teljesítse. (Az $Ee^{t\xi_1}=\infty$ feltétel miatt igaz a $E(\xi_1|\xi_1\le K_2)<E\xi_1$ szigorú egyenlőtlenség. Vegyük észre azt is, hogy $g(u)=E(\xi_1|\xi_1\le u)$ az u változó monoton függvénye.) Rögzített $\varepsilon_1>0$ és pozitív egész m számra definiáljuk a következő $\mathbf{A}=\mathbf{A}(m,\varepsilon_1)$ halmazt:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}&=\mathbf{A}(m,\varepsilon_1)\\&=\left\{\omega\colon\, -K_1(\varepsilon_1)\le\xi_k(\omega)\le K_2(\varepsilon_1),\,1\le k\le m,\ \left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^m\xi_k(\omega)-E_1\right|\le\frac{b-a)}{5}\right\}.\end{aligned}$$

Azt állítjuk, hogy alkalmas $M(\varepsilon_1)$ küszöbszámmal $m \geq M(\varepsilon_1)$-re

$$P(\mathbf{A}(m,\varepsilon_1)) \geq \frac{1}{2}e^{-m\varepsilon_1}. \tag{c}$$

Valóban, $P(-K_1 \leq \xi_k \leq K_2,\ 1 \leq k \leq m) \geq e^{-m\varepsilon_1}$, és

$$P\left(\left|\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\xi_k - E_1\right| \leq \frac{b-a}{5}\middle| -K_1 \leq \xi_k \leq K_2,\ 1 \leq k \leq m\right) \geq \frac{1}{2},$$

mivel a ξ_k, $k = 1,\dots,m$ valószínűségi változók feltételesen független, egyforma eloszlású, korlátos valószínűségi változók a $-K_1 \leq \xi_k \leq K_2$, $1 \leq k \leq m$ feltétel mellett. Ezért az utolsó egyenlőtlenség következik a nagy számok törvényéből.

Tetszőleges $\varepsilon_2 > 0$ és $\varepsilon_3 > 0$ számokra végtelen sok egész $l > 0$ számra teljesül a

$$P\left((1+\varepsilon_2)^l < \xi_1 < (1+\varepsilon_2)^{l+1}\right) > e^{-(1+\varepsilon_2)^l\varepsilon_3} \tag{d}$$

egyenlőtlenség. Ellenkező esetben ugyanis az $Ee^{\varepsilon_3\xi_1/2} < \infty$ egyenlőtlenség teljesülne. Válasszunk a legkisebb $l = l(b) = l(b,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ egész számot, amely teljesíti az $(1+\varepsilon_2)^l > b$ egyenlőtlenséget és (d) relációt. Mivel a ξ_k, $k > m$, valószínűségi változók függetlenek az $\mathbf{A}(m,\varepsilon_1)$ halmaztól, a (c) és (d) tulajdonságokból következik, hogy

$$\begin{aligned} P\Big(\mathbf{A}(m,\varepsilon_1) \cap \Big\{\omega\colon\ &(1+\varepsilon_2)^{l(b)} \leq \xi_k(\omega) \leq (1+\varepsilon_2)^{l(b)+1},\ m < k \leq n\Big\}\Big) \\ &\geq \frac{1}{2}e^{-m\varepsilon_1-(n-m)(1+\varepsilon_2)^{l(b)}\varepsilon_3}, \end{aligned} \tag{d$'$}$$

ha $m \geq M(\varepsilon_1)$. Rögzített ε_1, ε_2, ε_3 és n számokra válasszuk az $m = m(n,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)$ számot $m = [n\alpha]+1$ alakban, ahol $[\cdot]$ egész részt jelöl, és α a következő egyenlet megoldása:

$$\alpha E_1 + (1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} = \frac{a+b}{2}.$$

Ekkor $0 < \alpha < 1$, ezért $0 < \lim\limits_{n\to\infty}\frac{m(n,\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)}{n} < 1$. Jegyezzük meg továbbá, hogy $E_1 \leq a$ és $(1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} \leq \frac{a+b}{2} - \bar{E}_1$, ahol $\bar{E}_1 = \min(E_1,0)$. Válasszunk $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{4}$-et a $K_1 = K_1(\varepsilon_1)$ és $K_2 = K_2(\varepsilon_1)$ paraméterek megválasztásában. Ez egyben meghatározza az $E_1 = E_1(\varepsilon_1)$ feltételes várható értéket is. Ezért igaz az $(1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} \leq \frac{a+b}{2} - \bar{E}_1$ egyenlőtlenség, és annak jobboldala nem függ az ε_2 és ε_3 számok értékeitől. Továbbá, mivel $\bar{E}_1 \leq E_1 \leq a$, ezért $\frac{a+b}{2} - \bar{E}_1 \geq \frac{b-a}{2} > 0$. Megmutatjuk, hogy az

$$\mathbf{A}(m,\varepsilon_1) \cap \Big\{\omega\colon\ (1+\varepsilon_2)^{l(b)} \leq \xi_k(\omega) \leq (1+\varepsilon_2)^{l(b)+1},\ m < k \leq n\Big\}$$

halmazon $\frac{S_n}{n} \in [a,b]$ az $\varepsilon_2 = \frac{b-a}{2a+2b-4\bar{E}_1} > 0$ választással. Vegyük ugyanis észre, hogy ekkor

$$\begin{aligned}\sum_{k=m+1}^{n} \xi_k &\le (n-m)(1+\varepsilon_2)^{l(b)+1} \\ &\le n(1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)+1} = n(1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} + n(1-\alpha)\varepsilon_2(1+\varepsilon_2)^{l(b)} \\ &\le n(1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} + n\varepsilon_2\left(\frac{a+b}{2} - \bar{E}_1\right) \\ &= n(1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} + n\frac{b-a}{4},\end{aligned}$$

