Határeloszlástételek és korlátlanul osztható eloszlások. I. rész

Az alapvető problémák megfogalmazása.

A valószínűségszámítás egyik alapvető feladata a következő kérdés vizsgálata:

Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók sorozata, és legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, a belőlük készített részletösszegek sorozata. Tekintsük az $\frac{S_n - A_n}{B_n}$ normált részletöszegeket alkalmas normálással. Mikor viselkedik ezeknek a normált összegeknek az eloszlása különböző nagy n számokra hasonlóan, azaz mikor van ezeknek a normált részletösszegeknek határeloszlása, ha $n \to \infty$? Hogyan érdemes az A_n és B_n normáló konstansokat választani? Milyen eloszlások jelenhetnek meg határeloszlásként?

Ugyanez a kérdéssorozat természetes módon felmerül, ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ független és *egyforma eloszlású* valószínűségi változók sorozata. A kérdés egy következő természetes módosítása a következő szériasorozatokról szóló kérdés. Először vezessük be a következő fogalmat:

Szériasorozatok definiciója.

$$\begin{array}{ccc} \xi_{1,1}, & \dots, & \xi_{1,n_1} \\ \vdots & & \vdots \\ \xi_{k,1}, & \dots, & \xi_{k,n_k} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

$k \to \infty$, szériasorozat, ha az egy sorban levő $\xi_{k,1} \dots, \xi_{k,n_k}$ valószínűségi változók függetlenek. (A különböző sorokban levő valószínűségi változók kapcsolatáról nem tételezünk fel semmit.)

Legyen $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$, ahol $\xi_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$, $k = 1, 2, \dots$ szériasorozat. Milyen határeloszlástételt teljesíthetnek az S_n vagy $S_n - A_n$ (normalizált) részletösszegek? Mi a lehetséges határeloszlás, ha az egy sorban szereplő valószínűségi változók nemcsak függetlenek, hanem azonos eloszlásúak is?

A következő kapcsolat van független valószínűségi változók illetve szériasorozatok részletösszegeinek vizsgálata között. Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független (esetleg egyforma eloszlású) valószínűségi változók sorozata. Definiáljuk a $\xi_{k,j} = \frac{\xi_j}{B_k}$, $1 \le j \le k$, szériasorozatot, $k = 1, 2, \dots$. (Itt a B_k konstans megegyezik a részletösszegek normálásában szereplő B_k normáló faktorral, és $n_k = k$.) Ezzel a választással független valószínűségi változók részletösszegeinek vizsgálata úgy is tekinthető, mint speciális szériasorozatok részletösszegeinek vizsgálata.

A határeloszlástételek vizsgálatában bizonyos triviálisan érdektelen eseteket ki akarunk zárni. Ilyen eset a például a következő. Legyen $\xi_1 = \xi$, és $\xi_k \equiv 0$, ha $k \ge 2$. Ekkor

$S_n = \xi$, és $\frac{S_n - 0}{1} \to \xi$, ha $n \to \infty$. Általánosabban, azt a lehetőséget akarjuk kizárni, hogy az S_n részletösszeg egyetlen tagja domináns szerepet játsszon a határeloszlásban. Ennek érdekében vezessük be a következő egyenlő kicsiség fogalmát.

Definició. *Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ független valószínűségi változók sorozata, amelyek részletösszegeinek normálásában B_n a normálási faktor. Azt mondjuk, hogy ez a sorozat teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét, ha minden $\varepsilon > 0$-ra*

$$\sup_{1 \le j \le n} P(|\xi_j| > \varepsilon B_n) < \varepsilon, \quad \text{ha } n > n_0(\varepsilon).$$

A $\xi_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$ szériasorozat akkor teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét, ha minden $\varepsilon > 0$-hoz létezik $k_0 = k_0(\varepsilon)$ küszöbindex úgy, hogy

$$\sup_{1 \le j \le n_k} P(|\xi_{k,j}| > \varepsilon) < \varepsilon, \quad \text{ha } k > k_0(\varepsilon)$$

minden $\varepsilon > 0$-ra.

A továbbiakban a határeloszlástételt az egyenletes kicsiséget teljesítő sorozatok vagy szériasorozatok részletösszegeire vizsgáljuk. Megfogalmazzuk a korábbiakban már szerepelt klasszikus eredményeket.

Centrális határeloszlástétel.
a.) Független valószínűségi változók részletösszegeire: Legyen $\xi_1, \xi_2, \ldots,$ független valószínűségi változók sorozata, $E\xi_j = 0$, $E\xi_j^2 = \sigma_j^2$, $j = 1, 2, \ldots,$ $D_n^2 = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$, és teljesítse ez a sorozat a következő Lindeberg feltételt:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{D_n^2} \sum_{j=1}^{n} E\xi_j^2 I(|\xi_j| > \varepsilon D_n) = 0$$

minden $\varepsilon > 0$-ra. Ekkor az $S_n = \sum_{j=1}^{n} \xi_j$ valószínűségi változók részletösszegekre $\frac{S_n}{D_n}$ eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz.
b.) Szériasorozatok részletöszegeire: Legyen $\xi_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozat, $k = 1, 2, \ldots,$ $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 = \sigma_{k,j}^2$, $1 \le k \le n_k$, $k = 1, 2, \ldots,$ $S_k = \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$. Legyen $\sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$, és teljesüljön a következő Lindeberg feltétel:

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(|\xi_{k,j}| > \varepsilon) = 0 \quad \text{minden } \varepsilon > 0 - ra.$$

Ekkor az S_k valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz.

Megjegyzés: A Lindeberg feltételből következik az egyenletes kicsiség feltétele.

Poisson eloszláshoz való határeloszlástétel. *Legyen*

$$\begin{array}{ll} \xi_{1,1}\dots, & \xi_{1,n_1} \\ \vdots & \vdots \\ \xi_{k,1}\dots, & \xi_{k,n_k} \\ \vdots & \vdots \end{array}$$

szériasorozat, amely teljesíti a következő feltételeket:

1.) A $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók nem negatív egész értékeket vesznek fel.

2.) $P(\xi_{k,j}=1)=\lambda_{k,j}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}=\lambda>0$.

3.) $\sup\limits_{1\le j\le n_k}\lambda_{k,j}\to 0$, ha $k\to\infty$, és $\sum\limits_{j=1}^{n_k}P(\xi_{k,j}\ge 2)\to 0$, ha $k\to\infty$.

Ekkor az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a λ paraméterű Poisson eloszláshoz, ha $k\to\infty$.

Egy kiegészítésben megadjuk a fenti tétel bizonyítását.

Az első tárgyalandó kérdés

Tekintsük először a következő kérdést: Legyen $\xi_{k,1},\dots,\xi_{k,n_k}$ olyan szériasorozat, amelyben az egy sorban szereplő valószínűségi változók nemcsak függetlenek, hanem egyforma eloszlásúak is. Tegyük fel, hogy az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ részletösszegek S_k-A_k normalizáltjai eloszlásban konvergálnak valamilyen F eloszlású valószínűségi változóhoz. Milyen F eloszlás jelenhet meg, mint határeloszlás? Az alábbi heurisztikus gondolatmenet célja megindokolni a korlátlanul osztható eloszlások definiálását, mint a lehetséges határeloszlások családjának a természetes jelöltjét.

A $\xi_{k,1},\dots,\xi_{k,n_k}$ sorozatot osszuk fel L darab egyforma hosszúságú blokkra. (Egy k-tól nem függő L számot tekintünk. Az, hogy n_k nem feltétlenül osztható az L számmal, nem okoz súlyos problémát. Például felhasználhatjuk azt, hogy az egyenletes kicsiség feltétele miatt minden egyes sorból véges sok (L-nél kevesebb) tagot elhagyva nem változik a határeloszlástétel. Ilyen módon elérhetjük azt, hogy az egyes sorok tagszáma L-lel osztható.) Legyen $\eta_1^{(k)},\dots,\eta_L^{(k)}$ a k-ik sorban levő blokkokban levő $\xi_{j,k}$ valószínűségi változók összege minusz $\frac{A_k}{L}$. Ekkor $\eta_1^{(k)},\dots,\eta_L^{(k)}$ független valószínűségi változók, és

$$\eta_1^{(k)}+\dots+\eta_L^{(k)}\Rightarrow S \quad \text{eloszlásban.}$$

Végrehajtva a $k\to\infty$ határátmenetet, kapjuk, hogy

$$\eta_1+\dots+\eta_L\stackrel{\Delta}{=}S$$

ahol $\stackrel{\Delta}{=}$ eloszlásban való azonosságot jelöl, és $\eta_1, \dots, \eta_L$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók, amelyek eloszlása megegyezik az $\eta_1^{(k)}$ valószínűségi változók határeloszlásával, amikor $k \to \infty$. (Ez a lépés valójában részletesebb indoklást igényelne. A fő probléma annak indoklása, hogy az $\eta_1^{(k)}$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak, illetve elég annyit megmutatni, hogy ennek a sorozatnak van konvergens részsorozata.)

