Határeloszlástételek és korlátlanul osztható eloszlások. II. rész

1. Az alapvető eredmények megfogalmazása.

Ismertetjük azt az eredményt (bizonyítással együtt), amely szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy az egyenletes kicsiséget teljesítő szériasorozatok alkalmasan normalizált összegei eloszlásban konvergáljanak. Megadjuk továbbá a határeloszlást is. Ez mindig korlátlanul osztható eloszlás. Ez azt jelenti, hogy nemcsak a független *egyforma eloszlású*, hanem tetszőleges az egyenletes kicsiséget teljesítő szériasorozat normalizált összegeinek a határeloszlása, (ha az létezik), korlátlanul osztható eloszlás.

Az eredmény bizonyításában fontos szerepet játszik annak az önmagában is érdekes kérdésnek a vizsgálata, hogy korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változók sorozata mikor konvergál eloszlásban egy, (mint később látni fogjuk, szükségszerűen korlátlanul osztható eloszlású) valószínűségi változóhoz. Egy kiegészítésben részletesebben is összehasonlítjuk a szériasorozatok részletösszegeinek és korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változók sorozatainak határeloszlásáról szóló tételt. Durván szólva, a kapcsolat a következő: A szériasorozat egyes soraiban levő valószínűségi változókhoz olyan független, korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változókat lehet társítani, amelyek karakterisztikus függvényeit meghatározó M kanonikus mértékek szoros kapcsolatban vannak a tekintett valószínűségi változók eloszlásfüggvényeivel. Továbbá a szériasorozat különböző soraiban levő változók összegének akkor és csak akkor van határeloszlása, ha a hozzájuk társított független és korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változókból készített összegek eloszlásban konvergálnak. Az eredeti és a társított valószínűségi változókból készített összegek határeloszlása megegyezik.

Természetesen ezek az eredmények abban a speciális esetben is érvényesek, amikor a szériasorozatok egy sorban szereplő tagjai nemcsak függetlenek, hanem egyforma eloszlásúak is. Ezzel a speciális esettel azért érdemes külön foglalkozni, mert ebben az esetben a következő a szemlélet alapján „nyílvánvaló”, mégis bizonyításra szoruló állítás is igaz: Ha a szériasorozatozat egyes soraiban szereplő tagok nemcsak függetlenek, hanem egyforma eloszlásúak is, a tagok száma tart a végtelenhez, és a szériasorozatok egyes soraiban levő elemek összegeinek van határeloszlása, akkor a szériasorozat teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét. Ezekből a később pontosabban megfogalmazandó és bizonyítandó eredményekből következik a Lévy–Hincsin formula is, azaz az az állítás, hogy az előző részben konstruált korlátlanul osztható eloszlások megadják az összes korlátlanul osztható eloszlást, és ez a reprezentáció egyértelmű.

Az eredmények megfogalmazása előtt felidézünk néhány a továbbiakban fontos fogalmat és bevezetünk néhány jelölést: Legyen $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $j=1,\dots,n_k$, valószínűségi változók szériasorozata, azaz tegyük fel, hogy rögzített k számra a $\xi_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változók függetlenek. Azt mondjuk, hogy ez a szériasorozat teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét, ha minden $\varepsilon>0$ számra $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k} P(|\xi_{k,j}|>\varepsilon)=0$. Felidézzük továbbá az első részben már definiált kanonikus mérték fogalmát. Egy M mértéket a számegyenes Borel halmazain kanonikus mértéknek nevezünk, ha tetszőleges véges $[a,b]\subset \mathbf{R}^1$ intervallum $M\{[a,b]\}$ mértéke véges, és tetszőleges $a>0$

számra
$$\int_a^\infty \frac{1}{x^2} M(\,dx) < \infty, \quad \text{és} \quad \int_{-\infty}^{-a} \frac{1}{x^2} M(\,dx) < \infty.$$

Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots,$ $j = 1, \dots, n_k$, egy az egyenletes kicsiség feltételét teljesítő szériasorozat, és jelölje $F_{k,j}$ az $\xi_{k,j}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Vezessük be az
$$M_k(\,dx) = \sum_{j=1}^{n_k} x^2 F_{k,j}(\,dx) \tag{1.1}$$
σ-véges mértéket a számegyenesen és az
$$\left.\begin{aligned} M_k^+(x) &= \sum_{j=1}^{n_k} (1 - F_{k,j}(x)) = \int_{u \ge x} \frac{1}{u^2} M_k(\,du), \\ M_k^-(x) &= \sum_{j=1}^{n_k} F_{k,j}(-x) = \int_{u < -x} \frac{1}{u^2} M_k(\,du), \end{aligned}\right. \qquad x > 0 \tag{1.2}$$
jelöléseket. Az alábbi tételben annak szükséges és elégséges feltételét adjuk meg, hogy az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ összegek alkalmas $S_k - b_k$ normáltjai eloszlásban konvergáljanak $k \to \infty$ esetén valamilyen b_k számsorozattal. Ilyen feltétel megadható az előbb definiált M_k mértékek és $M_k^\pm$ függvények segítségével.

1. Tétel. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots,$ $j = 1, \dots, n_k$, az egyenletes kicsiséget teljesítő szériasorozat $F_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots,$ $1 \le j \le n_k$, eloszlásfüggvényekkel, amelyre a $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ összegeknek alkalmas $S_k - \bar{b}_k$ normalizáltjai eloszlásban konvergálnak valamilyen eloszlásfüggvényhez. Ekkor létezik olyan M kanonikus mérték a számegyenesen, amelyre az (1.2) formulában definiált $M_k^\pm(x)$ függvények illetve az M kanonikus mérték segítségével hozzájuk hasonlóan definiált*
$$M^+(x) = \int_{u \ge x} \frac{1}{u^2} M(\,du), \qquad M^-(x) = \int_{u < -x} \frac{1}{u^2} M(\,du) \tag{1.2$'$}$$
függvények teljesítik a
$$\lim_{k \to \infty} M_k^+(x) = M^+(x) \quad \text{\textit{és}} \quad \lim_{k \to \infty} M_k^-(x) = M^-(x) \tag{1.3}$$
relációkat minden olyan $x > 0$ pontban, ahol az $M^+(\cdot)$ illetve $M^-(\cdot)$ függvény folytonos az x. Ezenkívül teljesül a később megadandó (1.6) formula, amelynek megfogalmazása érdekében bevezetünk néhány jelölést.

Rögzítsünk egy $a > 0$ számot, és definiáljuk a
$$\tau(x) = \tau_a(x) = \begin{cases} x & \text{\textit{ha} } |x| \le a \\ a & \text{\textit{ha} } x \ge a \\ -a & \text{\textit{ha} } x \le -a \end{cases} \tag{1.4}$$

függvényt és a

$$\beta_{k,j} = \beta_{k,j}(a) = E\tau(\xi_{k,j}), \quad b_k = b_k(a) = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_{k,j}, \quad B_k = B_k(a) = \sum_{j=1}^{n_k} \beta_{k,j}^2,$$
$$k = 1, 2, \dots, \quad j = 1, \dots, n_k \tag{1.5}$$

számokat. Ha az $S_k - \bar{b}_k$ normalizált összegeknek létezik határeloszlása alkalmas $\bar{b}_k$ sorozatra, akkor az (1.1) formulában definiált M_k mértékek teljesítik az

$$M_k([-s,s]) - B_k \to M([-s,s]), \quad \text{ha } k \to \infty \tag{1.6}$$

relációt minden olyan $s > 0$ pontban, ahol az M^+ és az M^- függvények folytonosak. Az (1.6) reláció a korábban bevezetett M kanonikus mértékkel és $M^\pm(\cdot)$ függvényekkel érvényes.

Megfordítva, ha az (1.3) és (1.6) relációk teljesülnek alkalmas M kanonikus mértékkel, akkor az S_k összegek alkalmas normalizáltjai eloszlásban konvergálnak. Meg tudunk adni explicit módon egy alkalmas normalizációt, amellyel létezik határeloszlás, és le tudjuk írni az ehhez a normalizáláshoz tartozó határeloszlást. Nevezetesen, az (1.5) formulában definiált b_k konstansokkal az $S_k - b_k$ valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy korlátlanul osztható eloszláshoz, és a határeloszlás $\varphi(\cdot)$ karakterisztikus függvényének a logaritmusát a

$$\log \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itu} - 1 - it\tau(u)}{u^2} M(\,du), \tag{1.7}$$

képlet adja meg, ahol az M kanonikus mértéket az (1.3), $(1.2')$ *és (1.6) feltételek határozzák meg, a τ függvényt pedig az (1.4) formulában dediniáltuk. (Az (1.6) formula határozza meg az origó $M(\{0\})$ mértékét.)*

A határeloszlástétel teljesüléséhez elég a (1.6) feltételnek egy gyengített változatát megkövetelni, nevezetesen azt, hogy a (1.6) reláció az $M^\pm$ függvények egy folytonossági pontjában teljesül. (Lásd az alábbi 1. Megjegyzést.)

Ahhoz, hogy az 1. Tétel, illetve a benne szereplő (1.7) formula kimondása teljes legyen definiálni kell az (1.7) formulában szereplő integrandust az $u = 0$ pontban is. Ezt folytonossági meggondolások alapján a következő módon tesszük itt és a későbbi formulákban:

$$\left. \frac{e^{itu} - 1 - it\tau(u)}{u^2} \right|_{u=0} = \lim_{u \to 0} \frac{e^{itu} - 1 - it\tau(u)}{u^2} = -\frac{t^2}{2}.$$

Az 1. Tétel azt mondja ki, hogy egy $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, az egyenletes kicsiség feltételét teljesítő szériasorozatból alkalmas b_k konstansokkal készített normalizált $S_k - b_k$ összegeknek akkor és csak akkor van határeloszlásuk, ha a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók eloszlásfüggvényeinek segítségével az (1.1) és (1.2) formulában definiált M_k

mértékek és $M^{\pm}(\cdot)$ függvények egy alkalmas M kanonikus mértékkel együtt teljesítik az (1.3) és (1.6) formulákat. Ha van határeloszlás, akkor a b_k konstansok alkalmas megválasztásával elérhető, hogy a határeloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusát, amely mindig létezik, az (1.7) formula adja meg. Sőt azt is tudjuk, hogy a b_k konstansok egy alkalmas megválasztását tartalmazza az (1.5) formula. Így speciálisan megkaptuk az egyenletes kicsiséget teljesítő szériasorozatok normalizált összegeinek lehetséges határeloszlásait. Jegyezzük meg, hogy az első részben megkonstruált korlátlanul osztható eloszlások jelentek meg határeloszlásként, noha általánosabb esetet tekintettünk. Nem tettük fel, hogy a szériasorozat ugyanabban a sorában levő valószínűségi változók egyforma eloszlásúak. Az első részben azt is elmagyaráztuk, hogy az (1.7) formulával jellemzett határeloszlást hogyan lehet jellemezni egy $u^{-2}M(\,du)$ számláló mértékű Poisson folyamat és egy tőle független $M(\{0\})$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó segítségével. Az (1.3) formula határozza meg a Poisson folyamat számláló mértékét az (1.6) formula pedig a normális eloszlás szórásnégyzetét.

A később megfogalmazandó $2'$. Tételből az is következik, hogy a határeloszlás meghatározza az (1.3) és (1.6) formulában szereplő M kanonikus mértéket.

Annak érdekében, hogy ezt az 1. Tételt jobban megértsük tegyünk néhány megjegyzést. Először vegyük észre, hogy ha valószínűségi változók $S_k - b_k$ sorozata eloszlásban konvergál, akkor az $S_k - \bar{b}_k$ sorozat akkor és csak akkor konvergál eloszlásban, ha létezik a véges $C = \lim\limits_{k\to\infty}(\bar{b}_k - b_k)$ határérték. Valóban, ha az $S_k - b_k$ sorozat egy $F(x)$ eloszláshoz konvergál, és ez a feltétel teljesül, akkor az $S_k - \bar{b}_k$ az $F(x+C)$ eloszláshoz konvergál. Megfordítva, ha a $\bar{b}_k - b_k$ sorozat nem konvergens, akkor ez a sorozat vagy nem korlátos, és ekkor létezik olyan k_j részsorozat, amelyre $\bar{b}_{k_j} - b_{k_j} \to \pm\infty$, és az $S_{k_j} - \bar{b}_{k_j}$ sorozat eloszlásai szerint minden kompakt halmaz mértéke tart nullához, vagy pedig létezik két olyan k_j és $\bar{k}_j$ számsorozat, amelyre a $\bar{b}_{k_j} - b_{k_j}$ és $\bar{b}_{\bar{k}_j} - b_{\bar{k}_j}$ sorozatoknak különböző határértéke van, és ekkor az $S_k - \bar{b}_k$ sorozatnak létezik két különböző határértékkel rendelkező részsorozata.

A fenti észrevétel megadja, hogy mekkora szabadságunk van a b_k normáló konstans megválasztásában, amikor a konvergens $S_k - b_k$ sorozatot definiáljuk. Az 1. Tétel kimondásában rögzítettünk egy $a > 0$ konstanst, és a b_k szám függött ettől a konstanstól. Ha a és a' két külöböző pozitív konstans, akkor

$$b_k(a) - b_k(a') = \int \frac{(\tau_a(u) - \tau_{a'}(u))}{u^2} M_k(\,du),$$

és az (1.3) formula alapján $C = \lim\limits_{k\to\infty}(b_k(a) - b_k(a')) = \int \frac{(\tau_a(u) - \tau_{a'}(u))}{u^2} M(\,du)$. Másrészt, ha a $b_k(a)$ illetve $b_k(\bar{a})$ normálást választjuk, akkor az (1.7) formula által meghatározott határeloszlások egymás eltoltjai a fenti C konstanssal. Ugyanis, ha a két határeloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusát tekintjük, akkor ezen logaritmusok különbsége $it \int \frac{(\tau_a(u) - \tau_{a'}(u))}{u^2} M(\,du) = itC$. Másrészt, ha egy ξ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi(t)$, akkor a a $\xi + C$ valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $e^{itC}\varphi(t)$.