és $\sum\limits_{k=m+1}^{n} \xi_k \ge (n-m)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} \ge n(1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} - \text{const.}$, ahol a konstans függhet az ε_2 és ε_3 paraméterektől. Ezekből az egyenlőtlenségekből, illetve az $\mathbf{A}(m,\varepsilon_1)$ halmaz és az α szám definiciójából következik a fenti állítás. Megmutatjuk, hogy az $\varepsilon_3 > 0$ szám alkalmas választásával elérhetjük azt, hogy annak a halmaznak, amelyen beláttuk, hogy $\frac{S_n(\omega)}{n} \in [a,b]$ viszonylag nagy legyen a valószínűsége. Legyen $\varepsilon_3 = \frac{\varepsilon}{2a+2b-4\bar{E}_1}$. Ekkor $m\varepsilon_1 + (n-m)(1+\varepsilon_2)^{l(b)}\varepsilon_3 \le \frac{n\varepsilon}{4} + n\varepsilon_3(1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} \le \frac{\varepsilon}{2}n$, mert $(1-\alpha)(1+\varepsilon_2)^{l(b)} \le \frac{a+b}{2} - \bar{E}_1$. Innen, illetve a (d$'$) relációból következik, hogy

$$P\left(\mathbf{A}(m,\varepsilon_1) \cap \{(1+\varepsilon_2)^{l(b)} \le \xi_k \le (1+\varepsilon_2)^{l(b)+1},\ m < k \le n\}\right) \ge \frac{1}{2}e^{-\varepsilon n}$$

elég nagy n-re. Mivel ezt az érvelést tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra meg lehet tenni, ebből a becslésből, illetve abból a tényből, hogy $\frac{S_n}{n} \in [a,b]$ ezen a halmazon, következik a feladat állítása.

16.) Legyen $z = [\log R(T)]'$. Ekkor a 8. feladat eredményei alapján a $[\log R(t)]'$ függvény monoton nő a $0 \le t \le T$ intervallumon, és $E\xi_1 < x < z$ esetén a $[\log R(t)]' = x$ egyenletnek van megoldása az $R(t)$ függvény értelmezési tartományának belsejében. Ebben az esetben nemcsak a $(**)$, hanem az erősebb $(*)$ reláció is teljesül. Ha $x \ge z$, akkor mivel $[tx - \log R(t)]' \ge 0$, $\sup\limits_{t\ge 0}(tx - \log R(t)) = \log Tx - R(T)$. Ezért a $(**)$ reláció még be nem bizonyított része azt állítja, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n \ge nx) = Tx - \log R(T)$, ha $x \ge z$. Ennek bizonyítása érdekében vezessük be a $\bar{F} = \bar{F}_T$ valószínűségi mértéket, amelyre $\bar{F}(dy) = \frac{e^{Ty}}{R(T)}F(dy)$. Legyenek $\bar{\xi}_1,\dots,\bar{\xi}_n$ független $\bar{F}$ eloszlású valószínűségi változók, és $\bar{S}_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\bar{\xi}_k$. A 7. feladat eredménye alapján az $\bar{S}_n$ véletlen összeg $\bar{F}_n$ eloszlása teljesíti az $\bar{F}_n(dy) = \frac{e^{Ty}}{R^n(T)}F_n(dy)$ relációt. Ezért $F_n(dy) = e^{-Ty}R^n(T)F_n(dy)$, és

$$\begin{aligned}P(S_n \ge nx) = R^n(T)\int_{nx}^{\infty} e^{-Ty}\bar{F}_n(dy) &\ge R^n(T)e^{-nTx}\int_{nx}^{n(x+\varepsilon)} e^{-T(y-nx)}\bar{F}_n(dy) \\ &\ge R^n(T)e^{-nT(x+\varepsilon)}P\left(\frac{\bar{S}_n}{n} \in [x, x+\varepsilon]\right)\end{aligned}$$

tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra. Mivel $Ee^{t\bar{\xi}_1} = \infty$, minden $t > 0$ esetén, (ellenkező esetben az $R(t)$ momentumgeneráló függvény kiterjeszthető lenne egy $(0, T')$, $T' > T$ intervallumra), $E\bar{\xi}_1 = \frac{E\xi_1 e^{T\xi_1}}{Ee^{T\xi_1}} = [\log R(T)]' = z$, a 15. feladat eredménye alapján tetszőleges $x \ge z$ és $\varepsilon > 0$-ra $P\left(\frac{\bar{S}_n}{n} \in [x, x+\varepsilon]\right) \ge e^{-n\varepsilon}$, ha $n > n(\varepsilon, x)$. Innen, és az előző egyenlőtlenségből minden $\varepsilon > 0$-ra $P(S_n \ge nx) \ge R^n(T)e^{-n(Tx+2\varepsilon)}$ ha $x \ge z$, $n > n(\varepsilon, x)$. Másrészt tudjuk, hogy $P(S_n \ge nx) \le R^n(T)e^{-nTx}$, (lásd például a 7. feladat eredményét). Innen következik a bizonyítandó állítás.