Definició. *Egy F eloszlás, (illetve egy F eloszlású S valószínűségi változó) korlátlanul osztható, ha tetszőleges L egész számra léteznek olyan független, egyforma eloszlású $\eta_1, \dots, \eta_L$ valószínűségi változók, amelyekre az $\eta_1 + \dots + \eta_L$ összeg F eloszlású.*

Ekvivalens definició. *Egy F eloszlás akkor és csak akkor korlátlanul osztható, ha annak $\varphi(t) = \int e^{itx} F(\,dx)$ karakterisztikus függvényére és tetszőleges L pozitív egész számra az $\omega(\cdot)^L = \varphi(\cdot)$ függvényegyenlet megoldható, ahol $\omega(\cdot)$* karakterisztikus függvény.

Vizsgálandó kérdések:

a.) Korlátlanul osztható eloszlások jellemzése.

b.) Annak bizonyítása, hogy csak a korlátlanul osztható eloszlások lépnek fel határeloszlásként.

Később vizsgálandó kérdés:

Ha $\xi_1, \xi_2, \dots$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók normált részletösszegeinek határeloszlását vizsgáljuk, akkor hasonló indokolással természetessé válik a korlátlanul osztható eloszlások egy fontos alosztályának, a stabilis eloszlásoknak a bevezetése.

Definició. *Egy F eloszlás stabilis, ha tetszőleges L pozitív egész számhoz megadhatók olyan A_L és B_L normáló konstansok, amelyekre igaz az, hogy az $F_L(x) = F(B_L x + A_L)$ eloszlásokra*

$$\underbrace{F_L * \dots * F_L}_{L\text{-szeres konvulúció}} = F. \qquad (*)$$

Ekvivalens megfogalmazásban: Ha $\eta_1, \eta_2, \dots$ független F eloszlású valószínűségi változók, akkor $\eta_1 \stackrel{\Delta}{=} \frac{(\eta_1 - A_L) + \dots + (\eta_L - A_L)}{B_L}$, vagy más megfogalmazásban:

$$\varphi(t) = \left(e^{-tA_L/B_L} \varphi\left(\frac{t}{B_L}\right)\right)^L,$$

ahol $\varphi(t) = \int e^{itx} F(dx)$ az F eloszlás karakterisztikus függvénye. (E definicióban $\stackrel{\Delta}{=}$ szintén eloszlásban való azonosságot jelöl.) Valójában azt is megköveteljük, hogy az F_L függvényben szereplő $B_L$normáó tag $B_L = L^\alpha$ alakú szám legyen valamely $\alpha > 0$ számmal, de mélyebb vizsgálatok azt mutatják, hogy csak ilyen normáló taggal teljesülhet a $(*)$ formula.

Vizsgálandó kérdések:

a.) A stabilis eloszlások és a definiciójukban szereplő A_L és B_L normáló faktorok jellemzése.

b.) Stabilis eloszlások vonzási tartományának megadása, és az előforduló határeloszlástételekben szereplő normáló faktorok megadása.

Példák korlátlanul osztható és stabilis eloszlásokra.

a.) *Normális eloszlás.* Ez korlátlanul osztható, sőt stabilis eloszlás. Egy nulla várható értékű σ^2 szórásnégyzetű η valószínűségi változó eloszlása megegyezik L darab független 0 várható értékű $\frac{\sigma^2}{L}$ szórásnégyzetű valószínűségi változó összegének az eloszlásával. Ezen összeadandók eloszlása megegyezik az $\frac{\eta}{\sqrt{L}}$ valószínűségi változó eloszlásával. Tehát η eloszlása stabilis, $A_L = 0$ és $B_L = \sqrt{L}$ választással.

b.) *Poisson eloszlás.* Ez korlátlanul osztható, de nem stabilis eloszlás. Mivel két független λ és μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó összege $\lambda + \mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, ezért egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó eloszlása megegyezik L darab független $\frac{\lambda}{L}$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó összegének az eloszlásával. Ezért a Poisson eloszlású valószínűségi változók korlátlanul oszthatóak. Viszont egy $\frac{\lambda}{L}$ paraméterű valószínűségi változó nem írható fel egy λ paraméterű valószínűségi változó lineáris transzformáltjaként, és a Poisson eloszlás nem stabilis.

A fenti két példa a legfontosabb példa a korlátlanul osztható eloszlásokra.

Egyéb példák:

a.) A Cauchy eloszlás. Ennek sűrűségfüggvénye $f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ és karakterisztikus függvénye $\varphi(t) = e^{-|t|}$. Mivel $e^{-|t|} = \left(e^{-|t|/L}\right)^L$, azaz $\varphi(t) = \varphi\left(\frac{t}{L}\right)^L$, a Cauchy eloszlás stabilis $A_L = 0$ és $B_L = L$ választással.

b.) Γ-eloszlások. Ezen eloszlások sűrűségfüggvénye

$$f_{\alpha,\nu}(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\nu)}\alpha^\nu x^{\nu-1}e^{-\alpha x} & \text{ha } x \ge 0 \\ 0 & \text{ha } x < 0 \end{cases},$$

ahol $\alpha > 0$, $\nu > 0$ két paraméter, $\Gamma(t) = \int_0^\infty x^{t-1}e^{-x}\,dx$ a Γ függvény. Némi számolással látható, hogy $f_{\alpha,\mu+\nu} = f_{\alpha,\mu} * f_{\alpha,\nu}$, ezért

$$f_{\alpha,\nu} = \underbrace{f_{\alpha,\frac{\nu}{L}} * \cdots * f_{\alpha,\frac{\nu}{L}}}_{L\text{-szeres konvolució}},$$

ezért $f_{\alpha,\nu}$ korlátlanul osztható eloszlás. Be lehet látni, hogy egy $f_{\alpha,\nu}(x)$ sűrűségfüggvényű eloszlás karakterisztikus függvénye $\varphi_{\alpha,\nu}(t) = (1 - i\frac{t}{\alpha})^{-\nu}$, és innen következik a fenti konvoluciókra felírt azonosság.

A korlátlanul osztható eloszlások családja pontosan leírható. Ezt a leírást a Lévy–Hincsin formula adja meg. Ennek formális megfogalmazása előtt megadjuk e formula szemléletes valószínűségi tartalmát. Nevezetesen megmutatjuk, hogy független Poisson és normális eloszlású korlátlanul osztható eloszlások segítségével természetes módon új korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változók konstruálhatóak, és ezek eloszlása megadja az összes (Lévy–Hincsin formula által leírt) korlátlanul osztható eloszlást.

Korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változók konstrukciója.

Vegyük észre, hogy ha $\xi_1, \cdots, \xi_k$ független, korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változók, akkor $\alpha_1\xi_1 + \cdots + \alpha_k\xi_k + A$ lineáris kombináció szintén korlátlanul osztható valószínűségi változó. Továbbá, ha F_n korlátlanul osztható eloszlások sorozata, $F_n \Rightarrow F$, ahol $\Rightarrow$ eloszlásbeli konvergenciát jelent, akkor F is korlátlanul osztható eloszlás. Valóban, felírva tetszőleges L pozitív egész számra az $F_n = \underbrace{G_{n,L} * \cdot * G_{n,L}}_{L\text{-szeres konvolúció}}$ azonosságban elvégezve az $n \to \infty$ határátmenetet megkapjuk a kívánt $F = \underbrace{G_L * \cdot * G_L}_{L\text{-szeres konvolúció}}$ azonosságot. Valójában ennek a határátmenetnek a végrehajthatósága indoklásra szorul. Viszont ezt az állítást csak olyan speciális esetben fogjuk alkalmazni az alább ismertetett konstrukcióban, amikor a limeszelés jogossága könnyebben igazolható. A Poisson eloszlású valószínűségi változókkal végrehajtandó konstrukció könnyebben megtehető Poisson folyamatok segítségével. Ezért felidézzük a következő eredményt, amelynek megadjuk az egyik lehetséges bizonyítását tárgyalásunk végén egy kiegészítésben.

