Határeloszlástételek és korlátlanul osztható eloszlások. III. rész
(Funkcionális határeloszlástétel.)

1. Bevezetés. A problémák megfogalmazása.

A *Határeloszlástételek és korlátlanul osztható eloszlások.* téma leírásának II. részének első tételében megadtuk annak szükséges és elégséges feltételét, hogy az egyenletes kicsiség feltételét teljesítő szériasorozat egyes soraiban szereplő változók összegeiből egy alkalmas konstanst levonva olyan valószínűségi változókat kapjunk, amelyeknek létezik határeloszlásuk. Kimondjuk újra e tétel elégséges részét. Utána megadjuk ennek az eredménynek egy másik bizonyítását, illetve tárgyalni fogjuk annak egy általánosítását, amelyben azt bizonyítjuk be, hogy alkalmas feltételek mellett az összegek sorozatából természetes módon elkészített töröttvonalfüggvények teljesítenek egy funkcionális határeloszlástételt. Ennek a tárgyalásnak egyik célja az, hogy jobban megértsük az eddig tárgyalt eredmények hátterét. A tárgyalandó eredmény a következő:

1. Tétel. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $j=1,\dots,n_k$, az egyenletes kicsiséget teljesítő szériasorozat $F_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, eloszlásfüggvényekkel. Vezessük be az*

$$M_k(\,dx)=\sum_{j=1}^{n_k}x^2F_{k,j}(\,dx),\qquad k=1,2,\dots \tag{1.1}$$

kanonikus mértékeket a számegyenesen, rögzítsünk egy $a>0$ számot, és definiáljuk a

$$\tau(x)=\tau_a(x)=\begin{cases}x & \textit{ha } |x|\le a\\ a & \textit{ha } x\ge a\\ -a & \textit{ha } x\le -a\end{cases} \tag{1.2}$$

függvényt. Tegyük fel, hogy a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók teljesítik az $E\tau(\xi_{k,j})=0$ azonosságot minden $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$ indexre, és az M_k mértékek konvergálnak egy M_0 kanonikus mértékhez a számegyenesen.

Ekkor az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ összegek eloszlásban konvergálnak egy eloszláshoz, amelynek $\varphi(t)$, $-\infty<t<\infty$, karakterisztikus függvényét, pontosabban annak (létező) logaritmusát a

$$\log\varphi(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}M_0(\,du) \tag{1.3}$$

képlet adja meg, ahol az M_0 kanonikus mérték az M_k mértékek határértéke, a τ függvényt pedig az (1.2) formulában definiáltuk.

Az eredmény jobb megértése érdekében felidézzük, hogy egy a számegyenesen definiált M mértéket kanonikusnak nevezünk, ha

$$M([-a,a])<\infty,\quad \text{és}\quad \int_{\{|x|>a\}}\frac{1}{x^2}M(\,dx)<\infty$$

minden véges $a > 0$ számra. Kanonikus mértékek M_k sorozata, $k = 1, 2, \dots$, akkor konvergál (gyengén) egy M_0 kanonikus mértékhez, ha

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} M_k^+(x) &= \lim_{k\to\infty} \int_x^\infty \frac{1}{u^2} M_k(\,du) = M_0^+(x) = \int_x^\infty \frac{1}{u^2} M_0(\,du), \\ \lim_{k\to\infty} M_k^-(x) &= \lim_{k\to\infty} \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{u^2} M_k(\,du) = M_0^-(x) = \int_{-\infty}^{-x} \frac{1}{u^2} M_0(\,du), \end{aligned} \tag{1.4}$$

minden olyan $x > 0$ számra, ahol az $M_0^+(x)$ illetve $M_0^-(x)$ függvény folytonos, és

$$\lim_{k\to\infty} M_k\{[a,b]\} = M_0\{[a,b]\}$$

minden olyan $- < \infty < a < b < \infty$ számra, ahol az M_0 mérték folytonos. (Az M_0 mérték folytonossága az a és b pontokban azt jelenti, hogy $M_0(\{a\}) = M_0(\{b\}) = 0$).

Az 1. Tétel, illetve a benne szereplő (1.3) formula pontos megfogalmazása érdekében definiálni kell az (1.3) formulában szereplő integrandust az $u = 0$ pontban is. Ezt folytonossági meggondolások alapján a következő módon tesszük:

$$\left.\frac{e^{itu} - 1 - it\tau(u)}{u^2}\right|_{u=0} = \lim_{u\to 0} \frac{e^{itu} - 1 - it\tau(u)}{u^2} = -\frac{t^2}{2}.$$

A fentebb megfogalmazott 1. Tétel a *Határeloszlástételek és korlátlanul osztható eloszlások.* II. részének 1. Tételében szereplő eredménynek csak az egyik felét tartalmazza, a határeloszlástétel kimondását az elégséges feltételek teljesülése esetén. Sőt ezt az állítást is csak abban az esetben mondja ki, ha teljesül az $E\tau(\xi_{k,j}) = 0$ feltétel minden $k = 1, 2, \dots$ és $1 \le j \le n_k$ indexre. Viszont az általános eset egyszerűen visszavezethető erre a speciális esetre a II. részben szereplő 3.lemma segítségével. A tétel kimondása ebben az esetben egyszerűbb, ekkor az M_k kanonikus mértékek konvergenciája a kanonikus M_0 határmértékhez helyettesíti a II. részben szereplő bonyolultabb feltételeket.

