Empirikus eloszlásfüggvény approximációja

E feladatsorban normalizált empirikus eloszlásfüggvény Brown bridge folyamattal való approximációjával foglalkozunk. Részletesebben megfogalmazva a következő problémát vizsgáljuk:

Legyen $B(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, egy Brown bridge egy $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ valószínűségi mezőn, azaz legyen $B(t)$ egy Gausss folyamat $EB(t) = 0$ várható értékkel és $EB(s)B(t) = \min(s,t) - st$, $0 \le s,t \le 1$, kovarianciafüggvénnyel. Feltesszük továbbá azt is, hogy a $B(t,\omega)$ Brown bridge $B(\cdot,\omega)$ trajektóriái a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvények minden $\omega \in \Omega$ elemi eseményre. A valószínűségszámítás klasszikus eredméyei szerint valóban létezik a fenti tulajdonságokat kielégítő Brown bridge.

Legyen $P_n(t)$, $0 \le t \le 1$, egy a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású mintához tartozó empirikus eloszlásfüggvény, azaz legyen $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, $P_n(t) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} I(\{\zeta_j \le t\})$, $0 \le t \le 1$, ahol $I(A)$ az A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Legyen

$$Z_n(t) = \sqrt{n}[P_n(t) - t]\ , \quad 0 \le t \le 1\ .$$

a $P_n(t)$ folyamat standardizáltja. Ekkor a $Z_n(t)$ és $B(t)$, $0 \le t \le 1$, folyamatok kovarianciafüggvénye megegyezik. Be akarjuk látni, hogy a két folyamat egymáshoz közel tehető alkalmas konstrukcióval. Pontosabban megfogalmazva:

Approximációs tétel. *Legyen adva egy $B(t)$ Brown bridge egy elég gazdag $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ valószínűségi mezőn. (Elég feltételezni azt, hogy ezen a valószínűségi mezőn megadható η_k, $k = 1, 2, \dots$, független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóknak olyan sorozata, amely független a $B(t)$ Brown bridge-től.) Ekkor minden $n = 2, 3, \dots$ számra konstruálható független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóknak olyan $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ sorozata, amelyre igaz, hogy a belőle elkészített $P_n(t) = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} I(\{\zeta_n \le t\})$ empirikus eloszlásfüggvény, illetve annak $Z_n(t) = \sqrt{n}[P_n(t) - t]$, $0 \le t \le 1$, standardizáltja teljesíti a*

$$P\left(\sqrt{n} \sup_{0 \le t \le 1} |Z_n(t) - B(t)| > C_1 \log n + x\right) \le C_2 e^{-\lambda x}$$

relációt minden $x > 0$ számra alkalmas (n-től független) univerzális $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ és $\lambda > 0$ konstansokkal.

A tételt kielégítő konstrukció elkészítésénél közvetlenül a $P_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvényt konstruáljuk meg mint egy rögzített Brown bridge alkalmas transzformáltját úgy, hogy annak véges dimenziós eloszlásai az előírtak legyenek, és e folyamat $Z_n(t)$ standardizáltja közel legyen ehhez a $B(t)$ Brown bridge-hez. A módszer a kvantilis transzformáció módszerének adaptálása illetve alkalmas általánosítása az adott probléma vizsgálatában. Az okoz nehézséget, hogy jelen esetben a Brown bridge illetve a konstruált empirikus eloszlásfüggvény többdimenziós eloszlásai is előírtak, míg a kvantilis transzformáció csak előírt egydimenziós eloszlású valószínűségi változók konstrukciójával foglalkozik. Ezen a nehézségen a következő módon segíthetünk. A Brown bridge-t rögzítjük és a (standardizált) $Z_n(t)$ empirikus folyamat értékeit a $[0,1]$ intervallum egyre újabb és újabb t értékeire definiáljuk, mint ennek a Brown bridge-nek alkalmas transzformáltját. Az l-edik lépésben a $Z_n(t)$ folyamat értékeit a $t = j2^{-l}$, $j = 0, 1, \dots, 2^l$, diadikus pontokban definiáljuk. Ennek során arra kell ügyelnünk, hogy az újonnan konstruálandó valószínűségi változók feltételes eloszlásai feltéve a már megkonstruált valószínűségi változók értékeit előírtak. Az adott problémában a vizsgálandó feltételes eloszlások jól kezelhetőek, és a módszer alaposabb kidolgozásával megkapjuk a kívánt eredményt. Ez a konstrukció azért működik jól, mert a $Z_n(t)$ folyamat értékeit a $t_{k,l} = k2^{-l}$, $1 \le k \le 2^l$, pontok mindegyikében már az l-edik lépésben megkonstruáljuk. Ha a $Z_n(t) - B(t)$ folyamat értékeinek szuprémuma a már megkonstruált pontokban mindegyik lépésben keveset nő, akkor ez biztosítja, hogy a megkonstruált standardizált empirikus folyamat és a Brown bridge közel lesznek egymáshoz. A becslések részletes kidolgozásával azt tudjuk biztosítani, hogy durván szólva ez a különbség minden lépésben csak konstanssal nőjön. Így olyan konstrukciót kapunk, amelyben a $Z_n(t)$ és $B(t)$ folyamatok különbségének a szuprémuma majdnem egy valószínűséggel kisebb, mint const. $\log n$. Érdemes megjegyezni, hogy ez az állítás éles, azaz a két folyamat különbsége tetszőleges konstrukció esetén majdnem egy valószínűséggel nagyobb, mint const. $\log n$ alkalmas pozitív konstanssal. Az utóbbi állítást lényegesen könnyebb bizonyítani, mint az ebben a feladatsorban tárgyalt eredményt, és ezt egy ennek a feladatsornak az eredményéhez kapcsolódó feladatsorban meg is fogjuk tenni.

Ahhoz, hogy a kvantilis transzformáció módszert jól tudjuk alkalmazni az approximációs tétel bizonyításánál felmerülő problémákban $Z_n(t_2) - Z_n(t_1)$ alakú valószínűségi változók (alkalmas feltételek melletti) feltételes eloszlásait leíró határeloszlástételre van szükségünk pontos aszimptotikával. Sőt, ahhoz, hogy jó becslést kapjunk, nem elég egy szokásos értelemben vett határeloszás tétel, hanem nagy eltérés tételre van szükségünk, azaz olyan eredményre, amely jó becslést ad az eloszlásfüggvény nem tipikus értékeire is. Megfogalmazzuk a nagy eltérés elmélet egyik klasszikus eredményét abban a speciális esetben, amelyikben szükségünk lesz rá. Ezután két olyan feladatot tárgyalunk ennek segítségével, melyek alkalmas becslést adnak a számunkra szükséges kvantilis transzformációval elvégzett approximációk jóságára.

Az alábbiakban a következő jelöléseket használjuk. Legyen $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ a standard normális sűrűségfüggvény, és $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(x)\,dx$ a standard normális eloszlásfüggvény. Szükségünk lesz a következő eredményre.

Tétel. *Jelölje $F_n(x)$ az n elemű $p = \frac{1}{2}$ paraméterű $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ binomiális eloszlás standardizáltját, azaz legyen $F_n(x) = P\left(2\dfrac{\eta_1 + \dots + \eta_n - \frac{n}{2}}{\sqrt{n}} < x\right)$, ahol $\eta_1, \dots, \eta_n$ független valószínűségi változók, és $P(\eta_j = 1) = P(\eta_j = 0) = \frac{1}{2}$, $j = 1, \dots, n$. Akkor léteznek olyan univerzális, (n-től független) $K > 0$, $A > 0$ konstansok, melyekkel az $F_n(x)$ eloszlásfüggvényre az alábbi becslések érvényesek az $|x| \le A\sqrt{n}$ intervallumban:*

$$(1 - \Phi(x)) \exp\left\{-\frac{K(x^3+1)}{\sqrt{n}}\right\} \le 1 - F_n(x) \le (1 - \Phi(x)) \exp\left\{\frac{K(x^3+1)}{\sqrt{n}}\right\}$$

$$\Phi(-x)\exp\left\{-\frac{K(x^3+1)}{\sqrt{n}}\right\} \le F_n(-x) \le \Phi(-x)\exp\left\{\frac{K(x^3+1)}{\sqrt{n}}\right\},$$
$$\text{ha } 0 \le x \le A\sqrt{n}.$$

(A tétel állítása igaz tetszőleges $A < \frac{1}{2}$ és alkalmas $K = K(A)$ konstansokkal, de erre az élesebb eredményre nem lesz szükségünk.)

Megjegyezzük, hogy a fent kimondott tétel egy általánosabb eredmény speciális esete. Egy $B(n, \frac{1}{2})$ eloszlású valószínűségi változó eloszlása, mint azt a tétel kimondásában megjegyeztük, felírható mint n független egyforma eloszlású $B(1, \frac{1}{2})$ eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlása. A nagy eltérések általános elméletéből következik, hogy független egyforma eloszlású valószínűségi változók normalizált részletösszegére a tételben kimondott becslés érvényes, feltéve, hogy az összeadandóknak létezik momentum-generáló függvénye, azaz ezek $F(x)$ eloszlásfüggvénye teljesíti az $\int e^{tx}F(\,dx) < \infty$ feltételt, ha $|t| < a$ alkalmas $a > 0$ számmal. Ez az eredmény és ennek bizonyítása a *Nagy eltérések elmélete I.* feladatsor 22. feladatában is megtalálható.

Feladatok

1.) Léteznek olyan $C_1 > 0$ és $C_2 > 0$ számok, melyekre

$$C_1(x+2) < \frac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} < C_2(x+2), \quad \text{ha } x \ge -1$$
$$C_1(x+2) < \frac{\varphi(-x)}{\Phi(-x)} < C_2(x+2), \quad \text{ha } x \ge -1.$$

b.) Léteznek olyan $C_1 > 0$ és $C_2 > 0$ számok, melyekre tetszőleges $x > 0$ és $|h| < x+1$ számokra

$$e^{-C_1 h(x+2)} < \frac{1-\Phi(x+h)}{1-\Phi(x)} < e^{-C_2 h(x+2)}, \quad \text{ha } x \ge 0, \text{ és } h > 0,$$
$$e^{C_2 h(x+2)} < \frac{\Phi(-x+h)}{\Phi(-x)} < e^{C_1 h(x+2)}, \quad \text{ha } x \ge 0 \text{ és } h > 0,$$

és (külön tárgyalva a $h > 0$ és $h < 0$ eseteket)

$$e^{C_1|h|(x+2)} < \frac{1-\Phi(x+h)}{1-\Phi(x)} < e^{C_2|h|(x+2)}, \quad \text{ha } x \ge 0, \text{ és } h < 0,$$
$$e^{-C_2|h|(x+2)} < \frac{\Phi(-x+h)}{\Phi(-x)} < e^{-C_1|h|(x+2)}, \quad \text{ha } x \ge 0 \text{ és } h < 0.$$

Legyen η standard normális eloszlású valószínűségi változó, $F(x)$ tetszőleges eloszlásfüggvény. Ismert, (lásd például a *Valószínűségi mértékek és valószínűségi változók közelségének kapcsolata feladatsor* 7. feladatát), hogy a $\xi = F^{-1}(\Phi(\eta))$ valószínűségi változó, ahol $F^{-1}(x) = \sup\{u\colon F(u) < x\}$, $F(x)$ eloszlású. (Ez a kvantilis transzformáció.) A következő feladatban az η és az így konstuált ξ valószínűségi változók távolságára adunk becslést, ha a ξ valószínűségi változó $F(x) = F_n(x)$ eloszlásfüggvénye n elemű $p = \frac{1}{2}$ binomomiális eloszlású valószínűségi változó normalizáltjának az eloszlásfüggvénye, illetve kissé általánosabban, ha olyan eloszlásfüggvényt tekintünk, ahol a $\frac{\sqrt{n}}{2}$ szórás helyett $\frac{\sqrt{m}}{2}$ számmal osztunk a normalizálás alkalmazásakor, ahol m és n egymáshoz közeli számok.

2.) Legyen $F_{m,n}(x)$ egy olyan $\xi_{m,n} = \frac{2}{\sqrt{m}}\left(\bar{\xi}_n - \frac{n}{2}\right)$ valószínűségi változó eloszlása, melynek definiciójában egy $B(n, \frac{1}{2})$ paraméterű binomiális eloszlású $\bar{\xi}_n$ valószínűségi változó szerepel. Azaz legyenek χ_k, $k = 1, \dots, n$, $P(\chi_k = 0) = (\chi_k = 1) = \frac{1}{2}$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, és $\bar{\xi}_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \chi_k$. Tegyük fel, hogy $|n-m| \le Bn$ valamilyen elég kis $B > 0$ számmal. Legyen η standard normális eloszlású valószínűségi változó, és definiáljuk az $\xi_{m,n} = F_{m,n}^{-1}(\Phi(\eta))$ $F_{m,n}$ eloszlású valószínűségi változót. Megadható egy $n_0 = n_0(B)$ küszöbindex, és léteznek olyan $A > 0$, $K > 0$ konstansok, melyekre igaz, hogy minden $n > n_0$ számra

$$|\xi_{m,n} - \eta| < K\frac{1 + \eta^2 + \frac{(m-n)^2}{n}}{\sqrt{n}} \quad \text{az } \{|\eta| \le A\sqrt{n}\} \text{ halmazon.}$$

Megadjuk az Approximációs Tételt kielégítő konstrukció rövid informális leírását. Rögzítjük a $B(t)$ Brown bridge-t, és a $P_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvényt, illetve annak $Z_n(t) = \sqrt{n}(P_n(t) - t)$, $0 \le t \le 1$, standardizáltját rekurziv módon konstruáljuk. A konstrukció l-edik lépése után a $Z_n\left(\frac{k}{2^l}\right)$, $k = 0, 1, \dots, 2^l$, valószínűségi változók már meg vannak konstruálva, és az $l+1$-ik lépésben megkonstruáljuk a $Z_n\left(\frac{2k+1}{2^{l+1}}\right)$, $k = 0, 1, \dots, 2^l - 1$, valószínűségi változókat. Ezeknek a valószínűségi változóknak a konstrukciójában figyelembe kell vennünk azt, hogy a $Z(t)$, $0 \le t \le 1$, standardizált empirikus eloszlásfüggvény meghatározza ezeknek a valószínűségi változóknak az (együttes) feltételes eloszlását azon feltétel mellett, hogy a már megkonstruált $Z_n\left(\frac{k}{2^l}\right)$, $k = 0, 1, \dots, 2^l$, valószínűségi változók értékei előírtak. Kényelmesebb közvetlenül nem a $Z_n\left(\frac{2k+1}{2^{l+1}}\right)$ valószínűségi változókat, hanem a

$$Z_n\left(\frac{2k+1}{2^{l+1}}\right) - Z_n\left(\frac{k}{2^l}\right) \text{ vagy } Z_n\left(\frac{k+1}{2^l}\right) - Z_n\left(\frac{2k+1}{2^{l+1}}\right)$$

különbségeket megkonstruálni. Ennek érdekében meg kell határozni ezen különbségek együttes feltételes eloszlását. Ezenkívül meghatározzuk a Brown bridge megváltozását leíró $B\left(\frac{2k+1}{2^{l+1}}\right)-B\left(\frac{k}{2^l}\right)$ vagy $B\left(\frac{k+1}{2^l}\right)-B\left(\frac{2k+1}{2^{l+1}}\right)$ különbségek együttes feltételes eloszlását is, feltéve a folyamat $B\left(\frac{k}{2^l}\right)$, $k=1,\dots,2^l$, értékeit. Látni fogjuk, hogy egyrészt az empirikus folyamat illetve a Brown bridge speciális (Markov) tulajdonságai miatt a vizsgált véletlen vektorok feltételesen függetlenek az adott feltételek mellett. Ezenkívül az egydimenziós feltételes eloszlások explicit módon megadhatóak mind az empirikus folyamat mind a Brown bridge esetében. Meg fogjuk konstruálni a standardizált empirikus eloszlásfüggvény fent jelzett megváltozásait a Brown bridge megfelelő megváltozásainak transzformáltjaként a (feltételes) kvantilis transzformáció segítségével. (A feltételes jelző arra utal, hogy az előírt feltételes eloszlásokkal fogunk dolgozni. Ennek a megjegyzésnek a pontosabb értelme a részletek kidolgozása után világosabb lesz.)

Látni fogjuk, hogy olyan (feltételes) eloszlások jelennek meg, melyeknek aszimptotikáját a feladatsor elején kimondott tétel jól leírja. Ezért a 2. feladat eredménye a továbbiakban jól használható lesz. Megjegyezzük, hogy a kvantilis transzformációt közvetlenül nem az alábbi különbségekre fogjuk alkalmazni, hanem a különbségekből kivonjuk azok alkalmas feltételek szerinti feltételes várható értékét. Ilyen módon a kvantilis transzformációt két olyan valószínűségi változó között alkalmazzuk, melyeknek a várható értéke megegyezik, de szórásuk kissé eltérhet. A feltételes eloszlások megjelenése az oka annak, hogy a második feladatban binomiális eloszlású valószínűségi változók nem feltétlenül természetes normalizáltjait is érdemes volt tekinteni. A konstrukcióban megjelenő feltételes várható értékek egyszerűek, ezért jó felső korlátot tudunk adni a

$$Z_n\left(\frac{k+1}{2^l}\right)-B\left(\frac{k+1}{2^l}\right), \quad k=0,1,\dots,2^l,$$

változók abszolút értékének a szuprémumára is, ha a fenti konstrukciót alkalmazzuk. Az így kapott korlát önmagában még nem elegendő a számunkra, de ez olyan kifejezés, melyet a valószínűségszámítás klasszikus módszerei segítségével jól tudunk vizsgálni.

A fent vázolt program kidolgozása lesz az approximációs tétel bizonyításának a fő része. Ahhoz, hogy ezt végrehajthassuk érdemes bevezetni néhány jelölést.

Legyen adva egy $Z_n(t)$ standardizált empirikus folyamat vagy egy $B(t)$ Brown bridge. Definiálunk e folyamatok t, $0\le t\le 1$, paraméterének "szukcessziv felezésével" és alkalmas normalizással bizonyos valószínűségi vektorokat. A következő 3.) és 4.) feladatokban megfogalmazzuk ezeknek a véletlen vektoroknak számunkra legfontosabb tulajdonságait. Ezek sugallják a $Z_n(t)$ folyamat természetes definicióját.

Legyen

$$U_{k,l}=2^{(l+1)/2}\left[B\left(\frac{k}{2^l}\right)-B\left(\frac{k-1}{2^l}\right)\right], \quad k=1,2,\dots,2^l,\ \ l=0,1,2,\dots \tag{1a}$$

$$V_{k,l}(n)=2^{(l+1)/2}\left[Z_n\left(\frac{k}{2^l}\right)-Z_n\left(\frac{k-1}{2^l}\right)\right], \quad k=1,2,\dots,2^l,\ \ l=0,1,2,\dots, \tag{1b}$$

azaz a $Z_n(t)$ és $B(t)$ folyamatoknak a diadikus $k2^{-l}$ alakú pontok közötti megváltozásainak alkalmas normalizáltja. Vezessük be az

$$\mathcal{F}_l = \mathcal{B}\left\{U_{k,l},\ 1 \le k \le 2^l\right\}, \quad l = 1, 2, \dots$$

és

$$\mathcal{G}_l = \mathcal{G}_l(n) = \mathcal{B}\left\{V_{k,l}(n),\ 1 \le k \le 2^l\right\}, \quad l = 1, 2, \dots \tag{2}$$

σ-algebrákat. Definiáljuk továbbá az

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_l &= \{U_{k,l},\ k = 1, \dots, 2^l\}, \quad l = 1, 2, \dots \\ \mathbf{V}_l(n) &= \{V_{k,l}(n),\ k = 1, \dots, 2^l\}, \quad l = 1, 2, \dots \end{aligned} \tag{3}$$

és az

$$\begin{aligned} &\bar{\mathbf{U}}_{l+1} = \{\bar{U}_{1,l+1}, \dots, \bar{U}_{2^{l+1},l+1}\}, \quad \bar{\mathbf{V}}_{l+1}(n) = \{\bar{V}_{1,l+1}(n), \dots, \bar{V}_{2^{l+1},l+1}(n)\}, \\ &\bar{U}_{k,l+1} = U_{k,l+1} - E(U_{k,l+1}|\mathcal{F}_l), \quad \bar{V}_{k,l+1}(n) = V_{k,l+1}(n) - E(V_{k,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n)) \\ &\qquad\qquad\qquad\qquad 1 \le k \le 2^{l+1} \end{aligned} \tag{4}$$

valószínűségi vektorokat, $l = 0, 1, 2, \dots$.