17.) Legyen az $F_a(x)$ eloszlásfüggvénye az $f_a(x) = C(a)e^{-x}x^{-a}$ függvény, ha $x > 0$, $f_a(x) = 0$, ha $x \le 0$, $C(a) = \int_0^\infty x^{-a}e^{-x}\,dx$. Az $R(t) = C(a)\int_0^\infty e^{-(1-t)x}x^{-a}\,dx$ a $t < 1$ argumentumokra van értelmezve, ha $a \le 1$, a $t \le 1$ számokra értelmezett, ha $a > 1$. Az $R'(1) = \int C(a)\int_0^\infty x^{-a+1}\,dx$ derivált akkor és csak akkor véges, ha $a > 2$.

18.) Ha $Ee^{t\xi_1} = \infty$ minden $t > 0$-ra, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n \ge nx) = 0$ a 15. feladat eredménye alapján, és $\sup\limits_{t\ge 0}(tx - \log R(t)) = \log R(0) = 0$. Ebben az esetben bebizonyítottuk az állítást, mert olyan $[a, b]$ intervallumot választva, amelyre $E\xi_1 \le x \le a$ felírhatjuk, hogy $0 \le \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n \ge nx) \le \lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n \in n[a, b]) = 0$. (Azt az esetet kell még külön tárgyalni, amelyikben $E\xi_1 = \infty$. Be lehet látni, hogy ekkor létezik olyan $\bar{\xi}_1$ valószínűségi változó, amelyre $P(\bar{\xi}_1 \le \xi_1) = 1$, $E\bar{\xi}_1 < \infty$, de $E\bar{\xi}_1^2 = \infty$, ezért $Ee^{t\bar{\xi}_1} = \infty$ minden $t > 0$ számra. Ekkor a feladat állítása igaz a $\bar{\xi}_j$ ezért a náluk nagyobb ξ_j valószínűségi változók összegére is.)

Tekintsük azt az esetet, amikor $Ee^{t\xi_1} < \infty$ elég kis $t > 0$-ra. Az állítást már beláttuk abban az esetben, ha $x > E\xi_1$. (Ez vonatkozik az $E\xi_1 = -\infty$ esetre is. Ezért a továbbiakban elég az $E\xi_1 > -\infty$ és $x \le E\xi_1$ esettel foglalkozni. Ennek az esetnek a vizsgálatában először megmutatjuk, hogy, ha $E\xi_1 < \infty$ és az $R(t) = Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvény véges elég kis $t > 0$-ra, akkor

$$\lim_{\substack{x > E\xi_1 \\ x\to E\xi_1}} \sup_{t\ge 0}(tx - \log R(t)) = 0. \tag{e}$$

Valóban, mivel $[tE\xi_1 - \log R(t)]'|_{t=0} = 0$ és $[tE\xi_1 - \log R(t)]'$ szigorúan monoton csökken, ezért minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, amelyre $E\xi_1 \le x \le E\xi_1 + \delta$ esetében

$$\begin{aligned}\sup_{t\ge 0}(tx - \log R(t)) &= \sup_{\varepsilon \ge t \ge 0}\left((tE\xi_1 - \log R(t)) + t(x - E\xi_1)\right) \\ &\le \sup_{\varepsilon\ge t\ge 0} t(x - E\xi_1) \le \varepsilon(x - E\xi_1) \le \varepsilon\delta.\end{aligned}$$

Mivel az utóbbi egyenlőtlenség igaz minden $\varepsilon > 0$-ra, és $0 \cdot x - \log R(0) = 0$, igaz az (e) állítás. Az (e) relációból és abból a tényből, hogy a feladat állítása igaz az $x > E\xi_1$ esetben következik, hogy minden $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $z > E\xi_1$, amelyre $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n \ge nz) \le \varepsilon$. Mivel $1 \ge P(S_n \ge nx) \ge P(S_n \ge nz)$, ha $x \le z$, innen következik, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n \ge nx) = 0$, ha $x \le E\xi_1$. Továbbá

$\sup_{t\ge 0}(tx-\log R(t))=R(0)=0$ ha $x\le E\xi_1$, mivel $tx-\log R(t)$ a t változó monoton csökkenő függvénye $t\ge 0$-ra, ha $x\le E\xi_1$.