A valószínűségszámítás problémáiban gyakran az összeadandókból kivonjuk a várható értéket, és csak nulla várható értékű valószínűségi változók normalizált összegeit vizsgáljuk. Az $E\tau(\xi_{k,j}) = 0$ feltétel megfogalmazása ennek az elvnek a módosítása az általános esetben, amikor a valószínűségi változóknak nem feltétlenül létezik várható értékük.

Az 1. Tétel bizonyítását a második rész bizonyításától lényegesen eltérő módszerrel látjuk be. Az alábbi viszonylag egyszerű és a kiegészítésben bebizonyított eredményt fogjuk használni.

Tétel A. *Legyen S_k és T_k, $k = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata, amelyre az $S_k - T_k$ különbségek sorozata sztochasztikusan tart nullához $k \to \infty$ esetében. Ha az S_k valószínűségi változók sorozata eloszlásban konvergál egy F eloszláshoz, akkor az T_k valószínűségi változók sorozata is konvergál ugyanahhoz az F eloszláshoz.*

Sőt igaz ennek az eredménynek a következő általánosítása is. Legyen adva egy (X, ρ) szeparábilis, metrikus tér és (X, ρ) tér értékű valószínűségi változóknak két S_k és

T_k, $k = 1, 2, \dots$, sorozata, amelyre a $\rho(S_k, T_k)$ távolság sztochasztikusan tart nullához, $k \to \infty$ esetében. Ha az S_k sorozat eloszlásban konvergál egy μ valószínűségi mértékhez az (X, ρ) téren, akkor a T_k valószínűségi változók sorozata is konvergál ugyanahhoz a μ mértékhez.

Az 1. Tétel bizonyításában a Tétel A első állítására van csak szükségünk. A Tétel A második állítását azért mondtuk ki és azért fogjuk bebizonyítáni, mert az 1. Tételnek egy funkcionális határeloszlástétel változatát is tárgyalni fogjuk, és annak vizsgálatában erre az állításra lesz szükségünk. Az 1. Tétel bizonyítása hasonló lesz a Poisson határeloszlástételnek az első rész kiegészítésében adott bizonyításához. A Tétel A segítségével belátjuk, hogy az 1. Tétel bizonyítása redukálható olyan valószínűségi változók konvergenciájának a bizonyítására, amelyek eloszlásai korlátlanul oszthatóak, és az ezeket az eloszlásokat meghatározó kanonikus mértékek is konvergálnak. Ez utóbbi állítást szintén a Tétel A segítségével fogjuk belátni.

Ahhoz, hogy a fent vázolt programot végre tudjuk hajtani először célszerű az 1. Tételben szereplő M_k kanonikus mértékeket szétválasztani két részre, amelyek közül az egyik biztosítja a korlátlanul osztható eloszlás normális a másik pedig a Poisson komponensének a konvergenciáját. Ez a tartalma a következő 1. Lemmának.

1. Lemma. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, az egyenletes kicsiség feltételét teljesítő szériasorozat, $F_{k,j}$ a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvénye, $G_{k,j}(\,dx) = x^2 F_{k,j}(\,dx)$. Tegyük fel, hogy az $M_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} G_{k,j}$ kanonikus mértékek (gyengén) konvergálnak egy M_0 kanonikus mértékhez. Írjuk az M_0 mértéket $M_0 = M_0' + M_0''$ alakban, ahol M_0' az M_0 mérték origóba eső része, azaz minden mérhető $A \subset R^1$ halmazra $M_0'(A) = 0$, ha $0 \notin A$, és $M_0'(A) = M_0(\{0\})$, ha $0 \in A$, továbbá $M_0'' = M_0 - M_0'$. Ekkor létezik olyan $\varepsilon_k > 0$, $\varepsilon_k \to 0$, ha $k \to \infty$, számsorozat, amelyre az M_k', $M_k'(A) = M_k(A \cap I(\{|x| < \varepsilon_k\})$ mértékek gyengén konvergálnak az M_0' kanonikus mértékhez, az M_k'', $M_k''(A) = M_k(A \cap I\{|x| \ge \varepsilon_k\})$ mértékek pedig gyengén konvergálnak az M_0'' kanonikus mértékhez, ahol $I(B)$ a B halmaz indikátorfüggvénye. Továbbá $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{1 \le j \le n_k} (1 - F_{k,j}(\varepsilon_k)) = 0$, és $\lim\limits_{k\to\infty} \sup\limits_{1 \le j \le n_k} F_{k,j}(-\varepsilon_k) = 0$, sőt teljesül a*

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} [(1 - F_{k,j}(\varepsilon_k)) + F_{k,j}(-\varepsilon_k)]^2 = 0. \tag{1.5}$$

reláció is.