Tétel. *Legyen $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mérhető tér μ σ-véges mértékkel. Ekkor létezik Poisson mező μ számláló mértékkel. Pontosabban meg lehet adni egy $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ valószínűségi mezőt, azon egy $\xi(\omega)$, $\omega \in \Omega$, valószínűségi változót, amely értékeit az X halmaz megszámlálható részhalmazain veszi fel (a $\xi(\omega)$ valószínűségi változó mérhetősége azt jelenti, hogy minden $A \in \mathcal{A}$ halmazra és k nem negatív egész számra $\{\omega\colon \#\{\xi(\omega) \cap A\} = k\} \in \mathcal{B}$) úgy, hogy teljesülnek a következő tulajdonságok:*

1.) *Tetszőleges véges mértékű halmazban 1 valószínűséggel csak véges sok kijelölt pont van.*
2.) *Ha $A_1 \in \mathcal{A}$, $A_2 \in \mathcal{A}, \dots, A_k \in \mathcal{A}$ diszjunkt halmazok, $\mu(A_j) < \infty$, $j = 1, \dots, k$, akkor az $A_1, \dots, A_k$, halmazokba eső kijelölt pontok száma független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\mu(A_j)$, $j = 1, \dots, k$, paraméterrel.*

Legyen μ olyan σ-véges mérték a $\mathbf{R}\setminus\{0\}$ halmazon, ($\mathbf{R}$ a továbbiakban a számegyenest jelöli), és legyen $x_1(\omega), x_2(\omega), \dots$ Poisson mező az $(\mathbf{R}\setminus\{0\}, \mathcal{A})$ téren μ számláló mértékkel. (Itt $\mathcal{A}$ a Borel σ-algebrát jelöli.) Azt szeretnénk belátni, hogy a $\xi(\omega) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n(\omega)$ összeg, azaz a Poisson mező által megjelölt pontok koordinátáinak az összege korlátlanul osztható valószínűségi változó. Ugyanis, tetszőleges pozitív egész L-re tekintsünk L darab független $(y_1^j(\omega), y_2^j(\omega), \dots)$, $j = 1, 2, \dots, L$ Poisson mezőt a $(\mathbf{R} \setminus \{0\}, \mathcal{A})$ téren $\frac{\mu}{L}$ számláló mértékkel, és definiáljuk az $\eta_j = \sum\limits_{n=1}^{\infty} y_n^j(\omega)$ valószínűségi változókat. Azt várjuk, hogy a $\xi(\omega)$ és $\eta_1(\omega) + \cdots + \eta_L(\omega)$ valószínűségi változók eloszlása megegyezik, hiszen az $\eta_1(\omega) + \cdots + \eta_L(\omega)$ valószínűségi változó nem más mint az összes $y_n^j(\omega)$,

$n = 1, 2, \ldots,\ j = 1, \ldots, L$, koordináták összege. Viszont az $y_n^j(\omega)$ Poisson mezők egyesítése Poisson mező μ számlálómértékkel, hiszen tetszőleges A halmazba eső pontok száma L darab független $\frac{\mu}{L}$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó összege.

A fenti heurisztikus gondolatmenetben az okoz gondot, hogy a $\xi(\omega)$-t és $\eta_j(\omega)$-t definiáló végtelen összeg nem feltétlenül értelmes. Belátjuk, hogy ha a μ mértékre alkalmas feltevést teszünk, és a fent definiált összeget megfelelően regularizáljuk, akkor a fenti heurisztika pontossá tehető. Továbbá, mint a később megfogalmazandó Lévy–Hincsin formula mutatja, az így kapott valószínűségi változók eloszlásai a korlátlanul osztható eloszlásfüggvények elég gazdag családját adják.

Tegyük fel, hogy a μ mérték teljesíti a következő feltételt:

$$\begin{aligned} &\mu([a,\infty)) < \infty \qquad \mu((-\infty,-a]) < \infty \\ &\int_0^a x^2\mu(\,dx) < \infty, \qquad \int_{-a}^0 x^2\mu(\,dx) < \infty \end{aligned} \qquad \text{minden } a > 0\text{-ra.} \tag{$**$}$$

Definiáljuk az $\xi_N(\omega) = \sum\limits_{n\colon\, |x_n(\omega)| > 2^{-N}} x_n(\omega)$ véletlen tagszámú összeget minden $N = 0, 1, \ldots$-ra. Ezek a valószínűségi változók értelmesek, mert

$$\mu((-\infty, -2^{-N}) \cup (2^{-N}, \infty)) < \infty$$

miatt ez a halmaz egy valószínűséggel a tekintett Poisson mezőnek csak véges sok tagját tartalmazza. Ezért a $\xi_N(\omega)$-t definiáló összeg egy valószínűséggel véges sok tagból áll. Azt állítjuk továbbá, hogy a $\xi(\omega) = \lim\limits_{N\to\infty} \xi_N(\omega) - (E\xi_N(\omega) - E\xi_1(\omega))$ limesz egy valószínűséggel létezik. Mivel $\xi_N(\omega) - (E\xi_N(\omega) - E\xi_1(\omega)) = \xi_0(\omega) + \sum\limits_{k=0}^{N} \zeta_k(\omega)$, ahol

$$\zeta_k(\omega) = \zeta_k'(\omega) - E\zeta_k'(\omega), \quad \text{és} \quad \zeta_k'(\omega) = \sum_{n\colon\, 2^{-k} < |\xi_n(\omega)| \le 2^{-k-1}} \xi_n(\omega),$$

elég belátni, hogy a $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \zeta_k(\omega)$ egy valószínűséggel konvergál. Viszont a ζ_k valószínűségi változók függetlenek. (Diszjunkt halmazokba eső pontok koordinátáit adjuk össze, és egy Poisson mező diszjunkt halmazaiban bekövetkező események függetlenek egymástól.) Ezért a valószínűségszámítás egyik klasszikus eredménye (a független valószínűségi változók összegeinek konvergenciájának szükséges és elégséges feltételét megadó három sor tétel, pontosabban annak könnyebb fele) alapján elég belátni azt, hogy $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \operatorname{Var} \zeta_k < \infty$. (A ζ_k definiciója alapján $E\zeta_k = 0$.) A kívánt egyenlőtlenség viszont következik a $(**)$ relációból és a következő lemmából.

Lemma. *Legyen μ véges mérték egy véges $(a,b]$ intervallum Borel mérhető halmazainak $\mathcal{A}$ σ-algebráján. Legyen $x_1(\omega), \ldots, x_{k(\omega)}(\omega)$ (véletlen $k = k(\omega)$-val) Poisson mező*

$((a,b],\mathcal{A})$-n μ számláló mértékkel, $S(\omega)=\sum\limits_{j=1}^{k(\omega)} x_j(\omega)$. Ekkor

$$ES=\int_a^b x\mu(\,dx), \qquad \operatorname{Var} S=\int_a^b x^2\mu(\,dx).$$

Továbbá az S valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a logaritmusa, (amelyik létezik) minden $t\in\mathbf{R}$-re teljesíti a

$$\log Ee^{itS}=\int_a^b \left(e^{itx}-1\right)\mu(\,dx)$$

azonosságot.

Megjegyzés: A lemmában beszéltünk karakterisztikus függvény logaritmusáról. Jegyezzük meg, hogy ha egy $\varphi(\cdot)$ karakterisztikus függvény egy az origót tartalmazó $[A,B]$ intervallumban sehol sem egyenlő nullával, akkor természetes módon definiálható e karakterisztikus függvény logaritmusa ebben az $[A,B]$ intervallumban. Azt kell megérteni, hogy bár egy komplex szám logaritmusa nincs egyértelműen meghatározva, mert ha $z_1=\log z$, akkor a $\log z=z_1+i2k\pi$ reláció tetszőleges k egész számra teljesül, a $\varphi(\cdot)$ karakterisztikus függvény $\psi(t)=\log\varphi(t)$ logaritmusát a következő módon természetes definiálni a fenti feltételek mellett az $[A,B]$ intervallumon: Egyrészt megköveteljük, hogy $e^{\psi(t)}=\varphi(t)$, $A\le t\le B$, másrészt legyen $\psi(t)$ folytonos függvény az $[A,B]$ intervallumon, amelyre $\psi(0)=0$. Tehát egy folytonossági megkötéssel választjuk ki a logaritmus függvény megfelelő ágát.

A Lemma és $(**)$ alapján

$$\sum_{k=0}^\infty \operatorname{Var}\zeta_k=\sum_{k=0}^\infty\int_{2^{-k-1}<|x|\le 2^{-k}} x^2\mu(\,dx)=\int_{0<|x|\le 1} x^2\mu(\,dx)<\infty,$$

ahonnan következik a kívánt konvergencia.

A lemma bizonyítása: Ha a μ mérték véges sok $u_1,\dots,u_n$ pontba van koncentrálva $\mu(u_j)=\mu_j$, $j=1,\dots,n$, $\sum\limits_{j=1}^n\mu_j=1$, akkor $S=u_1Z_1+\cdots+u_nZ_n$, ahol $Z_1,\dots,Z_n$ független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\mu_1,\dots,\mu_n$ paraméterekkel. Ezért ebben az esetben

$$ES=\sum u_jEZ_j=\sum u_j\mu_j=\int x\mu(\,dx)$$

$$\operatorname{Var} S=\sum u_j^2\operatorname{Var} Z_j=\sum u_j^2\mu_j=\int x^2\mu(\,dx)$$

$$\log Ee^{itS}=\sum\log Ee^{itu_jZ_j}=\sum\mu_j\left(e^{itu_j}-1\right)=\int\left(e^{itx}-1\right)\mu(\,dx).$$

Ha μ tetszőleges véges mérték $(a,b]$-n, akkor rögzítsünk egy $T>0$ egész számot, és legyen μ_T az az $a+\frac{b-a}{T}t$, $t=1,\dots,T$ pontokba koncentrált mérték, amelyre

$$\mu_T\left\{a+\frac{b-a}{T}t\right\}=\mu\left\{\left(a+\frac{b-a}{T}(t-1),a+\frac{b-a}{T}t\right]\right\}.$$

Ha $x_1(\omega),\dots,x_{k(\omega)}(\omega)$ Poisson folyamat $((a,b],\mathcal{A})$-n μ számláló mértékkel, akkor definiáljuk az $x_{j,T}(\omega)=a+\frac{b-a}{T}t_j$, ha $a+\frac{b-a}{T}(t_j-1)<x_j(\omega)\le a+\frac{b-a}{T}t_j$, $1\le j\le k(\omega)$ pontfolyamatot. Ekkor $x_{1,T}(\omega),\dots,x_{k(\omega),T}$ Poisson mező $((a,b],\mathcal{A})$-n μ_T számláló mértékkel.