Ezenkívül meg fogjuk mutatni, hogy az M_k mértékeknek a tételben definiált M limesze nem függ a definicióban szereplő a paramétertől. A probléma a következő. Az

(1.3) képletben definiáltuk az $M^{\pm}$ függvényeket, és ezáltal az M mértéket a $(0,\infty)$ és $(-\infty,0)$ félegyeneseken. Definiálni kell még az origó $M(\{0\})$ mértékét is. Ezt az (1.6) formula, illetve az $M(\{0\}) = \lim\limits_{s\to 0} M([-s,s])$ reláció segítségével tehetjük meg. Az (1.6) formulában szerepel az a paramétertől függő, és az (1.5) formulában definiált $B_k = B_k(a)$ konstans. Meg kell mutatni, hogy az $M(\{0\})$ szám értéke nem függ az a paraméter választásától, és $M(\{0\}) \ge 0$. Ezenkívül meg akarjuk adni ennek a számnak a valószínűségszámítási tartalmát is. Ezt fogjuk tenni a 2. és 3. megjegyzésben. Előbb azonban az első megjegyzésben megmutatjuk, hogy ha az (1.6) formula érvényes egy olyan $s > 0$ pontban, amely az $M^+(\cdot)$ és $M^-(\cdot)$ függvényeknek folytonossági pontja, akkor ez a reláció érvényes minden ilyen s' pontban.

1. Megjegyzés. Ha az (1.6) formula érvényes az $M^{\pm}(\cdot)$ függvények egy s folytonossági pontjában, akkor az (1.3) relációból következik, hogy az (1.6) formula e függvények minden $s' > 0$ folytonossági pontjában érvényes. Ugyanis

$$\begin{aligned} M_k([-s',s']) - M_k([-s,s]) &= \int_s^{s'} u^2 M_k^+(\,du) + \int_s^{s'} u^2 M_k^-(\,du) \\ &\to \int_s^{s'} M(\,du) + \int_{-s'}^{-s} M(\,du) = M([-s',s']) - M([-s,s]). \end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy a (1.6) feltétel helyettesíthető azzal a gyengített feltétellel, hogy az ott felírt reláció teljesül az $M^{\pm}$ függvények egy folytonossági pontjában.

2. Megjegyzés. Bár a $\tau(\cdot) = \tau_a(\cdot)$ függvény, így a $\beta_k = \beta_k(a)$, a normalizálásban szereplő $b_k = b_k(a)$ és az (1.6) formulában szereplő $B_k = B_k(a)$ konstansok függnek az $a > 0$ paramétertől, be lehet látni, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} (B_k(a') - B_k(a)) = 0$ két különböző $a > 0$ és $a' > 0$ számra. Ez azt jelenti, hogy a (1.6) formula értelmes, annak érvényessége nem függ az $a > 0$ szám választásától. Ezt az állítást a következőképp láthatjuk be. Az egyenletes kicsiség feltétele miatt $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{1\le j\le n_k} |\beta_{k,j}(a') - \beta_{k,j}(a)| = 0$, az (1.3) reláció segítségével pedig látható, hogy $\sup\limits_k \sum\limits_{j=1}^{n_k} |\beta_{k,j}(a') - \beta_{k,j}(a)| < \infty$. Ugyanis minden $a' > a > 0$ párrra

$$\sum_{j=1}^{n_k} |\beta_{k,j}(a') - \beta_{k,j}(a)| \le \int_a^{a'} u(M_k^+(\,du) + M_k^-(du)) + (a'-a)[M_k^+(a') + M_k^-(a')],$$

és a kifejezés jobboldala (1.3) miatt k-tól függetlenül becsülhető.

Az okoz némi nehézséget a 2. Megjegyzés bizonyításában, hogy a $B_k^* = \sum\limits_{j=1}^{n_k} |\beta_{k,j}|$ számsorozat nem feltétlenül korlátos. De ezen a nehézségen segíthetünk, ha megmutatjuk, hogy az egyenletes kicsiség miatt $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{1\le j\le n_k} |\beta_{k,j}(a)| = 0$. Valóban minden $\varepsilon > 0$ számra $|\beta_{k,j}(a)| \le \varepsilon + aP(|\xi_{k,j} > \varepsilon) \le 2\varepsilon$, ha $k \ge k_0(\varepsilon, a)$ és $1 \le j \le n_k$ az

$aP(|\xi_{k,j}|>\varepsilon)\le\varepsilon$, ha $k\ge k_0(\varepsilon,a)$ egyenlőtlenség alapján. Ezért $|B_k(a')-B_k(a)|\le I_k+2II_k$, ahol

$$I_k=\sum_{j=1}^{n_k}|\beta_{k,j}(a')-\beta_{k,j}(a)|^2\le\sup_{1\le j\le n_k}|\beta_{k,j}(a')-\beta_{k,j}(a)|\sum_{j=1}^{n_k}|\beta_{k,j}(a')-\beta_{k,j}(a)|\to 0,$$

ha $k\to\infty$, és

$$II_k=\sum_{j=1}^{n_k}|(\beta_{k,j}(a')-\beta_{k,j}(a))\beta_{k,j}(a)|\le\sup_{1\le j\le n_k}|(\beta_{k,j}(a)|\sum_{j=1}^{n_k}|\beta_{k,j}(a')-(\beta_{k,j}(a)|\to 0$$

ha $k\to\infty$. Innen következik a 2. Megjegyzés állítása.

3. Megjegyzés. Definiáljuk a (1.4) formulához hasonlóan a $\tau'(x)=\tau'_a(x)$ függvényt, mint $\tau'(x)=x$, ha $|x|\le a$, és $\tau'(x)=0$, ha $|x|>a$. Legyen $\beta'_{k,j}=\beta'_{k,j}(a)=E\tau'(\xi_{k,j})$, $B'_k=B'_{k,j}(a)=\sum\limits_{j=1}^{n_k}{\beta'_{k,j}}^2$. Az előző megjegyzés érvelésének természetes módosításával kapjuk, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}(B_k-B'_k)=0$, és ebben a formulában a $B'_k(a)$ helyett tetszőleges $B'_k(a')$-t írhatunk. Ezt felhasználva kapjuk, hogy ha olyan ε számokra koncentráljuk az alábbi limeszelést, amelyek mind az M^+ mind az M^- függvénynek folytonossági pontjai, akkor

$$\begin{aligned}M(\{0\})&=\lim_{\varepsilon\to0}M([-\varepsilon,\varepsilon])=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{k\to\infty}\left(M_k([-\varepsilon,\varepsilon])-B'_k(\varepsilon)\right)\\&=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{k\to\infty}\left(\sum_{j=1}^{n_k}\left(E\tau'_\varepsilon(\xi_{k,j})^2-(E\tau'_\varepsilon(\xi_{k,j}))^2\right)\right)=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\operatorname{Var}\tau'_\varepsilon(\xi_{k,j}).\end{aligned}\tag{1.8}$$

Az (1.8) formula speciálisan azt is jelenti, hogy $M(\{0\})\ge0$. Ennek a relációnak a szemléletes tartalma a következő: A határeloszlás normális komponensének a szórásnégyzete, $M(\{0\})$ megkapható, ha a szériasorozat egyes soraiban levő változók csonkítottjait összegezzzük, ezek limeszét tekintjük $k\to\infty$ határátmenettel, majd a csonkítás ε szintjével tartunk nullához. Azaz, a határeloszlás normális komponense az ,,összeadandók belsejének" a hozadéka. Az előzőekből az is következik, hogy az $M([-s,s])$ mértéket definiáló limesz a (1.6) formulában szükségképpen nem-negatív.

A (1.6) reláció ekvivalens a következő (1.6′) relációval:

$$M(\{0\})=\lim_{\varepsilon\to0}\lim_{k\to\infty}\left(M_k([-\varepsilon,\varepsilon])-B'_k(\varepsilon)\right),\tag{1.6′}$$

ahol a limeszben olyan $\varepsilon>0$ számokat tekintünk, amelyek az M mérték folytonossági pontjai. Láttuk, hogy a (1.6) relációból következik a (1.6′) reláció. Másrészt, ha érvényes a (1.6′) reláció, akkor tetszőleges $\varepsilon>0$ számhoz létezik olyan $\varepsilon'=\varepsilon'(\varepsilon)>0$ szám, amelyre felírva az

$$\begin{aligned}M_k([-s,s])-B_k-M([-s,s])&=M_k([-s,s])-M_k([-\varepsilon',\varepsilon'])\\&-(M([-s,s])-M([-\varepsilon',\varepsilon']))+(B'_k(\varepsilon')-B_k)+(M_k([-\varepsilon',\varepsilon'])\\&-B'_k(\varepsilon')-M(\{0\})-(M([-\varepsilon',\varepsilon'])-M\{0\})\end{aligned}$$

azonosságot, és felhasználva a

$$\lim_{k\to\infty}(M_k([-s,s])-M_k([-\varepsilon',\varepsilon'])-(M([-s,s])-M([-\varepsilon',\varepsilon']))=0$$

és a $\lim\limits_{k\to\infty}(B'_k(\varepsilon')-B_k)=0$ relációkat, amelyek az (1.3) formula következményei, továbbá a

$$\limsup_{k\to\infty}|M_k([-\varepsilon',\varepsilon'])-M_k(\{0\})-B'_k(\varepsilon')|\le\varepsilon$$

összefüggést, ami az $(1.6')$ formulából következik, és az $M([-\varepsilon',\varepsilon'])-M\{0\}|\le\varepsilon$ relációt kapjuk, hogy

$$\limsup_{k\to\infty}|M_k([-s,s])-B_k-M([-s,s])|\le 2\varepsilon.$$

Mivel ez minden $\varepsilon\to 0$-ra igaz, $(1.6')$-ból következik (1.6).

A (1.6) reláció jobban használható a bizonyításban, és talán könnyebben ellenőrízhető. Viszont a $(1.6')$ formula szemléletes tartalma jobban érthető.

4. Megjegyzés. A korlátlanul osztható eloszlások logaritmusának a (1.7) formulában megadott alakja némileg különbözik annak mind az első részben mind pedig a Feller könyvben felírt alakjától. Itt is a Feller könyvben használt kanonikus mértéket használjuk, viszont a választott $it\tau(u)$ „regularizácós” tag különbözik nind a Feller könyvben választott $it\sin u$ mind pedig az első részben használt $itA(u)$ regularizációtól. Viszont, mint azt az első rész tárgyalása is mutatja, ezek a formulák olyan eloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusát adják meg, amelyek egymás eltoltjai. Az itD additív tag azért nem szerepelt ebben a formulában, mert azt alkalmas normálással el lehetett tüntetni. Az $it\tau(u)$ regularizáció előnye az első részben tekintett $itA(u)$ regularizációval szemben az, hogy ez folytonos függvény. Ez bizonyos határámeneteket lehetővé tesz a bizonyításokban.

Az 1. Tétel bizonyításában fontos szerepet játszik az az eredmény, amely pontosan leírja, hogy a Lévy–Hincsin formula segítségével megadott korlátlanul osztható eloszlások sorozata mikor konvergál eloszlásban, és mi a határeloszlás. Ezen eredmény megfogalmazásának érdekében előbb bevezetjük kanonikus mértékek (gyenge) konvergenciájának a fogalmát. Ez a definició eloszlásfüggvények konvergenciájának természetes adaptációja.

Definició. *Legyenek M_n, $n=1,2,\dots$, és M kanonikus mértékek a számegyenesen. Azt mondjuk, hogy az M_n mértékek (gyengén) konvergálnak az M mértékhez, ha*

$$\lim_{n\to\infty}M_n^+(x)=\lim_{n\to\infty}\int_x^\infty\frac{1}{u^2}M_n(\,du)=M^+(x)=\int_x^\infty\frac{1}{u^2}M(\,du),$$

$$\lim_{n\to\infty}M_n^-(x)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{u^2}M_n(\,du)=M^-(x)=\int_{-\infty}^{-x}\frac{1}{u^2}M(\,du),$$

minden olyan $x>0$ számra, ahol az $M^+(x)$ illetve $M^-(x)$ függvény folytonos, és

$$\lim_{n\to\infty}M_n\{[a,b]\}=M\{[a,b]\}$$

minden olyan $-\infty < a < b < \infty$ számra, ahol az M mérték folytonos. (Ez azt jelenti, hogy $M(\{a\}) = M(\{b\}) = 0$.)

5. Megjegyzés. Eloszlásfüggvények konvergenciájához hasonlóan, a kanonikus mértékek gyenge konvergenciája is megfogalmazható folytonos függvények integráljának a segítségével. Be lehet látni, hogy kanonikus mértékek M_n sorozata akkor és csak akkor konvergál (gyengén) egy M kanonikus mértékhez, ha $\int f(u)M_n(du) \to \int f(u)M(du)$ minden olyan folytonos f függvényre, amelyre $\sup\limits_u \frac{|f(u)|}{1+u^2} < \infty$. Mivel erre az állításra nem lesz szükségünk, ennek bizonyítását elhagyjuk.

Az 1. Tételben megadtuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy szériasorozatok soraiban szereplő valószínűségi változók összegeiből alkalmas konstanst kivonva e kifejezések eloszlásban konvergáljanak. A következő eredmény, amelyik hasznos az 1. Tétel bizonyításában is, arra ad szükséges és elégséges feltételt, hogy korlátlanul osztható valószínűségi változók sorozata mikor konvergál eloszlásban.