Megadjuk az 1. Lemma segítségével azt a konstrukciót, amely lehetővé teszi az 1. Tétel bizonyításának redukcióját korlátlanul osztható eloszlások konvergenciájának vizsgálatára. Kényelmi okokból az 1. Tételben szereplő $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók helyett velük azonos eloszlású $\bar{\xi}_{k,j}$ valószínűségi változókat fogunk tekinteni.

Teljesítse a $\xi_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozat az 1. Tétel feltételeit. Minden (k, j), $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$ számpárra tekintsük a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változókat, és definiáljuk az $\bar{\nu}_{k,j}(A) = P(\xi_{k,j} \in A |\, |\xi_{k,j}| < \varepsilon_k)$, $\bar{\bar{\nu}}_{k,j}(A) = P(\xi_{k,j} \in A |\, |\xi_{k,j}| \ge \varepsilon_k)$

valószínűségi mértékeket, és $p_{k,j}=P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)$ számokat, ahol $A\in\mathbf{R}^1$ mérhető halmaz, és az ε_k számok olyanok, amelyekkel az 1. Lemma állításai teljesülnek. Legyenek $\eta'_{k,j}$, $j=1,\dots,n_k$, független, $\bar\nu_{k,j}$ eloszlású valószínűségi változók. Tekintsünk továbbá független $\zeta_{k,j}$ Poisson eloszlású valószínűségi változókat $\bar p_{k,j}$ paraméterrel, ahol a $\bar p_{k,j}$ szám az $1-e^{-\bar p_{k,j}}=p_{k,j}$ egyenlet megoldása, amelyek függetlenek az $\eta'_{k,j}$ változóktól is. Legyenek $\gamma_{k,j,l}$, $1\le j\le n_k$, $l=1,2,\dots$, egymástól és az összes eddig konstruált valószínűségi változótól független valószínűségi változók, amelyekre $\gamma_{k,j,l}$, $l=1,2,\dots$, $\bar{\bar\nu}_{k,j}$ eloszlású.

A már definiált $\eta'_{k,j}$ valószínűségi változók mellett definiáljuk az $\eta''_{k,j}=\sum\limits_{l=1}^{\zeta_{k,j}}\gamma_{k,j,l}$, $\xi'_{k,j}=\eta'_{k,j}I(\zeta_{k,j}=0)$, $\xi''_{k,j}=\gamma_{k,j,1}I(\zeta_{k,j}\ge1)$, $\tilde\xi_{k,j}=\xi'_{k,j}+\xi''_{k,j}$, és $\eta_{k,j}=\eta'_{k,j}+\eta''_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változókat. Belátjuk, hogy a fent konstruált $\tilde\xi_{k,j}$ és $\eta_{k,j}$ valószínűségi változók teljesítik az alább megfogalmazandó 1. Segédtétel állítását, amely lehetővé teszi az 1. Tétel bizonyítását redukálni az egyszerűbben vizsgálható $\eta_{k,j}$ valószínűségi változók összegének a vizsgálatára.

Jegyezzük meg, hogy a $\gamma_{k,j,1},\dots,\gamma_{k,j,\zeta_{k,j}}$ Poisson folyamat $\bar p_{k,j}\bar{\bar\nu}_{k,j}$ számláló mértékkel. Ezért, mint azt az I. részben láttuk az $\eta''_{k,j}=\sum\limits_{l=1}^{\zeta_{k,j}}\gamma_{k,j,l}$ valószínűségi változó korlátlanul osztható eloszlású, és karakterisztikus függvényének logaritmusa

$$\log\varphi_{k,j}(t)=\log Ee^{it\eta''_{k,j}}=\int(e^{itu}-1)\bar p_{k,j}\bar{\bar\nu}_{k,j}(\,du)=\frac{\bar p_{k,j}}{p_{k,j}}\int_{\{|u|\ge\varepsilon_k\}}\frac{e^{itu}-1}{u^2}G_{k,j}(\,du),\tag{1.6}$$

ahol $G_{k,j}(\,du)=u^2F_{k,j}(\,du)$ megegyezik az 1. Lemmában definiált $G_{k,j}$ mértékkel.