Legyen $S_T(\omega)=\sum\limits_{j=1}^{k(\omega)}x_{j,T}(\omega)$. Ekkor $S_T(\omega)\to S(\omega)$, ha $T\to\infty$. Ezért

$$\lim_{T\to\infty}ES_T=ES,\qquad \lim_{T\to\infty}\operatorname{Var}S_T=\operatorname{Var}S\quad\text{és}\quad\lim_{T\to\infty}\log Ee^{itES_T}=\log Ee^{itES},$$

és $T\to\infty$ határátmenettel megkapjuk a lemma állítását tetszőleges véges μ mértékre.

Megjegyzés: A karakterisztikus függvény logaritmusára adott képlet érvényes $a=-\infty$ és $b=\infty$ esetén is, ha $\mu([a,b])<\infty$. Valóban, ha alkalmazzuk a formulát olyan, $(a_n,b_n]$ intervallumra, amelyre $-\infty<a_n<b_n<\infty$, $a_n\to a$ és $b_n\to b$, akkor $n\to\infty$ határátmenettel megkapjuk a formulát az általános esetben is.

A lemma segítségével megadhatjuk a fent konstruált ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a logaritmusát. Nevezetesen,

$$\log\varphi(t)=\log Ee^{it\xi}=\int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}}\left(e^{itx}-1-itA(x)\right)\mu(\,dx),$$

ahol μ egy a $(**)$ feltételt teljesítő mérték, és $A(x)=1$, ha $|x|\le1$, és $A(x)=0$, ha $|x|>1$.

Ezt a képletet a következőképp igazolhatjuk: Mivel $\xi(\omega)=\xi_0(\omega)+\sum\limits_{k=0}^{\infty}\zeta_k(\omega)$, és az összegben szereplő valószínűségi változók függetlenek, ezért $\xi(\omega)$ karakterisztikus függvényének a logaritmusát megkapjuk, ha összegezzük az egyes tagok karakterisztikus függvényének a logaritmusát. Továbbá, a Lemma alapján

$$\log Ee^{it\zeta_k}=\log E^{it\zeta_k'}-itE\zeta_k'=\int_{2^{-k-1}}^{2^{-k}}\left(e^{itx}-1-itx\right)\mu(\,dx).$$

A $\xi(\omega)$ valószínűségi változókat kissé általánosabb módon is definiálhatjuk. Legyen $A(N)\to0$, $B(N)\to\infty$, ha $N\to\infty$, $0<A(N)<1<B(N)\le\infty$, tetszőleges monoton, determinisztikus sorozat, vezessük be a $\xi_N(\omega)=\sum\limits_{n\colon A(N)<|x_n(\omega)|<B(N)}x_n(\omega)$ valószínűségi változokat, ahol $x_n(\omega)$ Poisson mező az $(\mathbf{R}\setminus\{0\},\mathcal{A})$ téren μ számláló

mértékkel, és μ egy a $(**)$ feltételt teljesítő mérték. Ekkor egy valószínűséggel létezik a következő regularizált összeg:

$$\begin{aligned}\xi(\omega) &= \lim_{N\to\infty} \operatorname{Reg} \xi_N(\omega) \\ &= \lim_{N\to\infty}\left(\sum_{n:\ A(N)<|x_n(\omega)|<B(N)} x_n(\omega) - E \sum_{n:\ A(N)<|x_n(\omega)|<1} x_n(\omega)\right).\end{aligned}$$

Hasonlóan definiálhatunk tetszőleges pozitív egész L számra L darab független $\eta_L(\omega)$ valószínűségi változót, mint L darab független a $R\setminus\{0\},\mathcal{A})$ téren $\frac{\mu}{L}$ számláló mértékkel definiált Poisson mező pontjai koordinátáinak segítségével definiált reguláris összeget. Ekkor $\eta_1+\cdots+\eta_L \stackrel{\Delta}{=} \xi$, ahol $\stackrel{\Delta}{=}$ eloszlásban való konvergenciát jelöl. Ezért ξ korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változó.

Újabb korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változót kapunk, ha a fent konstruált $\xi(\omega)$ helyett általánosabb, $\xi(\omega)+\eta(\omega)+D$ alakú valószínűségi változót tekintünk, ahol η a ξ valószínűségi változótól független, nulla várható értékű $\sigma^2\ge 0$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó, és D konstans. Ennek az új valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a logaritmusa

$$\log\bar\varphi(t) = \log\varphi(t) - \frac{\sigma^2t^2}{2} + itD = \int_{\mathbf{R}\setminus\{0\}} \left(e^{itx}-1-itA(x)\right)\mu(\,dx) - \frac{\sigma^2t^2}{2} + itD,$$

alakú, ahol $\varphi(t)$ a ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye.

A Lévy–Hincsin formula lényegében azt mondja ki, hogy a fenti képlet megadja az összes korlátlanul osztható eloszlás karakterisztikus függvényének logaritmusát, és egy karakterisztikus függvény fent megadott reprezentációjában szereplő $\mu(\cdot)$ mérték és σ^2 és D számok egyértelműen meghatározottak. A Lévy–Hincsin formulát az irodalomban több, különböző ekvivalens módon fogalmazták meg. Ennek a formulának nincsen kitüntetett, ,,legjobb alakja". A további előadásokban William Feller *An Introduction to the Probability Theory and Its Application II.* könyv 17. fejezetében leírt tárgyalásmódot fogjuk követni. Ezért a Lévy–Hincsin formulát a Feller könyvben leírt módon fogalmazzuk meg, és megmutatjuk, hogy az ott szereplő reprezentáció ekvivalens az általunk megadottal. A Feller könyvben megfogalmazott eredmény kimondásához szükség van a következő definicióra.

Definició. *A számegyenes Borel σ-algebráján definiált M mérték kanonikus mérték, ha tetszőleges véges $[a,b]\subset\mathbf{R}$ intervallum $M\{[a,b]\}$ mértéke véges, és tetszőleges $a>0$ számra*

$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2}M(\,dx)<\infty, \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{-a}\frac{1}{x^2}M(\,dx)<\infty.$$

Tétel. Lévy–Hincsin formula. *Egy F eloszlás akkor és csak akkor korlátlanul osztható, ha az eloszlás $\varphi(t)=\int e^{itx}F(\,dx)$ karakterisztikus függvényének van logaritmusa,* *és az a következő alakban írható fel:*

$$\log \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} - 1 - it \sin x}{x^2} M(\,dx) + itB,$$

ahol M kanonikus mérték. Az F korlátlanul osztható eloszlás egyértelműen meghatározza a karakterisztikus függvényének logaritmusát előállító képletben az M kanonikus mértéket és a B valós számot.

Megjegyzés: A fenti képletben az integrandus értékét az origóban úgy definiáljuk, mint az integrandus folytonos kiterjesztését az origóba, azaz értéke $-\frac{t^2}{2}$. Ezért, az origóbeli rész hozadéka az integrálhoz $-M(0)\frac{t^2}{2}$. Így összehasonlítva a Lévy–Hincsin formula általunk és a Feller könyv által megadott alakját, kapjuk, hogy $M(0) = \sigma^2$, és ez adja meg a korlátlanul osztható eloszlás normális komponensét. Továbbá, a $\mu(dx) = x^2 M(dx)$, $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$, definicióval láthatjuk, hogy a μ akkor és csak akkor teljesíti a $(**)$ feltételt, ha az őt definiáló képletben szereplő $M(\cdot)$ egy kanonikus mérték megszorítása $\mathbf{R} \setminus \{0\}$-ra. Átírva az általunk megadott integrált μ mérték helyett M mérték szerinti integrálra, azt kapjuk, hogy a kapjuk, hogy a karakterisztikus függvény logaritmusára adott két különböző reprezentáció különbsége $\int_{-\infty}^{\infty} it \frac{A(x) - \sin x}{x^2} M(\,dx) + i(B - D)t$. Az ebben a formulában szereplő integrál véges, mert

$$\sup_{x \neq 0} |A(x) - \sin(x)| < \infty, \quad \text{és} \quad \lim_{x \to 0} \frac{A(x) - \sin x}{x^2} = 0.$$

Ezért az B vagy D konstans alkalmas választásával a két kifejezés különbsége nullává tehető.

Az általunk, illetve a Feller könyvben szereplő reprezentáció különbsége a μ illetve M mérték használatán kívül abból adódik, hogy az általános korlátlanul osztható eloszlások előállításában egy limeszelést is végre kell hajtani, és ez csak bizonyos regularizáció segítségével lehetséges. A regularizáció maga nem egyértelmű, és az, hogy mi a ,,természetes regularizáció" az az alkalmazott módszertől függ.