2. Tétel. *Legyen adva korlátlanul osztható eloszlások egy sorozata, amelyek karakterisztikus függvényének a (létező) logaritmusa*

$$\log \varphi_n(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itu} - 1 - it\tau(u)}{u^2} M_n(\,du) + iB_n t, \quad n = 1, 2, \dots \tag{1.9}$$

alakú, ahol M_n, $n = 1, 2, \dots$, kanonikus mértékek sorozata, és a $\tau(u) = \tau_a(u)$ függvény a (1.4) formulában van definiálva. Ezek az eloszlások akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban, ha létezik olyan M kanonikus mérték, amelyre az M_n mértékek sorozata (gyengén) konvergál az M kanonikus mértékhez, és létezik a $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n$ limesz. A határeloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusa ebben az esetben

$$\log \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itu} - 1 - it\tau(u)}{u^2} M(\,du) + iBt.$$

A 2. Tétel (egyszerűsített) érvelése segítségével belátjuk a következő $2'$. Tételt is.

$2'$. Tétel. *Egy korlátlanul osztható eloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusát megadó*

$$\log \varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{itu} - 1 - it\tau(u)}{u^2} M(\,du) + iBt$$

formulában az eloszlás vagy ami ezzel ekvivalens, a $\log \varphi(t)$ függvény, egyértelműen meghatározza az M kanonikus mértéket és B konstanst.

Megjegyzés. A 2. és $2'$. tétel megfogalmazásában és bizonyításában nem használtuk ki, hogy minden korlátlanul osztható eloszlás (létező) logaritmusa megadható az (1.9) formulában megadott alakban alkalmas M_n kanonikus mértékkel és B_n konstanssal. Ez utóbbi tény csak később bizonyítandó eredményekből következik, amelyek implicit módon felhasználják a 2. és $2'$. tétel eredményeit is.

Végül a következő állítást látjuk be, amely segít a Lévy–Hincsin formula bizonyításában, azaz az összes korlátlanul osztható eloszlás leírásában is.

3. Tétel. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, olyan szériasorozat, amelynek egy sorban levő tagjai nemcsak függetlenek, hanem egyforma eloszlásúak is. (Viszont nem tesszük fel, hogy az összedandók teljesítik az egyenletes kicsiség feltételét.) Tegyük fel továbbá, hogy $n_k \to \infty$, ha $k \to \infty$, és az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ összegek eloszlásban konvergálnak. Ekkor a szériasorozat teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét.*

E jegyzet fő eredménye arra ad szükséges és elégséges feltételt, hogy az egyenletes kicsiséget teljesítő szériasorozatokban az egy sorban álló valószínűségi változók összegeiből alkalmas konstansokat kivonva az így kapott valószínűségi változóknak legyen határeloszlásuk. Egy későbbi, a 2. Lemmában megfogalmazandó eredmény lehetővé teszi a probléma redukálását arra az esetre, amikor az 1. Tételben bevezetett $\tau(\cdot)$ függvényre $E\tau(\xi_{k,j}) = 0$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$. Ebben az esetben az (1.5) formulában bevezetett mennyiségek teljesítik a $b_k = 0$, $B_k = 0$ azonosságokat, és az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ összegeknek akkor és csak akkor van határeloszlásuk, ha a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók $F_{k,j}$ eloszlásfüggvényeiből készített $x^2 F_{k,j}(\,dx)$ mértékek rögzített k indexre vett összegei, az $M_k(\,dx)$ kanonikus mértékek (gyengén) konvergálnak egy M kanonikus mértékhez. Továbbá a határeloszlás karakterisztikus függvényét megadja az (1.7) formula. Ennek a karakterisztikus függvénynek az alakjából, illetve az ilyen karakterisztikus függvényeknek az első részben is elmagyarázott valószínűségi tartalmából látható, hogy a határeloszlás megadható, mint egy olyan valószínűségi változó eloszlása, amely az $x^{-2}M(dx)$ számláló mérték által definiált Poisson folyamat pontjainak alkalmasan normált összege plusz egy a Poisson folyamattól független nulla várható értékű és $M(\{0\})$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó.

Tekinthetjük továbbá az $x^{-2}M_k(dx)$ mértékek által meghatározott Poisson mezőket, illetve e mezők kijelölt pontjainak alkalmasan normált összegét. Az előbb megfogalmazott eredmények azt mutatják, hogy az eredeti összegeknek és a Poisson mezőkben kijelölt pontok összegeinek egyszerre van határeloszlásuk, és ezek megegyeznek.

Ezeknek az eredményeknek szemléletes tartalmát és a mögöttük álló képet a harmadik részben fogjuk elmagyarázni. Itt arról is szó lesz, hogy bár mint a tárgyalt eredmények mutatják, vannak határeloszlástételek nem normális eloszlású limesszel is, az egyetlen univerzális jellegű határeloszlástétel független valószínűségi változók összegeire a centrális határeloszlástétel. Továbbá belátjuk, hogy néhány további természetes feltevés esetén az 1. Tétel feltételeit teljesítő szériasorozatokra egy úgynevezett funkcionális határeloszlástétel is érvényes.

2. Az eredmények néhány érdekes következménye.

A fentebb megfogalmazott eredmények segítségével be lehet bizonyítani a valószínűségszámítás klasszikus határeloszlástételeit, illetve azok jól alkalmazhatóak olyan vizsgálatokban, amelyek szorosan kapcsolódnak független valószínűségi változók részletösszegeinek határeloszlásaihoz. Ebben a fejezetben ilyen eredményeket ismertetünk. Először megadjuk a korlátlanul osztható valószínűségi változók jellemzését:

A.) Lévy–Hincsin formula.

Lévy–Hincsin formula: *Egy eloszlás akkor és csak akkor korlátlanul osztható, ha a karakterisztikus függvényének létezik logaritmusa, és az megadható*

$$\log\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}M(\,du)+iBt \tag{2.1}$$

alakban, ahol M kanonikus mérték a számegyenesen, B valós szám, a $\tau(\cdot)$ függvényt pedig az (1.4) formulában definiáltuk (valamilyen rögzített $a>0$ számmal). Egy korlátlanul osztható eloszlás karakterisztikus függvényét megadó (2.1) formulában az M kanonikus mérték és B konstans egyértelműen meghatározott, (ha az $a>0$ számot, tehát a $\tau(\cdot)=\tau_a(\cdot)$ függvényt rögzítjük).

Emlékeztetőül jegyezzük meg, hogy egy eloszlás karakterisztikus függvényének akkor és csak akkor van logaritmusa, ha az sehol sem tűnik el. Ebben az esetben a logaritmus függvénynek azt az ágát tekintjük, amelyik az origóban nullával egyenlő, és folytonos függvény.

A Lévy–Hincsin formula bizonyítása: Az első részben beláttuk, hogy a (2.1) formula valóban egy karakterisztikus függvény logaritmusa. Az, hogy a (2.1) formula egy korlátlanul osztható eloszlásfüggvény karakterisztikus függvényének a logaritmusát definiálja könnyen látható. Valóban, ha ξ karakterisztikus függvényének $\log\varphi(t)$ logaritmusát a (2.1) formula határozza meg, akkor ennek eloszlása tetszőleges k egész számra megegyezik k olyan független valószínűségi változó összegével, amelyek karakterisztikus függvényeinek a logaritmusa $\frac{\log\varphi(t)}{k}$, azaz az $M(\cdot)$ mértéket az $\frac{M(\cdot)}{k}$ mértékkel, a B számot pedig a $\frac{B}{k}$ konstanssal helyettesítjük a (2.1) formulában.

Megfordítva, ha ξ korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változó, azaz tetszőleges k pozitív egész számra létezik független egyforma eloszlású valószínűségi változók $\xi_{k,1},\dots,\xi_{k,k}$ sorozata, amelyre a $S_k=\xi_{k,1}+\cdots+\xi_{k,k}$ összeg eloszlása megegyezik ξ eloszlásával, akkor a 3. Tétel alapján a $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le k$, szériasorozat teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét, és mivel az S_k összegeknek van határeloszlása, ezért alkalmazható az 1. Tétel ebben az esetben. Ezért létezik olyan b_k számsorozat, amelyre az S_k-b_k sorozatnak létezik határeloszlása, és a határeloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusa megadható az (1.7) formula segítségével alkalmas M kanonikus mértékkel. (Azért jelent meg ebben az érvelésben a b_k konstans, mert csak ennek segítségével tudjuk biztosítani, hogy a limesz az (1.7) formulával megadható. Az (1.7) formulában nem jelenik meg a (2.1) formulában szereplő iBt tag.) Mivel az S_k sorozat eloszlásban konvergál a ξ valószínűségi változó eloszlásához, az $S_k - b_k$ sorozat csak úgy konvergálhat eloszlásban, ha létezik a $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = B$ határérték. Ez viszont azt jelenti, hogy az (1.7) formula a $\xi - B$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényének logaritmusát adja meg. Innen következik a (2.1) formula. E reprezentáció egyértelműsége a $2'$. Tétel következménye.

B.) Centrális határeloszlástétel.

Megmutatjuk, hogy az első fejezet eredményeiből következnek a legfontosabb centrális határeloszlástételről szóló eredmények. A centrális határeloszlástétel talán legáltalánosabb alakja a következőt állítja: Legyen $\xi_{k,j}$, $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 = \sigma_{k,j}^2$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 = 1$, és teljesül a következő úgynevezett Lindeberg feltétel: Minden $\varepsilon > 0$ számra $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(|\xi_{k,j}| > \varepsilon) = 0$, ahol $I(A)$ jelöli az A halmaz indikátorfüggvényét. Ekkor az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ összegek eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz, ha $k \to \infty$.

Ismeretes továbbá ennek az eredménynek a következő Fellertől származó megfordítása: Legyen $\xi_{k,j}$, $E\xi_{k,j} = 0$, $E\xi_{k,j}^2 = \sigma_{k,j}^2$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, olyan szériasorozat, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 = 1$. Teljesüljön ezenkívül a következő az egyenletes kicsiség feltételénél kissé erősebb követelmény: $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{1\le j\le n_k} \sigma_{k,j}^2 = 0$. Ha az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}$ sorozat eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz, akkor ez a sorozat teljesíti a Lindeberg feltételt. Sőt, ez az állítás akkor is igaz, ha az S_k sorozat konvergenciája helyett csak azt tesszük fel, hogy az $S_k - b_k$ sorozat eloszlásban konvergál a standard normális eloszláshoz alkalmas b_k számsorozattal.

Levezetjük a most most megfogalmazott eredményeket az első fejezet eredményei segítségével. Sőt, kissé élesebb állítást fogunk bizonyítani. Belátjuk, hogy a Lindeberg feltétel érvényességéhez a centrális határeloszlás teljesülése esetén a $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{1\le j\le n_k} \sigma_{k,j}^2 = 0$ feltétel helyett elég feltenni azt, hogy szériasorozat egyenletesen kicsi.

Először azt látjuk be, hogy a Lindeberg feltétel következik az adott feltételekből. Az egyenletes kicsiség feltétele miatt alkalmazhatjuk az 1. Tételt. Ebből az eredményből, és a határmértéknek jellemzésének a $2'$. Tételben megfogalmazott egyértelműségéből következik, hogy a centrális határeloszlástétel teljesülése esetén a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változóknak $F_{k,j}$ eloszlásfüggvényeiből az (1.2) formula segítségével definiált M_k kanonikus mértékek teljesítik az (1.3) és (1.6) formulát az (1.5) formulában definiált B_k konstansokkal és M kanonikus mértékkel, amelyre $M(\{0\}) = 1$, $M(\mathbf{R}^1 \setminus \{0\}) = 0$. Mivel $B_k \ge 0$ ezért az (1.6) formula alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra $\lim\limits_{k\to 0} M_k([-\varepsilon, \varepsilon]) - B_k = 1$ valamilyen $B_k \ge 0$ számmal. Tehát minden $\varepsilon > 0$ számra $\lim\limits_{j\to\infty} \sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(|\xi_{k,j}| \le \varepsilon) \ge$

1. Másrészt, mivel $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 = 1$, ezért $\lim\limits_{j\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(|\xi_{k,j}|>\varepsilon) = 0$, és ez a Lindeberg feltétel.

Megfordítva, megmutatjuk, hogy ha teljesül a Lindeberg feltétel, akkor érvényes a centrális határeloszlástétel. Ekkor $\sup\limits_{1\le j\le n_k} P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(|\xi_{k,j}|>\varepsilon)\to 0$, ha $k\to\infty$. Ezért teljesül az egyenletes kicsiség feltétele, és alkalmazhatjuk az 1. Tételt. Azt kell belátni, hogy a $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, $F_{k,j}$ eloszlású valószínűségi változókból elkészített M_k mértékek teljesítik az (1.3) és (1.6) feltételeket az $M\{0\})=1$, $M(\mathbf{R}^1\setminus\{0\})=0$ képletekkel definiált M mértékkel, és $\lim\limits_{k\to\infty} b_k=0$. A Lindeberg feltételből következik az (1.3) formula a fenti M mértékkel, mert minden $a>0$ számra $M_k^+(a) = \sum\limits_{j=1}^{n_k}(1-F_{k,j}(a)) \le \frac{1}{a^2}\sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(|\xi_{k,j}|>a)\to 0$, ha $k\to\infty$, és hasonlóan $\lim\limits_{k\to\infty} M_k^-(a)=0$. A Lindeberg feltételből és a $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2=1$ feltételből következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} M_k([-s,s])=1$ minden $s>0$ számra. Ezért az (1.6) formula bizonyításához elég belátni, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} B_k=0$. Ez a reláció azért igaz, mert az $E\xi_{k,j}=0$ feltétel alapján

$$B_k=\sum_{j=1}^{n_k}\left(E(\tau(\xi_{k,j})-\xi_{k,j})\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n_k}\left(E|\xi_{k,j}|I(|\xi_{k,j}|>a)\right)^2 \le \sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 P^2(|\xi_{k,j}|>a),$$

ahonnan $\lim\limits_{k\to\infty} B_k=0$, mert $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2=1$, és $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k} P(|\xi_{k,j}>a)=0$. Hasonlóan,

$$|b_k| = \left|\sum_{j=1}^{n_k} E\left(\tau(\xi_{k,j})-\xi_{k,j}\right)\right| \le \sum_{j=1}^{n_k} E|\xi_{k,j}|I(|\xi_{k,j}|>a) \le \frac{1}{a}\sum_{j=1}^{n_k} E\xi_{k,j}^2 I(|\xi_{k,j}|>a),$$

ezért $\lim\limits_{k\to\infty} b_k=0$ a Lindeberg feltétel alapján. Ez viszont azt jelenti, hogy az 1. Tétel alapján a $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ részletösszegek eloszlásban konvergálnak egy olyan eloszláshoz, amely eloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusa $\log\varphi(t)=-\frac{t^2}{2}$. Tehát igaz a centrális határeloszlástétel az adott feltételek mellett.