A fenti definiciókban szereplő $2^{(l+1)/2}$ normálás helyett mást is választhattunk volna. Ez a normálás azért természetes, mert mint a következő feladatok mutatják, ezzel a normálással $\bar{U}_{k,l}$ és $\bar{V}_{k,l}(n)$ valószínűségi változók feltételes várható értéke 0 és feltételes szórása majdnem 1, feltéve a számunkra érdekes feltételeket.

3.) Használjuk az előző jelöléseket. Vegyük először észre azt, hogy az $\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebra a következő $B(m_1, \dots, m_{2^l})$ atomokból áll.

$$B(m_1, \dots, m_{2^l}) = \left\{\omega \colon V_{k,l}(n)(\omega) = \frac{2^{(l+1)/2}}{\sqrt{n}}[m_k - n2^{-l}],\ k = 1, \dots, 2^l\right\},$$

ahol m_k, $1 \le k \le 2^l$, nem negatív egész számok, és $\sum\limits_{k=1}^{2^l} m_k = n$. (Az m_k szám megegyezik a $Z_n(t)$ standardizált empirikus eloszlásfüggvényt meghatározó $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ minta $[(k-1)2^{-l}, k2^{-l}]$ intervallumba eső pontjainak számával.) Az

$$\left\{E\left(V_{l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n)\right),\ k = 1, \dots, 2^{l+1}\right\} = \{\tilde{V}_{k,l+1}(n),\ k = 1, \dots, 2^{l+1}\}$$

reláció érvényes, ahol $\tilde{V}_{2k-1,l+1}(n) = \tilde{V}_{2k,l+1}(n) = \dfrac{1}{\sqrt{2}} V_{k,l}(n)$, $k = 1, \dots, 2^l$. Ezért $\bar{V}_{2k-1,l+1}(n) = -\bar{V}_{2k,l+1}(n) = V_{2k-1,l+1}(n) - \dfrac{1}{\sqrt{2}} V_{k,l}(n)$.

A (4) formulában definiált $\bar{\mathbf{V}}_{l+1}(n)$ valószínűségi vektor feltételes eloszlása a $\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebra szerint a σ-algebra $B(m_1,\dots,m_{2^l})$ atomján megegyezik egy

$$X = \{X_k,\ k = 1,\dots,2^{l+1}\} = \{X_k(m_1,\dots,m_{2^l}),\ k = 1,\dots,2^{l+1}\}$$

valószínűségi vektor eloszlásával, ahol $X_{2k-1} = -X_{2k}$, $k = 1,2,\dots,2^l$, és az X_{2k-1}, $k = 1,\dots,2^l$, valószínűségi változók függetlenek. Továbbá X_{2k-1} eloszlása megegyezik egy $\left(\dfrac{2^{l+2}}{n}\right)^{1/2}(\bar{X}_{2k-1} - E\bar{X}_{2k-1})$ valószínűségi változó eloszlásával, ahol $\bar{X}_{2k-1}$ $B(m_k,\frac{1}{2})$ paraméterű binomiális eloszlású valószínűségi változó, azaz

$$P(\bar{X}_{2k-1} = j) = \binom{m_k}{j} 2^{-m_k}, \quad j = 0,1,\dots,m_k\ .$$

4.) Az előző jelöléseket használva

$$\{E(U_{k,l+1}|\mathcal{F}_l),\ k = 1,\dots,2^l\} = \{\tilde{U}_{k,l+1},\ k = 1,\dots,2^{l+1}\},$$

ahol $\tilde{U}_{2k-1,l+1} = \tilde{U}_{2k,l+1} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}U_{k,l}$, $k = 1,\dots,2^l$. Ezért $\bar{U}_{2k-1,l+1} = -\bar{U}_{2k,l+1} = U_{2k-1,l+1} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}U_{k,l}$.

A (4) formulában definiált $\bar{\mathbf{U}}_{l+1}$ valószínűségi vektor független az $\mathcal{F}_l$ σ-algebrától. Eloszlása megegyezik egy $Y_1, Y_2, \dots, Y_{2^{l+1}}$ véletlen vektor eloszlásával, ahol $Y_{2k-1} = -Y_{2k}$, $k = 1,\dots,2^l$, és Y_{2k-1}, $k = 1,\dots,2^l$, független, standard normális eloszlású valószínűségi változók.

Érdemes megjegyezni, hogy a (4) formulában definiált $\bar{U}_{k,l+1}$ valószínűségi változók eloszlása (és speciálisan szórása) nem függ a $\mathcal{F}_l$ σ-algebrától. Ez azzal függ össze, hogy a 4.) feladatban Gauss eloszlású valószínűségi vektorokat tekintettünk, és ilyen esetben bizonyos koordinátáknak a feltételes eloszlása, feltéve a többi valószínűségi változó értékeit normális eloszlás, amelyiknek kovariancia mátrixa nem függ a feltételben szereplő valószínűségi változók értékeitől. A 3. feladatban tekintett valószínűségi változók feltételes eloszlása és szórása függ a feltételben szereplő változók értékeitől, de ez a függés gyenge. A fenti megjegyzést közvetlenül nem fogjuk használni a továbbiakban, de talán jobban megvilágítja bizonyos összefüggések hátterét.

Megadjuk a $Z(t)$, $0 \le t \le 1$, standardizált empirikus eloszlásfüggvény konstrukciójának pontos leírását. Legyen $Z_n(0) = Z_n(1) = 0$, és definiáljuk l szerinti rekurzióval a $Z_n\left(\dfrac{k}{2^l}\right)$, $k = 0,1,\dots,2^l$, valószínűségi változókat. Ha a konstrukció l-edik lépését már megtettük, azaz a $Z_n\left(\dfrac{k}{2^l}\right)$, $k = 0,1,\dots,2^l$, valószínűségi változókat már definiáltuk, akkor tekintsük az $m_k = m_k(l) = \sqrt{n}\left(Z_n\left(\dfrac{k}{2^l}\right) - Z_n\left(\dfrac{k-1}{2^l}\right)\right) + \dfrac{n}{2^l}$,

$k = 1, \dots, 2^l$, véletlen számokat. Az m_k mennyiség azt adja meg, hogy a a $Z_n(t)$ standardizált empirikus eloszlányfüggvényt definiáló $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ független a $[0,1)$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók közül hány esik a $[(k-1)2^{-l}, k2^{-l}]$ intervallumba. Azt fogjuk felhasználni, hogy előírt $m_k = m_k(l)$, $1 \le k \le 2^l$, számok esetén a $[(2k-2)2^{-l-1}, (2k-1)2^{-l-1}]$ intervallumba eső pontok száma binomiális $B(m_k, \frac{1}{2})$ eloszlású valószínűségi változó m_k és $\frac{1}{2}$ paraméterekkel, továbbá, ezek a valószínűségi változók különböző k indexekre feltételesen függetlenek, feltéve az m_k, $1 \le k \le 2^l$, értékeket. A konstrukcióban ezeket a valószínűségi változókat, illetve jobb kezelhetőség érdekében ezek lineáris alkalmas transzformáltjait definiáljuk olyan normális eloszlású valószínűségi változók kvantilis transzformációja segítségével, amelyeket az adott $B(t)$ Brown bridge felhasználásával definiálunk természetes módon. Ezeknek a változóknak a segítségével ki tudjuk fejezni a $Z_n\left(\dfrac{2k-1}{2^{l+1}}\right)$. $k = 1, \dots, l$, valószínűségi változókat, és így végre tudjuk hajtani a rekurzió $l+1$-ik lépését.

Konkrétabban, képletekkel leírva, a következő konstrukciót csináljuk: Jelölje $\bar{F}_m(x)$ egy binomiális $B(m, \frac{1}{2})$ eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényét m és $\frac{1}{2}$ paraméterekkel, és legyen $F_{m_k,l}(x) = F_{m_k,l,n}(x) = \bar{F}_{m_k}\left(\dfrac{\sqrt{n}x}{2^{(l+2)/2}} + \dfrac{m_k}{2}\right)$ a fent definiált $m_k = m_k(l)$ számmal, azaz $F_{m_k,l}(x)$ a $\bar{F}_{m_k}(x)$ eloszlás "majdnem standardizáltja". Az $F_{m_k,l}(x)$ eloszlásfüggvény ugyanis egy $B(m_k, \frac{1}{2})$ eloszlású valószínűségi változó olyan transzformáltjának az eloszlásfüggvénye, amelyikben a változóból kivontuk a várható értékét, de a valódi $\frac{1}{2}\sqrt{m_k}$ szórás helyett a $\frac{\sqrt{n}}{2\cdot 2^{l/2}}$ számmal osztottunk. Legyen

$$\bar{V}_{2k-1,l+1}(n) = F^{-1}_{m_k,l}\left(\Phi(\bar{U}_{2k-1,l+1})\right), \quad k = 1, \dots, 2^l, \tag{5a}$$

ahol $F^{-1}(x) = \sup\{u\colon F(u) < x\}$. Ez azt jelenti, hogy a $\bar{V}_{2k-1,l+1}(n)$ valószínűségi változó a standard normális eloszlású $\bar{U}_{2k-1,l+1}$ valószínűségi változó kvantilis transzformáltja. Az ebben a kvantilis transzformációban szereplő $F_{m_k,l}(x)$ eloszlásfüggvényt úgy definiáltuk, ahogy azt az (1)—(4) formulában definiált $\bar{V}_{2k-1,l+1}(n)$ valószínűségi változónak a 3. feladatban leírt (feltételes) eloszlása sugallja. Megjegyezzük, hogy a $\bar{V}_{2k-1,l+1}(n)$ valószínűségi változó definiciójával közvetett módon azt adtuk meg, hogy ha a majdan megkonstruálandó ζ_j, $1 \le j \le n$, független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók közül m_k veszi fel értékét a $[(k-1)2^{-l}, k2^{-l}]$ intervallumban, akkor hány ζ_j esik a $[(k-1)2^{-l}, (2k-1)2^{-l-1}]$ intervallumba.

Legyen továbbá

$$\begin{aligned} V_{2k-1,l+1}(n) &= \bar{V}_{2k-1,l+1}(n) + \frac{V_{k-1,l}(n)}{\sqrt{2}} \\ &\qquad \left(= \bar{V}_{2k-1,l+1}(n) + E\left(V_{2k-1,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n)\right)\right), \quad k = 1, \dots, 2^l, \end{aligned} \tag{5b}$$

és

$$Z_n\left(\frac{2k-1}{2^{(l+1)}}\right) = Z_n\left(\frac{2k-2}{2^{(l+1)}}\right) + 2^{-(l+2)/2} V_{2k-1,l+1}(n), \quad k = 1, \dots, 2^l. \tag{5c}$$

Ezeknek a valószínűségi változóknak a definiciójában igyekeztünk azt is elérni, hogy az (1)—(4) formula ezekre a valószínűségi változókra érvényesek legyenek. Ez az elv sugallja $V_{2k,l+1}(n)$ és $\bar V_{2k,l+1}(n)$ valószínűségi változók definióját is. Nevezetesen, legyen

$$V_{2k,l+1}(n)=\sqrt{2}V_{k,l}(n)-V_{2k-1,l+1}(n) \tag{5d}$$

és

$$\bar V_{2k,l+1}(n)=-\bar V_{2k-1,l+1}(n), \tag{5e}$$

mert az (1)—(4) formulák és a 3. feladat eredménye ezt sugallják. A következő 5a és 5b feladatokban befejezzük a konstrukció leírását, és belátjuk, hogy ilyen módon valóban egy standardizált empirikus eloszlásfüggvényt konstruáltunk.

5a.) Rögzítsünk egy $L>0$ számot, és konstruáljuk meg a $Z_n(k2^{-l})$, $V_{k,l}(n)$ és $\bar V_{k,l}(n)$ valószínűségi változokat, $1\le k\le 2^l$, a fent leírt módon minden $l=1,2,\dots,L$ számra. Az így definiált $Z_n(k2^{-L})$, $1\le k\le 2^L$, valószínűségi vektor eloszlása megegyezik egy normalizált empirikus eloszlásfüggvény koordinátáinak az együttes eloszlásával a $t=k2^{-L}$, $k=1,\dots,2^L$ pontokban. A megkonstruált $V_{k,l}(n)$ és $\bar V_{k,l}(n)$ véletlen vektorok és $Z_n(t)$ folyamat (pontosabban annak megszorítása a $k2^{-L}$ alakú pontokba) teljesítik az (1)—(4) relációkat, pontosabban teljesítik az (1b) formulát $l\le L$ és a (4) formula V változókra vonatkozó részét az $l\le L-1$ indexekre. Továbbá teljesül a $\mathcal{G}_l(n)\subset\mathcal{F}_l$ a reláció is minden $l\le L$ számra.

5b.) Tekintsük az előbb konstruált $Z_n(k2^{-L})$, $0\le k\le 2^L$, valószínűségi változókat, ($Z_n(0)\equiv 0$), és legyen $m_k=\sqrt{n}\left(Z_n(k2^{-L})-Z_n((k-1)2^{-L})\right)+n2^{-L}$, $1\le k\le 2^L$. Konstruáljunk minden $k=1,\dots,2^L$ számra egy független, a $[(k-1)2^{-L},k2^{-L}]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változókból álló $\zeta_1^{(k)},\dots,\zeta_{m_k}^{(k)}$ m_k elemű sorozatot, amelyek különböző k-ra függetlenek. Tekintsük ezeknek a véletlen sorozatoknak az egyesítését, és az így kapott n elemű véletlen sorozat elemeit rakjuk nagyság szerinti sorrendbe. Az így kapott $0\le\zeta_1^*\le\zeta_2^*\le\cdots\le\zeta_n^*$ egy független és a $[0,1]$ intervallumban független eloszlású egyenletes eloszlású valószínűségi változókból elkészített rendezett minta eloszlása. Azaz ha az $\{1,\dots,n\}$ halmaz $(\pi(1),\dots,\pi(n))$ permutációi közül kiválasztjuk az egyiket véletlenül és a $0\le\zeta_1^*\le\zeta_2^*\le\cdots\le\zeta_n^*$ sorozattól függetlenül $\frac{1}{n!}$ valószínűséggel, akkor a $(\zeta_1,\dots,\zeta_n)=(\zeta_{\pi(1)}^*,\dots,\zeta_{\pi(n)}^*)$ vektor koordinátái független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. A $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ valószínűségi változókból elkészített normalizált empirikus eloszlásfüggvény a $t=k2^{-L}$, $0\le k\le 2^L$, pontokban megegyezik a konstrukciójukban felhasznált $Z_n(k2^{-L})$, $1\le k\le 2^L$, valószínűségi változókkal.

Be akarjuk látni, hogy a kiinduló $B(t)$ Brown bridge és az 5a—5b feladatban konstruált független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ valószínűségi változókból készített $Z_n(t)$, $0\le t\le 1$, standardizált empirikus eloszlásfüggvény teljesíti az approximációs tétel állítását, ha a konstrukcióban elvégett felezések számát, az $L=L(n)$ számot elég nagynak választjuk. Például $L(n)=n$ alkalmas választás.

Feltesszük továbbá, hogy $n \ge n_0$ valamely elég nagy fix n_0 számra. A tétel bizonyításának érdekében becsülni fogjuk minden $x > C_0 \log n$, alkalmas $C_0 > 0$, $l = l(x)$ és minden $1 \le k \le 2^l$ számra a

$$P\left(\sup_{1\le k\le 2^l} \sqrt{n}|Z_n(k2^{-l}) - B(k2^{-l})| > \frac{x}{2}\right) \tag{6a}$$

$$P\left(\sqrt{n} \sup_{(k-1)2^{-l}\le t\le k2^{-l}} \left|Z_n(t) - Z_n\left(\frac{k-1}{2^l}\right)\right| > \frac{x}{4}\right) \tag{6b}$$

és

$$P\left(\sqrt{n} \sup_{(k-1)2^{-l}\le t\le k2^{-l}} \left|B(t) - B\left(\frac{k-1}{2^l}\right)\right| > \frac{x}{4}\right) \tag{6c}$$

valószínűségeket. A legnehezebb és legfontosabb az (6a) kifejezés jó becslése. Megjegyezzük, hogy csak ez függ a konstrukciótól. Az (6a) kifejezés becslésének érdekében bizonyítsunk be először egy állítást, amely a 2. feladat eredményének és a konstrukció szerkezetének a következménye.

6.) Legyenek az $U_{k,l}$, $V_{k,l}(n)$ $\bar U_{k,l}$ és $\bar V_{k,l}(n)$ az (1)—(4) formulák által definiált valószínűségi változók. Tegyük fel, hogy $l \le L$, ahol L a $Z_n(t)$ normalizált empirikus folyamat konstrukciójában szereplő paraméter, "a felezések száma". Mutassuk meg, hogy léteznek olyan $K > 0$ és $A > 0$ konstansok, hogy tetszőleges $1 \le k \le 2^l$-re teljesülnek az

$$\begin{aligned} 2^{-(l+2)/2}|\bar U_{2k-1,l+1} - \bar V_{2k-1,l+1}(n)| &= 2^{-(l+2)/2}|\bar U_{2k,l+1} - \bar V_{2k,l+1}(n)| \\ &< \frac{K}{\sqrt{n}}(\bar U^2_{2k-1,l+1} + V^2_{k,l}(n) + 1) \\ &= \frac{K}{\sqrt{n}}(\bar U^2_{2k,l+1} + V^2_{k,l}(n) + 1), \end{aligned} \tag{7a}$$

és

$$\begin{aligned} &\max\left(2^{-(l+2)/2}\left|U_{2k-1,l+1} - V_{2k-1,l+1}(n)\right|,\ 2^{-(l+2)/2}\left|U_{2k,l+1} - V_{2k,l+1}(n)\right|\right) \\ &< \frac{K}{\sqrt{n}}(\bar U^2_{2k-1,l+1} + V^2_{k,l}(n) + 1) + \frac{2^{-(l+1)/2}}{2}|U_{k,l} - V_{k,l}(n)| \\ &= \frac{K}{\sqrt{n}}(\bar U^2_{2k,l+1} + V^2_{k,l}(n) + 1) + \frac{2^{-(l+1)/2}}{2}|U_{k,l} - V_{k,l}(n)| \end{aligned} \tag{7b}$$

egyenlőtlenségek, ha $|\bar U_{2k-1,l+1}| < A\sqrt{n}2^{-l/2}$ és $|V_{k,l}(n)| < A\sqrt{n}2^{-l/2}$.

A 6. feladat eredménye jó becslést ad a konstrukcióban használt kvantilis transzformáció jóságára. Jegyezzük meg, hogy a becslés jobb oldalán szereplő $(\bar U^2_{2k,l+1} + V^2_{k,l}(n)+$

1) kifejezés eloszlása jól becsülhető, és a végtelenben exponenciálisan lecsengő korlátot lehet adni annak a valószínűségére, hogy ez a kifejezés nagyobb mint valamilyen $x > 0$ szám. A 6. feladatban megfogalmazott egyenlőtlenségek hasznosabbak számunkra, mint egy éles becslés a benne baloldalon szereplő kifejezések eloszlásfüggvényeire. A minket érdeklő $Z_n(k2^{-l}) - B(k2^{-l})$ alakú különbségekre ugyanis olyan kifejezések lineáris kombinációjának a segítségével tudunk jó felső korlátot adni, mint amilyenek a 6. feladat becsléseinek jobb oldalán szerepelnek. Egy ilyen lineáris kombinációra, és ezáltal az approximációs tételben vizsgált kifejezésre is jobb becslést kapunk, ha az egyes tagok eloszlására ismert korlátokon kívül kihasználjuk a lineáris kombinációban szereplő tagok statisztikai tulajdonságaiból adódó kiejtéseket is.