Végül jegyezzük meg, hogy hasonlóan látható, hogy az általunk definiált $A(x)$ helyettesíthető a

$$\tau(x) = \tau_a(x) = \begin{cases} x & \text{ha } |x| \le a \\ a & \text{ha } x \ge a \\ -a & \text{ha } x \le -a \end{cases}$$

függvénnyel a Lévy–Hincsin formulában, azaz egy F korlátlanul osztható eloszlás $\varphi(t) = \int e^{itx} F(\,dx)$ karakterisztikus függvényének a logaritmusa a következő alakban is felírható:

$$\log \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itx} - 1 - it\tau(x)}{x^2} M(\,dx) + itB,$$

Mi a második részben a korlátlanul osztható eloszlásoknak ezt a jellemzését fogjuk használni. A $\tau(\cdot)$ függvény használatának az az előnye az $A(\cdot)$ függvénnyel szemben, hogy $\tau(\cdot)$ folytonos (és korlátos) függvény, és ez egyszerűbbé teszi bizonyos határátmenetek elvégzését. (Emlékeztetőül: Eloszlások akkor és csak akkor konvergálnak egy határeloszláshoz, ha minden folytonos és korlátos függvénynek a várható értéke ezen eloszlások szerint konvergál ennek a függvénynek a határmérték szerinti várható értékéhez.)

Megjegyzések:

1. *Korlátlanul osztható folyamatok*

Tekintsünk egy F korlátlanul osztható eloszlású Gauss komponenst nem tartalmazó valószínűségi eloszlást. Ekkor az F függvény $\varphi(t) = \int e^{itx} F(\,dx)$ karakterisztikus függvényének logaritmusa a Lévy–Hincsin formula alapján felírható

$$\log \varphi(t) = \int_{x \neq 0} (e^{itx} - 1 - itA(x))\mu(\,dx) + iDt$$

alakban, ahol a μ mérték teljesíti a $(**)$ feltételt, $A(t) = 1$, ha $|t| \leq 1$, és $A(t) = 0$, ha $|t| > 1$. A korlátlanul osztható eloszlásokat le lehet írni vagy a fenti módon vagy egy kanonikus M mérték segítségével a Lévy–Hincsin formula általunk illetve a Feller könyv által leírt formájában. A két jellemzés ekvivalens. A továbbiakban kényelmesebbnek látszik a μ mértékkel dolgozni az M mérték helyett.

A fő részben ismertetett konstrukció alapján egy Poisson mező segítségével konstruáltunk egy F eloszlású ξ valószínűségi változót. Megmutatjuk, hogy a konstrukció némi módosításával olyan $\xi(t) = \xi(t, \omega)$, $0 \leq t < \infty$, sztochasztikus folyamatot is tudunk konstruálni, amely teljesíti a következő tulajdonságokat:

1. $\xi(1, \omega)$ F eloszlású valószínűségi változó.
2. $\xi(t, \omega)$ független és stacionárius növekményű folyamat, azaz tetszőleges $0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_k$ számokra, $\xi(0) \equiv 0$, a $\xi(t_1)$, $\xi(t_2) - \xi(t_1)$, $\dots$, $\xi(t_k) - \xi(t_{k-1})$ valószínűségi változók függetlenek, és tetszőleges $0 \leq s, t < \infty$-re a $\xi(t + s) - \xi(t)$ valószínűségi változó eloszlása nem függ t-től.
3. Majdnem minden ω-ra a $\xi(\cdot, \omega)$ trajektória minden pontban jobbról folytonos, és minden pontban létezik a trajektóriának baloldali határértéke is. Az irodalomban az ilyen folyamatokat cadlag (continue à droite, limite à gauche) folyamatoknak hívják.

Megjegyzés: Létezik olyan független és stacionárius növekeményű $W(t, \omega)$, $t \geq 0$, Gauss folyamat, amely 1 valószínűséggel folytonos trajektóriájú, $W(0, \omega) \equiv 0$, és $W(1, \omega)$ standard normális eloszlású valószínűségi változó. Az ilyen folyamatot az irodalomban Wiener folyamatnak hívják. Egy általános korlátlanul osztható F eloszlás beágyazható egy az előbb felsorolt 1.—3. tulajdonságokkal rendelkező $\xi(t, \omega)$, és egy tőle független σ-val megszorzott Wiener folyamat összegébe. Ez azt jelenti, hogy az így konstruált folyamat értéke a $t = 1$ helyen F eloszlású valószínűségi változó. A konstrukcióban szereplő μ mértéket és σ konstanst a Lévy–Hincsin formula határozza meg. A korlátlanul osztható eloszlások sok tulajdonsága jobban megérthető, ha ezt az eloszlást beágyazzuk egy ilyen korlátlanul osztható folyamatba.

A kívánt tulajdonságú folyamatot a következő módon konstruálhatjuk meg. Legyen $\bar\mu = \mu \times \lambda$ a μ mérték és az $\mathbf{R}^+ = \{t\colon t \ge 0\}$ pozitív félegyenesen definiált Lebesgue mérték direkt szorzata az $(\mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}^+, \mathcal{A})$ téren, ahol $\mathcal{A}$ a Borel σ-algebrát jelöli, és tekintsünk egy $(x_1(\omega), x_2(\omega), \dots) = ((x_1^{(1)}(\omega), x_1^{(2)}(\omega)), (x_2^{(1)}(\omega), x_2^{(2)}(\omega)), \dots)$ Poisson mezőt a $(\mathbf{R} \setminus \{0\} \times \mathbf{R}^+, \mathcal{A})$ téren $\bar\mu$ számláló mértékkel.

Tekintsünk a magyarázatban szereplő regularizációhoz hasonlón alkalmas monoton csökkenő $A(N) \to 0$ sorozatot. Az ott leírt eljáráshoz hasonlóan definiáljuk a $\xi(t,\omega)$ valószínűségi változókat szimultán minden $t \ge 0$-ra azzal a különbséggel, hogy $B(N) = \infty$-t választunk, azaz ezek a korlátok nem jelennek meg a definicióban, továbbá az összegezésben az $x_n(\omega) \in R \setminus \{0\} \times \mathbf{R}^+$ pontok első koordinátáit összegezzük, és a $\xi(t,\omega)$ definiciójában csak azokat az $x_n(\omega)$ mintapontokat vesszük figyelembe, amelyeknek második koordinátája kisebb vagy egyenlő mint t. Részletesebben:

$$\begin{aligned}\xi(t,\omega) &= \lim_{N\to\infty} \operatorname{Reg} \xi_N(t,\omega) \\ &= \lim_{N\to\infty} \left(\sum_{\substack{n\colon A(N) < |x_n^{(1)}(\omega)| \\ x_n^{(2)}(\omega) \le t}} x_n^{(1)}(\omega) - E \sum_{\substack{n\colon A(N) < |x_n^{(1)}(\omega)| < 1 \\ x_n^{(2)}(\omega) \le t}} x_n^{(1)}(\omega) \right).\end{aligned}$$

A fő részben ismertetett érvelésből következik, hogy minden rögzített $t \ge 0$-ra a $\lim\limits_{N\to\infty} \operatorname{Reg} \xi_N(t,\omega)$ határérték egy valószínűséggel létezik. Továbbá a $\operatorname{Reg} \xi_N(t,\omega)$, $t \ge 0$, folyamat teljesíti az 1.—3. tulajdonságokat. Az 1. és 2. tulajdonság a Poisson mező függetlenségi és a második koordináta szerinti eltolásinvariáns tulajdonságából következik. Az utóbbi tulajdonság a Lebesgue mérték eltolásinvariáns tulajdonságának a következménye. A 3. tulajdonságot, mivel a $\operatorname{Reg} \xi_N(t,\omega)$ folyamat stacionárius növekményű, elég $0 \le t \le 1$ esetén belátni. Ez viszont azért igaz, mert a

$$((-\infty, -A(N)) \cup (A(N), \infty)) \times [0,1]$$

tartományban az általunk tekintett Poisson mező csak véges sok pontot tartalmaz. Ezért a $\operatorname{Reg} \xi_N(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$ trajektóriának csak véges sok ugráshelye van, ahol a trajektória jobbról folytonos.

Egyszerű $N \to \infty$ határátmenettel kapjuk, hogy az 1. és 2. tulajdonságot a $\xi(t,\omega)$ folyamat is teljesíti. A 3. tulajdonságot elég $0 \le t \le 1$-re belátni. Továbbá, felhasználva szabadságunkat az $A(N)$ sorozat megválasztásában, válasszuk ezt a sorozatot úgy, hogy $\int_{\{x\colon 0 < |x| < A(N)\}} x^2 \mu(\,dx) \le 4^{-N}$.