18a.) Tekintsük az $R(t)=Ee^{t\xi_1}$ momentumgeneráló függvényt, illetve a $B_x(t)=tx-\log R(t)$ kifejezést negatív t számokra is. Mivel $\sup_{t\ge 0} B_x(t)\ge 0$, ha $x\ge E\xi$, $tx-\log R(t)\le tE\xi_-\log R(t)$, ha $x\ge E\xi_1$, és $t<0$ elég belátni, hogy $-tE\xi_1-\log R(-t)\le 0$, ha $t\ge 0$, azaz $\log\bar R(t)\ge tE\bar\xi_1$ $t\ge 0$ esetén, ahol $\bar\xi_1=-\xi_1$, és $\bar R(t)=Ee^{t\bar\xi_1}$. Ezt az állítást viszont beláttuk korábban.

19.) Az adott feltételek mellett

$$Ef\left(\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)}\right)=\frac{1}{R^n(t)}f(\xi_1,\dots,\xi_n)e^{tS_n}$$

tetszőleges mérhető $f(x_1,\dots,x_m)$ mérhető (és integrálható) függvényre, ahol $\xi_k=\xi_k^{(0)}$, $k=1,2.\dots$. Legyen $\mathbf{B}$ mérhető halmaz az n-dimenziós Eukideszi térben. Definiálni fogunk egy $h_{\mathbf{B}}$ függvényt a számegyenesen, amelyre teljesül a $h_{\mathbf{B}}(x)=P(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbf{B}|S_n=x)$ összefüggés, ahol $S_n=\sum\limits_{k=1}^n\xi_k$. A $h_{\mathbf{B}}(x)$ függvényt a

$$Eh_{\mathbf{B}}(S_n)g(\xi_1,\dots,\xi_n)=EI\left(\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbf{B}\}\right)g(\xi_1,\dots,\xi_n)$$

azonosságok definiálják, ahol $g(x_1,\dots,x_n)$ tetszőleges (korlátos) mérhető függvény, és $I(\mathbf{A})$ az $\mathbf{A}$ halmaz indikátor függvénye. (Ez tulajdonképpen a feltételes valószínűség definiciója, és az ilyen függvény létezését, amely a Radon–Nikodym tétel következménye be szokták bizonyítani a feltételes valószínűség definiciójának megadásánál.) Azt akarjuk belátni, hogy ebből következik a

$$Eh_{\mathbf{B}}\left(S_n^{(t)}\right)g\left(\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)}\right)=EI\left(\{(\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)})\in\mathbf{B}\}\right)g\left(\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)}\right)$$

azonosság. Ez az azonosság a feladat állításának átfogalmazása. Azt jelenti, hogy ha $h_B(x)=P((\xi_1,\dots,\xi_n)\in B|S_n=x)$, akkor $h_B(x)=P((\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)})\in B|S_n^{(t)}=x)$.

Viszont a bizonyítás elején felírt azonosság alapján

$$Eh_{\mathbf{B}}(S_n^{(t)})g(\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)})=\frac{1}{R(T)^n}Eh_{\mathbf{B}}(S_n)g(\xi_1,\dots,\xi_n)e^{tS_n}$$

és

$$\begin{aligned}&EI\left(\{(\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)})\in\mathbf{B}\}\right)g(\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)})\\&\qquad=\frac{1}{R(t)^n}EI\left(\{(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbf{B}\})g(\xi_1^{(t)},\dots,\xi_n^{(t)}\right)e^{tS_n}.\end{aligned}$$

Ezért a kívánt azonosság következik a $h_{\mathbf{B}}$-t meghatározó azonosságokból, ha a $g(x_1,\dots,x_n)$ függvényt a a $g(x_1,\dots,x_n)e^{t(x_1+\cdots+x_n)}$ függvénnyel helyettesítjük.

20.) Mivel a $\frac{1}{n}\log R_n(t)$ függvények konvexek, ezért a limeszük $\psi(t)$ is az.

$$P(S_n \ge nx) = P\left(e^{tS_n} \ge e^{nx}\right) \le e^{\log R_n(t) - ntx},$$

ahonnan $\liminf\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n \ge nx) \ge \lim\limits_{n\to\infty}\left(tx - \frac{1}{n}\log R_n(t)\right) = tx - \psi(t)$, és ez az alsó becslés. A felső becslés bizonyításához lássuk be először, hogy minden elég kis $\varepsilon > 0$-ra létezik olyan $\delta(\varepsilon) > 0$, $\delta(\varepsilon) \to 0$ ha $\varepsilon \to 0$, amelyre

$$\int_{nx}^{n(x+\varepsilon)} e^{(t+\delta)u} F_n(du) \ge \frac{1}{2} R_n(t+\delta) \quad \text{ha } n \ge n(\varepsilon). \tag{f}$$