A további vizsgálatok érdekében bevezetjük egy diadikus tört rangjának a definicióját. Azt mondjuk, hogy a $t = k2^{-l}$, $0 \le t \le 1$, szám diadikus rangja l, ha k páratlan szám. Tekintsünk egy $t = k2^{-l}$ számot, amelynek a diadikus rangja l. Ekkor létezik I_j, $0 \le j \le l$ intervallumoknak olyan sorozata, amelyre $I_0 = [0,1]$, $I_0 \supset I_1 \supset \cdots \supset I_l \ni t$, és $I_j = [u_j, v_j] = [u_j(t), v_j(t)] = [k_j(t)2^{-j}, (k_j(t)+1)2^{-j}]$, ahol $k_j(t)$ egész szám, azaz I_j 2^{-j} hosszúságú intervallum, és ezek végpontjai olyan diadikus racionális számok, amelyek diadikus rangja nem nagyobb, mint j. Valóban, legyen $I_0 = [0,1]$, I_1 a $[0, \frac{1}{2}]$ és $[\frac{1}{2}, 1]$ intervallumok közül az, amelyik tartalmazza a t pontot, és ha $I_j = [u_j, u_j + 2^{-j}]$ már definiálva van $j < l$-re, akkor legyen I_{j+1} az $[u_j, u_j + 2^{-j-1}]$ és $[u_j + 2^{-j-1}, u_j + 2^{-j}]$ intervallumok közül az, amelyik tartalmazza a t pontot. Ez a definició $j+1 < l$-re egyértelmű, $j+1 = l$-re mind a két intervallumot tekinthetnénk. Kényelmi szempontok miatt az I_l intervallumot az $I_l = [t, t + 2^{-l}]$ képlettel definiáljuk. Először azt mutatjuk meg, hogy a $Z_n(t)$ és $B(t)$ valószínűségi változók kifejezhetőek a fent konstruált I_j intervallumokhoz tartozó $V_{k,j}(n)$ illetve $U_{k,j}$ valószínűségi változók alkalmas lineáris kombinációjával.

7.) Legyen $t = k2^{-l}$ olyan diadikus racionális szám, amelynek diadikus rangja l. Legyenek $I_j = I_j(t) = [u_j, v_j]$, $0 \le j \le l$, a fent definiált intervallumok, és definiáljuk az $\varepsilon(j) = \varepsilon(j,t)$, $1 \le j \le l$, mennyiségeket az $\varepsilon(j) = 0$, ha $u_{j-1} = u_j$, és $\varepsilon(j) = 1$, ha $u_j > u_{j-1}$, $1 \le j \le l$, formulával. Vezessük be a $k_j = u_j 2^j$, $0 \le j \le l$, jelölést. Legyenek továbbá $U_{k,l}$, $V_{k,l}(n)$ és $\bar{U}_{k,l}$, $\bar{V}_{k,l}(n)$ az (1)—(4) formulákban definiált valószínűségi változók. Ekkor

$$\begin{aligned} Z_n(t) = Z_n\left(k2^{-l}\right) &= \sum_{j=1}^{l} \varepsilon(j) 2^{-(j+1)/2} \left(\sqrt{2} V_{k_{j-1}+1, j-1}(n) - V_{k_j+1, j}(n)\right) \\ B(t) = B\left(k2^{-l}\right) &= \sum_{j=1}^{l} \varepsilon(j) 2^{-(j+1)/2} \left(\sqrt{2} U_{k_{j-1}+1, j-1} - U_{k_j+1, j}\right). \end{aligned} \tag{8a}$$

Továbbá,

$$\begin{aligned} &2^{-(j+1)/2} \left| V_{k_j+1,j}(n) - U_{k_j+1,j} \right| \\ &\qquad \le \frac{K}{\sqrt{n}} \left(\sum_{s=0}^{j-1} 2^{-s} \left(\bar{U}^2_{k_{j-s}+1, j-s} + V^2_{k_{j-s-1}+1, j-s-1}(n) + 1 \right) \right), \end{aligned} \tag{8b}$$

és

$$\begin{aligned}\sqrt{n}|Z_n(t)-B(t)| &= \sqrt{n}\left|Z_n(k2^{-l})-B(k(2^{-l})\right| \\ &\le 4K\left(\sum_{j=1}^{l}\left(\bar U^2_{k_j+1,j}+V^2_{k_{j-1}+1,j-1}(n)+1\right)\right)\end{aligned} \tag{8c}$$

a

$$\begin{aligned}\mathbf{B}&=\mathbf{B}(t)=\mathbf{B}(k2^{-l})\\ &=\bigcap_{j=1}^{l}\left(\left\{\omega\colon |\bar U_{2k_{j-1}+1,j}(\omega)|<\frac{A\sqrt{n}}{2^{j/2}}\right\}\cap\left\{\omega\colon |V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)(\omega)|<\frac{A\sqrt{n}}{2^{j/2}}\right\}\right)\end{aligned}$$

halmazon, ahol $K>0$ és $A>0$ megegyezik a 6. feladatban szereplő K és A konstansokkal.

A (6a) formulában szereplő kifejezésre a következő becslést fogjuk bizonyítani.

$$P\left(\sup_{1\le k\le 2^n}\sqrt{n}\left|Z_n\left(k2^{-l}\right)-B\left(k2^{-l}\right)\right|>\frac{x}{2}\right)<e^{-Dx} \tag{9}$$
$$\text{alkalmas } D>0 \text{ számmal, ha } C_0\log n\le x\le C^{-1}n \text{ és } 2^{-l}\ge Cxn^{-1},$$

ahol $C_0>0$ és $C>0$ elég nagy pozítiv számok, $n\ge n_0$, és $n_0=n_0(C_0,C)$ alkalmas küszöbindex.

A (9) becslésben szereplő $x>C_0\log n$ megszorítás nem okoz problémát az Approximációs Tétel bizonyításában, mert az ott bizonyítandó egyenlőtlenség csak $x\ge$ const. $\log n$ esetében tartalmaz bizonyítandó állítást. Az $x\le C^{-1}n$ feltétel sem jelent komoly megszorítást, mert $x\ge C^{-1}n$ esetében, mint azt látni fogjuk, az Approximációs Tételben szereplő egyenlőtlenség könnyen bizonyítható. Az $l=l(x)$ számra előírt $2^{-l}\le Cxn^{-1}$ egyenlőtlenség azt biztosítja, hogy a (9) formulában szereplő becslés elég egy elég sűrű $t_k=k2^{-l}$, $1\le k\le 2^l$, halmazon érvényes. Ezt az $l=l(x)$ számot igyekeztünk minél jobban megválasztani. A (9) formulában megadott becslés és a (6b) és (6c) formulában definiált események jó becslése szolgáltatják az Approximációs Tétel bizonyítását.

A (9) formulát a (8c) képlet és a következő 8.–12. feladatok eredményei segítségével fogjuk belátni. Ezeknek a feladatokonak a feltételei között megjelennek az x és l számokra a (9) formulában előírt feltételek.

8.) A (8c) egyenlőtlenségben szereplő $\bar U_{2k_{j-1}+1,j}$, $1\le j\le l$, és a $\bar U_{1,j}$, $1\le j\le l$, illetve a $V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)$, $1\le j\le l$, és $V_{1,j-1}(n)$, $1\le j\le l$, valószínűségi változók sorozatának az eloszlása megegyezik. Továbbá az $\bar U_{1,j}$, $1\le j\le l$, valószínűségi változók függetlenek és standard normális eloszlásúak.

Legyen $C_0\log n\le x\le C^{-1}n$ és $2^{-l}\ge C\dfrac{x}{n}$ valamilyen elég nagy $C_0>0$ és $C>0$ számmal. Ekkor a 7. feladatban szereplő $\mathbf{B}$ halmaz valószínűsége teljesíti az

$1-P(\mathbf{B})\le e^{-D_1x}$ egyenlőtlenséget alkalmas $D_1=D_1(C)>0$ számmal. Ha az előbb tekintett $C>0$ szám elég nagy, és $n\ge n_0$, ahol n_0 alkalmas küszöbindex, akkor

$$P\left(18K\sum_{j=1}^{l}\bar U_{1,j}^2>x\right)\le e^{-D_2x}$$

alkalmas $D_2>0$ számmal. (Itt K ugyanaz a konstans, mint amelyik 6. és 7. feladatban szerepel.)

Megjegyezzük, hogy a utolsó becslés a benne szereplő konstansoktól eltekintve éles. Ugyanis akár az összeg egyetlen tagja is, lévén standard normális eloszlású valószínűségi változó négyzete, több mint $e^{-\mathrm{const.}\,x}$ valószínűséggel vesz fel x-nél nagyobb értéket. Ez azt jelenti, hogy a kitevőben szereplő konstansttól eltekintve ugyanolyan jó becslést tudunk adni annak valószínűségére, hogy a vizsgált l tagú összeg nagyobb, mint x, mint annak a valószínűségére, hogy az összeg egyetlen tagja nagyobb ennél a korlátnál. Ez olyan tagszámú összegekre igaz, amelyek várható értéke kisebb, mint αx valamilyen $0\le\alpha<1$ számmal.

A (9) formula bizonyításának érdekében meg fogjuk mutatni, hogy

$$\begin{aligned}P\left(18K\sum_{j=1}^{l}V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)^2>x\right)&=P\left(18K\sum_{j=1}^{l}V_{1,j-1}(n)^2>x\right)\\&=P\left(18K\sum_{j=1}^{l}2^jZ_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2>x\right)\le e^{-D_3x}\end{aligned}\tag{10}$$

alkalmas $D_3>0$ számmal, ha $C_0\log n\le x\le C^{-1}n$ és $2^{-l}\ge Cxn^{-1}$ alkalmas $C_0>0$ és $C>0$ konstansokkal. (A (10) formulában szereplő első két azonosság egyrészt a 8. feladat eredményéből másrészt a $V_{1,j}$ változók definiciójából következik.) Először tekintsük a következő feladatot.

9.) Bizonyítsuk be a 7.) és 8.) feladat eredménye valamint a (10) becslés segítségével a (9) formulát.

Megjegyezzük, hogy a (10) képlet hasonló a 8. feladat utolsó becsléséhez. Továbbá, a $Z_n(t)$ standardizált empirikus folyamat hasonlóan viselkedik, mint a $B(t)$ Brown bridge, és nem nehéz a (10) formula olyan analogonját bebizonyítani, amelyikben a $V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)$ valószínűségi változókat az $U_{k_{j-1}+1,j-1}$ változókkal helyettesítjük. Ezért természetes azt várni, hogy a (10) becslés érvényes. A becslés bizonyításában az a technikai nehézség merül fel, hogy a $Z_n(t)$ normalizált empirikus folyamat nem független növekményű, és a valószínűségszámítás klasszikus módszerei elsősorban független folyamatok becslésére alkalmasak. Ezt a nehézséget egy szintén klasszikus módszerrel, a Poisson approximációval győzhetjük le.

Először megmutatjuk, hogyan lehet egyszerűsíteni a (10) formula bizonyítását Poisson approximáció segítségével. Legyen ζ_n, $n=1,2,\dots$, független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, és κ_n n paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, amely független a ζ_n, $n=1,2,\dots$, sorozattól. Definiáljuk a

$$Z_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{n} I(\{\zeta_k\le t\})-nt\right) \tag{11a}$$

$$X_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sum_{k=1}^{\kappa_n} I(\{\zeta_k\le t\})-nt\right) \tag{11b}$$

és

$$Y_n(t)=\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=n}^{\kappa_n} I(\{\zeta_k\le t\}),\quad 0\le t\le 1, \tag{11c}$$

sztochasztikus folyamatokat, ahol $I(A)$ az A halmaz indikátorfüggvényét jelöli, és $\kappa_n<n$ esetén az $Y_n(t)$ összegben szereplő összeg úgy értendő, hogy $\sum\limits_{k=n}^{\kappa_n}=-\sum\limits_{k=\kappa_n}^{n}$. Ekkor $Z_n(t)$, $0\le t\le 1$, egy standardizált empirikus eloszlásfüggvény, és $Z_n(t)=X_n(t)-Y_n(t)$. Ezért nem nehéz belátni, hogy

$$\begin{aligned}P\left(18K\sum_{j=1}^{l}2^jZ_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2>x\right)\le P&\left(72K\sum_{j=1}^{l}2^jX_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2>x\right)\\ &+P\left(72K\sum_{j=1}^{l}2^jY_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2>x\right).\end{aligned} \tag{12}$$

A (12) egyenlőtlenség bizonyítása része lesz a 10. és 11. feladatoknak. A (12) egyenlőtlenség jobb oldalának második tagját azért lesz egyszerű becsülni, mert az $Y_n(t)$ folyamatot definiáló összeg viszonylag kevés $|\kappa_n-n|$ tagból áll, ezért durva becsléseket is alkalmazhatunk. Ezt a kifejezést az alább megfogalmazandó 10. és 11. feladatok eredményeinek a segítségével fogjuk megbecsülni. Az első tag becslését az könnyíti meg, hogy az $X_n(t)$ folyamat standardizált Poisson folyamat n paraméterrel, azaz tetszőleges $0\le t_0<t_1<\dots<t_k\le 1$ számokra az $X_n(t_j)-X_n(t_{j-1})$, $1\le j\le k$, valószínűségi változók függetlenek, és a $\sqrt{n}\,(X_n(t_j)-X_n(t_{j-1}))+n(t_j-t_{j-1})$ valószínűségi változó Poisson eloszlású $n(t_j-t_{j-1})$ paraméterrel. Az, hogy a fenti módon konstruált $X_n(t)$ folyamat n paraméterű Poisson folyamat a valószínűségszámítás egyik jól ismert eredménye. Egyébként ennek az állításnak a bizonyítása megtalálható a *Poisson folyamatok* feladatsor 2. feladatának megoldásában is.

10.) Bizonyítsuk be a (12) formulát. Továbbá mutassuk meg, hogy ha κ_n n paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, $y\le B_1\sqrt{n}$ valamilyen $B_1>0$ számmal, akkor létezik olyan $B_2 = B_2(B_1) > 0$ szám, amelyre $P(|\kappa_n - n| \ge y) \le e^{-B_2 y^2/n}$. Rögzítsünk valamilyen $x > 0$ valós és l pozitív egész számokat. Legyen ζ_k, $k = 1, 2, \dots$, független, a $[0,1]$ intervallumban egyeneletes eloszlású valószínűségi változók egy sorozata, és definiájuk az

$$\bar{Y}_{n,m}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{m} I(\{\zeta_k \le t\}), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

és

$$\xi_k = \xi_{k,l} = \sum_{j=1}^{l} 2^{j/2} I\left(\zeta_k < \frac{1}{2^{j-1}}\right), \quad k = 1, 2, \dots,$$

valószínűségi változókat. Ekkor tetszőleges $B > 0$ számra

$$\begin{aligned} P\left(72K \sum_{j=1}^{l} 2^j Y_n \left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2 > x\right) &\le P\left(|\kappa_n - n| > B\sqrt{nx}\right) \\ &\quad + P\left(\sqrt{72K} \sum_{j=1}^{l} 2^{j/2} \bar{Y}_{n, B\sqrt{nx}} \left(\frac{1}{2^{j-1}}\right) > \sqrt{x}\right) \\ &= P\left(|\kappa_n - n| > B\sqrt{nx}\right) + P\left(\frac{\sqrt{72K}}{\sqrt{n}} \sum_{k=1}^{B\sqrt{nx}} \xi_k > \sqrt{x}\right). \end{aligned} \tag{13}$$

A $\xi_k = \xi_{k,l}$, $k = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók függetlenek és egyforma eloszlású-ak.

A végtelenben exponenciálisan csökkenő becslést akarunk kapni a (12) formula jobboldalának második tagjára. Ehhez elég a 10. feladat becslésének jobboldalán szereplő valószínűségre jó felső korlátot adni. Itt azt kell becsülni, hogy független valószínűségi változók összege nagyobb mint egy adott korlát. A valószínűségszámításnak egyszerű, standard módszerei vannak ilyen problémák vizsgálatára, és ezek jelen esetben is alkalmazhatóak.

Ha azt akarjuk belátni, hogy annak valószínűsége, hogy egy S valószínűségi változó valamilyen A értéknél nagyobb számot vesz fel kisebb, mint $e^{-\text{const.}\, x}$ gyakran hasznos a következő érvelés. $P(S > A) = P\left(\frac{x}{A} S > x\right) \le e^{-x} E \exp\{\frac{x}{A} S\}$. Ha meg tudjuk mutatni, hogy $E \exp\{\frac{x}{A} S\} \le e^{\alpha x}$ valamilyen $\alpha < 1$ számmal, akkor kívánt alalú becslést kapunk. A következő feladatban azt akarjuk belátni, hogy ez a módszer a minket érdeklő kifejezés becslésében is jó eredményt ad.

11.) Használjuk az előző feladatban bevezett fogalmakat és jelöléseket. Tegyük fel, hogy az ott tekintett $x > 0$ valós és l számok teljesítik a $C_0 \log n < x < C^{-1} n$ és a $2^{-l} > Cxn^{-1}$ egyenlőtlenségeket valamilyen $C > 0$ és $C_1 > 0$ számokkal. Lássuk be, hogy ebben az esetben létezik olyan $\bar K=\bar K(C)>0$ konstans, hogy minden elég nagy n-re

$$E\exp\left\{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\xi_k\right\}\le 1+\frac{\bar K\sqrt{x}}{\sqrt{n}}.$$

Lássuk be ennek az egyenlőtlenségnek és a 10. feladat eredményének felhasználásával (a $B>0$ konstanst elég kicsinek választva), hogy a fenti feltételeket kielégítő x és L számokra teljesül a

$$P\left(72K\sum_{j=1}^{l}2^jY_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2>x\right)<e^{-D_4x}\tag{14}$$

egyenlőtlenség alkalmas $D_4>0$ konstanssal minden elég nagy n-re.

Jó becslést akarunk adni a (12) formula jobboldalán szereplő első összeg eloszlására is. Bár az $X_n(t)$ standardizált Poisson folyamat független növekményű, a kifejezésben szereplő $X_n\left(2^{-j-1}\right)^2$ valószínűségi változók nem függetlenek, mert e tagok az $X_n(t)$ folyamat $[0,2^{-j-1}]$ nem diszjunkt intervallumokba eső megváltozásainak a függvényei. Ezen a kényelmetlenségen azonban könnyen segíthetünk, ha az $X_n\left(2^{-j-1}\right)^2$ valószínűségi változót felírjuk, mint az $X_n(t)$ folyamatnak alkalmas intervallumokon vett megváltozásainak az összegét, alkalmazzuk a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenséget, és az így kapott egyenlőtlenségeket összegezzük. Felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}2^jX_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2&=2^j\left(\sum_{k=j}^{l}2^{-(k-j)/4}\cdot2^{(k-j)/4}\left[X_n\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-X_n\left(\frac{1}{2^k}\right)\right]\right.\\&\qquad\left.+2^{-(l-j)/4}\cdot2^{(l-j)/4}X_n\left(\frac{1}{2^l}\right)\right)^2\\&\le2^jB\left(\sum_{k=j}^{l}2^{(k-j)/2}\left[X_n\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-X_n\left(\frac{1}{2^k}\right)\right]^2+2^{(l-j)/2}X_n^2\left(\frac{1}{2^l}\right)\right)\end{aligned}\tag{15}$$

minden $j=1,\dots,l$-re $B=B_j=\sum\limits_{k=j}^{l}2^{-(k-j)/2}+2^{-(l-j)/2}<5$ konstanssal. A következő feladat egyik állítása az, hogy ezeket az egyenlőtlenségeket összegezve a minket érdeklő valószínűséget felülről tudjuk becsülni egy olyan tipusú esemény valószínűségével, hogy független standardizált Poisson eloszlású valószínűségi változók négyzeteinek alkalmas lineáris kombinációja nagyobb, mint valamilyen x szám. Ez a feladat nagyon hasonló a 8. feladat utolsó becsléséhez, és hasonlóan bizonyítható. Egy technikai probléma merül fel a most vizsgálandó becslés bizonyításában. Az a nehézség jelenik meg, hogy (standardizált) Poisson eloszlású valószínűségi változók négyzetének, — szemben normális eloszlású valószínűségi változók négyzetével — nincs exponenciális momentumuk. Ezt a nehézséget a vizsgálandó összeg tagjainak természetes csonkításával győzhetjük le. A túl nagy értékeket felvevő összeadandóknak ugyanis elhanyagolható a hozadéka a vizsgált összegben, a csonkított valószínűségi változóknak pedig van jól becsülhető exponenciális momentumuk. Megjegyezzük, hogy ez a módszer azért működik jól, mert egy nagy paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, — lévén független valószínűségi változók összege, — közel normális eloszlású. Abban a tartományban, ahol a csonkított valószínűségi változók eloszlását tekintjük a normális közelítés elég jó. Ez teszi lehetővé, hogy a 8. feladat becsléséhez hasonlóan, jó becslést kapunk ebben az esetben is.