C.) A nagy számok gyenge törvénye.

Legyen $\xi_1,\xi_2,\dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, és $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\xi_k$, $n=1,2,\dots$, az ezekből a változókból alkotott részletösszegek. A valószínűségszámítás egyik klasszikus eredménye arról szól, hogy ezek az összegek mikor teljesítik a nagy számok gyenge törvényét, azaz ez az eredmény az $F(x)$ eloszlásfüggvény tulajdonságai segítségével szükséges és elégséges feltételt ad arra, hogy teljesüljön a $\frac{S_n}{n}\Rightarrow a$

reláció valamilyen korlátos a számmal, ha $n \to \infty$, ahol $\Rightarrow$ a sztochasztikus konvergenciát jelöli. Ez az eredmény a következő:

Nagy számok gyenge törvénye. *Legyen $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma, $F(x)$ eloszlású valószínűségi változók sorozata. Az $\frac{S_n}{n} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ átlagok akkor és csak akkor konvergálnak sztochasztikusan egy a számhoz, ha teljesül a következő két feltétel.*

i.) $\lim\limits_{x\to\infty} x[1-F(x)] = 0$, *és* $\lim\limits_{x\to\infty} xF(-x) = 0$

ii.) $\lim\limits_{x\to\infty} \int_{-x}^{x} uF(\,du) = a.$

A nagy számok gyenge törvényének a bizonyítása. Tekintsük a $\xi_{k,j} = \frac{\xi_j}{k}$, $k = 1, 2, \dots,$ $j = 1, \dots, k$, valószínűségi változókból álló szériasorozatot. Ez teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét. A nagy számok gyenge törvénye azt jelenti, hogy e szériasorozat összegeiből alkotott összegek eloszlásban konvergálnak az a pontba koncentrált valószínűségi mértékhez. Ez pedig az 1. Tétel alapján azzal ekvivalens, hogy az $M_k(\,dx) = kx^2F(k\,dx)$, mértékek $M_k^+(x) = k(1-F(kx))$ és $M_k^-(x) = kF(-kx)$ függvények valamint a

$$\begin{aligned} b_k &= k\left(\int_{-a}^{a} uF(k\,du) + a(1-F(ak)-F(-ak))\right) \\ &= \int_{-ka}^{ka} uF(\,du) + ak\,(1-F(ak)-F(-ak))\,, \end{aligned}$$

és $B_k = \frac{b_k^2}{k}$ számok teljesítik az (1.3) és (1.6) relációt az $M \equiv 0$ kanonikus mértékkel, és $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = a$.

Némi számolás mutatja, hogy az (1.3) reláció ekvivalens az i.) feltétellel. Ha az i.) feltétel teljesül, akkor a ii.) feltétel ekvivalens a $\lim\limits_{k\to\infty} b_k = a$ feltétellel. Végül az i.) és ii.) feltétel teljesülése esetén az (1.6) formula is érvényes, mert ekkor $\lim\limits_{k\to\infty} B_k = 0$, és $\lim\limits_{k\to\infty} M_k([-s,s]) = 0$. Ugyanis parciális integrálással kapjuk, hogy $M_k([-s,s]) = \int_{-ks}^{ks} \frac{u^2}{k} F(\,du) = s^2k\,[(1-F(ks)+F(-ks)] - \int_0^{ks} \frac{1-F(u)+F(-u)]}{k}\,du$, ahonnan kötetkezik, hogy $M_k([-s,s]) \le s^2k\,[(1-F(ks)+F(-ks)] \to 0$, ha $k \to \infty$.

D.) Poisson eloszláshoz való határeloszlástétel.

Az első részben megfogalmaztunk, és annak kiegészítésében be is bizonyítottunk egy határeloszlástételt, amelyben a határeloszlás Poisson eloszlású volt. Most megmutatjuk, hogy ez az eredmény az 1. Tétel egyszerű következményeként is megkapható. Az eredmény a következő:

Poisson eloszláshoz való határeloszlástétel. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots,$ $1 \le j \le n_k$ szériasorozat, (azaz rögzített k számra a $\xi_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$ valószínűségi változók függetlenek), amely teljesíti a következő feltételeket:*

1.) A $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók nem negatív egész értékeket vesznek fel.

2.) $P(\xi_{k,j}=1)=\lambda_{k,j}$, $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\lambda_{k,j}=\lambda>0$.

3.) $\sup\limits_{1\le j\le n_k}\lambda_{k,j}\to 0$, *ha* $k\to\infty$, *és* $\sum\limits_{j=1}^{n_k}P\left(\xi_{k,j}\ge 2\right)\to 0$, *ha* $k\to\infty$.

Ekkor az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ *valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak a* λ *paraméterű Poisson eloszláshoz, ha* $k\to\infty$.

A Poisson eloszláshoz való határeloszlástétel bizonyítása. A $\xi_{k,j}$ szériasorozat teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét, ezért az 1. tétel alkalmazható, például $a=\frac{1}{2}$ választással. Ekkor az 1. tételben szereplő M kanonikus határmérték az a mérték, amelyre $M(\{1\})=\lambda$, $M(\mathbf{R}^1\setminus\{1\})=0$, $b_k=0$. Ezért az S_k összegek olyan határeloszláshoz tartanak, amelyik karakterisztikus függvényének a logaritmusa $\log\varphi(t)=\lambda\left(e^{it}-1\right)$, azaz a határeloszlás a λ paraméterű Poisson eloszlás.

3. A megfogalmazott eredmények bizonyítása.

A megfogalmazott eredmények bizonyítása érdekében először két technikai lemmát tárgyalunk. Az első lemmában megfogalmazzuk az egyenletes kicsiség feltételét a karakterisztikus függvények nyelvén. A második lemma lehetővé teszi a határeloszlástételek bizonyításának a redukálását arra a speciális esetre, amikor $E\tau(\xi_{k,j})=0$ minden elég nagy k indexre és $1\le j\le n_k$ számra. Ezután térünk rá a tételek bizonyítására.

A.) Két a vizsgálatben hasznos lemma bizonyítása.

1. Lemma. *Legyen* $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, *szériasorozat,* $F_{k,j}$ *eloszlás és* $\varphi_{k,j}(t)=Ee^{it\xi_{k,j}}$, *karakterisztikus függvénnyel,* $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$. *Ez a szériasorozat akkor és csak akkor teljesíti az egyenletes kicsiség feltételét, ha tetszőleges* $\varepsilon>0$ *és* $K>0$ *számra*

$$\sup_{1\le j\le n_k}\sup_{|t|<K}|1-\varphi_{k,j}(t)|<\varepsilon,\quad \text{ha } k\ge k_0(\varepsilon,K).$$

Az 1. Lemma bizonyítása. a.) Tegyük fel, hogy teljesül az egyenletes kicsiség feltétele. Ekkor $\varepsilon'=\frac{\varepsilon}{K}$ választással $|t|\le K$ esetén

$$\begin{aligned}|1-\varphi_{k,j}(t)|&\le\int|1-e^{itx}|F_{k,j}(\,dx)=\int_{|x|\le\varepsilon'}+\int_{|x|>\varepsilon'}\\&\le\int_{-\varepsilon'}^{\varepsilon'}|tx|F_{k,j}(\,dx)+2P(|\xi_{k,j}|>\varepsilon')\le K\varepsilon'+2P(|\xi_{k,j}|>\varepsilon')\le\varepsilon,\end{aligned}$$

ha $k\ge k_0(\varepsilon,K)$.

b.) Ha a karakterisztikus függvényre megfogalmazott feltétel teljesül, akkor tetszőleges $\varepsilon' > 0$ és $K > 0$ számra $k \ge k_0(\varepsilon', K)$ és $1 \le j \le n_k$ index esetén

$$\begin{aligned}\varepsilon' &\ge \frac{1}{2K}\int_{-K}^{K} \mathrm{Re}\,[1-\varphi_{k,j}(t)]\,dt = \frac{1}{2K}\int_{-K}^{K}\int_{-\infty}^{\infty}(1-\cos tx)F_{k,j}(\,dx)\,dt \\ &= \frac{1}{2K}\int_{-\infty}^{\infty} 2K\left[1-\frac{\sin Kx}{Kx}\right]F_{k,j}(\,dx) \ge \int_{\{|x|>\frac{2}{K}\}} \ge \frac{1}{2}P\left(|\xi_{k,j}|>\frac{2}{K}\right).\end{aligned}$$

Innen $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{2}$ és $K = \frac{2}{\varepsilon}$ választással következik az egyenletes kicsiség állítása.

2. Lemma. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, az egyenletes kicsiséget teljesítő szériasorozat, és $a>0$ rögzített szám. Ekkor létezik olyan $\vartheta_{k,j}=\vartheta_{k,j}(a)$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, számsorozat, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}|\vartheta_{k,j}|=0$, és a $\xi'_{k,j}=\xi_{k,j}-\vartheta_{k,j}$ szériasorozat teljesíti az $E\tau(\xi'_{k,j})=E\tau_a(\xi'_{k,j})=0$ feltételt minden $k\ge k_0=k_0(a)$, $1\le j\le n_k$ indexekre alkalmas $k_0(a)$ küszöbindex-szel és az (1.4) formulában definiált $\tau(\cdot)=\tau_a(\cdot)$ függvénnyel. Legyen $F'_{k,j}(x)=F_{k,j}(x+\vartheta_{k,j})$ a $\xi'_{k,j}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, és definiáljuk az M'_k mértékeket és az ${M'}_k^{\pm}(x)$ függvényeket az M_k mértékekhez és az $M_k^{\pm}$ függvényekhez hasonlóan az (1.1) és (1.2) képletek segítségével, azzal a különbséggel, hogy az $F_{k,j}$ eloszlásfüggvényeket az $F'_{k,j}$ eloszlásfüggvényekkel helyettesítjük e formulákban.*

Az M_k mértékek és $M_k^{\pm}$ függvények akkor és csak akkor teljesítik az (1.3) illetve (1.6) tulajdonságokat, ha az M'_k mértékek és ${M'}_k^{\pm}$ függvények teljesítik azokat (ugyanazzal az M kanonikus mértékkel, de azzal a különbséggel, hogy az (1.6) formulában $B_k=0$-t kell írni, ha az M_k mértéket az M'_k mértékkel helyettesítjük). Ha e relációk teljesülnek, akkor a $b_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\beta_{k,j}$ és $b'_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\vartheta_{k,j}$ számok teljesítik a $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-b'_k)=0$ relációt.

A 2. Lemma utolsó állítása szerint $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k-b'_k)=0$. Innen következik, hogy a 2. Lemmában definiált $S'_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi'_{k,j}$ összegek és az 1. Tételben vizsgált S_k-b_k, $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$, normalizált összegek egyszerre konvergálnak eloszlásban, és ezen összegek határeloszlásai megegyeznek. Jegyezzük meg továbbá, hogy az S'_k összegek határeloszlásának létezésére az 1. Tételben megfogalmazott (1.3) és (1.6) feltétel úgy is megfogalmazható, hogy az M'_k kanonikus mértékek gyengén konvergálnak az M kanonikus mértékhez. Továbbá a $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}|\vartheta_{k,j}|=0$ reláció miatt a $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, szériasorozatra érvényes egyenletes kicsiségi feltételből következik ugyanez a feltétetel a $\xi'_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, szériasorozatra is.

A 2. Lemma bizonyítása: Mivel az $f_{k,j}(\vartheta)=E\tau(\xi_{k,j}-\vartheta)$ függvény folytonos, és az egyenletes kicsiség miatt minden kis $\varepsilon>0$-ra $f_{k,j}(\varepsilon)<0$ és $f_{k,j}(-\varepsilon)>0$, ha $k>k(\varepsilon)$. (Feltehetjük, hogy $a>2\varepsilon$. A $\tau(\xi_{k,j}-\varepsilon)$ valószínűségi változó majdnem egy valószínűséggel kisebb mint $-\varepsilon/2$, és egy valószínűséggel kisebb mint a. Innen következik, hogy $E\tau(\xi_{k,j}-\varepsilon)<0$, ha $k\ge k_0(\varepsilon)$, és hasonlóan bizonyítható a $E\tau(\xi_{k,j}+\varepsilon)>0$ egyenlőtlenség. Ezekből az egyenlőtlenségekből következik, hogy léteznek olyan $\vartheta_{k,j}$ számok, amelyekre $E\tau(\xi_{k,j}-\vartheta_{k,j})=0$, ha $k\ge k_0$, és $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}|\vartheta_{k,j}|=0$.

Mivel $|\vartheta_{k,j}|<\varepsilon$ elég nagy k-ra minden $1\le j\le n_k$ számra, $M_k^+(x-\varepsilon)<{M'}_k^+(x)<M_k^+(x+\varepsilon)$, és $M_k^-(x-\varepsilon)<{M'}_k^-(x)<M_k^-(x+\varepsilon)$, ha $k>k_0(\varepsilon)$. Innen következik az is, hogy az $M^\pm$ függvény minden x folytonossági pontjában $M_k^\pm(x)$ és ${M'}_k^\pm(x)$ számok egyszerre konvergálnak vagy nem konvergálnak az $M^\pm(x)$ értékhez. Ezért az $M^\pm$ függvények akkor és csak akkor teljesítik az (1.3) relációt, ha az ${M'}^\pm$ függvények teljesítik azt.