Vegyük észre, hogy a $\operatorname{Reg} \xi_N(t,\omega) - \operatorname{Reg} \xi_{N+1}(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, folyamat 0 várható értékű független növekményű folyamat minden $N \ge 1$-re, amelyre

$$E\left(\operatorname{Reg} \xi_{N+1}(1,\omega) - \operatorname{Reg} \xi_N(1,\omega)\right)^2 = \int_{\{x\colon A(N+1) < |x| < A(N)\}} x^2 \mu(\,dx) \le 4^{-N}.$$

Ezért a Kolmogorov egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\sup_{0\le t\le 1}|\operatorname{Reg}\xi_{N+1}(t,\omega)-\operatorname{Reg}\xi_N(t,\omega)|\ge 2^{-N/2}\right)$$
$$\le 2^N\int_{\{x\colon\, 0<|x|<A(N)\}} x^2\mu(\,dx)\le 2^{-N}.$$

Mivel a fenti becslések jobboldalán szereplő kifejezések összege konvergens, és

$$\xi(t,\omega)=\operatorname{Reg}\xi_1(t,\omega)+\sum_{N=1}^\infty\left[\operatorname{Reg}\xi_{N+1}(\omega)-\operatorname{Reg}\xi_N(t,\omega)\right],$$

ezért a Borel–Cantelli lemmából következik, hogy hogy majdnem minden ω-ra

$$\sup_{0\le t\le 1}|\xi(t,\omega)-\operatorname{Reg}\xi_N(t,\omega)|\le\frac{2^{-N/2}}{\sqrt{2}-1}\quad\text{ha } N\ge N_0(\omega).$$

Az utolsó reláció segítségével $N\to\infty$ határátmenet adja, hogy nemcsak a $\operatorname{Reg}\xi_N(t,\omega)$, hanem a $\xi(t,\omega)$ folyamat is teljesíti a 3. tulajdonságot. Ugyanis innen következik, hogy egy olyan ω pontban, amely teljesíti ezt a feltételt, tetszőleges $0\le t\le 1$ pontban és tetszőleges $\varepsilon>0$-ra $|\limsup\xi(t\pm 0)-\liminf\xi(t\pm 0)|\le\varepsilon$. Továbbá a jobboldali határérték megegyezik a $\xi(t,\omega)$ számmal.

b.) *Stabilis eloszlások:*

A stabilis eloszlások illetve a természetes módon definiálható független és stacionárius növekményű stabilis folyamatok, amelyekbe ezeket a folyamatokat beágyazhatjuk az előzőek alapján egyszerűen megkonstruálhatóak. Egyszerűen olyan korlátlanul osztható eloszlást vagy folyamatot konstruálunk, amelyre a μ vagy M mérték extra homogenitási tulajdonsággal rendelkezik. Nevezetesen, legyen a μ mértéknek sűrűségfüggvénye, amelyet a következő képlet ad meg:

$$\frac{d\mu}{dx}(x)=\begin{cases} C_1x^{-\alpha} & \text{ha } x>0\\ C_2|x|^{-\alpha} & \text{ha } x<0\end{cases}$$

ahol $C_1\ge 0$, $C_2\ge 0$, $C_1+C_2>0$, $1<\alpha<3$. Az utolsó feltétel azt biztosítja, hogy a μ mérték teljesíti a $(**)$ feltételt. Ez a μ mérték stabilis eloszlásokat vagy folyamatokat határoz meg.

Részletesebb vizsgálat megmutatja, hogy a fenti képlet megadja az összes stabilis eloszlást és folyamatot. Továbbá, a korlátlanul osztható eloszlások definicójában szereplő regularizáció ebben a speciális esetben egyszerűbb és természetesebb módon elvégezhető. Végül a karakterisztikus függvényeket megadó integrál ebben az esetben explicit módon kiszámítható. Ennek ellenére sok vizsgálatban célszerűbb a karakterisztikus függvényt az eredeti (nem kiintegrált) formájában használni. A részleteket itt nem dolgozzuk ki.

Poissson folyamat egyszerű konstrukciója.

A Poisson eloszlás egyik alapvető tulajdonsága az, hogy két független λ és μ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó összege $\lambda+\mu$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó. Az alábbi lemmában megfogalmazzuk ennek az állításnak bizonyos értelmű megfordítását, amely lehetőséget ad arra, hogy Poisson folyamatokat és mezőket egyszerűen megkonstruáljunk.

Lemma. *Legyen adva k darab urna, és ezekbe dobjunk be véletlen ξ számú golyót, ahol ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel. Legyenek az egyes dobások eredményei egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenek. Tegyük fel továbbá, hogy minden egyes dobásnál a golyó az j-ik urnába $p_j\ge 0$ valószínűséggel esik, $j=1,\dots,k$, $\sum\limits_{j=1}^k p_j=1$. Jelölje η_j a j-ik urnába eső golyók számát. Ekkor az η_j, $j=1,\dots,k$ valószínűségi változók függetlenek, és η_j Poisson eloszlású λp_j paraméterrel, $j=1,\dots,k$.*

A lemma bizonyítása:

$$P(\eta_1=l_1,\dots,\eta_k=l_k)=P(\xi=l_1+\cdots+l_k)\frac{(l_1+\cdots+l_k)!}{l_1!\cdots l_k!}p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k}$$
$$=\frac{\lambda^{(l_1+\cdots+l_k)}}{l_1!\cdots l_k!}p_1^{l_1}\cdots p_k^{l_k}e^{-\lambda}=\prod_{j=1}^k\frac{(\lambda p_j)^{l_j}}{l_j!}e^{-\lambda p_j}$$

tetszőleges $l_1\ge 0$, ... , $l_k\ge 0$ egész számokra. Innen adódik az állítás.

Érdemes megfogalmazni az előző lemma alábbi következményét:

A lemma következménye. *Legyen adva egy $(X,\mathcal{A})$ mérhető tér, és azon egy μ valószínűségi mérték. Legyen ξ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\lambda>0$ paraméterrel, Válasszunk egymástól és a ξ valószínűségi változótól függetlenül $x_1,\dots,x_\xi$ pontokat az X téren úgy, hogy $P(x_j\in\mathbf{A})=\mu(\mathbf{A})$ minden $\mathbf{A}\in\mathcal{A}$ és $j=1,\dots,\xi$-re. Ekkor tetszőleges diszjunkt $\mathbf{A}_1\in\mathcal{A}$, ... , $\mathbf{A}_k\in\mathcal{A}$ halmazokra az e halmazokba eső kiválasztott x_l pontok száma egymástól független, és az egyes $\mathbf{A}_j$, $j=1,\dots,k$, halmazokba eső pontok száma $\lambda\mu(\mathbf{A}_j)$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó.*

Legyen adva egy $(X,\mathcal{B})$ mérhető tér és rajta egy ν σ-véges mérték. Az előző konstrukciót felhasználva konstruálható egy olyan $x_1,x_2,\dots$ véletlen pontrendszer az X téren, amely teljesíti a következő tulajdonságot: Bármely mérhető véges ν mértékű $\mathbf{A}$ halmazba eső pontok száma $\nu(\mathbf{A})$ mértékű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és diszjunkt, mérhető, véges mértékű halmazokba eső pontok száma egymástól független.

Bizonyítás. Legyen $\mathbf{A}_{k+1}=X\setminus\bigcup\limits_{j=1}^k\mathbf{A}_j$, $p_j=\mu_j(\mathbf{A}_j)$, $j=1,\dots,k+1$. Ekkor a Lemma alapján az egyes $\mathbf{A}_j$ halmazokba eső pontok száma egymástól független $\lambda\mu(\mathbf{A}_j)$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és ez az első bekezdésben megfogalmazott állítás.

A második állítás bizonyításában tekintsük az X halmaznak egy olyan particióját, amely rendelkezik a következő tulajdonságokkal: $X = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} X_j$, az X_j, $j = 1, 2, \dots,$ halmazok diszjunktak, $\mu(X_j) = \lambda_j < \infty$. Konstruáljunk a következmény már bizonyított részének felhasználásával mindegyik X_j halmazon egy olyan pontrendszert (véletlen számú pontot dobva le $\mu(X_j)$ paraméterű Poisson eloszlással egymástól függetlenül úgy, hogy egy pont egy $\mathbf{A}_j \subset X_j$ halmazba $\frac{\mu(\mathbf{A}_j)}{\mu(X_j)}$ valószínűséggel essék), hogy egy $\mathbf{A}_j \subset X_j$ halmazba eső pontok száma legyen $\mu(\mathbf{A}_j)$, paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és diszjunkt halmazokba egymástól független számú pont essék. Legyen a különböző X_j halmazokba eső pontok száma egymástól független. Mivel független Poisson eloszlású valószínűségi változók összege Poisson eloszlású, és az összeg paramétere egyenlő az összeadandók paraméterének az összegével, ezért az itt leírt konstrukcióban tetszőleges $\mu(\mathbf{A}) < \infty$ mértékű halmazba $\mu(\mathbf{A})$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó esik, és diszjunkt halmazokba eső pontok száma egymástól független. (Vegyük észre, hogy végtelen sok független Poisson eloszlású valószínűségi változó összege is Poisson eloszlású, és az összeg paramétere megegyezik az összeadandók paraméterének az összegével, feltéve, hogy ez az összeg véges. Ugyanis ebben az esetben az összeg 1 valószínűséggel, ezért eloszlásban is konvergál.)