12.) Mutassuk meg, hogy

$$\begin{aligned} &P\left(72K\sum_{j=1}^{l} 2^j X_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2 > x\right) \\ &\qquad \le P\left(1500K\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{2^k}{n}(\eta_k-E\eta_k)^2+\frac{2^l}{n}(\eta_{l+1}-E\eta_{l+1})^2\right)>x\right), \end{aligned} \tag{16}$$

ahol η_k, $k=1,\dots,l+1$, független valószínűségi változók sorozata, továbbá η_k Poisson eloszlású $\lambda_k=\lambda_{k,n}=n2^{-k}$ paraméterrel, ha $1\le k\le l$, és η_{l+1} Poisson eloszlású $\lambda_{l+1}=\lambda_{l+1,n}=\lambda_l$ paraméterrel.

Definiáljuk az η_k, $1\le k\le l+1$ valószínűségi változók $\bar\eta_k=\bar\eta_k(n)$ csonkítottjait a következő módon:

$$\bar\eta_k=\begin{cases}\eta_k-E\eta_k & \text{ha } |\eta_k-E\eta_j|<n2^{-k}\\ 0 & \text{ha } |\eta_k-E\eta_k|\ge n2^{-k}\end{cases}\qquad k=1,\dots,l+1,$$

Érvényesek a következő egyenlőtlenségek: $P(|\eta_k-E\eta_k|>u)\le 2\exp\left\{-\frac{u^2}{8n2^{-k}}\right\}$, ha $u<n2^{-k}$, speciálisan $P(|\eta_k-E\eta_k|\ge n2^{-k})\le 2\exp\left\{-\frac{n}{2^{(k+3)}}\right\}$. Továbbá $E\exp\left\{\frac{2^{k-4}}{n}\bar\eta_k^2\right\}\le B$ alkalmas (n-től és k-tól független) $B>0$ konstanssal minden $1\le k\le l+1$-re.

Tekintsünk egy $x>0$ valós és l egész számot, amelyek teljesítik a $C_0\log n<x<C^{-1}n$ és a $2^{-l}>Cxn^{-1}$ egyenlőtlenségeket alkalmas $C>0$ és $C_0>0$ számokkal, és legyen $n\ge n_0$, ahol $n_0=n_0(C,C_0)$ alkalmas küszöbindex. Lássuk be, hogy ebben az esetben

$$P\left(72K\sum_{j=1}^{l} 2^j X_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2 > x\right)\le e^{-D_5x} \tag{17}$$

alkalmas $D_5>0$ számmal. Mutassuk meg, hogy az eddig bizonyított egyenlőtlenségekből következnek a (10) és (9) formulák.

Az approximációs tétel bizonyításának befejezése érdekében jó felső korlátot akarunk adni olyan kifejezések valószínűségére, mint amilyenek az (6b) és (6c) kifejezésekben szerepelnek. Az alábbi *Állítás*-ban megfogalmazzuk azokat az egyenlőtlenségeket, melyekre szükségünk van a továbbiakban.

Állítás: *Legyen $B(t)$, $0 \le t \le 1$, egy Brown bridge, $Z_n(t)$, $0 \le t \le 1$, pedig egy n elemű mintából (n független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból) készített standardizált empirikus eloszlásfüggvény. Rögzítsünk egy $0 \le y \le n$ valós számot. Ekkor tetszőleges $L > 0$ valós számra megadható egy olyan $\alpha = \alpha(L) > 0$ valós szám és $n_0 = n_0(L)$ küszöbindex, amelyre a $B(t)$ illetve $Z_n(t)$ folyamatok teljesítik a következő egyenlőtlenségeket:*

$$P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|B(t)| > y\right) \le 2e^{-\alpha y}, \tag{18a}$$

$$P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|Z_n(t)| > y\right) \le 2e^{-\alpha y}, \tag{18b}$$

ha $n \ge n_0$. Ezekben az egyenlőtlenségekben az $\alpha > 0$ konstans és az n_0 küszöbindex megadhatóak az L szám függvényében, azaz az n_0 küszöbindex nem függ az y számtól, az $\alpha > 0$ kitevő pedig nem függ sem az y számtól sem az n_0 küszöbindextől.

Nem törekedtünk meghatározni az optimális konstansokat a (18a) és (18b) formulákban, mert erre nincs szükségünk. Ennek meghatározása a (18a) formulában lényegesen könnyebb, mert a Brown bridge Gauss folyamat, és az ilyen folyamatok vizsgálata lényegesen egyszerűbb. A (18b) becslés szemléletes tartalma az, hogy mivel a $Z_n(t)$ nagy n-re hasonlóan viselkedik egy Brown bridge-hez, ezért hasonló becslések érvényesek rá. Az állítás bizonyításában hasznos az alább kimondott lemma, amely lehetővé teszi azt, hogy független növekményű folyamatok maximumának eloszlására jó becslést adjunk. Ennek a lemmának a bizonyítását meg fogjuk adni egy *Kiegészítés*-ben.

Lemma. *Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_k \ge 0$, $Ee^{s\xi_k} = e^{B_k(s)}$ valamilyen rögzített $s > 0$ és $B_k(s)$, $k = 1, \dots, n$ számokkal. Legyen $S_k = \sum\limits_{j=0}^{k} \xi_j$, $k = 1, \dots, n$. Ekkor*

$$P\left(\sup_{1\le k\le n} S_k > x\right) \le \exp\left\{-sx + \sum_{k=1}^{n} B_k(s)\right\}$$

minden $x > 0$ számra.

Legyen $X(t)$, $a \le t \le b$, független növekményű sztochasztikus folyamat valamilyen $[a,b]$ intervallumban, azaz tegyük fel, hogy az $X(t_1) - X(a)$, $X(t_2) - X(t_1)$, ..., $X(b) - X(t_k)$ valószínűségi változók függetlenek tetszőleges $a \le t_1 \le t_2 \le \cdots \le t_k \le b$ számokra. Tegyük fel azt is, hogy az $X(t)$ folyamat trajektóriái folytonosak, vagy általánosabban úgynevezett cadlag (continue à droite, limite à gauche), azaz jobbról folytonos függvények, amelyeknek minden $a \le t < b$ pontban van baloldali limesze. Legyen továbbá az $m(t) = EX(t)$, $a \le t \le b$, függvény monoton növekvő. Ekkor a

$$P\left(\sup_{a\le t\le b} X(t) - X(a) > x\right) \le e^{-sx} Ee^{s(X(b)-X(a))}$$

egyenlőtlenség teljesül tetszőleges $s > 0$ számra. (Ez úgy értendő, hogy az egyenlőtlenség jobboldala végtelen, ha az $Ee^{s(X(b)-X(a))}$ várható érték nem létezik.)

Megjegyzés: Az $E\xi_k \ge 0$ feltétel és az $m(t)$ függvény monotonitásának megkövetelése azért kell, mert ez biztosítja azt, hogy az S_k, $k = 1, 2, \dots, n$, illetve az $X(t)$, $a \le t \le b$, folyamatnak pozitív a trendje.

A valószínűségszámításnak számos olyan eredménye van, amely azt mondja ki, hogy független nem negatív várható értékű valószínűségi változók részletösszegeinek a maximuma nem sokkal nagyobb, mint az összes valószínűségi változó összege. A fent megfogalmazott Lemma is ilyen tipusú eredmény. Ez ugyanis azt mondja ki, hogy egy az összes valószínűségi változó összegének eloszlására adott természetes felső korlát egyben felső korlát az összes részletösszeg maximumára is.

Az előbbi lemmát nem alkalmazhatjuk közvetlenül az *Állítás* bizonyítására, mert sem a Brown bridge sem a standardizált empirikus folyamat nem független növekményű folyamat. Viszont megkaphatjuk a (18a) becslés bizonyítását alkalmazva azt az észrevételt, hogy ha $W(t)$, $0 \le t \le 1$, Wiener folyamat, azaz olyan Gauss folyamat, amelyre $EW(t) = 0$, $EW(s)W(t) = \min(s, t)$ minden $0 \le s, t \le 1$ számra, akkor $W(t)$ független növekményű (és feltehetjük, hogy folytonos trajektóriájú) és a $B(t) = W(t) - tW(t)$ sztochasztikus folyamat Brown bridge. A (18b) becslés bizonyítását pedig megkaphatjuk a (11a)—(11c) képletekben definiált Poisson approximáció segítségével.

13.) Bizonyítsuk be a (18a) egyenlőtlenségnek azt a módosítását, amelyben a $B(t)$ Brown bridge-t egy $W(t)$ Wiener folyamattal helyettesítjük. Bizonyítsuk be továbbá a (18b) egyenlőtlenségnek azt a módosítását, amelyben a $Z_n(t)$ folyamatot egy n paraméterű $X_n(t)$ standardizált Poisson folyamattal helyettesítjük. (A (11b) képletben definiáltunk egy n paraméterű $X_n(t)$ standardizált Poisson folyamatot.)

14.) Bizonyítsuk be az előző feladat eredménye és egy Brown bridge $B(t) = W(t) - tW(1)$ alakú előállítása segítségével, ahol $W(t)$ Wiener folyamat, az *Állítás*-ban szereplő (18a) egyenlőtlenséget.

Tekintük a (11c) képletben definiált $Y_n(t)$, $0 \le t \le 1$, folyamatot. Lássuk be, hogy ez a folyamat tetszőleges $L \ge 0$-ra és minden $n > n_0$ indexre teljesíti a

$$P\left(\sqrt{n} \sup_{0 \le t \le L\frac{y}{n}} |Y_n(t)| \ge y\right) \le 2e^{-\alpha y}$$

egyenlőtlenséget alkalmas n_0 küszöbindex és $\alpha = \alpha(L) > 0$ szám választásával. Lássuk be a fenti egyenlőtlenség és az előző feladat eredménye segítségével az *Állítás*-ban szereplő (18b) egyenlőtlenséget.

A fenti eredmények segítségével már nem nehéz belátni az Approximációs Tételt. Adva egy olyan x, $C_0 \log n < x < 2C^{-1}n$ szám alkalmas $C > 1$ konstanssal válasszunk egy $l = l(x)$ konstanst úgy, hogy $C\frac{x}{n} \le 2^{-l} < 2C\frac{x}{n}$. Ekkor a fenti eredmények lehetővé teszik mind azt, hogy a $P\left(\sup_{1\le k\le 2^l}\sqrt{n}|Z_n(k2^{-l})-B(k2^{-l})|\ge \frac{x}{2}\right)$ valószínűségre jó felső korlátot adjunk, mind azt, hogy a $\sqrt{n}B(t)$ és $\sqrt{n}Z_n(t)$ folyamatok fluktuációját megbecsüljük a $(k-1)2^{-l}\le t<k2^{-l}$, $1\le k\le 2^l$, intervallumokban, ha a $C>0$ konstanst (n-től függetlenül) elég nagyra választjuk. Az $x>C^{-1}n$ esetében az Approximációs Tétel Állítása egyszerűbb, és az a konstrukciótól függetlenül a durva $\sqrt{n}|Z_n(t)-B(t)|\le\sqrt{n}(|Z_n(t)|+|B(t)|)$ becslés segítségével is bebizonyítható.

15.) Bizonyítsuk be a fenti eredmények segítségével az Approximációs Tételt.

Néhány megjegyzés a tárgyalt problémával kapcsolatban

A feladatsorban tárgyalt eredményt Komlós János, Major Péter és Tusnády Gábor *An approximation of partial sums of independent RV's and the sample DF. I.* dolgozata tartalmazza, amely a Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und verwandte Gebiete **32** (1975), folyóiratban jelent meg a 111–131. oldalakon. Az említett cikk ennek az eredménynek a bizonyítását csak vázlatosan tartalmazza. Ez a cikk tartalmaz egy analóg eredményt független valószínűségi változók approximációjáról Wiener folyamat segítségével. Mivel a két approximáció ugyanazon a konstrukción alapul, az említett cikk csak a független valószínűségi változók részletösszegeinek approximációját tárgyalja részletesen.

A lényeges különbség az említett cikk és az itt leírt tárgyalásmód között az, hogy ebben a feladatsorban kidolgoztuk azon becslések részleteit, amelyeket természetes elvárni független valószínűségi változók részletösszegeinek viselkedése miatt, de a precíz bizonyítás kissé kényelmetlen. Ugyanis a becslésekben szereplő valószínűségi változók csak "majdnem", de nem teljesen függetlenek. Továbbá, úgy gondoltam, hogy önmagában is érdekes és tanulságos lehet azon standard és többé–kevésbé klasszikus valószínűségi módszerek, technikák ismertetése és részletesebb tárgyalása, amelyek lehetővé teszik a bizonyítás során felmerülő technikai problémák megoldását. Ennek érdekében azt a kényelmetlenséget is vállaltam, hogy a feladatsor hosszabb lett.

E feladatsor folytatásában tárgyalni fogom a független valószínűségi változók részletösszegeinek approximációjával kapcsolatos problémakört. Ebben a folytatásban viszont nem fogom minden állítás részletes bizonyítását kidolgozni. Ehelyett inkább arra fogok törekedni, hogy érthető módon elmagyarázzam, melyek az alapvető megoldandó problémák ebben a problémakörben. Továbbá megpróbálok néhány példával rávilágítani arra, hogy mely részletekre kell különösképpen odafigyelni.

Az Approximációs Tétel bizonyítását későbbi dolgozatok is tartalmazzák. Az érdeklődők Tusnády Gábor, Jean Bretagnolle, és Pierre Massart dolgozatait tanulmányozhatják. Ezek a dolgozatok többek között azt is vizsgálják, hogy az Approximációs Tétel milyen viszonylag kis konstansokkal érvényes. Mi ezzel a kérdéssel itt nem foglalkoztunk.

Érdemes megjegyezni, hogy bizonyos dolgozatok Haar-függvények szerinti sorfejtésre alapítják az Aproximációs Tételt kielégítő konstrukciót, illetve annak bizonyítását, hogy ez a konstrukció teljesíti az Approximációs Tételt. Bár az itteni tárgyalásban a Haar függvények nem jelentek meg, a két tárgyalásmód lényegegesen nem különbözik, csak más nyelven magyarázza el ugyanazt a konstrukciót. Leírom röviden a Haar függvények szerinti sorfejtésen alapuló módszer gondolatmenetét.

Legyen $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., tetszőleges teljes ortonormált rendszer az $L_2([0,1],\lambda)$ térben, ahol λ jelöli a Lebesgue mértéket, és legyen $\eta_1, \eta_2, \dots,$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata. Ekkor a valószínűségszámítás egyik nem nehezen bizonyítható eredménye alapján a

$$W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \eta_l \int_0^t \varphi_l(s)\, ds, \quad 0 \le t \le 1$$

folyamat Wiener folyamat. Valóban a felírt folyamat Gauss folyamat, (a felírt összegek egy valószínűséggel konvergálnak minden $0 \le t \le 1$ számra), $EW(t) = 0$, és a folyamat kovarianciafüggvénye

$$EW(s)W(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \int_0^s \varphi_l(u)\,du \int_0^t \varphi_l(u)\,du = \min(s,t) \quad \text{minden } 0 \le s,t \le 1 \text{ számra.}$$

Az utolsó azonosság ebben a képletben a Parseval formula következménye, amely szerint $\min(s,t) = \int_0^1 I_{[0,s]} I_{[0,t]}(u)\,du = \sum\limits_{l=1}^{\infty} a_l b_l$, ahol $I_{[a,b]}(\cdot)$ az $[a,b]$ intervallum indikátorfüggvénye, és $a_l = \int_0^1 I_{[0,s]}(u)\varphi_l(u)\,du$, $b_l = \int_0^1 I_{[0,t]}(u)\varphi_l(u)\,du$. Egy teljes bizonyításban azt is be kellene látni, hogy az így definiált folyamat folytonos trajektóriájú egy valószínűséggel, de a továbbiakban egy Wiener folyamat fent leírt reprezentációját csak egy speciális esetben fogjuk alkalmazni, és arra az állításra, hogy a definiált folyamat folytonos trajektóriájú nem lesz szükségünk. (Egyébként a trajektóriák folytonosságának bizonyítása az alább tárgyalt speciális esetben nem nehéz.)

Definiáljuk a következő $\chi_{k,l}(u)$, $0 \le l < \infty$, $1 \le k \le 2^l$, függvényeket a $[0,1]$ intervallumon. $\chi_{0,1}(u) \equiv 1$, $\chi_{k,l}(u) = 2^{l/2}$, ha $(k-1)2^{-l} \le u < (2k-1)2^{-l}$, $\chi_{k,l}(u) = -2^{l/2}$, ha $(2k-1)2^{-l} \le u < k2^{-l}$ és $\chi_{k,l}(u) = 0$ egyébként, $0 \le l < \infty$, $1 \le k \le 2^k$. Ezeket a $\chi_{k,l}$ függvényeket hívják az irodalomban Haar függvényeknek, és nem nehéz belátni, hogy a Haar fügvények teljes ortonormált rendszert alkotnak az $L_2([0,1],\lambda)$ térben. Ezért az előbbiek alapján

$$W(t) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^l} \eta_{k,l} \int_0^t \chi_{k,l}(s)\,ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

ahol az $\eta_{k,l}$ valószínűségi változók függetlenek és standard normális eloszlásúak. Továbbá, $B(t) = Wt) - tW(1)) = W(t) - \int_0^t \chi_{[0,1]}(u)\,du\,W(1)$ Brown bridge, és $W(1) = \eta_{1,0}$, mert a $W(1)$ valószínűségi változó fenti reprezentációjában az összes többi $\eta_{k,l}$ együtthatója 0, és az $\eta_{1,0}$ változó együtthatója pedig 1. Ezért a

$$B(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^l} \eta_{k,l} \int_0^t \chi_{k,l}(s)\,ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

sztochasztikus folyamat Brown bridge. Vegyük észre, hogy a Haar függvények speciális alakja miatt

$$\begin{aligned} \eta_{k,l} &= \int \chi_{k,l}(s)B(s)\,ds \\ &= 2^{l/2}\left([B(k2^{-l}) - B((2k-1)2^{-l-1})] - [B(2k-1)2^{-l-1}) - B((k-1)2^{-l})]\right), \end{aligned}$$

és ez megegyezik a feladatsor fent leírt konstrukciójában definiált $\bar{U}_{k,l}$ valószínűségi változóval.

Másrészt, nem nehéz l szerinti teljes indukcióval belátni, hogy definiálva egy $Z_n(t)$ standardizált empirikus eloszlásfüggvény segítségével a $\bar{V}_{k,l}(n)$ valószínűségi változókat az (1b) illetve (4) képlet segítségével (felhasználva a 3. feladat eredményét is, amely lehetővé teszi a (4) képletben szereplő feltételes várható érték egyszerű kiszámolását) kapjuk, hogy a

$$\bar{Z}_n(t) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^l} \bar{V}_{k,l}(n) \int_0^t \chi_{k,l}(s)\, ds, \quad 0 \le t \le 1,$$

sztochasztikus folyamatra, $\bar{Z}_n(k2^{-l}) = Z_n(k2^{-l})$ minden $l = 1, 2, \dots,$ $1 \le k \le 2^l$ számra. Ezért $\bar{Z}_n(t) \equiv Z_n(t)$ minden $0 \le t \le 1$ paraméterre. Ha sikerül a $B(t)$ Brown bridge illetve a $Z_n(t)$ standardizált empirikus eloszlásfüggvény fenti konstrukcióját úgy megadni, hogy a benne szereplő $\bar{U}_{k,l}$, illetve $\bar{V}_{k,l}(n)$ Fourier együtthatók közel vannak egymáshoz, akkor egy az Approximációs Tételt kielégítő konstrukciót kapunk. A bizonyítás részleteinek kidolgozása hasonló a feladatsorban részletesen tárgyalt gondolatmenethez.