A $\tau(\xi'_{k,j})+\vartheta_{k,j}-\tau(\xi_{k,j})=\xi'_{k,j}+\vartheta_{k,j}-\xi_{k,j}=0$ reláció igaz az $\{\omega\colon\ |\xi_{k,j}(\omega)|\le a-\varepsilon\}$ halmazon, ha $k\ge k_0(\varepsilon)$. Továbbá, mivel $\tau(\cdot)$ Lipschitz 1 függvény a $|\tau(\xi'_{k,j})+\vartheta_{k,j}-\tau(\xi_{k,j})|\le 2\vartheta_{k,j}$ egyenlőtlenség mindig teljesül. Ezért várható értéket képezve, és a j változóban összegezve kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n_k}|\vartheta_{k,j}-\beta_{k,j}|&=\sum_{j=1}^{n_k}|E\tau(\xi'_{k,j})+\vartheta_{k,j}-E\tau(\xi_{k,j})|\\
&=\sum_{j=1}^{n_k}|E\left(\tau(\xi'_{k,j})+\vartheta_{k,j}-\tau(\xi_{k,j})\right)I(|\xi_{k,j}|>a-\varepsilon)|\\
&\le 2\sup_{1\le j\le n_k}|\vartheta_{k,j}|(M_k^+(a-\varepsilon)+M_k^-(a-\varepsilon)),
\end{aligned}
$$

ha $k\ge k_0(\varepsilon)$. Innen $k\to\infty$ határátmenettel kapjuk, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}|\vartheta_{k,j}-\beta_{k,j}|=0$, és ez erősebb állítás mint a lemmában megfogalmazott $b_k-b'_k\to0$ reláció, ha $k\to\infty$.

A lemma bizonyításának befejezéséhez elég megmutatni azt, hogy egy olyan $s>0$ számra, amely az $M^\pm(\cdot)$ függvényeknek folytonossági pontja

$$\lim_{k\to\infty}(M_k([-s,s])-M'_k([-s,s])-B_k)=0$$

Ez ugyanis azt jelenti, hogy a (1.6) reláció egyszerre teljesül az s pontban az M_k és M'_k mértékekre. (Az M'_k mértékből $B'_k=0$-t kell levonni. Ugyanis $B_k=0$, mert $\beta'_{k,j}=E\tau(\xi'_{k,j})=0$ minden $k\ge k_0$ és $1\le j\le n_k$ számra.)

E reláció bizonyításának az érdekében először megmutatjuk, hogy amennyiben $s>0$ az $M^\pm(\cdot)$ függvények folytonossági pontja, akkor

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\left(P(|\xi_{k,j}|>s)-P(|\xi'_{k,j}|>s)\right)=0,\tag{3.1}$$

és

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}(E\tau(\xi_{k,j})^2-E\tau(\xi'_{k,j})^2)-B_k=0.\tag{3.2}$$

Mivel az s pont az $M^{\pm}$ függvények folytonossági pontja, ezért az (1.3) formulát alkalmazva az $M_k^{\pm}$ és $M'^{\pm}_k$, függvényekre, kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}(P(|\xi_{k,j}|>s)-P(|\xi'_{k,j}|>s))$$
$$=\lim_{k\to\infty}\Big((M_k^+(s)-M'^+_k(s))+(M_k^-(s)-M'^-_k(s))\Big)=0,$$

ezért a (3.1) formula érvényes. Másrészt, minden elég nagy k indexre és $1\le j\le n_k$ számokra $\tau(\xi_{k,j})^2-\tau(\xi'_{k,j})^2+\vartheta_{k,j}^2-2\vartheta_{k,j}\tau(\xi_{k,j})=\xi_{k,j}^2-(\xi'_{k,j})^2+\vartheta_{k,j}^2-2\vartheta_{k,j}\xi_{k,j}=0$ az $\{\omega\colon\, |\xi_{k,j}(\omega)|<a-\varepsilon\}$ halmazon, és ez a kifejezés mindig kisebb mint const. $|\vartheta_{k,j}|$. Ezért véve e kifejezések abszolút értékének a várható értékét, és összegeze a j változóban kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{j=1}^{n_k}E\left(\tau(\xi_{k,j})^2-E\tau(\xi'_{k,j})^2+\vartheta_{k,j}^2-2\vartheta_{k,j}\beta_{k,j}\right)\right|$$
$$\le \text{const. }\left(2M_k^+(a-\varepsilon)+2M_k^-(a-\varepsilon)\right)\sup_{1\le j\le n_k}|\vartheta_{k,j}|,$$

és ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\left|\sum_{j=1}^{n_k}E\left(\tau(\xi_{k,j})^2-E\tau(\xi'_{k,j})^2)\right)-B_k\right|=\left|\sum_{j=1}^{n_k}E\left(\tau(\xi_{k,j})^2-E\tau(\xi'_{k,j})^2-\beta_{k,j}^2\right)\right|$$
$$\le \text{const. }\left(2M_k^+(a-\varepsilon)+2M_k^-(a-\varepsilon)\right)\sup_{1\le j\le n_k}|\vartheta_{k,j}|+\sum_{j=1}^{n_k}(\vartheta_{k,j}-\beta_{k,j})^2.$$

Mivel az $M_k^{\pm}(a-\varepsilon)$ sorozatok, $k=1,2,\dots,$ korlátosak, és mint korábban láttuk $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}|\vartheta_{k,j}-\beta_{k,j})|=0$, az utolsó kifejezés jobboldala nullához tart $k\to\infty$ esetén, ezért a (3.2) reláció is érvényes.

Jelölje $\tau_s(\cdot)$ a (1.4) formulában definiált $\tau=\tau_a$ függvényt, ha a benne szereplő a paramétert s-sel helyettesítjük, és írjuk fel az

$$M_k([-s,s])-M'_k([-s,s])-B_k=\sum_{j=1}^{n_k}\left(E\tau_s(\xi_{k,j})^2-E\tau_s(\xi'_{k,j})^2\right)-B_k$$
$$-s^2\sum_{j=1}^{n_k}(P(|\xi_{k,j}|>s)-P(|\xi'_{k,j}|>s))$$
$$=\sum_{j=1}^{n_k}\left(E\tau_s(\xi_{k,j})^2-E\tau(\xi_{k,j})^2\right)-\sum_{j=1}^{n_k}\left(E\tau_s(\xi'_{k,j})^2-E\tau(\xi'_{k,j})^2\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{n_k}E\left(\tau(\xi_{k,j})^2-E\tau(\xi'_{k,j})^2\right)-B_k-s^2\sum_{j=1}^{n_k}(P(|\xi_{k,j}|>s)-P(|\xi'_{k,j}|>s))$$

azonosságot. A 2. Lemma bizonyításának befejezéséhez azt kell még belátnunk, hogy az ennek az azonosságnak jobboldalán levő kifejezés nullához tart, ha $k \to \infty$. A jobboldal második sorában álló kifejezések konvergenciája nullához következik a (3.1) és (3.2) formulákból. Ezért a kívánt állítás következik a következő becslésekből.

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n_k} \left(E\tau_s(\xi_{k,j})^2 - E\tau(\xi_{k,j})^2\right)\right) &= \int \frac{\tau_s(u)^2 - \tau(u)^2}{u^2} M_k(du) \\ &= \int_{\min(a,s)}^{\infty} \left(\tau_s(u)^2 - \tau(u)^2\right) (M_k^+(\,du) + M_k^-(\,du)) \\ &\to \int_{\min(a,s)}^{\infty} \left(\tau_s(u)^2 - \tau(u)^2\right) (M^+(\,du) + M^-(\,du)).\end{aligned}$$

A $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \left(E\tau_s(\xi'_{k,j})^2 - E\tau(\xi'_{k,j})^2)\right)$ kifejezésnek ugyanaz a határértéke. Innen következik, hogy $M_k([-s,s]) - M'_k([-s,s]) - B_k \to 0$, ha $\to \infty$. A 2. Lemmát bebizonyítottuk.

Az első tétel elégséges részét, azaz a határeloszlás létezését az adott feltételek mellett közvetlenül is be tudjuk látni, de a szükségesség bizonyításához szükségünk van a 2. Tétel eredményére. Ennek bizonyításához belátunk egy 3. Lemmának nevezett állítást is. Ez lesz a következő rész programja.

B.) Az 1. Tétel elégéges részének valamint a 2. Tételnek a bizonyítása.

Az 1. Tételben először az elégségességet bizonyítjuk be, azaz azt az állítást, hogy ha az (1.3) és (1.6) feltételek teljesülnek, akkor a normalizált $S_k - b_k$ összegek eloszlásban konvergálnak egy olyan eloszláshoz, amely eloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusát az (1.7) képlet adja meg az M határmértékkel.

Az 1. Tétel elégséges részének a bizonyítása. Az állítás ekvivalens azzal, hogy az $S_k - b_k$ valószínűségi változók karakterisztikus függvényeinek logaritmusa minden $t \in \mathbf{R}^1$ teljesíti a

$$\log E e^{it(S_k - b_k)} = \sum_{j=1}^{n_k} \log \varphi_{k,j}(t) - it\beta_{k,j} \to \log \varphi(t), \quad \text{ha } k \to \infty$$

relációt, ahol $\log \varphi(t)$ a (1.7) formulában definiált függvény. Jegyezzük meg, hogy az egyenletes kicsiség feltétele miatt tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra $|1 - \varphi_{k,j}(t)| \le \varepsilon$, ha $k \ge k_0(\varepsilon, t)$, ezért lehet a $\varphi_{k,j}$ függvények logaritmusát tekinteni.

Először csak azt a speciális esetet tekintjük, amikor $\beta_{k,j} = E\tau(\xi_{k,j}) = 0$ minden $k = 1, 2, \dots,$ és $1 \le j \le n_k$ számra. Belátjuk, hogy ebben az esetben

$$\limsup_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} |1 - \varphi_{k,j}(t)| < \infty$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} (1 - \varphi_{k,j}(t)) = -\log \varphi(t),$$

E két relációból következik a kívánt állítás ebben az esetben, mert $\log z + (1-z)| < 2|z|^2 < 2\varepsilon|z|$, ha $|1-z| < \varepsilon$ és $\frac{1}{2} > \varepsilon > 0$, ezért az első reláció és az egyenletes kicsiség miatt

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} |\log \varphi_{k,j}(t) + (1-\varphi_{k,j}(t))| = 0.$$

Felhasználva a $E\tau(\xi_{k,j}) = 0$ relációt kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n_k} |1-\varphi_{k,j}(t)| &= \sum_{j=1}^{n_k} |1-\varphi_{k,j}(t) + itE\tau(\xi_{k,j})| \le \sum_{j=1}^{n_k} \int |1-e^{itx} + it\tau(x)| F_{k,j}(dx) \\
&\le \sum_{j=1}^{n_k} \left(\int_{-a}^{a} \frac{1}{2} t^2 x^2 F_{k,j}(dx) + \int_{\{|x|>a\}} (2+a|t|) F_{k,j}(\,dx) \right) \\
&= \frac{1}{2} t^2 M_k\{[-a,a]\} + (2+a|t|)(M_k^+(a) + M_k^-(a)) < \text{const.},
\end{aligned}$$

és ez az első bizonyítandó állítás. A másik állítás hasonlóan bizonyítható, mert

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n_k} (1-\varphi_{k,j}(t)) &= \sum_{j=1}^{n_k} (1-\varphi_{k,j}(t) + itE\tau(\xi_{k,j})) = \sum_{j=1}^{n_k} \int (1-e^{itx} + it\tau(x)) F_{k,j}(dx) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1-e^{itx} + it\tau(x)}{x^2} M_k(\,dx) = \int_{-K}^{K} + \int_{|x|>K}
\end{aligned}$$

tetszőleges $K > 0$-ra. Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Ha $K = K(\varepsilon)$ elég nagy, és a $\pm K$ pontok az M mérték folytonossági pontjai, akkor a (1.3) reláció és az $1 - e^{itx} + it\tau(x)$ függvény korlátossága miatt $\left| \int_{\{|x|>K\}} \frac{1-e^{itx}+it\tau(x)}{x^2} M_k(\,dx) \right| < \varepsilon$, ha $k > k_0$, és $\left| \int_{\{|x|>K\}} \frac{1-e^{itx}+it\tau(x)}{x^2} M(\,dx) \right| < \varepsilon$. Másrészt, a (1.7) relációból és az $\frac{1}{x^2}(1-e^{itx}+it\tau(x))$ függvény folytonosságából következik, hogy

$$\int_{-K}^{K} \frac{1-e^{itx} + it\tau(x)}{x^2} M_k(\,dx) \to \int_{-K}^{K} \frac{1-e^{itx} + it\tau(x)}{x^2} M(\,dx), \quad \text{ha } k \to \infty.$$

A fentiekből adódik az elégségesség bizonyítása az adott esetben. Az általános eset bizonyítása, amikor $E\tau(\xi_{k,j}) \ne 0$ is lehetséges, visszavezethető erre az esetre a 2. Lemma segítségével.

Ugyanis az 1. Tétel már bizonyított részét alkalmazhatjuk a 2. Lemmában definiált $\xi'_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozatra. E lemma segítségével kapjuk, hogy az $S_k - b'_k$ és az $S_k - b_k$ valószínűségi változóknak, ahol a b'_k számokat a 2. Lemma megfogalmazásában definiáltuk, létezik határeloszlásuk az előírt feltételek teljesülése esetén, és a határeloszlás karakterisztikus függvényének a logaritmusát az (1.7) képlet adja meg.

A 2. Tétel bizonyítása. Az elégségességnek, azaz annak a ténynek a bizonyítása, hogy $M_n \to M$ és $B_n \to B$ esetén a 2. Tételben megadott korlátlanul osztható eloszlások sorozata eloszlásban konvergál a 2. tételben leírt határeloszláshoz, viszonylag egyszerű. Mivel eloszlások karakterisztikus függvényének egy eloszlás karakterisztikus függvényéhez való konvergenciájából következik az eloszlások konvergenciája, elég belátni azt, hogy minden rögzített t-re

$$\log\varphi_n(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}M_n(\,du)+iB_nt$$
$$\to\log\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}M(\,du)+iBt,$$

ha $n\to\infty$.