Legyen $\varepsilon > 0$ olyan kicsi, hogy $\psi(t)$ szigorúan konvex a $[t, t+\varepsilon]$ intervallumban. Válasszunk egy $0 < \varepsilon' \le \varepsilon$ számot, amelyre a $\psi'(t+2\delta) = x + \varepsilon'$ egyenlet megoldható, ahol $\psi'(u)$ baloldali deriváltat jelöl. Ekkor a $\psi'(0) = 0$, $\psi'(t) = x$ feltételek és a $\psi(\cdot)$ függvény konvexitása miatt $\delta > 0$. Továbbá a $\psi(\cdot)$ függvény szigorú konvexitása miatt $\delta = \delta(\varepsilon) \to 0$, ha $\varepsilon \to 0$. Ugyanis $\psi'(t+h) > \psi'(t)$ szigorú egyenlőtlenséggel $h > 0$ esetén. A $\psi(\cdot)$ függvény szigorú konvexitása miatt létezik olyan $\eta = \eta(\varepsilon') > 0$, amelyre $\psi(t) + x\delta < \psi(t+\delta) - 2\eta$, és $\psi(t+\delta) > \psi(t+2\delta) - (x+\varepsilon')\delta + 2\eta$. Innen a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log R_n(u) = \psi(u)$ reláció miatt $\log R_n(t) < \log R_n(t+\delta) - nx\delta - n\eta$, és $\log R_n(t+2\delta) < \log R_n(t+\delta) + n(x+\varepsilon')\delta - n\eta$ elég nagy n-re, és

$$\begin{aligned}\int_{n(x+\varepsilon')}^{\infty} e^{(t+\delta)u} F_n(du) &\le e^{-n(x+\varepsilon')\delta} \int_{n(x+\varepsilon')}^{\infty} e^{(t+2\delta)u} F_n(du) \\ &\le e^{-n(x+\varepsilon')\delta + \log R_n(t+2\delta)} \le e^{\log R_n(t+\delta) - n\eta} \le \frac{1}{4} R_n(t+\delta)\end{aligned}$$

elég nagy n-re. Hasonlóan

$$\int_{-\infty}^{nx} e^{(t+\delta)u} F_n(du) \le \frac{1}{4} R_n(t+\delta).$$

Az utolsó két egyenlőtlenségből következik az (f) reláció, ha benne ε helyett $\varepsilon' \le \varepsilon$-t írunk, de akkor még inkább igaz ε-nal.

Az (f) formulából következik, hogy

$$\begin{aligned}P(S_n \ge nx) &\ge P(n(x+\varepsilon) \ge S_n \ge nx) \\ &\ge \frac{\int_{nx}^{n(x+\varepsilon)} e^{(t+\delta)u} F_n(du)}{e^{n(t+\delta)(x+\varepsilon)}} \ge \frac{1}{2} R_n(t+\delta) e^{-n(t+\delta)(x+\varepsilon)}.\end{aligned}$$

Innen, és a $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log R_n(t+\delta) = \psi(t+\delta)$ relációból $\limsup\limits_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n \ge nx) \le (t+\delta)(x+\varepsilon) - \psi(t+\delta)$. Innen $\varepsilon \to 0$ határátmenettel kapjuk, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} -\frac{1}{n}\log P(S_n \ge nx) \le tx - \psi(t).$$

A kapott alsó és felső becslésből következik a feladat állítása.

21.) A (+) formulát használjuk, és abban a t paramétert a $[\log R(t)]' = x$ egyenlet megoldásaként választjuk. Mivel a $[\log R(z)]'$ függvény az origó kis környezetében analitikus, $[\log R(t)]'|_{t=0} = 0$, $[\log R(t)]''|_{t=0} = E\xi_1^2 = 1$, ezért az origó közelében létezik a $[\log R(t)]'$ függvénynek analitikus inverze, és az $t = x\lambda_1(x)$ alakban írható, ahol $\lambda_1(0) = 1$, és $\lambda_1(\cdot)$ a nulla kis környezetében analitikus. A (+) formula alapján

$$P\left(\frac{S_n}{n} \ge x\right) = R(t)^n e^{-tnx} \int_{nx}^{\infty} e^{-t(y-nx)} \Phi_t(\,dy) \\ + R(t)^n e^{-tnx} \int_{nx}^{\infty} e^{-t(y-nx)} [\bar{F}_n(\,dy) - \Phi_t(\,dy)] = I_1 + I_2,$$

ahol a $\bar{F}_n = \bar{F}_n^{(t)}$ eloszlásfüggvény a (+) formulában van definiálva, és $\Phi_t(\cdot)$ a normális eloszlásfüggvény $n[\log R(t)]'$ várható értékkel és $n[\log R(t)]''$ szórásnégyzettel, azaz ugyanazzal az első két momentummal, mint egy $\bar{F}_n(\cdot)$ eloszlású valószínűségi változó. A Berry–Esseen egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sup_x \left| F_n^{(t)}(x) - \Phi_t(x) \right| \le \frac{C}{\sqrt{n}}$$

alkalmas $C > 0$ konstanssal, és ez a C konstans megválasztható a t paramétertől függetlenül, ha $|t| \le \varepsilon$. Ehhez azt kell meggondolni, hogy egy $\bar{F}^{(t)}(\cdot)$ eloszlású valószínűségi változónak és abszolút értékének a momentumai a t paraméter folytonos függvényei. A kívánt valószínűséget kifejező formulában az I_1 integrál egyszerűbb alakra hozható, az I_2 integrál a Berry–Esseen egyenlőtlenség segítségével becsülhető. Megmutatható, hogy az I_2 integrál kicsi, tekinthető hibatagnak. Ezután némi további számolással bebizonyítható a kívánt formula.