2. Megoldások

1.) A következő egyenlőtlenség jól ismert a valószínűségszámításban, és egyszerűen bizonyítható parciális integrálással. (Egyébként ez az állítás szerepel a *Normális eloszlású valószínűségi változók* feladatsor 7. feladatában.)

$$\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) < 1-\Phi(x) < \frac{1}{x}\varphi(x), \quad \text{minden } x>0-ra.$$

Innen következik, hogy $C_1(x+2) < \dfrac{\varphi(x)}{1-\Phi(x)} < C_2(x+2)$ ha $x \ge 2$ alkalmas $C_1>0$ és $C_2>0$ konstansokkal. Továbbá, mivel a $\varphi(x)$ és $1-\Phi(x)$ függvények szeparálva vannak mind nullától mind végtelentől, ha x egy véges tartományban van, ezért a fenti egyenlőtlenség érvényes minden $x>-1$ esetén is. A $\varphi(-x)=\varphi(x)$ és $\Phi(-x)=1-\Phi(x)$ azonosságok alapján a második egyenlőtlenség ekvivalens az elsővel.

b.)

$$\log\frac{1-\Phi(x+h)}{1-\Phi(x)} = h\,\frac{d}{dx}\log\left(1-\Phi(x)\right)\bigg|_{x=u} = -h\frac{\varphi(u)}{1-\Phi(u)},$$

ahol u alkalmas szám az $[x,x+h]$ intervallumban. Ezért, a $|h|<|x|+1$ feltétel teljesülése esetén

$$C_1(x+2) < \frac{\varphi(u)}{1-\Phi(u)} < C_2(x+2), \quad \text{ha } x>-1$$

a feladat már bizonyított része alapján. Ezt behelyettesítve a fenti azonosságba megkapjuk a feladat első azonosságát $h>0$ (és $x>-1$) esetén. A második azonosság innen következik a $\Phi(-u)=1-\Phi(u)$ azonosság alapján. A $h<0$ eset hasonlóan tárgyalható vagy visszavezethető a $h>0$ esetre.

2. Először bebizonyítjuk az $F_{m,n}(x)$ függvény következő approximációját a normális eloszlásfüggvény segítségével.

$$1-F_{m,n}(x) = (1-\Phi(x))\exp\left\{O\left(\frac{x^3+\frac{|n-m|}{\sqrt{n}}(x^2+x)+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$F_{m,n}(-x) = \Phi(-x)\exp\left\{O\left(\frac{x^3+\frac{|n-m|}{\sqrt{n}}(x^2+x)+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

ha $0\le x\le \bar{A}\sqrt{n}$ és $|n-m|<Bn$ alkalmas $\bar{A}>0$ és $B>0$ számokkal. Az $O(\cdot)$ egyenletes a fenti formulában.

Valóban, a feladatsor elején kimondott (nagy eltérés) tétel és az első feladat eredménye alapján

$$1-F_{m,n}(x) = \left(1-\Phi\left(\sqrt{\frac{n}{m}}x\right)\right)\exp\left\{O\left(\frac{x^3+1}{\sqrt{n}}\right)\right\}$$

$$= (1-\Phi(x)) \exp\left\{ O\left(\left| \sqrt{\frac{n}{m}} - 1 \right| (x^2+2x) + \frac{x^3+1}{\sqrt{n}} \right) \right\}$$
$$= (1-\Phi(x)) \exp\left\{ O\left(\frac{x^3 + \frac{|n-m|}{\sqrt{n}}(x^2+x)+1}{\sqrt{n}} \right) \right\}$$

ha $0 \le x \le \bar{A}\sqrt{n}x$, mert $\left| \sqrt{\frac{n}{m}} - 1 \right| (x^2+2x) \le \text{const.}\, \frac{|n-m|}{n}(x^2+2x)$ a feladat feltételeinek teljesülése esetén. A másik egyenlőtlenség hasonlóan bizonyítható.

Az alábbi egyenlőtlenség segítségével megmutatjuk, hogy létezik olyan $K > 0$ konstans, amelyre

$$\begin{gathered} 1 - F_{m,n}(x+h(x)) \le 1 - \Phi(x) \le 1 - F_{m,n}(x-h(x)), \\ \text{ahol } h(x) = h_{m,n}(x) = K \frac{x^2 + \frac{|n-m|}{\sqrt{n}}(|x|+1)+1}{\sqrt{n}}, \end{gathered} \tag{2.1}$$

ha $0 \le x \le A\sqrt{n}$ alkalmas $A > 0$-val. Valóban, ekkor

$$\begin{aligned} \log \frac{1-F_{m,n}(x+h(x))}{1-\Phi(x)} &= \log \frac{1-F_{m,n}(x+h(x))}{1-\Phi(x+h(x))} + \log \frac{1-\Phi(x+h(x))}{1-\Phi(x)} \\ &\le \frac{K_1}{\sqrt{n}} \left((x+h(x))^3 + \frac{|n-m|}{\sqrt{n}} \big((x+h(x))^2 + x + h(x) \big) + 1 \right) - C_1 h(x)(x+2) \end{aligned}$$

alkalmas $K_1 > 0$ és a $C_1 > 0$ konstansokkal feltéve, hogy teljesülnek az $|x + h(x)| < \bar{A}\sqrt{n}$ és $|h(x)| \le x+1$ egyenlőtlenségek, mert ezek a feltételek biztosítják, hogy az 1. feladat eredménye, illetve a 2. feladatban bebizonyított egyenlőtlenség felhasználható. E formulában a K_1 konstans a feladat elején már bebizonyított becslés $O(\cdot)$ konstansa, a C_1 konstans pedig az első feladat b) részében jelent meg. Azt állítjuk, hogy megválaszthatóak alkalmas $A > 0$, $B > 0$ és $K > 0$ konstansok úgy, hogy ha az $x < A\sqrt{n}$, $|n-m| < Bn$, $n \ge n_0$ feltételek teljesülnek, ahol n_0 alkalmas küszöbindex, akkor érvényesek az alábbi egyenlőtlenségek : $|x+h_{m,n}(x)| < \bar{A}\sqrt{n}$, $|h(x)| \ge x+1$, és

$$\frac{K_1}{\sqrt{n}} \left((x+h(x))^3 + \frac{|n-m|}{\sqrt{n}} \big((x+h(x))^2 + x + h(x) \big) + 1 \right) - C_1 h(x)(x+2) \le 0.$$

Ezekből az egyenlőtlenségekből, illetve az előző formulákból következik az $1 - F_{m,n}(x+h(x)) \le 1 - \Phi(x)$ egyenlőtlenség, azaz a (2.1) formula bal oldala.

Legyen $K = \dfrac{100K_1}{C_1}$. Ha az $A > 0$ és $B > 0$ számokat (K-tól függően) elég kicsinek választjuk, akkor teljesülnek az $|x + h_{m,n}(x)| < \bar{A}\sqrt{n}$ és $|h(x)| \le x+1$ egyenlőtlenségek. Ekkor

$$\frac{K_1}{\sqrt{n}} \left((x+h(x))^3 + \frac{|n-m|}{\sqrt{n}} \big((x+h(x))^2 + x + h(x) \big) + 1 \right)$$

$$
\begin{aligned}
&\le \frac{K_1}{\sqrt{n}}\left((2x+1)^3+\frac{|n-m|}{\sqrt{n}}\left((2x+1)^2+2x+1\right)+1\right)\\
&\le \frac{100K_1}{\sqrt{n}}\left(x^3+\frac{|n-m|}{\sqrt{n}}(x^2+1)+1\right)\\
&\le \frac{100K_1}{\sqrt{n}}(x+2)\left(x^2+\frac{|n-m|}{\sqrt{n}}(x+1)+1\right)=\frac{100K_1}{K}(x+2)h(x)\\
&\le C_1(x+2)h(x).
\end{aligned}
$$

Innen következik a (2.1) egyenlőtlenség baloldala. A jobboldal hasonlóan bizonyítható. A (2.1) formulából következik, hogy

$$
F_{m,n}(x-h(x)) \le \Phi(x) \le F_{m,n}(x+h(x)), \quad \text{ha } 0 \le x \le A\sqrt{n}, \text{ és } |n-m|<Bn.
$$

Ez az egyenlőtlenség érvényes és hasonlóan bizonyítható abban az esetben, ha a $0 \le x \le A\sqrt{n}$ feltételt a $0 \ge x \ge -A\sqrt{n}$ feltétellel helyettesítjük. Ebből az egyenlőtlenségből következik, hogy

$$
x-h_{m,n}(x) \le F^{-1}_{n,m}(\Phi(x)) \le x+h_{m,n}(x), \quad \text{ha } |x| \le A\sqrt{n} \text{ és } |n-m| \le Bn.
$$

és

$$
|F^{-1}_{m,n}(\Phi((\eta))-\eta| \le h_{m,n}(\eta)=K\frac{\eta^2+\frac{|n-m|}{\sqrt{n}}(|\eta|+1)+1}{\sqrt{n}} \le \bar{K}\frac{\eta^2+\frac{(n-m)^2}{n}+1}{\sqrt{n}},
$$

alkalmas $\bar{K}>0$ számmal, ha $|\eta| \le A\sqrt{n}$ és $|n-m| \le Bn$. (Az utolsó becslésben felhasználtuk azt, hogy $\frac{|n-m|}{\sqrt{n}}(|\eta|+1) \le \frac{1}{2}\left(\frac{(n-m)^2}{n}+\eta^2+1\right)$.) Ezzel a feladat állítását beláttuk.

Megjegyzés: Valójában a következő, a második feladat állításánál némileg élesebb becslést láttuk be:

$$
|F^{-1}_{m,n}(\Phi(\eta))-\eta| \le K\frac{\eta^2+\frac{|n-m|}{\sqrt{n}}(|\eta|+1)+1}{\sqrt{n}}
$$

A feladatban megfogalmazott állítás viszont a későbbiekben jobban használható.

3.) A $V_{k,l}(n)$, $k=1,\dots,2^l$, valószínűségi változók ugyanazt a σ-algebrát generálják, mint az $m_k=\frac{\sqrt{n}}{2^{(l+1)/2}}V_{k,l}(n)+\frac{n}{2^l}$, $k=1,\dots,2^l$, valószínűségi változók. Az m_k valószínűségi változó értéke megegyezik a $Z_n(t)$, $0 \le t \le 1$, standardizált empirikus folyamatot definiáló $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók közül azon ζ_j valószínűségi változók számával, amelyek értéke a $[(k-1)2^{-l},k2^{-l}]$ intervallumba esik. Ugyanis $m_k=n[P_n(k2^{-l})-P_n((k-1)2^{-l})]$, ahol $P_n(t)$ a feladatsor elején definiált empirikus eloszlásfüggvény.

Rögzítsük az m_k, $1 \le k \le 2^l$ valószínűségi változók értékeit, azaz a $\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebra $B(m_1,\dots,m_{2^l})$ atomját, és jelölje Y_k, $k=1,\dots,2^l$, a $[(k-1)2^{-l},(2k-1)2^{-l-1}]$ intervallumba eső ζ_j pontok számát. Ekkor az Y_k valószínűségi változók feltételesen függetlenek feltéve a $\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebrát, és Y_k feltételes eloszlása a $B(m_1,\dots,m_{2^l})$ atomon a $B(m_k,\frac{1}{2})$ binomiális eloszlás m_k és $\frac{1}{2}$ paraméterekkel. Innen kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
V_{2k-1,l+1}(n) &= \frac{2^{(l+2)/2}}{\sqrt{n}} Y_k - \frac{\sqrt{n}}{2^{l/2}},\\
E\left(V_{2k-1,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n)\right) &= \frac{2^{(l+2)/2}}{\sqrt{n}} E(Y_k|\mathcal{G}_l(n)) - \frac{\sqrt{n}}{2^{l/2}} = \frac{2^{(l+2)/2}}{\sqrt{n}}\frac{m_k}{2} - \frac{\sqrt{n}}{2^{l/2}}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} V_{k,l}(n)
\end{aligned}$$

és

$$\bar{V}_{2k-1,l+1}(n) = \frac{2^{(l+2)/2}}{\sqrt{n}} Y_k - \frac{2^{(l+2)/2}}{\sqrt{n}}\frac{m_k}{2}$$

a $G_l(n)$ σ-algebra $B(m_1,\dots,m_{2^l})$ atomján. Továbbá

$$\bar{V}_{2k-1,l+1}(n) + \bar{V}_{2k,l+1}(n) = V_{k,l}(n) - E(V_{k,l}(n)|\mathcal{G}_l(n)) = V_{k,l}(n) - V_{k,l}(n) = 0,$$

és

$$\begin{aligned}
E\left(V_{2k,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n)\right) &= \sqrt{2} E\left(V_{k,l}(n)|\mathcal{G}_l(n)\right) - E\left(V_{2k-1,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n)\right)\\
&= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) V_{k,l}(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{k,l}(n).
\end{aligned}$$

A fenti relációkból következik a feladat állítása ($Y_k = X_{2k-1}$ szereposztással).

4.) Mivel a tekintett valószínűségi változók együttesen normális eloszlásúak, a kívánt állításokat bebizonyíthatjuk egyszerűen a kovarinciafüggvény vizsgálatával. Ezt a számítást egyszerűsíthetjük, ha a $B(t)$ Brown bridge $B(t) = W(t) - tW(1)$ reprezentációját használjuk, ahol $W(t)$, $0 \le t \le 1$, $EW(t) = 0$, $EW(s)W(t) = \min(s,t)$ Wiener folyamat. Egyszerű számolással kapjuk, hogy

$$E\left(U_{2k-1,l+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} U_{k,l}\right) U_{j,l} = E\left(U_{2k,l+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} U_{k,l}\right) U_{j,l} = 0.$$

Innen, illetve a tekintett valószínűségi változók együttes Gauss eloszlásából következik, hogy az $\left\{U_{2k-1,l+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} U_{k,l}, U_{2k,l+1} - \frac{1}{\sqrt{2}} U_{k,l},\ k = 1,\dots,2^l\right\}$ véletlen vektor független az $\mathcal{F}_l$ σ-algebrától, és koordinátái nulla várható értékű valószínűségi változók.

Ezért $E\left(U_{2k-1,l+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}U_{k,l}\middle|\mathcal{F}_l\right)=0$, és $E(U_{2k-1,l+1}|\mathcal{F}_l)=\frac{1}{\sqrt{2}}E(U_{k,l}|\mathcal{F}_l)=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{k,l}$. Hasonlóan $E(U_{2k,l+1}|\mathcal{F}_l)=\frac{1}{\sqrt{2}}U_{k,l}$, $1\le k\le 2^l$. Ezért, $\bar U_{2k-1,l+1}=U_{2k-1,l+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}U_{k,l}$, $\bar U_{2k,l+1}=U_{2k,l+1}-\frac{1}{\sqrt{2}}U_{k,l}$, $k=1,\dots,2^l$.

Egyszerű számolás mutatja, hogy $\bar U_{2k-1,l+1}=\frac{1}{\sqrt{2}}(U_{2k-1,l+1}-U_{2k,l+1})=-\bar U_{2k,l+1}$, és $E\bar U_{2j-1,l+1}\bar U_{2k-1,l+1}=\delta_{j,k}$, $1\le k\le 2^l$, ahol $\delta_{j,k}=0$, ha $j\ne k$, és $\delta_{j,k}=1$, ha $j=k$. Ez azt jelenti, hogy az $\mathcal{F}_l$ σ-algebrától független $\bar U_{2k-1,l+1}$, $k=1,\dots,2^l$, valószínűségi változók függetlenek és standard normális eloszlásúak. Továbbá teljesül az $\bar U_{2k-1,l+1}=-\bar U_{2k,l+1}$ azonosság. A 4. feladat állításait beláttuk.

5a.) A feladat állítását beláthatjuk l szerinti teljes indukcióval. Tegyük fel, hogy az állítást már bebizonyítotuk l-re. Definiáljuk az $M_k=\frac{\sqrt{n}}{2^{(l+1)/2}}V_{k,l}(n)+\frac{n}{2^l}$, $k=1,\dots,2^l$, valószínűségi változókat. Megjegyezzük, hogy az M_k számok azt adják meg, hogy azon (később még megkonstruálandó) független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású $\zeta_1,\dots,\zeta_n$ valószínűségi változók közül, amelyek a $Z_n(t)$ standardizált empirikus eloszlásfüggvényt definiálják hány ζ_j változó esik a $[(k-1)2^{-l},k2^{-l}]$, $1\le k\le 2^l$, intervallumba. Az (5a) formulában definiált $\bar V_{2k-1,l+1}(n)$ valószínűségi változók a standard normális eloszlású $\bar U_{2k-1,l+1}$ valószínűségi változók függvényei, amelyek a 4. feladat eredménye alapján függetlenek egymástól, továbbá függetlenek a $\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebrától is, mert az $\mathcal{F}_l\supset\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebrától is függetlenek. Innen következik, hogy a $\bar V_{2k-1,l+1}$ valószínűségi változók feltételesen függetlenek, feltéve az M_k, $1\le k\le 2^l$, valószínűségi változókat, amelyek a $\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebrát generálják. Feltételes eloszlásaik pedig az $M_k=m_k$, $1\le k\le 2^l$, feltételek mellett megegyeznek az (5a) formula előtt definiált $F_{m_k,l}(x)$ eloszlásfüggvényekkel.

A 3. feladat eredménye alapján az (1)—(4) formulában egy $Z_n(t)$ standardizált empirikus eloszlásfüggvény segítségével definiált $\bar V_{2k-1,l+1}(n)$, $1\le k\le 2^l$, véletlen vektor feltételes eloszlása feltéve a kiinduló $Z_n(t)$ standardizált empirikus eloszlásfüggvény segítségével definiált $G_l(n)$ σ-algebrát megadható a következő módon. Definiáljuk az M_k valószínűségi változókat azzal a formulával, amelyet e feladat megoldásának elején felírtunk, azzal a különbséggel, hogy most a $Z_n(t)$ folyamat által definiált $V_{k,l}(n)$ változókat helyettesítjük be ebbe a formulába. A $\bar V_{2k-1,l+1}(n)$, $1\le k\le 2^l$, véletlen vektor feltételes eloszlása az $M_k=m_k$, $1\le k\le 2^l$, feltételek mellett, azaz a $\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebra $B(m_1,\dots,m_{2^l})$ atomján megegyezik az előbb tekintett $\bar V_{2k-1,l}(n)$ változók feltételes eloszlásával az $M_k=m_k$, $1\le k\le 2^l$, feltételek mellett az eredeti M_k valószínűségi változókkal. Továbbá, mivel a most tekintett esetben $E(V_{2k-1,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n))=\frac{1}{\sqrt{2}}V_{k,l}(n)$ a 3. feladat eredménye alapján, ezért összehasonlítva az (1)—(4) formulákat az (5b) és (5c) formulákkal, kapjuk, hogy az általunk konstruált $Z_n((2k-1)2^{-(l+1)})$, $1\le k\le 2^l$, véletlen vektor feltételes eloszlása feltéve a már megkonstruált $Z_n(k2^{-l})$, $1\le k\le 2^l$, valószínűségi változók értékeit, megegyezik az analóg feltételes eloszlással, ha a $Z_n((2k-1)2^{-(l+1)})$ és $Z_n(k2^{-l})$, $1\le k\le 2^l$, valószínűségi változókat egy $Z_n(t)$, $0\le t\le 1$, standardizált empirikus eloszlásfüggvény megfelelő pontokban felvett értékeivel helyettesítjük.

A $Z_n(k2^{-(l+1)})$, $1 \le k \le 2^{l+1}$, valószínűségi változók együttes eloszlását egyértelműen meghatározza a a $Z_n(k2^{-l})$, $1 \le k \le 2^l$, valószínűségi változók együttes eloszlása és a $Z_n((2k-1)2^{-(l+1)})$, $1 \le k \le 2^l$, valószínűségi vektor feltételes eloszlása, feltéve a $Z_n(k2^{-l})$, $1 \le k \le 2^l$, változók értékeit. Ezért a $Z_n((2k-1)2^{-(l+1)})$, $1 \le k \le 2^l$, véletlen vektor feltételes eloszlásairól kapott eredményből és az indukciós feltevésből következik, hogy a $Z_n(k2^{-(l+1)})$, $1 \le k \le 2^{l+1}$, véletlen vektor eloszlása megegyezik egy $Z_n(t)$ standardizált empirikus eloszlásfüggvény értékeinek az együttes eloszlásával $t = k2^{-(l+1)}$, $1 \le k \le 2^{+1}$, pontokban.