Mivel $M_n\to M$, és a tekintett integrál integrandusa teljesíti a $\left|\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}\right|<\frac{\text{const.}}{1+u^2}$ egyenlőtlenséget, tetszőleges $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $K=K(\varepsilon)>0$, amelyre $\pm K$ az M mérték folytonossági pontja, és

$$\left|\int_{\{|u|>K\}}\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}M_n(\,du)\right|\le\varepsilon\quad\text{ha } n\ge n_0(\varepsilon),$$

és hasonló egyenlőtlenség érvényes, ha az M_n mértékeket az M mértékkel helyettesítjük. Másrészt, szintén az M_n kanonikus mértékeknek az M kanonikus mértékhez való gyenge konvergenciájából és az integrandus folytonosságából és korlátosságából az $\{|u|\le K\}$ halmazon következik, hogy

$$\int_{\{|u|<K\}}\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}M_n(\,du)\to\int_{\{|u|<K\}}\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}M(\,du)$$

ha $n\to\infty$. Ezekből a becslésekből és a $B_n\to B$ relációból $\varepsilon\to0$ határátmenettel következik az elégségesség állítása.

A másik irány bizonyításánál jegyezzük meg először, hogy amennyiben eloszlásfüggvények karakterisztikus függvényei(nek logaritmusai) egy folytonos függvényhez konvergálnak, akkor a határfüggvény szintén karakterisztikus függvény (logaritmusa), és az eloszlásfüggvények sorozata pedig ahhoz az eloszláshoz konvergál, amelynek ez a határfüggvény a karakterisztikus függvénye (illetve annak logaritmusa). A fő probléma ezért annak meghatározása, hogy a tételben definiált $\log\varphi_n$ függvényeknek milyen feltételek mellett van folytonos határfüggvénye $n\to\infty$ esetben, illetve a határfüggvény megadása.

A $\log\varphi_n(t)$ függvénysorozat lehetséges határértékének a vizsgálatánál vezessük be e függvények következő „simításait”. Rögzítsünk egy $h>0$ számot, és legyen

$$\psi_n(t)=\psi_n^h(t)=\log\varphi_n(t)-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\log\varphi_n(t+s)\,ds.$$

Ekkor

$$\begin{aligned}\psi_n(t) &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}-\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}\frac{e^{isu}-1-is\tau(u)}{u^2}\,ds\right)M_n(\,du)\\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{e^{itu}}{u^2}-\frac{1}{2h}\int_{t-h}^{t+h}\frac{e^{isu}}{u^2}\,ds\right)M_n(\,du)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{itu}K(u)M_n(\,du),\end{aligned}\tag{3.3}$$

ahol

$$K(u)=\frac{1}{u^2}\left(1-\frac{\sin hu}{hu}\right).\tag{3.3'}$$

Az alább megfogalmazandó 3. Lemma segítségével belátjuk, hogy létezik olyan folytonos $\bar{\varphi}(t)$ függvény, amelyre

$$\lim_{n\to\infty}\psi_n(t)\to\psi(t)=\bar{\varphi}(t)-\frac{1}{2h}\int_{-h}^{h}\bar{\varphi}(t+u)\,du.\tag{3.4}$$

Valójában számunkra csak az lesz fontos, hogy a $\psi_n(t)$ függvények konvergálnak egy a számegyenesen folytonos függvényhez. A (3.4) reláció azért érvényes, mert a 3. Lemma alapján, ha a $\log\varphi_n(t)$ függvények konvergens eloszlások karakterisztikus függvényeinek a logaritmusai, akkor ezek a $\log\varphi_n(t)$ függvények egyenletesen korlátosak minden véges intervallumban, és konvergálnak egy folytonos $\bar{\varphi}(t)$ függvényhez. Ezért a (3.4) formulában elvégzett határátmenet jogossága következik a Lebesgue tételből és az alábbi 3. Lemmából.

A 3. Lemmát úgy fogalmaztuk meg, hogy az az 1. Tétel bizonyításában is alkalmazható legyen. Ennek az eredménynek a megfogalmazása előtt a következő megjegyzést tesszük.

Legyen $\log\varphi_n(t)$, $n=1,2,\dots$, az (1.9) képletben definiált függvények sorozata. Az első rész eredményei alapján tudjuk, hogy ezek a függvények korlátlanul osztható eloszlások karakterisztikus függvényének a logaritmusai. Ha az ezen karakterisztikus függvények logaritmusai által meghatározott mértékek eloszlásban konvergálnak, akkor akkor a $\log\varphi_n(t)$ függvények egyenletesen konvergálnak egy $\bar{\varphi}(t)$ folytonos függvényhez a nulla alkalmas kis környezetében.

3. Lemma. *Legyenek $\log\varphi_n(t)$ az (1.9) formula által definiált függvények valamilyen M_n kanonikus mértékekkel és B_n számokkal. Tegyük fel, hogy ezek a $\varphi_n(t)$ függvények a nulla egy kis környezetében egyenletesen konvergálnak egy folytonos függvényhez. (Viszont nem követeljük meg, hogy a hozzájuk tartozó eloszlások is konvergáljanak.) Ekkor a $\log\varphi_n(t)$ függvények definiciójában szereplő M_n mértékek teljesítik a*

$$\sup_{1\le n<\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+u^2}M_n(\,du)<\infty\tag{3.5}$$

relációt. Ezért e feltétel teljesülése esetén tetszőleges $K>0$ számra a

$$\sup_{1\le n<\infty}\sup_{|t|<K}|\log\varphi_n(t)|<\infty\tag{3.6}$$

egyenlőtlenség is teljesül.

Ha az (1.9) formula segítségével megadható $\log \varphi_n(t)$ *függvények eloszlásban konvergens eloszlások karakterisztikus függvényeinek a logaritmusai, akkor nemcsak ezen eloszlások karakterisztikus függvényei, hanem e karakterisztikus függvények logaritmusai, azaz a* $\log \varphi_n(t)$ *függvények is egyenletesen konvergálnak minden véges intervallumban.*

A 3. Lemma bizonyításában azon eredmény bizonyításának megfelelő részét adaptáljuk, amely arról szól, hogy karaktesztikus függvények konvergenciájából egy folytonos függvényhez következik a megfelelő eloszlások konvergenciája is.

A 3. Lemma bizonyítása: Mivel a tekintett $\log \varphi_n(t)$ függvények karakterisztikus függvények logaritmusai, ezért alkalmas $h > 0$ számra létezik a $\lim\limits_{n\to\infty} \log \varphi_n(t) = \bar\varphi(t)$ folytonos határérték a $|t| \le h$ intervallumban, és ott ez a konvergencia egyenletes. (A $|t| \le h$ megszorításra azért van szükség, mert olyan intervallumra kell szorítkoznunk, ahol a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvények $\varphi(t)$ limesz (karakterisztikus) függvénye szeparálva van a zérótól. Ezt, legalábbis egyelőre, csak a nulla egy alkalmas környezetében tudjuk biztosítani.) Bizonyos ismétlések elkerülése érdekében a további érvelésben válasszuk a 2. Tétel bizonyításának elkezdésében egy (szabadon választható h paraméter segítségével) definiált $\psi_n(t)$ függvények definiciójában a paramétert ennek a h számnak.

Ha a $\log \varphi_n(t)$ függvények egy $[-h, h]$ intervallumban egyenletesen konvergálnak, akkor felhasználva e függvényeket meghatározó reprezentációt kapjuk, hogy alkalmas $K > 0$-ra

$$\begin{aligned}\infty > K &\ge 2 \sup_{n<\infty} \sup_{|t|\le h} |\log \varphi_n(t)| \ge \sup_{n<\infty} \left| \log \varphi_n(0) - \frac{1}{2h} \int_{-h}^{h} \log \varphi_n(t)\, dt \right| \\ &= \sup_{n<\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{u^2} \left(1 - \frac{\sin hu}{hu}\right) M_n(\,du) \right| \ge C(h) \sup_{n<\infty} \left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+u^2} M_n(\,du) \right|,\end{aligned}$$

mert

$$\frac{1}{u^2}\left(1 - \frac{\sin hu}{hu}\right) = h^2 \frac{1}{(hu)^2} \left(1 - \frac{\sin hu}{hu}\right) \ge \text{const.}\, \frac{h^2}{1+h^2u^2} \ge \text{const.}' \frac{1}{1+u^2}$$

alkalmas h-tól függő const. és const.$'$ számokkal. Innen következik a (3.5) formula. Másrészt, mivel

$$\left| \frac{e^{itu} - 1 - i\tau(u)t}{u^2} \right| \le \begin{cases} \frac{t^2}{2}, & \text{ha } |u| < a \\ \frac{2+aK}{u^2}, & \text{ha } |u| \ge a, \text{ és } |t| \le K \end{cases}$$

a (3.5) formulából következik, hogy a $\log \varphi_n(t)$ függvényt definiáló képletben szereplő integrál egyenletesen korlátos minden $|t| < K$ és $n = 1, 2, \dots$ értékekre. A B_n sorozatnak is korlátosnak kell lenni, különben a $\log \varphi_n(h)$ sorozat nem lenne korlátos, így konvergens sem. Innen következik a (3.6) reláció is. Végül a $\log \varphi_n(t)$ függvények korlátosságából minden véges intervallumban következik, hogy a $\varphi_n(t)$ függvények illetve ezek $\varphi(t)$ limesze szeparálva vannak zérótól minden véges intervallumban. Ezért, ha a $\log\varphi_n(t)$ függvények által meghatározott eloszlások eloszlásban konvergálnak, akkor nemcsak ezen eloszlások karakterisztikus függvényei, hanem a karakterisztikus függvények logaritmusai is egyenletesen konvergálnak minden véges intervallumban. A 3. Lemmát bebizonyítottuk.

Visszatérve a 2. Tétel bizonyításához vezessük be a $\mu_n(\,du) = K(u)M_n(\,du)$, $n = 1, 2, \dots,$ mértékeket a $(3.3')$ formulában definiált $K(\cdot) \ge 0$ függvénnyel. Átírva a $\psi_n(t)$ függvényre kapott (3.3) formulát, a (3.4) reláció segítségével láthatjuk, hogy a $\psi_n(t) = \int_\infty^\infty e^{itu}\mu_n(\,du)$ Fourier transzformáltak konvergálnak egy folytonos $\psi(t)$ függvényhez. Továbbá teljesül a

$$\frac{C_1}{1+u^2} \le K(u) = \frac{1}{u^2}\left(1 - \frac{\sin hu}{hu}\right) \le \frac{C_2}{1+u^2}$$

egyenlőtlenség alkalmas $C_2 = C_2(h) > C_1 = C_1(h) > 0$ konstansokkal. Azt állítjuk, hogy a következő két eset lehetséges. Vagy $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(0) = 0$, és ekkor az M_n kanonikus mértékek (gyengén) konvergálnak az $M \equiv 0$ mértékhez, azaz ebben az esetben $M(\mathbf{R}^1) = 0$ vagy pedig $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(0) = \psi(0) > 0$, és ekkor a $\bar\mu_n = \frac{1}{\psi_n(0)}\mu_n$ valószínűségi mértékek gyengén konvergálnak egy μ valószínűségi mértékhez.

Valóban, ha $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n(0) = 0$, akkor a $K(u)$ függvényre adott alsó becslés alapján $\lim\limits_{n\to\infty} \int \frac{1}{1+u^2} M_n(\,du) = 0$ azaz az M_n kanonikus mértékek (gyengén) konvergálnak a nulla mértékhez. Ha $\lim \psi_n(0) > 0$ (mivel $\psi_n(0) \ge 0$, más lehetőség nincs), akkor a definiált $\bar\mu_n$ mértékek valószínűségi mértékek, és ezen mértékek karakterisztikus függvényei konvergálnak a folytonos $\frac{\psi(t)}{\psi(0)}$ függvényhez. Ezért a $\bar\mu_n$ mértékek eloszlásban konvergálnak egy μ valószínűségi mértékhez. Végül jegyezzük meg, hogy a $K(u)$ függvényre adott alsó becslésből és a $\frac{K(u)}{1+u^2}$ folytonosságából, és a $\lim\limits_{n\to\infty} \bar\mu_n = \mu$ relációból következik, hogy az $M_n(du) = K^{-1}(u)\mu_n(du)$ kanonikus mértékek (gyengén) konvergálnak az $M(du) = K^{-1}(u)\psi(0)\mu(du)$ kanonikus mértékhez.

Végül megjegyezzük, hogy mint a bizonyítás első felében már láttuk, az M_n kanonikus mértékek (gyenge) konvergenciájából az M kanonikus mértékhez következik a $\log\varphi_n(t)$ fügvényt definiáló formula integrál részének konvergenciája a $\log\varphi(t)$ függvény definiciójában szereplő integrálhoz. Mivel az eloszlások gyenge konvergenciájából következik, hogy a $\log\varphi_n(t)$ függvényeknek konverálniuk kell a $\log\varphi(t)$ függvényhez, ezért szükséges, hogy a $\log\varphi_n(t)$ függvények definiciójában szereplő B_n konstansoknak legyen B határértéke, és ez a határérték szerepel a $\log\varphi(t)$ függvény definiciójában.

A 2. Tétel bizonyításához hasonlóan bizonyíthatjuk a $2.'$ Tételt. A 2. Tétel eredménye teszi lehetővé az 1. Tétel bizonyítását is. Ezeket a bizonyításokat tartalmazza ennek az ismertetésnek a következő része.

C.) A 2.′ Tétel bizonyítása és az 1. Tétel bizonyításának befejezése.