Felhasználva a $x = [\log R(t)]'$ relációt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} I_1 &= R^n(t) e^{-ntx} \frac{1}{\sqrt{2\pi n [\log R(t)]''}} \int_0^{\infty} \exp\left\{ -ty - \frac{y^2}{2n[\log R(t)]''} \right\} dy \\ &= \exp\left\{ n \left(\log R(t) - t[\log R(t)]' + \frac{t^2}{2} [\log R(t)]'' \right) \right\} \\ &\qquad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} \exp\left\{ -\frac{1}{2} \left(y + t\sqrt{n[\log R(t)]''} \right)^2 \right\} dy \\ &= \exp\left\{ n \left(\log R(t) - t[\log R(t)]' + \frac{t^2}{2} [\log R(t)]'' \right) \right\} \left(1 - \Phi\left(t\sqrt{n[\log R(t)]''} \right) \right) \end{aligned}$$

Másrészt, parciális integrálással és a Berry–Esseen egyenlőtlenség felhasználásával kapjuk, hogy

$$I_2 \le R^n(t) \frac{\text{const.}}{\sqrt{n}} \left[e^{-ntx} + t \int_{nx}^{\infty} e^{-ty}\, dy \right] \le \frac{\text{const.}}{\sqrt{n}} e^{n(\log R(t) - t[\log R(t)]')}.$$

Felhasználjuk, hogy $e^{u^2/2}[1-\Phi(u)] \ge \frac{\text{const.}}{u+1}$, ha $u \ge 0$. Ennél pontosabb aszimptotika is felírható, amelyet például bebizonyítottunk a "Normális eloszlású valószínűségi változók" feladatsor 7. feladatában. Ebből a formulából az I_1 kifejezés alakjából és az I_2 kifejezésre adott becslésből következik, hogy

$$I_2 = I_1 \cdot O\left(\frac{t\sqrt{n[\log R(t)]''}+1}{\sqrt{n}}\right) = I_1 \cdot O\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Továbbá, $\log R(t) - t[\log R(t)]' + \frac{t^2}{2}[\log R(t)]'' = t^3 H(t)$ a nulla kis környezetében alkalmas analitikus $H(t)$ függvénnyel, mivel a baloldal első két deriváltja a nullában zéró. Elvégezve az $t = x\lambda_1(x)$ helyettesítést kapjuk, hogy

$$P\left(\frac{S_n}{n} \ge x\right) = e^{nx^3\lambda_2(x)}\left(1-\Phi\left(t\sqrt{n\log[R(t)]''}\right)\right)\left(1+O\left(x+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

alkalmas $\lambda_2(x)$ analitikus függvénnyel. A feladat bizonyításának befejezéséhez azt kell vizsgálni, hogy hogyan kell korrigálni azt a hibát, amely abból adódik, hogy a fenti formulában a $\Phi(\cdot)$ argumentumában $t\sqrt{n[\log R(t)]''}$-t $\sqrt{n}x$-szel helyettesítjük. Tekintsük először a $\sqrt{n}x \ge 100$ esetet. Ekkor $t\sqrt{n\log[R(t)]''} \ge 50$ mivel $t\sqrt{[\log R(t)]''} \sim x$. A már említett a normális eloszlás és sűrűségfüggvény közötti aszimptotikus formula szerint $1-\Phi(u) = \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3} + \frac{\alpha(u)}{u^5}\right)\varphi(u)$ valamilyen $0 \le \alpha(u) \le 3$ számmal, ahol $\varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u^2/2}$, a normális sűrűségfüggvény. Vezessük be a $\psi(u) = \frac{u(1-\Phi(u))}{\varphi(u)}$ függvényt, és becsüljük meg a $\frac{d\log\psi(u)}{du}$ deriváltat.

$$\frac{d\log\psi(u)}{du} = \frac{1}{u} + u - \frac{\varphi(u)}{1-\Phi(u)} = \frac{1}{u} + u - \frac{1}{\frac{1}{u} - \frac{1}{u^3} + \frac{\alpha(u)}{u^5}} = \frac{(\alpha(u)-1)u^2 + \alpha(u)}{u(u^4 - u^2 + \alpha(u))},$$

ha $u \ge 50$. Ezért $\left|\frac{d\log\psi(u)}{du}\right| \le \frac{\text{const.}}{u^3}$. Mivel $\sqrt{n}x - t\sqrt{n[\log R(t)]''} = O\left(\sqrt{n}x^2\right)$ innen következik, hogy $\left|\log\psi(t\sqrt{n[\log R(t)]''}) - \log\psi(\sqrt{n}x)\right| \le \frac{\text{const.}}{nx} \le \frac{\text{const.}}{\sqrt{n}}$. Ezért $\left|\frac{\psi(\sqrt{n}t[\log R(t)]'')}{\psi(\sqrt{n}x)} - 1\right| \le \frac{\text{const.}}{\sqrt{n}}$, és