Belátjuk, hogy a most definiált $Z_n(k2^{-(l+1)})$, $V_{k,l+1}(n)$ és $\bar{V}_{k,l+1}(n)$ valószínűségi változók teljesítik az (1)—(4) formulákat. Az (5a) képletben definiált $\bar{V}_{2k-1,l}(n)$ valószínűségi változók teljesítik az $E(\bar{V}_{2k-1,l}(n)|\mathcal{G}_l(n)) = 0$ azonosságot, mert a $\bar{V}_{2k-1,l}(n)$ valószínűségi változó feltételes eloszlása feltéve a $\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebrát az $F_{m_k,l}(x)$ eloszlásfüggvény a $\mathcal{G}_l(n)$ σ-algebra azon atomján, amelyen

$$m_k = \frac{\sqrt{n}}{2^{(l+1)/2}} V_{k,l}(n) + \frac{n}{2^l}, \quad k = 1, \ldots, 2^l,$$

és egy $F_{m_k,l}(x)$ eloszlású valószínűségi változó várható értéke nulla. Ezért az (5b) formula alapján $E(V_{2k-1,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n)) = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{k,l}(n)$, és

$$\bar{V}_{2k-1,l+1}(n) = V_{2k-1,l+1}(n) - E(V_{2k-1,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n)).$$

Az (5c) formula alapján

$$V_{2k-1,l+1}(n) = 2^{(l+2)/2} \left(Z_n \left(\frac{2k-1}{2^{l+1}} \right) - Z_n \left(\frac{2k-2}{2^{l+1}} \right) \right).$$

A fenti azonosságok tartalmazzák az (1)—(4) formulának az indukció $l+1$-ik lépésben bizonyítandó állításait páratlan k számokra. A megfelelő azonosságok bizonyítása érdekében páros k számokra vegyük először észre, hogy az utolsó egyenlőségből, az (5d) formulából, valamint az (1b) képlet $l-1$ indexre már bizonyított alakjából következik, hogy

$$\begin{aligned} V_{2k,l+1}(n) &= 2^{(l+2)/2} \left(Z_n \left(\frac{k}{2^l} \right) - Z_n \left(\frac{k-1}{2^l} \right) \right) \\ &\quad - 2^{(l+2)/2} \left(Z_n \left(\frac{2k-1}{2^{l+1}} \right) - Z_n \left(\frac{2k-2}{2^{l+1}} \right) \right) \\ &= 2^{(l+2)/2} \left(Z_n \left(\frac{2k}{2^{l+1}} \right) - Z_n \left(\frac{2k-1}{2^{l+1}} \right) \right). \end{aligned}$$

Ismét használva az (5d) formulát, illetve a $V_{2k-1,l+1}(n)$ változóra bizonyított formulákat kapjuk, hogy $E(V_{2k,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n)) = \sqrt{2} V_{k,l}(n) - \frac{1}{\sqrt{2}} V_{k,l}(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{k,l}(n)$, továbbá

$$V_{2k,l+1}(n) = \sqrt{2} V_{k,l}(n) - \bar{V}_{2k-1,l+1}(n) - \frac{1}{\sqrt{2}} V_{k,l}(n) = \frac{1}{\sqrt{2}} V_{k,l}(n) - \bar{V}_{2k-1,l+1}(n).$$

E formulákból, illetve az (5e) képletből következik, hogy teljesül a $\bar{V}_{2k,l+1}(n) = V_{2k,l+1}(n) - E(V_{2k,l+1}(n)|\mathcal{G}_l(n))$ azonosság is. Ezzel az (1)—(4) formulákat az $l+1$-ik lépésben is beláttuk.

Végül vegyük észre, hogy a $\mathcal{G}_{l+1}(n) \subset \mathcal{F}_{l+1}$ reláció is teljesül, mert a $\mathcal{G}_{l+1}(n)$ σ-algebrát generáló $V_{k,l+1}(n)$ valószínűségi változók a $\mathcal{F}_{l+1}$ mérhető $U_{k,l+1}$ valószínűségi változók mérhető függvényei.

5b.) A ζ_j, $1 \le j \le n$, valószínűségi változók 5b.) feladatban megadott konstrukciójából azonnal következik, hogy a belőlük készített standardizált empirikus eloszlásfüggvény értékei a $t = k2^{-L}$ pontokban megegyeznek a $Z_n(k2^{-L})$ valószínűségi változókkal minden $1 \le k \le 2^L$ számra. Be kell még látnunk, hogy ezek független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók.

Ennek érdekében be fogjuk látni a következő állítást. Ha $\bar{\zeta}_1, \dots, \bar{\zeta}_n$ független, a $[0,1]$ intervallumban egyeneletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, $\bar{\zeta}_1^* \le \cdots \le \bar{\zeta}_n^*$ az ebből a sorozatból készített rendezett minta, és M_k jelöli a $\bar{\zeta}_j^*$, $1 \le j \le n$ sorozatnak a $[(k-1)2^{-L}, k2^{-L}]$ intervallumba eső pontjainak számát, $1 \le k \le 2^L$, akkor $P(M_1 = m_1, \dots, M_{2^L} = m_{2^L}) = \dfrac{n!}{m_1! \cdots m_{2^L}!} 2^{-Ln}$, ha $m_k \ge 0$ minden $1 \le k \le 2^L$ indexre, és $\sum\limits_{k=1}^{2^L} m_k = n$. Továbbá a $\bar{\zeta}_1^* \le \cdots \le \bar{\zeta}_n^*$ véletlen sorozat feltételes eloszlása feltéve az $\{M_1 = m_1, \dots, M_{2^L} = m_{2^L}\}$ eseményt megegyezik olyan $\xi_{m_0+\cdots+m_{k-1}+1}, \xi_{m_0+\cdots+m_{k-1}+2}, \dots, \xi_{m_0+\cdots+m_k}$, $1 \le k \le 2^L$, $(m_0 = 0)$, egymástól független, véletlen sorozatok egyesítésének az eloszlásával, amelyekre a $\xi_{m_0+\cdots+m_{k-1}+1}, \xi_{m_0+\cdots+m_{k-1}+2}, \dots, \xi_{m_0+\cdots+m_k}$ véletlen sorozat m_k számú független, a $[(k-1)2^{-l}, k2^{-L}]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból készített rendezett minta. Valóban, könnyen ellenőrizhető a

$$P(M_1 = m_1, \dots, M_{2^L} = m_{2^L}) = \frac{n!}{m_1! \cdots m_{2^L}!} 2^{-Ln}$$

azonosság. Másrészt, ha mindegyik $\bar{\zeta}_j$, $1 \le j \le n$, valószínűségi változó esetén előírjuk, hogy melyik $[m(j)2^{-L}, (m(j)+1)2^{-L}]$ intervallumba esik, és ezt úgy tesszük, hogy az $[(k-1)1^{-L}, k2^{-L}]$ intervallumba m_k $\bar{\zeta}_j$ változó esik, $1 \le k \le 2^L$, akkor a $\bar{\zeta}_j$, $1 \le j \le n$, valószínűségi változók feltételesen függetlenek ezen feltételek mellett, és ζ_j egyenletes eloszlású a $[m(j)2^{-L}, (m(j)+1)2^{-L}]$ intervallumban. Innen következik, hogy a $\bar{\zeta}_1^* \le \cdots \le \bar{\zeta}_n^*$ rendezett minta feltételes eloszlása egy ilyen feltétel mellett, és ezért ezen feltételek uniójára, azaz az $M_1 = m_1, \dots, M_{2^L} = m_{2^L}$ feltételek mellett is az előbb leírt feltételes eloszlás.

Tekintsük az 5b.) feladatban konstruált $\zeta_1^* \le \cdots \le \zeta_n^*$ véletlen sorozatot, és definiáljuk az M_k' valószínűségi változókat úgy, hogy M_k' egyenlő a ζ_j^*, $1 \le j \le n$, sorozatnak a $[(k-1)2^{-L}, k2^{-L}]$ intervallumba eső pontjainak számával. Ekkor $P(M_1' = m_1, \dots, M_{2^L}' = m_{2^L}) = \dfrac{n!}{m_1! \cdots m_{2^L}!} 2^{-Ln}$, ha $m_k \ge 0$ minden $1 \le k \le 2^L$ indexre, és $\sum\limits_{k=1}^{2^L} m_k = n$. Továbbá a $\zeta_1^* \le \cdots \le \zeta_n^*$ véletlen sorozat feltételes eloszlása feltéve az $\{M'_1 = m_1, \dots, M'_{2^L} = m_{2^L}\}$ eseményt megegyezik olyan $\xi_{m_0+\cdots+m_{k-1}+1}, \xi_{m_0+\cdots+m_{k-1}+2}, \dots, \xi_{m_0+\cdots+m_k}$, $1 \le k \le 2^L$, $(m_0 = 0)$, egymástól független, véletlen sorozatok egyesítésének az eloszlásával, ahol a

$$\xi_{m_0+\cdots+m_{k-1}+1}, \xi_{m_0+\cdots+m_{k-1}+2}, \dots, \xi_{m_0+\cdots+m_k}$$

sorozat m_k számú független, a $[(k-1)2^{-l}, k2^{-L}]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változóból készített rendezett minta. Mivel az $M'_1, \dots, M'_{2^L}$ eloszlása, illetve a $\zeta_1^* \le \cdots \le \zeta_n^*$ véletlen sorozat feltételes eloszlása feltéve az $\{M'_1 = m_1, \dots, M'_{2^L} = m_{2^L}\}$ eseményt meghatározza a $\zeta_1^* \le \cdots \le \zeta_n^*$ véletlen sorozat eloszlását, a fenti állításokból következik, hogy a $\zeta_1^* \le \cdots \le \zeta_n^*$ és $\bar\zeta_1^* \le \cdots \le \bar\zeta_n^*$ véletlen sorozatok eloszlása megegyezik, azaz $\zeta_1^* \le \cdots \le \zeta_n^*$ egy független, és a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változókból készített rendezett minta.

Végül tegyük a következő észrevételt. Ha $\bar\zeta_1, \dots, \bar\zeta_n$ független, a $[0,1]$ intervallumban egyeneletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, akkor definiálva az $\{1, \dots, n\}$, halmaznak azt a véletlen permutációját, amelyre $\bar\zeta_j = \bar\zeta_{\pi(j)}$, $j = 1, \dots ,n$, ahol $\bar\zeta_1^* \le \cdots \le \bar\zeta_n^*$ a $\bar\zeta_1, \dots, \bar\zeta_n$ sorozatból készített rendezett minta, akkor a $(\pi(1), \dots, \pi(n))$, és $(\bar\zeta_1^*, \dots, \bar\zeta_n^*)$ vektorok függetlenek, és a $(\pi(1), \dots, \pi(n))$ vektor egyenletes eloszlású az $\{1, \dots, n\}$ halmaz permutációin. Ebből a tényből, illetve abból, hogy $\zeta_1^* \le \cdots \le \zeta_n^*$ egy független, és a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változókból készített rendezett minta, következik, hogy az 5b.) feladatban definiált $\zeta_1, \dots, \zeta_n$ sorozat független és a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változókból áll.

6.) A 6.) feladat fő állítása a 2. feladat eredményének következménye. Annak érdekében, hogy elkerüljük különböző mennyiségeknek ugyanazzal a betűvel való jelölését, alkalmazzuk a második feladat eredményét $\bar m$ és $\bar n$ jelöléssel az m és n betűk helyett. Alkalmazzuk a második feladat eredményét $\bar m = \frac{n}{2^l}$, $\bar n = m_k = \frac{\sqrt{n}}{2^{(l+1)/2}} V_{k,l}(n) + \frac{n}{2^l}$ és $\eta = \bar U_{2k-1,l+1}$ szereposztással. Ekkor $|\bar n - \bar m| = \frac{\sqrt{n}}{2^{(l+1)/2}} |V_{k,l}(n)| = \frac{\sqrt{\bar n}}{\sqrt{2}} |V_{k,l}(n)|$. Egyszerű számolás adja, hogy a 2. Lemma $|\eta| < A\sqrt{\bar n}$ és $|\bar n - \bar m| < B\bar n$ feltételei teljesülnek, ha az $A > 0$ konstanst a 6. feladat végén megfogalmazott feltételben elég kicsinek választjuk. Másrészt $\frac{(\bar n - \bar m)^2}{\bar n} = \frac{V_{k,l}(n)^2}{2}$, ezért a 2. feladat eredménye megadja (7a) reláció első felét. A (7a) reláció második fele nyilvánvaló, mert $\bar U_{2k-1,l+1} = -\bar U_{2k-1,l+1}$. A (7b) egyenlőtlenség a (7a) formula egyszerű következménye, mert

$$|U_{2k-1,l+1} - V_{2k-1,l+1}(n)| \le |\bar U_{2k-1,l+1} - \bar V_{2k-1,l+1}(n)| + \frac{|U_{k,l} - V_{k,l}(n)|}{\sqrt{2}},$$

és

$$|U_{2k,l+1} - V_{2k,l+1}(n)| \le |\bar U_{2k-1,l+1} - \bar V_{2k-1,l+1}(n)| + \frac{|U_{k,l} - V_{k,l}(n)|}{\sqrt{2}},$$

mivel $V_{2k-1,l}(n) = \bar V_{2k-1,l}(n) + \dfrac{V_{k,l}(n)}{\sqrt{2}}$, $U_{2k-1,l} = \bar U_{2k-1,l} + \dfrac{U_{k,l}}{\sqrt{2}}$ a harmadik és negyedik feladatban bizonyított $E(V_{2k-1,l}(n)|\mathcal{G}_l(n)) = \dfrac{V_{k,l}(n)}{\sqrt{2}}$ és $E(U_{2k-1,l}(n)|\mathcal{F}_l) = \dfrac{U_{k,l}}{\sqrt{2}}$ azonosságok alapján. Ezenkívül hasonló reláció érvényes a $V_{2k,l}(n)$ és $U_{2k,l}$ valószínűségi változókra is.

7.) A $V_{k,l}$ valószínűségi változók, az $\varepsilon(j)$ illetve $k(j)$ számok definiciója alapján az

$$\begin{aligned}\varepsilon(j)2^{-(j+1)/2}&\left(\sqrt{2}V_{k_{j-1}+1,j-1}(n) - V_{k_j+1,j}(n)\right)\\ &= \varepsilon(j)\left(Z_n(k_j2^{-j}) - Z_n(k_{j-1}2^{-(j-1)})\right)\end{aligned}$$

azonosság érvényes minden $1 \le j \le l$ számra. Ugyanis vagy $\varepsilon(j) = 0$, amikor ez az állítás nyilvánvaló vagy $\varepsilon(j) = 1$, amikor $k_j = 2k_{j-1} + 1$, és a $V_{k,l}$ valószínűségi változók definiciójából következik az állítás. Ezeket az azonosságokat összegezve és felhasználva a $Z_n(k_l2^{-l}) = Z_n(t)$ és $Z_n(k_0) = Z_n(0) = 0$ relációkat kapjuk (8a) formula első sorát a $Z_n(t)$ valószínűségi változó reprezentációjáról. A $B(t)$ kifejezésre felírt formula hasonlóan bizonyítható.

A (8b) képlet bizonyításában alkalmazzuk a (7b) formulát $l = j - s - 1$ és $k = k_{j-s-1} + 1$ választással. Ha $u_{j-s-1} = k_{j-s-1}2^{-j-s-1} = u_{j-s} = k_{j-s}2^{-j-s}$, akkor $k_{j-s} + 1 = 2(k_{j-s-1} + 1) - 1$, és tekintsük az egyenlőtlenség baloldalán szereplő maximum első tagját, és az egyenlőtlenség jobboldalán az első kifejezést. Ha $u_{j-s-1} = k_{j-s-1}2^{-j-s-1} < u_{j-s} = k_{j-s}2^{-j-s}$, akkor $k_{j-s} + 1 = 2(k_{j-s-1} + 1)$, és ekkor tekintsük az egyenlőtlenség baloldalán szereplő maximum második tagját, és az egyenlőtlenség jobboldalán a második kifejezést. E választással kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&2^{-s}\cdot 2^{-(j-s+1)/2}|U_{k_{j-s}+1,j-s} - V_{k_{j-s}+1,j-s}(n)|\\ &\quad< 2^{-s}\cdot\frac{K}{\sqrt{n}}(\bar U^2_{k_{j-s}+1,j-s} + V^2_{k_{j-s-1}+1,j-s-1}(n) + 1)\\ &\qquad+ 2^{-(s+1)}\cdot 2\cdot\frac{2^{-(j-(s+1)+1)/2}}{2}|U_{k_{j-(s+1)}+1,j-(s+1)} - V_{k_{j-(s+1)}+1,j-(s+1)}(n)|\end{aligned}$$

minden $1 \le j \le l$ és $0 \le s \le j-1$ számpárra. Ezeket az egyenlőtlenségeket összeadva minden $0 \le s \le j-1$ számokra, és összehasonlítva a két oldalt megkapjuk a (8b) egyenlőtlenséget. Azt kell észrevenni, hogy minden $1 \le j-s \le j-1$ indexre az $|U_{k_{j-s}+1,j-s} - V_{k_{j-s}+1,j-s}(n)|$ kifejezések ugyanazzal az együtthatóval szerepelnek az összegzés után kapott egyenlőtlenség mindkét oldalán. Továbbá jegyezzük meg, hogy ha $\omega \in \mathbf{B}$, ahol $\mathbf{B}$ a 7. feladatban definiált halmaz, akkor az előbbi egyenlőtlenségek érvényesek, azaz a $\bar U_{k_{j-s}+1,j-s}(\omega)$ és $V_{kj-s+1,j-s}(\omega)$ teljesítik a 6. feladat feltételeit.

A $Z_n(k2^{-l}) - B(k2^{-l})$ a (8a) formula segítségével kifejezhető mint a $V_{k_j+1,j}(n) - U_{k_j+1,j}$ kifejezések lineáris kombinációja. Ezen tagok mindegyikére becslést ad a

(8b) formula. Behelyettesítve ezeket a becsléseket ebbe a kifejezésbe, kapjuk a következő becslést:

$$
\begin{aligned}
|Z_n(k2^{-l})-B(k2^{-l})| &\le 2\sum_{j=1}^{l} 2^{-(j+1)/2}|V_{k_j+1,j}(n)-U_{k_j+1,j}| \\
&\le \frac{2K}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{l}\sum_{s=0}^{j-1} 2^{-s}\left(\bar U^2_{k_{j-s}+1,j-s}+V^2_{k_{j-s-1}+1,j-s-1}(n)+1\right) \\
&= \frac{2K}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^{l}\sum_{s=1}^{j} 2^{-(j-s)}\left(\bar U^2_{k_s+1,s}+V^2_{k_{s-1}+1,s-1}(n)+1\right) \\
&= \frac{2K}{\sqrt{n}}\sum_{s=1}^{l}\left(\bar U^2_{k_s+1,s}+V^2_{k_{s-1}+1,s-1}(n)+1\right)\sum_{j=s}^{l}2^{-(j-s)}.
\end{aligned}
$$

Innen következik a (8c) formula.

8.) A negyedik feladat eredménye alapján a $\bar U_{k,j}$, $1\le j\le l$, $1\le k\le 2^j$, független, standard normális eloszlású valószínűségi változók, innen következik az állítás az $\bar U_{k_j+1,j}$, $1\le j\le l$, együttes eloszlásáról. Az analóg állítás a $V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)$, $1\le j\le l$, sorozat eloszlására j szerinti teljes indukcióval következik az alábbi állításból.