A 2′ Tétel bizonyítása: A 2. Tétel bizonyításához hasonlóan definiáljuk a

$$\psi(t) = \psi^h(t) = \log\varphi(t) - \frac{1}{2h}\int_{-h}^{h} \log\varphi(t+u)\,du.$$

függvényt. Ekkor

$$\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itu} K(u) M(du),$$

ahol $K(u) = \frac{1}{u^2}\left(1 - \frac{\sin hu}{hu}\right)$. A $\varphi(t)$ függvény meghatározza a $\psi(t)$ függvényt is. Ha $\psi(0) = 0$, akkor az M mérték azonosan 0, ha $\psi(0) > 0$, akkor a $\bar\mu(\,du) = \frac{K(u)M(\,du)}{\psi(0)}$ mérték az az egyértelműen meghatározott valószínűségi mérték, amelynek karakterisztikus függvénye $\frac{\psi(t)}{\psi(0)}$. Az $M(\,du) = \frac{\psi(0)}{K(u)}\bar\mu(\,du)$ képlet meghatározza az M mértéket is. Végül, a $\varphi(t)$ függvény és az M mérték meghatározza a korlátlanul osztható eloszlások karakterisztikus függvényének logaritmusát megadó Lévy–Hincsin formulában a B konstanst is.

Az 1. Tétel szükséges részének bizonyítása: Tekintsük először azt a speciális esetet, amikor a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók mindegyike szimmetrikus eloszlású, azaz a $\xi_{k,j}$ és $-\xi_{k,j}$ valószínűségi változók eloszlása megegyezik, és az S_k, $k = 1, 2, \dots$, sorozatnak van határeloszlása.

Ha az S_k sorozat eloszlásban konvergál, akkor a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók $\varphi_{k,j}(t)$ karakterisztikus függvényei teljesítik a

$$\lim_{k\to\infty} \psi_k(t) = \lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{n_k} \varphi_{k,j}(t) = \psi(t) \tag{3.7}$$

relációt egy folytonos $\psi(t)$ függvénnyel, amelyik a határeloszlás karakterisztikus függvénye. Innen következik, hogy egy alkalmas $|t| \le h$ intervallumban

$$\lim_{k\to\infty} \log\psi_k(t) = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \log\varphi_{k,j}(t) = \log\psi(t). \tag{3.8}$$

Egyelőre ezt az állítást nem tudjuk minden $t \in \mathbf{R}^1$-re bizonyítani, mert ehhez tudnunk kellene azt, hogy a $\psi(t)$ függvény sehol sem zéró.

A $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók szimmetriája miatt $\varphi_{k,j}(t) = E\cos(t\xi_{k,j})$ valós szám, és minden rögzített $t \in \mathbf{R}^1$ számra $-1 \le \varphi_{k,j}(t) \le 1$. Ezért $1 - \varphi_{k,j}(t) = |1 - \varphi_{k,j}(t)|$. Az 1. Lemma alapján $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók egyenletes kicsisége miatt $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{|t|<h} \sup\limits_{1\le j\le n_k} |1-\varphi_{k,j}(t)| = 0$. Ezért tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra $|\log\varphi_{k,j}(t) + (1-\varphi_{k,j}(t))| \le \varepsilon|1-\varphi_{k,j}(t)|$, ha $k \ge k_0(\varepsilon)$, és a (3.8) reláció helyett felírhatjuk a

$$\lim_{k\to\infty} \log\bar\psi_k(t) = \lim_{k\to\infty} -\sum_{j=1}^{n_k} (1-\varphi_{k,j}(t)) = \log\psi(t), \tag{3.8′}$$

relációt a $\bar\psi_k(t)=\prod\limits_{j=1}^{n_k} e^{\varphi_{k,j}(t)-1}$ függvénnyel, ha $|t|\le h$. Továbbá, a $\xi_{k,j}$ változók szimmetrikus eloszlása miatt

$$\begin{aligned}\log\bar\psi_k(t)&=-\sum_{j=1}^{n_k}(1-\varphi_{k,j}(t))=\sum_{j=1}^{n_k}\int(e^{itx}-1-it\tau(x))F_{k,j}(\,dx)\\&=\int\frac{e^{itx}-1-it\tau(x)}{x^2}M_k(\,dx),\end{aligned}$$

ahol a $\tau(x)$ függvény és az M_k mérték az 1. Tétel megfogalmazásában szereplő mennyiségek. Ebből a formulából illetve a $(3.8')$ képletből következik, hogy a 3. Lemma alkalmazható a $\bar\psi_k(t)$ függvényekre. Ezért érvényes a (3.5) formulának az a változata, amelyben az M_n mértéket a most tekintett M_k mértékekkel helyettesítjük valamint a (3.6) formulának az a változata, amelyben a $\log\varphi_n(t)$ függvényeket a $\log\bar\psi_k(t)$ függvényekkel helyettesítjük. Ez utóbbi reláció azt jelenti, hogy minden $K>0$ számra

$$\sup_{1\le k<\infty}\sup_{|t|\le K}\sum_{j=1}^{n_k}(1-\varphi_{k,j}(t))=\sup_{1\le k<\infty}\sup_{|t|\le K}\sum_{j=1}^{n_k}|1-\varphi_{k,j}(t)|<\infty,$$

illetve $0\le\sup\limits_{1\le k<\infty}\sup\limits_{|t|\le K}-\sum\limits_{j=1}^{n_k}\log\varphi_{k,j}(t)<\infty$ a $|\log\varphi_{k,j}(t)+(1-\varphi_{k,j}(t))|<(1-\varphi_{k,j}(t))$, reláció miatt, ha $|t|\le K$ és $k\ge k_0(K)$. Ezért a (3.7) képletben minden $t\in\mathbf{R}^1$ számra vehetünk logaritmust, és a (3.8) és $(3.8')$ relációk teljesülnek minden valós számra. Ez azt jelenti, hogy a $\bar\psi_k(t)$ függvények olyan (korlátlanul osztható) eloszlások karakterisztikus függvényei, amelyek eloszlásban konvergálnak. Ezért alkalmazható rájuk a 2. Tétel. Ennek alapján teljesülnek az (1.3) és (1.6) relációk (ez utóbbi $B_k\equiv0$ konstanssal) a tekintett esetben.

A következő lépésben bizonyítsuk be az 1. Tétel szükséges részének állítását abban az esetben, ha $E\tau(\xi_{k,j})=0$ minden $k\ge k_0$ és $1\le j\le n_k$ számra, ahol k_0 alkalmas küszöbindex. Feltesszük, hogy létezik olyan $\bar b_k$ számsorozat, amelyre az $S_k-\bar b_k$ sorozatnak, $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$, van határeloszlása. Belátjuk, hogy az (3.8) és $(3.8')$ formulák megfelelő módosítását ebben az esetben is, és ebből vezetjük le a kívánt állítást. Megmutatjuk, hogy a $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változók eloszlásai segítségével definiált M_k mértékek teljesítik az (1.3) és (1.6) relációkat.

A bizonyításban használjuk a sok más esetben is alkalmazható szimmetrizáció elvét. Azaz, tekintünk egy a $\xi_{k,j}$ szériasorozattól független $\bar\xi_{k,j}$ szériasorozatot, amelyre a $\xi_{k,j}$ és $\bar\xi_{k,j}$ valószínűségi változók azonos eloszlásúak, és definiáljuk az $\bar S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\bar\xi_{k,j}$ összegeket, illetve az $S_k-\bar S_k$ különbségeket. Ekkor az $S_k-\bar b_k$ sorozat eloszlásban való konvergenciájából következik az $S_k-\bar S_k$ sorozat eloszlásbeli konvergenciája, és ez utóbbi a $\xi_{k,j}-\bar\xi_{k,j}$ szimmetrikus eloszlású valószínűségi változókból álló szériasorozatok sorainak összegeiből álló sorozat. Ezért erre a sorozatra alkalmazhatjuk az 1. Tétel eredményeit.

Ennek a szimmetrizációnak a segítségével belátjuk, hogy

$$\sup_{1\le k<\infty} M_k^{\pm}(s)<\infty \text{ minden } s>0 \text{ számra}, \qquad \lim_{K\to\infty}\sup_{1\le k<\infty} M_k^{\pm}(K)=0,$$

és

$$\sup_{1\le k<\infty} M_k([-a,a])<\infty.$$

Definiáljuk ugyanis az M_k^0 és $M^0{}_k^{\pm}$ mértékeket az M_k és $M_k^{\pm}$ mértékeknek az 1. Tétel megfogalmazása előtt leírt definiciójához hasonlóan, azzal a különbséggel, hogy a definiciókban a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók $F_{k,j}$ eloszlásfüggvényei helyett a $\xi_{k,j}-\bar\xi_{k,j}$ valószínűségi változók $\bar F_{k,j}=F_{k,j}*F^-_{k,j}$ eloszlásfüggvényeit tekintjük, ahol $*$ konvoluciót jelől, $F^-_{k,j}(x)=1-F_{k,j}(-x)$ pedig a $-\xi_{k,j}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Ekkor az (1.3) és (1.6) reláció teljesül ($B_k=0$ konstanssal) alkalmas M^0 kanonikus mértékkel, ha az $M_k^{\pm}$ és M_k kifejezéseket az $M^0{}_k^{\pm}$ és M^0 kifejezésekkel helyettesítjük. Az egyenletes kicsiség feltétele miatt viszont tetszőleges $\varepsilon>0$-ra és $k>k_0(\varepsilon)$-ra, $x>2\varepsilon$-ra $1-\bar F_{k,j}(x-\varepsilon)=P(\xi_{k,j}-\bar\xi_{k,j}>x-\varepsilon)>P(\xi_{k,j}>x)P(\bar\xi_{k,j}>-\varepsilon)>(1-\varepsilon)(1-F_{k,j}(x))$, és hasonló egyenlőtlenség érvényes $\bar F_{k,j}(-x)$-ra. Innen, összegezve $j=1,\dots,n_k$-ra kapjuk, hogy $M_k^{\pm}(x)\le\frac{1}{1-\varepsilon}M^0{}_k^{\pm}(x-\varepsilon)$, ha $x\ge2\varepsilon$ és $k\ge k_0(\varepsilon)$. Mivel $\sup\limits_{k<\infty} M^0{}_k^{\pm}(x)<\infty$ minden $x>0$-ra, és $\lim\limits_{K\to\infty}\sup\limits_{k<\infty} M^0{}_k^{\pm}(K)=0$, innen $\varepsilon>0$ határátmenettel következnek az $M_k^{\pm}$ függvényekre megfogalmazott állítások.

Az $M_k([-a,a])$ mennyiség becslése érdekében egy egyenlőtlenséget bizonyítunk be. Ebben felhasználjuk, hogy $E\tau(\xi_{k,j})=E\tau(\bar\xi_{k,j})=0$, a $\xi_{k,j}$, a $\bar\xi_{k,j}$ valószínűségi változók függetlenek, és bevezetve a

$$v(x)=\begin{cases} a & \text{ha } x>a\\ 0 & \text{ha } -a\le x\le a\\ -a & \text{ha } x<-a\end{cases}$$

függvényt, teljesül a következő reláció: $\tau(x)-v(x)=x$, ha $|x|\le a$, és $\tau(x)-v(x)=0$, ha $|x|>a$. Továbbá $\tau(x)v(x)=v^2(x)$. Ezért

$$\begin{aligned}
\int_{-2a}^{2a} x^2\bar F_{k,j}(dx) &= \int\int_{\{(x,y)\colon\,|x+y|\le2a\}}(x+y)^2F_{k,j}(\,dx)F^-_{k,j}(\,dy)\\
&\ge \int\int_{\{(x,y)\colon\,|x|\le a,\,|y|\le a\}}(x+y)^2F_{k,j}(\,dx)F^-_{k,j}(\,dy)\\
&= \int\int_{\{(x,y)\colon\,|x|\le a,\,|y|\le a\}}(x-y)^2F_{k,j}(\,dx)F_{k,j}(\,dy)\\
&= E\left(\tau(\xi_{k,j})-v(\xi_{k,j})-(\tau(\bar\xi_{k,j})-v(\bar\xi_{k,j}))\right)^2\\
&= 2E\tau(\xi_{k,j})^2+2Ev(\xi_{k,j})^2-2(Ev(\xi_{k,j}))^2-4E\tau(\xi_{k,j})v(\xi_{k,j})\\
&\ge 2\int_{-a}^{a}x^2F_{k,j}(dx)-4a^2(1-F_{k,j}(a)+F_{k,j}(-a)),
\end{aligned}$$

mert

$$(Ev(\xi_{k,j}))^2 = a^2(1 - F_{k,j}(a) + F_{k,j}(-a))^2 \le a^2(1 - F_{k,j}(a) + F_{k,j}(-a)),$$

és

$$Ev(\xi_{k,j})^2 = E\tau(\xi_{k,j})v(\xi_{k,j}) = a^2(1 - F_{k,j}(a) + F_{k,j}(-a)).$$

Ezeket az egyenlőtlenségeket összegezve $j = 1, \dots, n_k$-ra kapjuk, hogy

$$M_k^0([-2a, 2a]) \ge 2M_k([a, a]) - 4a^2(M_k^+(a) + M_k^-(a)).$$

Mivel $\sup\limits_{1\le k<\infty} M_k^0([-2a, 2a]) < \infty$, (az M_k^0 mértékek a (1.6) relációt $B_k = 0$ választással teljesítik), és $\sup\limits_{1\le k<\infty} M_k^{\pm}(a) < \infty$, mint azt már láttuk, innen következik, hogy teljesül a $\sup\limits_{1\le k<\infty} M_k([-a, a]) < \infty$ reláció.