Legyen adva egy $(X, \mathcal{A})$ mértéktér, és jelölje Z az X halmaz összes megszámlálható sok $(x_1, x_2, \dots)$, $x_j \in X$, $j = 1, 2, \dots$ pontot tartalmazó részhalmazából álló pontrendszert. Legyen $\mathcal{F}$ az a legszűkebb σ-algebra, amelyet az $z\colon z \in Z, z(\mathbf{A}_1) = k_1, \dots, z(\mathbf{A}_j) = k_j)$ halmazok generálnak, ahol $z(\mathbf{A})$, $\mathbf{A} \in \mathcal{A}$, jelöli a z pontrendszernek az $\mathbf{A}$ halmazba eső pontjainak a számát; $j = 1, 2, \dots,$ továbbá k_l nem negatív egész szám, és $\mathbf{A}_l \in \mathcal{B}$, $\mu(\mathbf{A}_l) < \infty$, minden $1 \le l \le j$-re. Egy $(\Omega, \mathcal{B}, P)$ valószínűségi mezőn értelmezett mérhető $\xi : (\Omega, \mathcal{B}) \to (Z, \mathcal{F})$ leképezést az $(X, \mathcal{A})$ téren értelmezett pontfolyamatnak nevezik. Legyen adva egy μ σ-véges mérték az $(X, \mathcal{A})$ téren. Azt mondjuk, hogy a ξ pontfolyamat Poisson pontfolyamat az $(X, \mathcal{A})$ téren μ számláló mértékkel, ha tetszőleges pozitív egész k számra és diszjunkt $\mathbf{A}_j \in \mathcal{A}$, $\mu(\mathbf{A}_j) < \infty$, $j = 1, \dots, k$, halmazokra az $\mathbf{A}_j$, $j = 1, \dots, k$, halmazokba eső pontok száma egymástól független valószínűségi változók, és az $\mathbf{A}$ halmazba eső pontok száma Poisson eloszlású valószínűségi változó $\mu(\mathbf{A})$ paraméterrel. Az előző következményben megmutattuk, hogy tetszőleges $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mérhető tér esetén σ-additiv μ mértékkel konstruálható e téren értelmezett Poisson pontfolyamat μ számláló mértékkel.

Határeloszlástétel Poisson eloszlással független valószínűségi változók összegeire.

Belátjuk azt a harmadik oldalon is megfogalmazott határeloszlástételt, amelyben a határeloszlás Poisson határeloszlású. Két bizonyítást is adunk. Azért érdemes a két megoldás mindegyikét tekinteni, mert ezekben az általános határeloszlástételek bizonyításának két különböző, fontos módszerét alkalmazzuk. Az első bizonyításban a karakterisztikus függvénymódszert alkalmazzuk.

Első bizonyítás: Azt mutatjuk meg, hogy az S_k valószínűségi változók karakterisztikus függvényei konvergálnak egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó karakterisztkus függvényéhez. Egy λ paraméterű Poisson eloszlású η valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $Ee^{it\eta} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda+ikt} = \exp\{-\lambda + \lambda e^{it}\}$. Jelölje $\varphi_{k,j}(t)$ a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor az 1. feltétel alapján

$$\varphi_{k,j}(t) = P(\xi_{k,j} = 0) + P(\xi_{k,j} = 1)e^{it} + \varepsilon(k,j,t) = 1 + \lambda_{k,j}(e^{it} - 1) + \bar{\varepsilon}(k,j,t),$$

ahol $|\varepsilon(k,j,t)| \le P(\xi_{k,j} \ge 2)$, és $|\bar{\varepsilon}(k,j,t)| \le 2P(\xi_{k,j} \ge 2)$. Innen

$$\begin{aligned} Ee^{itS_k} &= \prod_{j=1}^{n_k} \varphi_{k,j}(t) = \prod_{j=1}^{n_k} \bigl(1 + \lambda_{k,j}(e^{it} - 1) + \bar{\varepsilon}(k,j,t)\bigr) \\ &= \prod_{j=1}^{n_k} \exp\left\{\lambda_{k,j}(e^{it} - 1) + O(\lambda_{k,j}^2 + \varepsilon(k,j,t))\right\} \\ &= \exp\left\{(e^{it} - 1)\left(\sum_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j}\right) + O\left(\sum_{j=1}^{n_k} \bigl(\lambda_{k,j}^2 + \bar{\varepsilon}(k,j,t)\bigr)\right)\right\} \to \exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}, \end{aligned}$$

ha $k \to \infty$, mert $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j} = \lambda$, $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j}^2 \le \sup\limits_{1\le j\le n_k} \lambda_{k,j} \sum\limits_{j=1}^{n_k} \lambda_{k,j} \to 0$, ha $k \to \infty$ a megfogalmazott tétel 2. és 3. feltétele alapján, továbbá $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \bar{\varepsilon}(k,j,t) \le 2\sum\limits_{j=1}^{n_k} P(\xi_{k,j} \ge 2) \to 0$, ha $k \to \infty$ a 3. feltétel alapján. Mivel $\exp\{\lambda(e^{it} - 1)\}$ egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó karakterisztikus függvénye, innen következik a tétel állítása.

A második bizonyítás a következő Lemmán alapul. Ezt a lemmát, illetve ennek egy általánosítását bebizonyítjuk a III. rész kiegészítésében.

Lemma A. *Legyen S_k és $\bar{S}_k$, $k = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata, amelyre az $S_k - \bar{S}_k$ különbségek sorozata sztochasztikusan tart nullához $k \to \infty$ esetében. Ha az $\bar{S}_k$ valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál egy F eloszláshoz, akkor az S_k valószínűségi változók sorozata is konvergál az F eloszláshoz.*

Második bizonyítás: Azt fogjuk belátni, hogy minden k konstansra konstruálható független, Poisson eloszlású valószínűségi változók $\bar{\xi}_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$, sorozata alkalmas $\bar{\lambda}_{k,j}$ paraméterrel, amelyre az $\bar{S}_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \bar{\xi}_{k,j}$ és $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ összegek különbsége $\bar{S}_k - S_k$ sztochasztikusan tart nullához, ha $k \to \infty$, és $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} \bar{\lambda}_{k,j} = \lambda$. Innen következik a Tétel állítása. Ugyanis $\bar{S}_k$ Poisson eloszlású valószínűségi változó $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \bar{\lambda}_{k,j}$ paraméterrel. Ezért $\bar{S}_k$ eloszlásban konvergál egy λ paraméterű Poisson eloszláshoz, és a Lemma A alkalmazható.

Legyen $\bar\lambda_{k,j}$ a $\lambda_{k,j}=xe^{-x}$ egyenlet egynél kisebb megoldása. Ha $\lambda_{k,j}\le e^{-1}$, akkor ennek az egyenletnek van megoldása, és $|\lambda_{k,j}-\bar\lambda_{k,j}|=\bar\lambda_{k,j}|1-e^{-\bar\lambda_{k,j}}|\le \text{const.}\,\bar\lambda_{k,j}^2\le \text{const.}\,\lambda_{k,j}^2$, ezért a $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}=\lambda$ és $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}\lambda_{k,j}=0$ relációkból következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\bar\lambda_{k,j}=\lambda$, és $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}\bar\lambda_{k,j}=0$. A $\bar\xi_{k,j}=1$ esemény egyezzen meg a $\xi_{k,j}=1$ eseménnyel. Jegyezzük meg, hogy a $\bar\lambda_{k,j}$ számot úgy választottuk meg, hogy egy $\bar\lambda_{k,j}$ paraméterű Poisson eloszlású $\bar\xi_{k,j}$ valószínűségi változóra teljesüljön a $P(\bar\xi_{k,j}=1)=\bar\lambda_{k,j}e^{-\bar\lambda_{k,j}}=P(\xi_{k,j}=1)$ azonosság. Definiáljuk a $\bar\xi_{k,j}=m$, $m\ne 0$, eseményeket úgy, hogy $P(\bar\xi_{k,j}=m)=\frac{\bar\lambda_{k,j}^m}{m!}e^{-\bar\lambda_{k,j}}$, és rögzített k-ra a $\bar\xi_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változók függetlenek. Elég gazdag valószínűségi mezőn ilyen konstrukció lehetséges. (Egy lehetséges konstrukció: Legyen $\eta_1,\dots,\eta_{n_k}$ olyan független, a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata, amelyek függetlenek a $\xi_{k,j}$, $1\le j\le n_k$ valószínűségi változóktól is. Tekintsük minden $1\le j\le n_k$ számra a $[0,1]$ intervallum partícióját egy $A_0=[0,a_1]$ $\frac{e^{-\bar\lambda}}{1-\bar\lambda e^{-\bar\lambda}}$ hosszúságú és további $A_{l,j}=[a_{l,j-1},a_{l,j})$, $a_{l,j}-a_{l,j-1}=\frac{\bar\lambda^l e^{-\bar\lambda}}{l!(1-\bar\lambda e^{-\bar\lambda})}$ hosszúságú intervallumokra, $l=2,3\dots$, és legyen $\bar\xi_{j,k}=l$, ($l\ne 1$ esetben), ha $\xi_{k,j}\ne 1$, és $\eta_j\in A_{l,j}$. Ekkor ugyanis a $P(\bar\xi_{k,j}=l|\bar\xi_{k,j}\ne 1)$ feltételes valószínűségek az előírt értékeket veszik fel.) Az a kikötés, hogy az a valószínégi mező, amelyen a konstrukciót végezzük elég gazdag nem jelent kellemetlen megszorítást, mert a bizonyítandó határeloszlástétel érvényessége nem függ annak a valószínűségi mezőnek a tulajdonságaitól, amelyen dolgozunk. Belátjuk, hogy az így konstruált $\bar\xi_{k,j}$ valószínűségi változók összegeire igaz, hogy a $\bar S_k-S_k$ különbségek sztochasztikusan tartanak nullához.