Az $V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)$, illetve ami ezzel ekvivalens, az $M_{j-1}=\frac{\sqrt{n}}{2^{j/2}}V_{k_{j-1}+1}-\frac{n}{2^{j-1}}$ valószínűségi változók feltételes eloszlása feltéve az $M_s=\frac{\sqrt{n}}{2^{(s+1)/2}}V_{k_s+1,s}-\frac{n}{2^s}=m_s$, $1\le s\le j-2$, feltételeket megegyezik az $V_{1,j-1}(n)$, illetve az $\bar M_{j-1}=\frac{\sqrt{n}}{2^{j/2}}V_{1,j-1}-\frac{n}{2^{(j-1)}}$ valószínűségi változó feltételes eloszlásával feltéve az $\bar M_s=\frac{\sqrt{n}}{2^{(s+1)/2}}V_{1,s}-\frac{n}{2^s}=m_s$, $1\le s\le j-2$, feltételeket, ahol $m_1,\dots,m_{s-2}$, tetszőleges nem negatív egész számok. Ez az állítás igaz, mert mind az M_{j-1} mind a $\bar M_{j-1}$ feltételes eloszlása az adott feltételek mellett a $B(m_{j-2},\frac12)$ binomiális eloszlás m_{j-2} és $\frac12$ paraméterrel.

Az $1-P(\mathbf{B})\le e^{-D_1x}$ egyenlőtlenséget a következő becslések segítségével mutatjuk meg. Tetszőleges $1\le j\le l$ számra

$$
\begin{aligned}
P\left(|V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)|>\frac{A\sqrt{n}}{2^{j/2}}\right) &= P\left(\frac{2^{j/2}}{\sqrt{n}}\left|\sum_{k=1}^{n}(\chi_k-E\chi_k)\right|>\frac{A\sqrt{n}}{2^{j/2}}\right) \\
&= P\left(\left|\sum_{k=1}^{n}(\chi_k-E\chi_k)\right|>\frac{An}{2^j}\right),
\end{aligned}
$$

ahol χ_k, $1\le k\le n$, független valószínűségi változók, és $P(\chi_k=1)=1-P(\chi_k=0)=2^{-(j-1)}$. Innen kapjuk, hogy $Ee^{t(\chi_k-E\chi_k)}=\left(1-\frac{1}{2^{j-1}}+\frac{e^t}{2^{j-1}}\right)e^{-t/2^{j-1}}$, ahonnan $|t|<1$ esetén $Ee^{t(\chi_k-E\chi_k)}\le\exp\left\{\frac{e^t-1}{2^{j-1}}-\frac{t}{2^{j-1}}\right\}\le\exp\left\{\frac{10t^2}{2^j}\right\}$. Az utóbbi becslésekben azt használtuk ki, hogy $t+1 \le e^t$, és $e^t-1-t<5t^2$, ha $|t|\le 1$. Az előző becslések alapján $E\left(\exp\left\{t\sum\limits_{k=1}^n(\chi_k-E\chi_k)\right|\right\}\le e^{10t^2n}$, ha $|t|<1$, és

$$P\left(V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)>\frac{A\sqrt{n}}{2^{j/2}}\right)=P\left(\exp\left\{t\sum_{k=1}^n(\chi_k-E\chi_k)\right\}>e^{Ant/2^j}\right) \qquad (2.2a)$$
$$\le e^{n2^{-j}(10t^2-At)}\le e^{-\bar{D}2^{l-j}x} \quad \text{minden } 1\le j\le l \text{ számra.}$$

alkalmas $\bar{D}>0$ számmal, ha $j\le l$. Az utolsó egyenlőtlenségben azt használtuk ki, hogy egyrészt $10t^2-At<-D'$ alkalmas $D'>0$ számmal, ha a $t>0$ számot elég kicsire választjuk, másrészt $-n2^{-j}=-2^{l-j}2^{-l}n\le -C_0x2^{l-j}$.

Mivel $\bar{U}_{k_{j-1}+1,j-1}$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, ezért egyszerű számolás adja, hogy

$$P\left(|U_{k_{j-1}+1,j-1}(\omega)|<\frac{A\sqrt{n}}{2^{j/2}}\right)\le e^{-A^2n2^{j-1}}\le e^{-D''2^{l-j}x} \qquad (2.2b)$$
$$\text{minden } 1\le j\le l \text{ számra.}$$

A (2.2a) becslés akkor is érvényes marad, ha benne a $V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)$ változót $-V_{k_{j-1}+1,j-1}(n)$ a változóval helyettesítjük. Ha a (2.2a) egyenlőtlenségeket, azok előbb említett analogonjait valamint a (2.2b) egyenlőtlenségeket összegezzük minden $1\le j\le n$ számra, akkor megkapjuk a $1-P(\mathbf{B})\le e^{-D_1x}$ egyenlőtlenséget.

A 8. feladat utolsó becslésének bizonyítása érdekében tekintsük egy normális eloszlású valószínűségi változó négyzetét, és számítsuk ki e valószínűségi változó standardizáltjának a momentumgeneráló függvényét. Ha η standard normális eloszlású valószínűségi változó, akkor

$$Ee^{t(\eta^2-E\eta^2)}=Ee^{t(\eta^2-1)}=\frac{e^{-t}}{\sqrt{2\pi}}\int e^{tx^2-x^2/2}\,dx=\frac{e^{-t}}{\sqrt{1-2t}}, \quad \text{ha } t<\frac12.$$

Innen $\log Ee^{t(\eta^2-E\eta^2)}=-t-\frac12\log(1-2t)<t^2$, ha $0<t\le\frac14$. (Egy ilyen tipusú becslés érvényességének mélyebb oka az, hogy egy 0 várható értékű valószínűségi változó momentumgeneráló függvénye úgy viselkedik, mint $e^{\text{const.}\,t^2}$ az origó közelében.) Ezért

$$P\left(18K\sum_{j=1}^l\bar{U}^2_{1,j-1}>x\right)=P\left(\exp\left\{\frac14\sum_{j=1}^l(\bar{U}^2_{1,j-1}-E\bar{U}^2_{1,j-1})\right\}>e^{x/72K-l}\right)$$
$$\le e^{2l-x/72K}\le e^{-x/144K}=e^{-D_2x},$$

amint azt a feladatban állítottuk, feltéve, hogy $l\le\frac{x}{288K}$. Ez az egyenlőtlenség azért teljesül, mert $l=\log C+\log n-\log x\le 2\log n\le\frac{2x}{C_0}\le\frac{x}{288K}$ a 8. feladat feltételeteleinek teljesülése esetén, ha ezekben a feltételekben a C_0 konstanst elég nagyra választjuk, és $n \ge n_0$, ahol n_0 alkalmas küszöbindex.

9.) A (8c) egyenlőtlenség érvényes minden $t = k2^{-l}$, $k = 1, \dots, 2^l$, a $\mathbf{B}_0 = \bigcap\limits_{k=1}^{2^l} \mathbf{B}(k2^{-l})$ halmazon. A 8. feladat becslése alapján $1 - P(\mathbf{B}_0) \le 2^l e^{-D_1 x} \le \dfrac{n}{Cx} e^{-D_1 x} \le n e^{-D_1 x} \le e^{x/C_0 - D_1 x} \le e^{-D_1 x/2}$, ha a 9. feladat feltételeiben szereplő $x \ge C_0 \log n$ egyenlőtlenségben a C_0 konstanst és az n_0 küszöbindexet elég nagyra választjuk.

Ezért a (8c) egyenlőtlenségből, illetve 8. feladat első felének az eredményéből következik, hogy

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sup_{1\le k\le 2^n} \sqrt{n}|Z_n(k(2^{-l}) - B(k2^{-l})| > \frac{x}{2}\right) \\
&\qquad \le e^{-D_1 x/2} + 2^l P\left(4K \sum_{j=1}^{l} \left(\bar U_{1,j}^2 + V_{1,j-1}^2(n) + 1\right) \ge \frac{x}{2}\right) \\
&\qquad \le e^{-D_1 x/2} + 2^l P\left(18K \sum_{j=1}^{l} \bar U_{1,j-1}^2 > x\right) + 2^l P\left(18K \sum_{j=1}^{l} V_{1,j-1}^2 > x\right).
\end{aligned}
$$

Az utolsó egyenlőtlenségben kihasználtuk hogy $4K \sum\limits_{j=1}^{l} 1 = 4Kl \le \dfrac{x}{18}$, mert $l \le \log n \le \dfrac{x}{C_0} \le \dfrac{x}{72K}$, ha a $C_0 > 0$ konstanst és az n_0 küszöbindexet, amelyre $n \ge n_0$ a (9) reláció feltételében elég nagyra választjuk. Ezért a (10) formula eredménye, a 8. feladat utolsó egyenlőtlensége és az előző egyenlőtlenség alapján a (9) kifejezés baloldala felülről becsülhető a $e^{D_1 x/2} + 2^l \left(e^{-D_2 x} + e^{-D_3 x}\right)$ kifejezéssel. Mivel $2^l \le n \le e^{\min(D_2, D_3)x/2}$, ha a $C_0 > 0$ és n_0 küszöbindexet alkalmasan választjuk a (9) formulában, innen következik a 9. feladat állítása.

10.) Mivel $Z_n(t) = X_n(t) - Y_n(t)$, $Z_n(t)^2 \le 2X_n(t)^2 + 2Y_n(t)^2$, és

$$
\begin{aligned}
&P\left(18 \sum_{j=1}^{l} 2^j Z_n^2\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right) > x\right) \\
&\qquad \le P\left(36 \sum_{j=1}^{l} 2^j \left(X_n^2\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right) + Y_n^2\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)\right) > x\right) \\
&\qquad \le P\left(72K \sum_{j=1}^{l} 2^j X_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2 > x\right) + P\left(72K \sum_{j=1}^{l} 2^j Y_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2 > x\right).
\end{aligned}
$$

Ez a (12) formula.

Ha κ_n n paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, akkor $\kappa_n - n$ momentumgeneráló függvénye $Ee^{t(\kappa_n-n)} = e^{-tn}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{n^k}{k!}e^{-n+tk} = e^{n(e^t-1-t)}$. Innen kapjuk, hogy mivel $n(e^t-t-1)\le t^2$, ha $|t|\le 1$, $Ee^{t(\kappa_n-n)}\le e^{nt^2}$, ha $|t|\le 1$. Ezért $P(\kappa_n-n>y)\le e^{nt^2-ty}\le e^{-y^2/4n}$ $t=\frac{y}{2n}$ választással, ha $y\le 2n$. Hasonlóan, $P(\kappa_n-n<-y)\le e^{-y^2/4n}$. A κ_n-n eloszlásáról a feladatban kissé általánosabban megfogalmazott egyenlőtlenség is érvényes. Ugyanis, ha az $|y|\le 2n$ feltételt helyettesítjük a $|y|\le B_1 n$ feltétellel, akkor az előző egyenlőtlenség érvényben marad amennyiben a $-y^2/4n$ kitevőt a $-B_2y^2/n$ kitevővel helyettesítjük alkalmas $B_2>0$ konstanssal.

A (13) formula bizonyítása érdekében jegyezzük meg, hogy mivel a (11c) formulában definiált $Y_n(t)$ valószínűségi változók nem negatívak, ezért

$$P\left(72K\sum_{j=1}^{l}2^jY_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2>x\right)\le P\left(\left(\sqrt{72K}\sum_{j=1}^{l}2^{j/2}Y_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)\right)^2>x\right),$$

és véve a $\kappa_n-n=m$, $-\infty<m<\infty$ feltételeket, és felhasználva a (13) képlet előtt definiált $\bar Y_{n,m}$ valószínűségi változók definicióját, kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&P\left(\sqrt{72K}\sum_{j=1}^{l}2^{j/2}\left|Y_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)\right|>\sqrt{x}\right)\\
&\quad=\sum_{m=-\infty}^{\infty}P\left(\sqrt{72K}\sum_{j=1}^{l}2^{j/2}\bar Y_{n,|m|}\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)>\sqrt{x}\right)P(\kappa_n-n=m)\\
&\quad\le P\left(\sqrt{72K}\sum_{j=1}^{l}2^{j/2}\bar Y_{n,B\sqrt{nx}}\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)>\sqrt{x}\right)P(|\kappa_n-n|\le B\sqrt{nx})\\
&\qquad+P(|\kappa_n-n|>B\sqrt{nx}).
\end{aligned}\tag{2.3}$$

A (2.3) képlet utolsó relációját annak észrevételével láthatjuk be, hogy a (2.3) formula második sorában szereplő szorzatban az első valószínűség az $|m|=|\kappa_n-n|$ paraméter monoton függvénye. Ha rögzítjük az $M=B\sqrt{nx}$ számot, és az előbb tekintett valószínűségre úgy adunk felső becslést, hogy $|m|\le M$ esetén az m paramétert az M számmal helyettesítjük, $|m|>M$ esetén pedig a triviális 1 felső becslést adjuk, akkor megkapjuk a (2.3) reláció utolsó egyenlőtlenségét. A (13) képletben felírt első reláció a a (2.3) formula és az azt megelőző reláció egyszerű következménye. Végül a (13) formula végén felírt azonosság egyszerű számolással adódik, ha a (13) formulába beírjuk az $\bar Y_{n,B\sqrt{nx}}$ valószínűségi változó definicióját, az így kapott kettős összegben az összegezést felcseréljük, és ebben a kifejezésben a ζ_k, $1\le k\le B\sqrt{nx}$, változótól függő tagok összegét egy ξ_k valószínűségi változóban egyesítjük.

A $\xi_k=\xi_{k,l}$ valószínűségi változók a független ζ_k valószínűségi változók függvényei. Innen, illetve a ξ_k valószínűségi változók definiciójából következik, hogy ezek függetlenek és egyforma eloszlásúak.

11.) A feladat feltételeinek teljesülése esetén $2^{l/2}\le\sqrt{\frac{n}{Cx}}$, és $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\xi_k\le\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\frac{2^{(l+1)/2}}{\sqrt{2}-1}\le$ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\sqrt{\frac{n}{Cx}}\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}=\frac{\sqrt{2}}{(\sqrt{2}-1)\sqrt{C}}$. Ezért $\exp\left\{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\xi_k\right\}\le 1+\bar C\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\xi_k$ alkalmas $\bar C=\bar C(C)>0$ számmal, és $E\exp\left\{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\xi_k\right\}\le 1+\bar C\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}E\xi_k\le 1+\bar K\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}$ alkalmas $\bar K=\bar K(C)$ számmal, amint ezt állítottuk, mert $E\xi_k=\sum\limits_{j=1}^{l}2^{-j/2-1}\le\sqrt{2}+1$.

Innen kapjuk, hogy

$$P\left(\frac{\sqrt{72K}}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{B\sqrt{nx}}\xi_k>\sqrt{x}\right)=P\left(\exp\left\{\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{B\sqrt{nx}}\xi_k\right\}>\exp\left\{\frac{x}{\sqrt{72K}}\right\}\right)$$
$$\le\left(1+\bar K\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{n}}\right)^{B\sqrt{nx}}\exp\left\{-\frac{x}{\sqrt{72K}}\right\}\le e^{B\bar Kx-x/\sqrt{72K}}.$$

Válasszunk a fenti egyenlőtlenségben $B=\frac{1}{12\bar K\sqrt{K}}$ számot. Ekkor az itt szereplő valószínűségről beláttuk, hogy kisebb, mint $e^{-\mathrm{const.}\,x}$. Másrészt, a 10. feladat első állítása alapján a $P(|\kappa_n-E\kappa_n|>B\sqrt{nx})<e^{-\mathrm{const.}\,x}$ egyenlőtlenség is érvényes. Ezekből a becslésekből és a (13) formulából következik a (14) formula.

12.) Összegezve a (15) formulában felírt egyenlőtlenségeket ($B=5$ együtthatóval) kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
&72K\sum_{j=1}^{l}2^jX_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2\\
&\quad\le 360K\sum_{j=1}^{l}2^j\left(\sum_{k=j}^{l}2^{(k-j)/2}\left[X_n\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-X_n\left(\frac{1}{2^k}\right)\right]^2+2^{(l-j)/2}X_n^2\left(\frac{1}{2^l}\right)\right)\\
&\quad=360K\sum_{k=1}^{l}2^k\left[X_n\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-X_n\left(\frac{1}{2^k}\right)\right]^2\sum_{j=1}^{k}2^{(j-k)/2}\\
&\qquad\qquad+360K\sum_{j=1}^{l}2^{(l+j)/2}X_n^2\left(\frac{1}{2^l}\right)\\
&\quad\le 1500K\left(\sum_{k=1}^{l}2^k\left[X_n\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-X_n\left(\frac{1}{2^k}\right)\right]^2+2^lX_n^2\left(\frac{1}{2^l}\right)\right).
\end{aligned}$$

A $2^kX_n\left(\frac{1}{2^{k-1}}\right)-X_n\left(\frac{1}{2^k}\right)$, $1\le k\le l$, és a $2^lX_n\left(\frac{1}{2^l}\right)$ valószínűségi változók függetlenek, és együttes eloszlásuk megegyezik a (16) képletben szereplő független, ott megadott paraméterű η_k, $1 \le k \le l$, Poisson eloszlású valószínűségi változókból definiált $\dfrac{\eta_k - E\eta_k}{\sqrt{n}}$, $\le k \le l+1$, kifejezések együttes eloszlásával. Ezért az utolsó egyenlőtlenségből következik a (16) formula.

A $P(|\eta_k - E\eta_k| > u) \le 2\exp 2\left\{-\dfrac{u^2}{8n2^{-k}}\right\}$ egyenlőtlenséget $u < n2^{-k}$ esetben már bebizonyítottuk a 10. feladatban. Az ott bizonyított becslés egy κ_n n paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó eloszlásfüggvényéről ugyanis tetszőleges valós $n > 0$ számra is érvényes. (Ebben az egyenlőtlenségben nem törekedtünk éles becslést adni. Továbbá ezt az egyenlőtlenséget úgy fogalmaztuk meg, hogy a $k = l+1$ esetet ne kelljen külön tekinteni.) Speciálisan, $u = n2^{-k}$ választással megkapjuk a $P(|\eta_k - E\eta_k| \ge n2^{-k}) \le 2\exp\left\{-\dfrac{n}{2^{(k+3)}}\right\}$ becslést.

Az $E\exp\left\{n2^{-(k+4)}\bar{\eta}_k^2\right\} \le B$ egyenlőtlenség bizonyítása érdekében vezessük be az $F_k(y) = F_{n,k}(y) = P(|\bar{\eta}_k| < y)$, $1 \le k \le l+1$, eloszlásfüggvényeket, és jegyezzük meg, hogy az eddig bizonyítottak alapján $1 - F_k(y) \le 2e^{-2^k y^2/8n}$. Ezért parciális integrálással kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
E\exp\left\{\frac{2^{k-4}}{n}\bar{\eta}_k^2\right\} &= \int_0^{2^{-k}n} e^{2^k y^2/16n} F_k(\,dy) \\
&= \int_0^{2^{-k}n} (1 - F_k(y))\,de^{2^k y^2/16n} - \left[(1 - F_k(y))e^{2^k y^2/16n}\right]_0^{2^{-k}n} \\
&= \int_0^{2^{-k}n} (1 - F_k(y))\frac{2^k y}{8n} e^{2^k y^2/16n}\,dy + 1 - (1 - F_k(2^{-k}n))e^{2^{-k}n/16} \\
&\le 2\int_0^{2^{-k}n} \frac{2^k y}{8n} e^{-2^k y^2/16n}\,dy + 1 - e^{-2^{-k}n/16} \\
&= 2\int_0^{2^{-k/2}n^{1/2}/4} 2ye^{-y^2}\,dy + 1 - e^{-2^{-k}n/16} \le B,
\end{aligned}
$$

amint azt állítottuk.

A (17) formula bizonyításában felhasználjuk a (16) formulát, az $\eta_k - E\eta_k$ valószínűségi változók előbb bevezetett csonkítását, a $\bar{\eta}_k$ valószínűségi változó definicióját és az $\eta_k - E\eta_k$ valószínűségi változókról bebizonyított egyenlőtlenségeket. Így kapjuk, hogy

$$
P\left(72K\sum_{j=1}^{l} 2^j X_n\left(\frac{1}{2^{j-1}}\right)^2 > x\right) \le P\left(1500K\left(\sum_{k=1}^{l}\frac{2^k}{n}\bar{\eta}_k^2 + \frac{2^l}{n}\bar{\eta}_{l+1}^2\right) > x\right)
$$

$$+\sum_{k=1}^{l+1} P\left(|\eta_k - E\eta_k| > 2^{-k}n\right)$$

$$\le P\left(\exp\left\{\sum_{k=1}^{l}\frac{2^{(k-4)}}{n}\bar\eta_k^2+\frac{2^{(l-4)}}{n}\bar\eta_{l+1}^2\right\} > \exp\left\{\frac{x}{24000K}\right\}\right)$$

$$+2\sum_{k=1}^{l+1} e^{-n2^{-(k+3)}} \le e^{Bl-x/24000K} + \text{const.}\, e^{-n2^{-(l+4)}}.$$

Ha $x > C_0 \log n$ elég nagy $C_0 > 0$ konstanssal, akkor $Bl - \dfrac{x}{24000K} \le -\dfrac{x}{30000K}$ és $n2^{-(l+4)} \ge \text{const.}\, x$, mert ezen feltételek mellett $Bl \le B\log n + \text{const.} \le \dfrac{B}{C_0}x + \text{const.} \le \dfrac{x}{120000}$, ha a C_0 konstans elég nagy, és mivel $n2^{-l} \ge Cx$, ezért $n2^{-(l+4)} \ge \text{const.}\, x$. E relációkból és az utolsó egyenlőtlenségből következik a (17) formula.