Az M_k és $M_k^{\pm}$ kifejezésekre adott becslések segítségével bebizonyítjuk, hogy minden rögzített $T > 0$ számra

$$\sup_{1\le k<\infty} \sum_{j=1}^{n_k} |1 - \varphi_{k,j}(t)| \le C(T), \quad \text{ha } |t| \le T \tag{3.9}$$

alkalmas $C(T) < \infty$ konstanssal. Ugyanis minden $|t| \le T$ számra

$$\begin{aligned} |1 - \varphi_{k,j}(t)| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (1 - e^{itx} + it\tau(x)) F_{k,j}(\,dx) \right| \le \int_{-a}^{a} |1 - e^{itx} + itx| F_{k,j}(\,dx) \\ &\qquad + \int_{|x|>a} |1 - e^{itx} + ita| F_{k,j}(\,dx) \\ &\le \frac{t^2}{2} \int_{-a}^{a} x^2 F_{k,j}(\,dx) + (2 + |t|a)\left(F_{k,j}(-a) + [1 - F_{k,j}(a)]\right) \end{aligned}$$

E képleteket összegezve $1 \le j \le n_k$-ra, és felhasználva a $|t| \le T$ egyenlőtlenséget kapjuk, hogy

$$\sum_{j=1}^{n_k} |1 - \varphi_{k,j}(t)| \le \frac{T^2}{2} M_k([-a, a]) + (2 + Ta)(M_k^+(a) + M_k^-(a)),$$

ahonnan az $M_k^{\pm}(a)$ és $M_k([-a, a])$ számok (k-tól független) korlátosságából következik a (3.9) reláció.

Az 1. Lemma alapján a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók egyenletes kicsiségéből következik, hogy minden $t \in \mathbf{R}^1$-re $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{|t|\le T} \sup\limits_{1\le j\le n_k} |1 - \varphi_{k,j}(t)| = 0$. Innen $x = 1 - \varphi_{k,j}(t)$ választással a $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\log(1-x)+x}{x} = 0$ reláció miatt kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\colon |t|\le T} \sup_{1\le j\le n_k} \frac{|\log \varphi_{k,j}(t) + (1 - \varphi_{k,j}(t))|}{|1 - \varphi_{k,j}(t)|} = 0$$

reláció. Innen, és a (3.9) relációból következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{t\colon |t|\le T} \sum_{j=1}^{n_k} |\log \varphi_{k,j}(t) + (1-\varphi_{k,j}(t))| \to 0 \tag{3.10}$$

minden $T > 0$ számra.

Az $S_k - \bar{b}_k$ sorozat eloszlásban való konvergenciájából következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \prod_{j=1}^{n_k} \left(e^{-it\bar{b}_k/n_k} \varphi_{k,j}(t)\right) = \psi(t), \tag{3.11}$$

ahol $\psi(t)$ a határeloszlás karakterisztikus függvénye. Továbbá a fenti konvergencia egyenletes minden véges intervallumon. Azt állítjuk, hogy ebben a relációban lehet logaritmust venni, azaz

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} \left(\log \varphi_{k,j}(t) - \frac{it\bar{b}_k}{n_k}\right) = \log \psi(t). \tag{3.12}$$

E lépés érvényességének bizonyítása érdekében megmutatjuk, hogy

$$\sup_{t\colon |t|\le T} \sup_{k} \sum_{j=1}^{n_k} \log |\varphi_{k,j}(t)| \le C(T) \quad \text{ha } k \ge k_0, \tag{3.13}$$

ahol $C(T) < \infty$ alkalmas konstans, és k_0 alkalmas küszöbindex. Az egyenletes kicsiség feltétele alapján ugyanis $|1-\varphi_{k,j}(t)| \le \frac{1}{4}$, $\log|\varphi(t)| \le 2(1-|\varphi(t)|) \le 2|(1-\varphi(t)|$, ha $|t| \le T$, $k \ge k_0$, $1 \le j \le n_k$ valamely $k_0 = k_0(T)$ küszöbindex-szel. Ezért a (3.9) relációból következik a (3.13) formula.

A (3.13) formula miatt léteznek olyan $0 < C_1 < C_2 < \infty$ konstansok és k_0 küszöbindex, amelyekre $C_1 \le \prod\limits_{j=1}^{n_k} |\varphi_{k,j}(t)| \le C_2$ minden $|t| \le T$ számra. Ezért a (3.11) formulából következik a (3.12) formula következő gyengített alakja: Minden $\varepsilon > 0$, $|t| \le T$ számra és $k \ge k_0(\varepsilon, T)$ indexre, ahol $k_0 = k_0(\varepsilon, T)$ alkalmas küszöbindex, létezik olyan $m = m(k,t)$ egész szám, amelyre $\left|\sum\limits_{j=1}^{n_k} \left(\log \varphi_{k,j}(t) - \frac{itb_k}{n_k}\right) - \log \psi(t) - i2\pi m(k,t)\right| < \varepsilon$. Viszont mivel mind a $\log \psi(t)$ mind a $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \left(\log \varphi_{k,j}(t) - \frac{itb_k}{n_k}\right)$ függvények folytonosak, $\log \psi(0) = 0$, $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \log \varphi_{k,j}(0) = 0$, ezért $m(k,0) = 0$, ahonnan $m(k,t) = 0$ minden $|t| \le T$ számra és $k \ge k_0$ indexre. Ezért a (3.11) relációból következik a (3.12) reláció is.

A (3.10) reláció miatt $\log \varphi_{k,j}(t)$ függvény helyettesíthető az $\varphi_{k,j}(t) - 1$ kifejezéssel a (3.12) formulában. Innen azt kapjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty} -\sum_{j=1}^{n_k} (1-\varphi_{k,j}(t)) - it\bar{b}_k = \log \psi(t),$$

és ez a formula az $E\tau(\xi_{k,j})=0$ azonosság miatt

$$\lim_{k\to\infty}\int\frac{e^{itx}-1-it\tau(x)}{x^2}M_k(dx)-it\bar b_k=\log\psi(t)$$

alakban is írható. A 2. Tétel eredménye alapján innen következik, hogy az M_k mértékek sorozata (gyengén) konvergál egy M kanonikus mértékhez. Ez azt jelenti, hogy az (1.3) és (1.6) reláció ($B_k=0$ választással) érvényes ebben az esetben is, és ezt kellett belátnunk. (Ezenkívül teljesül a $\lim\limits_{k\to\infty}b_k=b$ reláció is, ahonnan következik, hogy a $b_k=0$ normálás is választható, azaz az S_k sorozatnak is van határeloszlása.)

Ezzel beláttuk az 1. Tétel szükséges részét abban az esetben, ha $E\tau(\xi_{k,j})=0$ minden elég nagy k és $1\le j\le n_k$ számpárra. Az általános eset könnyen visszavezethető erre az esetre a 2. Lemma segítségével. Ugyanis, e lemma szerint létezik olyan $\vartheta_{k,j}$ sorozat, amelyre a $\xi'_{k,j}=\xi_{k,j}-\vartheta_{k,j}$ valószínűségi változók teljesítik az $E\tau(\xi'_{k,j})=0$ azonosságot, és $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}|\vartheta_{k,j}|=0$. Továbbá az (1.3) és (1.6) relációk érvényességéből a $\xi'_{k,j}$ változókra következik azok érvényessége az eredeti $\xi_{k,j}$ változókra, és ezt kellett belátnunk.

Végül megadjuk a 3. Tétel bizonyítását is, és ezzel befejezzük a kimondott állítások bizonyítását.

D.) A 3. Tétel bizonyítása.

A 3. Tétel bizonyítása: A tétel bizonyítását érdemes a karakterisztikus függvények nyelvén megadni. Ezen a nyelven azt kell belátni, (felhasználva az 1. Lemma eredményét), hogy amennyiben $\omega_k(t)$, $k=1,2,\dots$, karakterisztikus függvényeknek egy sorozata, és létezik olyan $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty}\omega_k^{n_k}(t)\to\varphi(t)$ minden t valós számra, és $n_k\to\infty$, akkor minden $K>0$ számra $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{|t|\le K}(1-\omega_k(t))=0$.

Ebben a bizonyításban is érdemes szimmetrizációt végrehajtani. Vezessünk be a $\xi_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változók mellett olyan tőlük független $\bar\xi_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változókat, amelyek függetlenek a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változóktól is, és definiáljuk az $\eta_{k,j}=\xi_{k,j}-\bar\xi_{k,j}$ valószínűségi változókat. Akkor ezen változók összegei is konvergálnak eloszlásban. A karakterisztikus függvények nyelvén azt írhatjuk, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}|\omega_k|^{2n_k}(t)\to|\varphi(t)|^2$.

Először azt látjuk be, hogy tetszőleges véges $[-K,K]$ intervallumban létezik olyan $C=C(K)>0$ szám, amelyre $\limsup\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{|t|\le K}n_k(1-|\omega_k(t)|^2)\le C$, ha $|t|\le K$.

Egy elég kis K számra igaz ez az állítás. Ugyanis a $\varphi(t)$ függvény folytonossága és a $\varphi(0)=1$ reláció miatt tetszőleges $\varepsilon>0$-ra $|1-\varphi(t)|\le\varepsilon$, ha $|t|\le K$, ahol $K=K(\varepsilon)$. Másrészt a karakterisztikus függvények egyenletes konvergenciájából véges intervallumokon következik, hogy $1\ge\liminf\limits_{k\to\infty}\inf\limits_{|t|\le K}|\omega_k(t)|^{2n_k}\ge C_1>0$, ahonnan $1-$

$\frac{C_2}{n_k} \le |\omega_k(t)|^2 \le 1$, és $n_k(1-|\omega_k(t)|^2) \le C_3 < \infty$ minden $|t| \le K$ számra alkalmas $C_1 > 0$, $C_2 > 0$ és $C_3 > 0$ konstansokkal.

Mivel a bizonyítandó állítás érvényességet már tudjuk egy elég kis intervallumban, ezért elegendő belátni, hogy amennyiben ez igaz egy $[-K, K]$ intervallumban, akkor a $[-2K, 2K]$ intervallumban is igaz. A következő becslésben G_k jelőli azt a (szimmetrikus) eloszlást, amelyiknek $|\omega_k(t)|^2$ a karakterisztikus függvénye. Ha $|t| \le K$

$$\begin{aligned} n_k(1-|\omega_k(2t)|^2) &= n_k \int (1-\cos 2tx) G_k(\,dx) = 2n_k \int \left(1-\cos^2 tx\right) G_k(\,dx) \\ &\le 4n_k \int (1-\cos tx) G_k(\,dx) = 4n_k(1-|\omega_k(t)|^2) \le 4C_2, \end{aligned}$$

ahonnan következik a kívánt becslés érvényessége (egy új $C_2' = 4C_2$ konstanssal) a $[-2K, 2K]$) intervallumban is.

A bizonyított becslésből következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}(1-|\omega_k(t)|) = 0$, és a konvergencia egyenletes minden véges intervallumban. Ezenkívül az is következik innen, hogy $\inf\limits_{|t|\le K} |\varphi(t)| = \inf\limits_{|t|\le K} |\omega_k(t)|^{n_k} > 0$ minden $K > 0$ számra, mert az $0 \le n_k(1-|\omega_k(t)|) < C < \infty$ relációból következik, hogy $|\omega_k(t)|^{n_k} > C' > 0$ alkalmas $C' = C'(n_k, C)$ konstanssal. Írjuk fel az $\omega_k(t) = |\omega_k(t)|e^{iu_k(t)}$ és $\varphi(t) = |\varphi(t)|e^{iv(t)}$ karakterisztikus függvényeket polárkoordinátás alakban. A 3. Tétel bizonyításának befejezéséhez azt kell még megmutatni, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(t) = 0$, és a konvergencia minden véges intervallumban egyenletes.

Tudjuk, hogy $u_k(0) = 0$, $v(0) = 0$, és az $u_k(t)$ és $v(t)$ függvények folytonosak. Továbbá a karakterisztikus függvények konvergenciájából valamint azoknak a nullától való szeparáltságából egy rögzített véges intervallumban következik a $\lim\limits_{k\to\infty} n_k u_k(t) = v(t)$ reláció, és a konvergencia minden véges intervallumban egyenletes. A bizonyításban az okoz némi technikai nehézséget, hogy $n_k u_k(t)$ szorzat az $u_k(t)$ számot csak moduló $\frac{2\pi}{n_k}$ határozza meg. Rögzítve egy $K > 0$ számot, kihasználva a $v(t)$ függvény egyenletes folytonosságát és az $u_k(t) \to v(t)$ konvergencia egyenletességét véges intervallumokban kapjuk, hogy létezik olyan $\delta = \delta(K) > 0$ szám, amelyre $\sup\limits_{|t|\le K, |t-s|\le\delta} |v(t)-v(s)| \le \frac{\pi}{3}$, és $\sup\limits_{|t|\le K, |t-s|\le\delta} n_k|u_k(t)-u_k(s)| \le \frac{\pi}{2}$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra. Innen, illetve az $u_k(t)$ függvények folytonosságából következik, hogy $|u_k(t)-u_k(s)| \le \frac{\pi}{2n_k}$, ha $|t-s| \le \delta$, $|t| \le K$. Tekintsük ugyanis egy δ-nál nem hosszabb $[s, t]$ intervallumot. Ezt az intervallumot az előzőek alapján az $n_k u_k$: $x \to n_k u_k(x)$ leképezés egy $\pi/2$-nél rövidebb J intervallumba képezi. Ezért a $\{u_k(x)\colon x \in [s, t]\}$ halmaz része a $\frac{J}{n_k} + l\frac{2\pi}{n_k}$, $l = 1, \dots, n_k - 1$, intervallumok uniójának, mely intervallumok (rövidségük miatt) diszjunktak. Ezért az u_k függvény folytonosságából következik, hogy az $\{u_k(x)\colon x \in [s, t]\}$ halmaz teljes egészében valalamelyik $\frac{J}{n_k} + l\frac{2\pi}{n_k}$ intervallum belsejében van, és a megfogalmazott egyenlőtlenség érvényes.

Ezért $\sup\limits_{|t|\le K} |u_k(t)| \le \frac{K\pi}{\delta n_k}$ minden k-ra. Innen következik, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} u_k(t) = 0$, és a konvergencia minden véges intervallumban egyenletes. A 3. Tételt bebizonyítottuk.