$$\begin{aligned}
\frac{1-\Phi\left(t\sqrt{n[\log R(t)]''}\right)}{1-\Phi(\sqrt{n}x)} &= e^{-n(t^2[\log R(t)]''^2 - x^2)/2}\ \frac{x}{t[\log R(t)]''}\frac{\psi(t\sqrt{n[\log R(t)]''})}{\psi(\sqrt{n}x)} \\
&= e^{-nx^3\lambda_3(x)}(1+O(x))\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right) \\
&= e^{-nx^3\lambda_3(x)}\left(1+O\left(x+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),
\end{aligned}$$

ahol $x^3\lambda_3(x) = \frac{1}{2}\left(t^2[\log R(t)]'' - x^2\right)$. (Vegyük észre, hogy az $x^3\lambda_3(x)$-t definiáló kifejezés az x változó olyan analitikus függvénye, amelynek a sorfejtése az x^3 vagy esetleg egy magasabb fokú taggal kezdődik. A bizonyított formulákból következik a feladat állítása $\sqrt{n}x \ge 100$ esetben a $\lambda(x) = \lambda_2(x) - \lambda_3(x)$ függvénnyel.

A $\sqrt{n}x \le 100$ eset vizsgálata egyszerűbb. Ekkor a feladat állítása közvetlenül következik a Berry–Esseen egyenlőtlenségből, és abból az észrevételből, hogy $\sqrt{n}x \le 100$ esetében, $1 - \Phi\left(\sqrt{n}x\right) \ge 1 - \Phi(100)$, ahol a jobboldal egy az n paramétertől független pozitív constans. Ezért a bizonyítandó reláció baloldalán szereplő kifejezés

$$P\left(\frac{S_n}{n} > x\right) = \left[1 - \Phi(\sqrt{n}x)\right] + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \left[1 - \Phi(\sqrt{n}x)\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right).$$

Másrészt a reláció jobboldalán szereplő kifejezés fő tagja

$$\left[1 - \Phi(\sqrt{n}x)\right] e^{nx^3\lambda(x)} = \left[1 - \Phi(\sqrt{n}x)\right]\left(1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$

ebben az esetben, mert $0 \le \sqrt{n}x \le 100$ miatt $nx^3\lambda(x) = O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$. A fenti két reláció összehasonlításából következik a bizonyítandó állítás a vizsgált esetben.

22.) Alkalmazzuk a 21. feladat eredményét $x = \frac{y}{\sqrt{n}}$ választással. Mivel $nx^3\lambda(x) = O\left(\frac{y^3}{\sqrt{n}}\right)$, $1 + O\left(x + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \exp\left\{O\left(\frac{y+1}{\sqrt{n}}\right)\right\} = \exp\left\{O\left(\frac{y+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$, ezzel a szereposztással. Innen következik a feladat első állítása. A második állítás bizonyításához vegyük észre, hogy például a 3. feladat eredménye szerint $P(S_n > nx + z) \le R^n(t)e^{-t(nx+z)}$ tetszőleges $t > 0$-ra. Válasszuk a t számot a $[\log R(t)]' = x$ egyenlet megoldásának. A 9. vagy 10. (vagy 21.) feladat eredményéből következik, hogy $P(S_n > nx) \ge \text{const.}\, n^{-1/2}R^n(t)e^{-tx}$ ezzel a t számmal. A két egyenlőtlenség összehasonlításából következik a feladat második állítása.

23.) A 7. feladatban bizonyított és a 8. feladat után a (+) relációban is megfogalmazott azonosságot a sűrűségfüggvényekre átírva kapjuk, hogy

$$f_n(x) = e^{-tnx}R^n(t)f_n^{(t)}(x)$$

az $f_n^{(t)}(x) = n\bar{f}_n^{(t)}(nx)$ függvénnyel, ahol $\bar{f}_n^{(t)}(x) = \frac{\bar{F}_n(x)}{dx}$, és $\bar{F}_n(x) = \bar{F}_n^{(t)}(x)$ a (+) formulában szereplő $\bar{F}_n$ eloszláshoz tartozó sűrűségfüggvény. A t paramétert választhatjuk mint a $[\log R(t)]' = x$ egyenlet megoldását. (A feladat feltételeiből, illetve az integrálható Fourier transzformáltak inverzeire vonatkozó formulából következik, hogy az előbb tekintett f_n és $f_n^{(t)}$ sűrűségfüggvények $n \ge k$ esetén valóban léteznek, és ezek az inverz Fourier transzformált formulával, illetve annak analitikus kiterjesztésével kifejezhetőek, mert $t \sim x$ miatt $t \le \alpha$, ha $x \le \varepsilon$ elég kis $\varepsilon > 0$-ra, és $\int_{-\infty}^{\infty} |R(t+is)|^n\, ds < \infty$ ebben az esetben.) Továbbá a centrális határeloszlástételből $n^{-1/2}$ maradéktaggal (ez a Berry–Esseen egyenlőtlenség sűrűségfüggvényekről szóló verziója, amelynek bizonyítása lényegesen egyszerűbb)

$$\left|\frac{f_n^{(t)}(x)}{\sqrt{n}} - \frac{\varphi(0)}{\sqrt{[\log R(t)]''}}\right| \le \frac{\text{const.}}{\sqrt{n}}.$$