Ennek az állításnak a bizonyításához vegyük észre, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-ra

$$P(|S_k-\bar S_k|>\varepsilon)\le\sum_{j=1}^{n_k}P(\xi_{k,j}\ge 2)+\sum_{j=1}^{n_k}P(\bar\xi_{k,j}\ge 2),$$

mivel az $S_k-\bar S_k\ne 0$ reláció csak úgy lehetséges, ha $\xi_{k,j}\ge 2$ vagy $\bar\xi_{k,j}\ge 2$ valamely $1\le j\le n_k$ indexre. Viszont $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}P(\xi_{k,j}\ge 2)=0$ a tétel feltételei miatt. Továbbá $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}P(\bar\xi_{k,j}\ge 2)=0$, mert $\sum\limits_{j=1}^{n_k}P(\bar\xi_{k,j}\ge 2)\le\text{const.}\sum\limits_{j=2}^{\infty}\bar\lambda_{k,j}^2$, és teljesülnek a $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\bar\lambda_{k,j}=\lambda$, és $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}\bar\lambda_{k,j}=0$ relációk. Innen következik a kívánt egyenlőtlenség és a tétel állítása.

Példa olyan nem stabilis eloszlásra, amely teljesíti a stabilitási feltétel egy gyengített változatát.

Konstruálunk olyan S valószínűségi változót, amelynek F eloszlása nem teljesíti a stabilitás $(*)$ formulában megadott feltételét, de teljesíti annak következő gyengített változatát.

Rögzítsünk egy $\alpha > \frac{1}{2}$ számot. Olyan nem stabilis F eloszlást konstruálunk, amelyre teljesül az $F(2^\alpha(x-A)) * F(2^\alpha(x-A)) = F(x)$ azonosság alkalmas $A = A(\alpha)$ valós számmal, vagy másképpen megfogalmazva, ha S egy F eloszlású valószínűségi változó, és S' és S'' két független és az S valószínűségi változóval azonos eloszlású valószínűségi változó, akkor $\frac{(S'+A)+(S''+A)}{2^\alpha} \stackrel{\Delta}{=} S$, ahol $\stackrel{\Delta}{=}$ azt jelenti, hogy az azonosság két oldalán egyforma eloszlású valószínűségi változók vannak.

A kívánt tulajdonságú S valószínűségi változó konstrukciója a következő. Legyenek $\eta(2^n)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$, független, Poisson eloszlású valószínűségi változók $\mu = 2^n$ paraméterrel, és legyen

$$S = \sum_{n=-\infty}^{0} 2^{-n\alpha}\eta(2^n) + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha}[\eta(2^n) - E(\eta(2^n)] = S_1 + S_2.$$

Azt állítom, hogy $\alpha > 1/2$ esetén a fenti képletben definiált S valószínűségi változó értelmes, azaz az őt definiáló összeg (egy valószínűséggel) konvergál, és ha ha S' és S'' két független valószínűségi változó, és ugyanaz az eloszlásuk mint S-nek, akkor $\frac{(S'+A)+(S''+A)}{2^\alpha} \stackrel{\Delta}{=} S$.

A konvergencia bizonyítása érdekében vegyük észre, hogy $E2^{-n\alpha}[\eta(2^n) - E\eta(2^n)] = 0$, és $\operatorname{Var}(2^{-n\alpha}[\eta(2^n) - E\eta(2^n)]) = 2^{-2n\alpha+n}$, ahonnan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{Var}(2^{-n\alpha_n}[\eta(2^n) - E\eta(2^n)]) < \infty$, ha $\alpha > \frac{1}{2}$. Ezért az S_2 kifejezést definiáló $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n\alpha}[\eta(2^n) - E(\eta(2^n)]$ összeg konvergens. Másrészt, $n \le 0$ esetén $P(\eta(2^n) \neq 0) = 1 - e^{-2^n} \le \text{const.}\, 2^n$. Innen azt kapjuk, hogy $\sum\limits_{n=-\infty}^{0} P(\eta(2^n) \neq 0) \le \text{const.} \sum\limits_{n=0}^{\infty} 2^{-n} < \infty$. Ezért a Borel–Cantelli lemma alapján az S_1 kifejezést definiáló összeg egy valószínűséggel csak véges sok tagot tartalmaz, így az is konvergens.

Legyenek $\eta'(2^n)$ és $\eta''(2^n)$, $n = 0, \pm1, \pm2, \dots$, az $\eta(2^n)$-hez hasonlóan független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\mu = 2^n$ paraméterrel, és definiáljuk az S' és S'' valószínűségi változókat az S valószínűségi változót definiáló képlethez hasonlóan, csak helyettesítsük ezekben a definiciókban az $\eta(2^n)$ valószínűségi változókat az $\eta'(2^n)$ illetve $\eta''(2^n)$ valószínűségi változókkal. Azt állítom, hogy $\frac{(S'+A)+(S''+A)}{2^\alpha} \stackrel{\Delta}{=} S$. Ennek igazolása érdekben vegyük észre, hogy minden n egész számra

$$\frac{2^{-\alpha(n-1)}\eta'(2^{n-1}) + 2^{-\alpha(n-1)}\eta''(2^{n-1})}{2^\alpha} \stackrel{\Delta}{=} 2^{-\alpha n}\eta(2^n),$$

és

$$\frac{2^{-\alpha(n-1)}(\eta'(2^{n-1})-E(\eta'(2^{n-1}))+2^{-\alpha(n-1)}(\eta''(2^{n-1})-E\eta''(2^n))}{2^\alpha}$$
$$\stackrel{\Delta}{=} 2^{-\alpha n}(\eta(2^n)-E\eta(2^n)),$$

és az ezen azonosságokban szereplő kifejezések különböző n indexre független valószínűségi változók. Ezeket az azonosságokat összeadva minden n-re ($n \le 0$ indexekre az első, és $n \ge 1$ indexekre a második azonosságot vesszük az összegezésben) megkapjuk a bizonyítandó azonosságot. Az alkalmasan választandó A konstans azért szerepel ebben az azonosságban, mert $n=0$-ra az $\eta(2^0)=\eta(1)$, míg $n=1$-re a normalizált $\eta(2)-E\eta(2)$ valószínűségi változót vettük az S valószínűségi változót definiáló összegben.

Megmutatjuk egy a II. részben bizonyítandó eredmény segítségével, hogy az előbb definiált S valószínűségi változó nem stabilis eloszlású. Vegyük észre, hogy S eloszlása korlátlanul osztható, és ezt az eloszlást olyan μ mérték definiálja, amely az $y_n = 2^{n\alpha}$ pontokba van koncentrálva, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, és $\mu(2^{n\alpha}) = 2^{-n}$. A II. részben be fogjuk látni, hogy egy korlátlanul osztható eloszlás egyértelműen meghatározza a karakterisztikus függvényét definiáló μ mértéket. Ezen észrevétel segítségével látható, hogy ha S_1, S_2 és S_3 független és az S valószínűségi változóval azonos eloszlású valószínűségi változók, akkor az $\frac{S_1+S_2+S_3-B}{3^\alpha}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét meghatározó $\bar\mu$ mérték különbözik a μ mértéktől. Erre a $\bar\mu$ mértékre ugyanis $\bar\mu(A) = 3\mu(\frac{A}{3^\alpha})$ minden mérhető A halmazra. Ezért a $\bar\mu$ mérték különbözik a μ mértéktől, sőt más halmazba van koncentrálva.

A fenti példa hátterében a következő észrevétel van. Egy korlátosan osztható eloszlás akkor és csak akkor stabilis, ha az őt meghatározó μ (vagy kanonikus M) mérték bizonyos homogenitási tulajdonsággal rendelkezik. Ha ennek a homogenitási tulajdonságnak csak egy gyengített, csupán $t=k^n$, $n=0,\pm1,\pm2,\dots$, alakú paraméterekre megkövetelt változata igaz, ahol k egy rögzített egész szám, akkor teljesülhet a stabilitást kifejező $(*)$ tulajdonság egy gyengített változata, de a tekintett eloszlás nem stabilis.