A (10) egyenlőtlenség egyszerű következménye a (12), (14) és (17) formuláknak, a (9) reláció pedig a 9. feladat eredménye alapján következik a (10) egyenlőtlenségből és a 7. és 8. feladat eredményeiből.

13.) Mind egy $W(t)$ Wiener folyamat mind egy $X_n(t)$ standardizált Poisson folyamat független növekményű folyamat, és teljesülnek az $EW(t) = 0$ és $EX_n(t) = 0$ azonosságok minden $0 \le t \le 1$ számra. Továbbá a Wiener folyamat trajektóriái folytonos a standardizált Poisson folyamat trajektóriái pedig cadlag (jobbról folytonos baloldali határértékkel rendelkező) függvények. Ezért a feladatsorban megfogalmazott Lemma alkalmazható mind a $\pm B(t)$ mind a $\pm X_n(t)$ folyamatokra.

Mivel $W(t)$ nulla várható értékű t szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változók, ezért $Ee^{\pm sW(t)} = e^{ts^2/2}$, és a Lemma utolsó egyenlőtlensége alapján

$$P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \pm\sqrt{n}W(t) > y\right) \le \exp\left\{ns^2L\frac{y}{2n} - sy\right\}$$

tetszőleges $s > 0$ számmal. Ebből az egyenlőtlenségből $s = \frac{1}{L}$ választással megkapjuk a (18a) egyenlőtlenség analogonját a Wiener folyamatra $\alpha = \frac{1}{2L}$ paraméterrel.

A (18b) egyenlőtlenség analogonjának a bizonyítása hasonló. Az $X_n(t)$ valószínűségi változó egy $\sqrt{n}t$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó minusz annak a várható értéke. Ezért, mint azt például a 10. feladat megoldásában megmutattuk $e^{\pm sX_n(t)} \le e^{s^2\sqrt{n}t}$, ha $0 \le s \le 1$. Ezért a Lemma alkalmazásával kapjuk, hogy

$$P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \pm\sqrt{n}X_n(t) > y\right) \le e^{s^2Ly-sy} = e^{-y/4L}$$

$s = \frac{1}{2L}$ választással, ha $L \le \frac{1}{2}$, és így $s \le 1$. Ha $L \le \frac{1}{2}$ akkor, felhasználva azt, hogy a (18b) képlet baloldalán levő valószínűség az L paraméter monoton növekvő függvénye kapjuk, hogy a (18b) becslés ebben az esetben is érvényes ugyanazzal az α együtthatóval mint $L = \frac{1}{2}$ esetben. (Valójában, ebben az esetben a becslést javítani lehet, de erre nem lesz szükségünk.)

14.) A (18a) formula bizonyítását megkapjuk a Brown bridge-nek a feladatban megfogalmazott reprezentációja és a 13. feladat eredménye alapján a következő módon:

$$
\begin{aligned}
&P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|B(t)| > y\right) \le P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|W(t)| > \frac{y}{2}\right)\\
&\qquad + P\left(\sqrt{n}L\frac{y}{n}|W(1)| \ge \frac{y}{2}\right) \le 2e^{-\alpha y} + P\left(|W(1)| \ge \frac{\sqrt{n}}{2L}\right) \le 2e^{-\alpha y} + 2e^{-n/8L^2}.
\end{aligned}
$$

A (18a) formula innen következik a $0 < y \le n$ feltétel miatt.

A (18b) formula hasonlóan bizonyítható a (11a)—(11c) formulákban definiált Poisson approximáció és a 13. feladat eredménye alapján. Ezek alapján kapjuk, hogy

$$
P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|Z_n(t)| > y\right) \le 2e^{-\alpha y} + P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|Y_n(t)| > \frac{y}{2}\right), \tag{2.4}
$$

ahol az $Y_n(t)$ sorozatot a (11c) formula definiálja. A (2.4) egyenlőtlenség jobboldalának második tagját a 11. feladat módszeréhez hasonlóan becsülhetjük. Tekintsük az $Y_n(t)$ folyamat feltételes eloszlását a $\kappa_n = m$, $m = 0, \pm1, \pm2, \dots,$ feltételek mellett. Ekkor a (2.3) formula bizonyításának érveléséhez hasonlóan kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|Y_n(t)| > \frac{y}{2}\right) &\le P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|\bar{Y}_{n,B\sqrt{ny}}(t)| > \frac{y}{2}\right)\\
&\qquad + P\left(|\kappa_n - n| > B\sqrt{ny}\right),
\end{aligned} \tag{2.5}
$$

ahol az $\bar{Y}_{n,m}(t)$ folyamatot a 10. feladat megfogalmazásában a (13) formula előtt definiáltuk, κ_n az $Y_n(t)$ folyamatnak a (11) formulában megadott definiciójában szereplő n paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és $B > 0$ tetszőleges pozitív szám. A (2.5) formula jobboldala jól becsülhető a következő átalakítások segítségével.

$$
\begin{aligned}
P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|\bar{Y}_{n,B\sqrt{ny}}(t)| > \frac{y}{2}\right) &= P\left(\sqrt{n}\bar{Y}_{n,B\sqrt{ny}}\left(\frac{Ly}{n}\right) \ge \frac{y}{2}\right)\\
&= P\left(\sum_{j=1}^{B\sqrt{n}y} \chi_j > \frac{y}{2}\right) \le \left(Ee^{\chi_1}\right)^{B\sqrt{ny}} e^{-y/2},
\end{aligned}
$$

ahol $\chi_1, \chi_2, \dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, és $P(\chi_1 = 1) = 1 - P(\chi_1 = 0) = L\dfrac{y}{n}$. Ezért felhasználva az $y \le n$ feltételt kapjuk, hogy

$$
Ee^{\chi_1} = 1 + \frac{Ly}{n}(e-1) \le \exp\left\{(e-1)\frac{Ly}{n}\right\} \le \exp\left\{L(e-1)\sqrt{\frac{y}{n}}\right\}.
$$

Alkalmazzuk az az előző becsléseket $B = \frac{1}{6L}$ választással és a 10. feladat megoldásában adott becslést a $\kappa_n - n$ eloszlásfüggvényéről. Ezekből az eredményekből következik, hogy

$$P\left(\sup_{0\le t<L\frac{y}{n}} \sqrt{n}|\bar{Y}_{n,B\sqrt{ny}}(t)| > \frac{y}{2}\right) \le (Ee^{\chi_1})^{\sqrt{ny}/6L}\, e^{-y/2} \le e^{(e-1)y/6-y/2} \le e^{-y/6},$$

és $P\left(|\kappa_n - n| > \frac{1}{6L}\sqrt{yn}\right) \le e^{-\text{const.}\, y}$. Ezek a becslések felső korlátot szolgáltatnak a (2.5) formulában szereplő kifejezésre $B = \frac{1}{6L}$ választással, és innen következik, hogy a (2.4) formulában szereplő kifejezés kisebb, mint $2e^{-\alpha y}$ alkalmas $\alpha > 0$ konstanssal. A 14. feladat állítását ezzel beláttuk.

15.) Válasszunk olyan $C_0 > 0$, $C > 0$ és $D > 0$ számokat és n_0 küszöbindexet, amelyekre minden a $C_0 \log n \le x \le C^{-1}n$ és $2^{-l} \ge Cxn^{-1}$ feltételeket kielégítő $x > 0$ valós és $l > 0$ egész számra teljesül a (9) reláció, ha $n \ge n_0$. Először azt a kissé gyengébb állítást látjuk be, hogy az Approximációs tétel feltételben megadott becslés teljesül minden $C_0 \log n \le x \le C^{-1}n$ számra, ha $n \ge n_0$ és $0 < x \ge C^{-1}n$ ezekkel az n_0 és C számmal.

Definiáljuk azt az $l = l(x)$ pozitív egész számot, amelyre $2Cxn^{-1} > 2^{-l} \ge Cxn^{-1}$ az előbb tekintett $C > 0$ számmal. A 14. feladatban bebizonyított (18a) és (18b) reláció segítségével megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P\left(\sup_{1\le k\le 2^l}\ \sup_{(k-1)2^{-l}\le t<k2^{-l}} \sqrt{n}\left|B(t) - B\left(\frac{(k-1)}{2^l}\right)\right| > \frac{x}{4}\right) \le e^{-\alpha x},\\ &P\left(\sup_{1\le k\le 2^l}\ \sup_{(k-1)2^{-l}\le t<k2^{-l}} \sqrt{n}\left|Z_n(t) - Z_n\left(\frac{(k-1)}{2^l}\right)\right| > \frac{x}{4}\right) \le e^{-\alpha x} \end{aligned} \tag{2.6}$$

alkalmas $\alpha > 0$ és az előbb definiált $l = l(x)$ számokkal, ha $x \ge C_0 \log n$ alkalmas $C_0 > 0$ számmal. A (2.6) reláció belátása érdekében vegyük észre, hogy a (18a) és (18b) formula baloldalán szereplő szuprémumban a $0 \le t \le L\frac{y}{n}$ tartomány helyettesíthető egy $u \le t \le u + L\frac{y}{n}$ tartománnyal, ha $0 \le u \le 1 - \frac{y}{n}$, mert az ezzel a helyettesítéssel kapott kifejezés valószínűsége megegyezik az eredeti kifejezés valószínűségével. Megmutatjuk, alkalmazva a (18a) és (18b) formulának ezt a módosítását $y = \frac{x}{4}$, $L = \frac{8}{C}$ és $u = (k-1)2^{-l}$, $1 \le k \le 2^l$ választással, hogy a (2.6) kifejezés baloldalán szereplő valószínűségek kisebbek mint $2^{l+1}e^{-\alpha x}$. Ehhez elegendő azt ellenőrizni, hogy az ottani kifejezésekben szereplő belső szuprémumot $2^{-l} \le 2\frac{x}{Cn} = L\frac{x}{4n}$ hosszú intervallumokban vettük, és a külső szuprémum 2^l tagból áll. Végül jegyezzük meg, hogy $2^{l+1} \le \frac{2n}{Cx} \le n \le e^{\alpha x/2}$, ha $x \ge C_0 \log n$, azaz $n \le e^{x/C_0}$ elég nagy C_0 számmal. Innen következik a (2.6) formula ($\alpha/2 > 0$ paraméterrel az $\alpha > 0$ paraméter helyett.)

Az approximációs tétel állítása (ebben a némileg gyengített formában) egyszerű következménye a (9) és (2.6) formuláknak. Ugyanis adva egy $0 \le t \le 1$ szám, tekintsük azt a $k = k(t)$, $1 \le k \le 2^l$ számot, amelyre $(k-1)2^{-l} \le t < k2^{-l}$. Ekkor a (9) és (2.6) formula alapján $x \le C_0 \log n$ esetén

$$\begin{aligned}\sqrt{n}\,|Z_n(t) - B(t)| &\le \sqrt{n}\left|Z_n\left((k-1)2^{-l}\right) - B\left((k-1)2^{l}\right)\right| \\ &\quad + \sqrt{n}\left|B(t) - B\left((k-1)2^{-l}\right)\right| + \sqrt{n}\left|Z_n(t) - Z_n\left((k-1)2^{-l}\right)\right| \le x\end{aligned}$$

kivéve egy a $0 \le t \le 1$ számtól független $e^{-Dx} + 2e^{-\alpha x}$ mértékű halmazt, tehát az approximációs tétel igaz $C_0 \log n < x \le C^{-1} n$ esetén. Az $x \le C_0 \log n$ esetben az állítás teljesül, ha az Approximációs tételben szereplő C_1 konstanst elég nagyra választjuk.

Az $x \ge C^{-1} n$ esetben a (18a) és (18b) képletek alapján felírhatjuk, hogy

$$\begin{aligned}&P\left(\sqrt{n}\sup_{0\le t\le 1}|Z_n(t) - B(t)| > x\right) \\ &\quad \le P\left(\sqrt{n}\sup_{0\le t\le 1}|B(t))| > \frac{x}{2}\right) + P\left(\sqrt{n}\sup_{0\le t\le 1}|Z_n(t))| > \frac{x}{2}\right) \\ &\quad \le e^{-Cx^2/n} \le e^{-\bar{C}x}\end{aligned} \tag{2.7}$$

alkalmas $C > 0$ és $\bar{C} > 0$ konstansokkal. Megjegyezzük, hogy a (18a) és (18b) képletekben szerepel a $0 \le \frac{x}{2} \le n$ feltétel. (A $C^{-1}n \le x \le n$ feltétel miatt ugyanaz az ott megadott felső becslés nagyságrendje, ha a kitevőben x-t vagy $\frac{x^2}{n}$-et írunk. Az itt megadott formula a becslés természetes alakja az általános esetben.) A (2.7) képlet második sorának első tagja hasonlóan becsülhető minden $x > C^{-1}n$ számra, mint a (18a) képletben szereplő kifejezés, amely a Brown bridge szuprémumára ad becslést. (Ennek a becslésnek a bizonyításában a Brown bridge-nek a Wiener folyamattal való reprezentációját használtuk, és nem használtuk ki az $x \le n$ feltételt.) A (18b) állítás bizonyításában használt Poisson approximáció az $x \gg n$ esetben nem ad jó becslést, de az $\frac{x}{2} > n$ esetben erre az approximációra nincsen szükségünk. Ugyanis a triviális

$$P\left(\sqrt{n}\sup_{0\le t\le 1}|Z_n(t))| > n\right) = 0$$

azonosság érvényes, és ebbben az esetben ez használható. Ezért a (2.7) formula igaz, és az Approximációs Tétel az $x \ge C^{-1}n$ esetben is érvényes.

Bár az $n \le n_0$ eset külön vizsgálatának nincs jelentősége, megjegyezzük, hogy az Approximációs Tétel ebben az esetben is igaz. Ehhez elég azt észrevenni, hogy amiatt, hogy n korlátos, a (2.7) egyenlőtlenség második és ezért első sora is kisebb, mint $C_1 e^{-C_2 x}$ minden $x \ge 0$ számra alkalmas $C_1 > 0$ és $C_2 > 0$ konstansokkal.

Kiegészítés

A Lemma bizonyítása:

Definiáljuk a következő τ valószínűségi változót (megállási szabályt), amely azt számolja, hogy az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_k$, $k = 1, \dots, n$ részletösszegek sorozata mely indexre lesz először nagyobb, mint a kijelölt $x > 0$ szám.

$$\tau = \tau(x, n) = \begin{cases} \min\{k\colon S_k > x\} & \text{ha } \sup\limits_{1 \le k \le n} S_k > x \\ n & \text{ha } \sup\limits_{1 \le k \le n} S_k \le x \end{cases}.$$

Mivel $P\left(\sup\limits_{1 \le k \le n} S_k > x\right) = P\left(S_\tau > x\right)$ ezért a Lemma első egyenlőtlenségét természetes és lehetséges úgy bizonyítani, hogy jó becslést adunk az S_τ valószínűségi változó Ee^{sS_τ} exponenciális momentumára.

A martingálelmélet standard eredményeiből következik, hogy $Ee^{sS_\tau} \le Ee^{sS_n}$ tetszőleges $s \ge 0$ számra. Ehhez célszerű belátni, hogy minden $s \ge 0$ számra az $(e^{sS_k}, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, \dots, n$, sorozat, ahol $\mathcal{F}_k = \sigma(\xi_1, \dots, \xi_k)$ a $\xi_1, \dots, \xi_k$ valószínűségi változók által generált σ-algebra szuper-martingál, azaz $E\left(e^{sS_{k+1}}|\mathcal{F}_k\right) \ge e^{sS_k}$ egy valószínűséggel. Ezt az egyenlőtlenséget nem nehéz belátni felhasználva a feltételes várható érték tulajdonságait valamint azt, hogy $e^{sS_{k+1}} = e^{sS_k}e^{s\xi_{k+1}}$, és a ξ_{k+1} valószínűségi változó független az $\mathcal{F}_k$ σ-algebrától. Innen következik, hogy $E\left(e^{sS_{k+1}}|\mathcal{F}_k\right) = e^{sS_k}Ee^{s\xi_{k+1}} \ge e^{sS_k}$, mert $Ee^{s\xi_{k+1}} \ge e^{Es\xi_{k+1}} \ge 1$ a Jensen egyenlőtlenség és az $E\xi_{k+1} \ge 0$ feltétel alapján.

A martingálelmélet egy alapvető (és egyszerű) eredménye alapján abból, hogy az $(e^{sS_k}, \mathcal{F}_k)$, $k = 1, \dots, n$, sorozat szupermartingál és a τ (megállási szabály) teljesíti a $\tau \le n$ egyenlőtlenséget egy valószínűséggel következik, hogy $Ee^{sS_\tau} \le Ee^{sS_n}$. Ezt az egyenlőtlenséget nem nehéz belátni, de mivel az itt használt érvelés lényegesen különbözik a feladatsorban tárgyalt módszerektől, ezt elhagyjuk. Érdemes megjegyezni, hogy ennek az egyenlőtlenségnek a szemléletes tartalma az, hogy egy előnyös játékban minél tovább játszunk annál nagyobb a várható nyereményünk.

A exponenciális momentumra adott és (részben) bizonyított becslésből következik, hogy

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{1 \le k \le n} S_k > x\right) &= P\left(S_\tau > x\right) = P\left(e^{sS_\tau} > e^{sx}\right) \le Ee^{sS_\tau}e^{-sx} \\ &\le Ee^{sS_n}e^{-sx} = \exp\left\{-sx + \sum_{k=1}^{n} B_k(s)\right\}, \end{aligned}$$

és ez a Lemma első állítása.

A feladat második állításának bizonyítása érdekében vezessük be minden $n = 1, 2, \dots$ számra a $t_{k,n} = a + (b-a)k2^{-n}$, $0 \le k \le 2^n$, számokat, és a $\xi_{k,n} = X(t_{k,n}) -$

$X(t_{k-1,n})$, $1 \le k \le 2^n$, valószínűségi változókat. Ekkor rögzített n számra a $\xi_{k,n}$, $1 \le k \le 2^n$, valószínűségi változók függetlenek, mivel az $X(t)$ folyamat független növekményű, és $X(t_{k,n}) - X(a) = \sum\limits_{j=1}^{k} \xi_{j,n}$, $1 \le k \le n$. Továbbá $E\xi_{k,n} \ge 0$ minden $1 \le k \le n$-re, és mivel az $X(t)$ sztochasztikus folyamat trajektóriái folytonos vagy cadlag (jobbról folytonos és baloldali határértékkel rendelkező) függvények, ezért tetszőleges $x > 0$ számra

$$\left\{\omega\colon \sup_{a\le t\le b} (X(t,\omega) - X(a,\omega)) > x\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{\omega\colon \sup_{1\le k\le 2^n} (X(t_{k,n},\omega) - X(a,\omega)) > x\right\}.$$

Ezenkívül az utolsó reláció jobboldalán az unióban szereplő halmazok egy az n paraméter szerint növekvő halmazsorozatot alkotnak. Innen és a Lemma már bizonyított része alapján

$$\begin{aligned} P\left(\sup_{a\le t\le b} (X(t) - X(a)) > x\right) &= \lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{1\le k\le 2^n} (X(t_{k,n}) - X(a)) > x\right) \\ &\le \lim_{n\to\infty} e^{-sx} \prod_{k=1}^{2^n} Ee^{s\xi_{k,n}} = e^{-sx} Ee^{s(X(b)-X(a))}. \end{aligned}$$

Ezzel a lemma mindkét állítását beláttuk.