Itt kihasználtuk, hogy egy $\bar F$ eloszlású valószínűségi változó várható értéke x és szórásnégyzete $[\log R(t)]''$. Ezért

$$f_n(x)=e^{n[\log R(t)-tx]}f_n^{(t)}(x)=e^{n[\log R(t)-tx]}\sqrt{n}\left(\frac{\varphi(0)}{\sqrt{[\log R(t)]''}}+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$$
$$=e^{nx^3\lambda(x)}\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi(1+x\mu(x)}}e^{-nx^2/2}\left(1+O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right),$$

mert $\log R(t)-tx=\log R(t)-t[\log R(t)]'=-\frac{t^2}{2}+t^3\bar\lambda(t)=-\frac{x^2}{2}+x^3\lambda(x)$, és $[\log R(t)]''=1+x\mu(x)$ alkalmas analitikus $\bar\lambda(\cdot)$, $\lambda(\cdot)$ és $\mu(\cdot)$ analitikus függvényekkel. (A t szám az $[\log R(t)]'=x$ egyenlet megoldása.) Innen következik a feladat első azonosságának az első fele. Az azonosság második fele a 22. feladat bizonyításához hasonlóan egyszerűen bizonyítható.

Az inverz Fourier transzformáció segítségével beláthatjuk, hogy

$$f_n\left(x+\frac{z}{n}\right)=R^n(t)e^{-t(nx+z)}f_n^{(t)}\left(x+\frac{z}{n}\right)$$
$$=R^n(t)e^{-t(nx+z)}\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i(nx+z)s}\frac{R^n(t+is)}{R^n(t)}\,ds.$$

Meg fogjuk mutatni, hogy

$$\int\frac{|R^n(t+is)|}{R^n(t)}\,ds\le\frac{\text{const.}}{\sqrt{n}}. \tag{g}$$

Ezért felhasználva az $f_n(x)$ formulára adott formula első sorát kapjuk, hogy

$$f_n\left(x+\frac{z}{n}\right)\le R^n(t)e^{-t(nx+z)}\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|R^n(t+is)|}{R^n(t)}\,ds$$
$$=e^{n(\log R(t)-tx)}e^{-tz}\frac{n}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|R^n(t+is)|}{R^n(t)}\,ds$$
$$\le\text{const.}\sqrt{n}e^{n(\log R(t)-tx)}e^{-tz}\le\text{const.}\,e^{-tz}f_n(x),$$

ahonnan következik a feladat második állítása a sűrűségfüggvényekre. A (g) formula levezethető a

$$\frac{|R^n(t+is)|}{R^n(t)}<e^{-\text{const.}\,ns^2},\quad\text{ha } |s|\le\varepsilon \text{ alkalmas } \varepsilon>0 \text{ számmal}$$

relációból valamint a feladat feltételeiben szereplő $\int_{-\infty}^{\infty}|R(t+is)|^k\,ds\le K$ feltételből, amely alkalmas $K>0$ és $k>0$ egész számokkal érvényes. Ebből a feltételből ugyanis következik, hogy $\frac{R^k(t+is)}{R^k(t)}$ egy sűrűségfüggvény Fourier transzformáltja, ezért $\sup\limits_{|s|\ge\varepsilon}\frac{|R^k(t+is)|}{R^k(t)}\le q$ alkalmas $q<1$ számmal. Innen adódik, hogy

$$\int_{|s|>\varepsilon}\frac{|R^n(t+is)|}{R^n(t)}\,ds\le q^{(n-k)/k}\int_{|s|>\varepsilon}\frac{|R^k(t+is)|}{R^k(t)}\,ds\le Kq^{(n-k)/k}.$$

Ezekből a relációkból következik a (g) formula.

A rácsos eloszlás sűrűségfüggvényére felírt állítások hasonlóan bizonyíthatóak, csak ekkor Fourier sorokkal és azok Fourier együtthatóit kifejező formulákkal kell dolgozni.

Kiegészítés.

A standard normális eloszlásfüggvényre érvényes az alábbi reláció, amelyet tekinthetünk úgy, mint a normális eloszlás végtelenbeli sorfejtését.

Minden $x > 0$ számra

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x}\varphi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ és $\varphi(x)$ a standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény.

Általánosabban, minden $k \ge 0$ számra teljesül a

$$\sum_{l=0}^{2k+1} \frac{(-1)^l c_l}{x^{2l+1}}\,\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \sum_{l=0}^{2k} \frac{(-1)^l c_l}{x^{2l+1}}\,\varphi(x)\,, \quad \text{ha } x > 0$$

egyenlőtlenség alkalmas $c_l > 0$ konstansokkal, ahol $c_0 = 1$, $c_1 = 1$, $c_2 = 3$, és a további konstansok is explicit módon megadhatóak.

Valóban, parciális integrálással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}\,du \\ &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2} + \int_x^\infty \frac{3}{u^4}e^{-u^2/2}\,du\,,\end{aligned}$$

és ebből az azonosságból levezethető az első állítás.

Az általánosabb állítás további parciális integrálással hasonló módon bizonyítható.