1. Segédtétel. *Teljesítse a $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, szériasorozat a 1. Tétel feltételeit. Ekkor a fent megadott az 1. Lemma eredményét felhasználó konstrukció teljesíti a következő tulajdonságokat: A konstruált $\tilde\xi_{k,j}=\xi'_{k,j}+\xi''_{k,j}$ valószínűségi változók eloszlása megegyezik $\xi_{k,j}$ változók eloszlásával, $\eta'_{k,j}$ és $\eta''_{k,j}$ két független szériasorozat, azaz rögzített k indexre az $\eta'_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, és $\eta''_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, véletlen vektorok függetlenek. Továbbá, $P(|\xi'_{k,j}|\le\varepsilon_k)=P(|\eta'_{k,j}|\le\varepsilon_k)=1$ az 1. Lemmában bevezetett ε_k, $k=1,2,\dots$, számokkal. Továbbá*

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}|E\xi'_{k,j}-E\eta'_{k,j}|=0\tag{1.7}$$

és teljesül az

$$\begin{aligned}&\sup_{1\le p\le n_k}\left|\sum_{j=1}^{p}(\xi'_{k,j}-E\xi'_{k,j})-(\eta'_{k,j}-E\eta'_{k,j})\right|\Rightarrow0,\\&\sup_{1\le p\le n_k}\left|\sum_{j=1}^{p}(\xi''_{k,j}-E\tau(\xi''_{k,j}))-(\eta''_{k,j}-E\tau(\eta''_{k,j}))\right|\Rightarrow0\end{aligned}\tag{1.8}$$

reláció, ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl. A $\sum\limits_{j=1}^{n_k}(\eta''_{k,j}-E\tau(\eta''_{k,j}))$ összeg karakterisztikus függvényének logaritmusa kifejezhető egy az M''_k mértékhez közellevő $\bar M''_k$ kanonikus mérték segítségével a következő módon:

$$\log E\exp\left\{it\left(\sum_{j=1}^{n_k}(\eta''_{k,j}-E\tau(\eta''_{k,j}))\right)\right\}=\int\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}\bar M''_k(\,du), \tag{1.9}$$

ahol $\bar M''_k(\,du)=M''_k(\,du)+\sum\limits_{j=1}^{n_k}\frac{\bar p_{k,j}-p_{k,j}}{p_{k,j}}G'_{k,j}(\,du)$, és $G'_{k,j}$ a $G_{k,j}$ mérték megszorítása az $\mathbf{R}^1\setminus[-\varepsilon_k,\varepsilon_k]$ halmazra.

Az $\eta'_{k,j}-E\eta'_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, szériasorozat teljesíti a centrális határeloszlástételt nulla várható értékkel és $M_0(\{0\})$ szórásnégyzettel.

Megfogalmazunk egy eredményt korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változókról, amelyik lehetővé teszi az 1. Tétel bizonyításának befejezését. Emlékeztetőül idézzük fel, hogy amennyiben M kanonikus mérték a számegyenesen, ξ_n, $n=1,2,\dots$, Poisson folyamat a számegyenesen egy olyan μ számlálómértékkel, amelyet a $\mu(du)=\frac{M(\,du)}{u^2}$ képlet határoz meg, azaz egy A halmazba eső pontok száma Poisson eloszlású $\int_A\frac{1}{u^2}\,M(\,du)$ paraméterrel, és diszjunkt halmazokba eső pontok száma független valószínűségi változók, akkor az $\eta=\eta_M=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\xi_n-E\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}\tau(\xi_n)\right)$ összeg, ahol a $\tau(\cdot)$ függvényt az (1.1) képletben definiáltuk, egy valószínűséggel konvergens, és η_M korlátlanul osztható valószínűségi változó. Pontosabban, az η_M valószínűségi változót az

$$\eta_M=\lim_{L\to\infty}\left(\left(\sum_{n\colon\,|\xi_n|>2^{-L}}\xi_n\right)-E\left(\sum_{n\colon\,|\xi_n|>2^{-L}}\tau(\xi_n)\right)\right)$$

formula segítségével definiálhatjuk. Az első részben beláttuk, hogy a fenti limesz egy valószínűséggel létezik. Ezen $\eta=\eta_M$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a logaritmusát a

$$\log\varphi(t)=\log\varphi_M(t)=\int\frac{e^{itu}-1-it\tau(u)}{u^2}M(\,du) \tag{1.10}$$

képlet adja meg. Az előbb definiált η_M valószínűségi változót a μ számlálómértékű $\zeta_1,\zeta_2,\dots$ Poisson folyamat által meghatározott korlátlanul osztható valószínűségi változónak fogjuk nevezni. Megfogalmazzuk az alábbi eredményt.

2. Segédtétel. *Legyen M_k, $k=1,2,\dots$, kanonikus mértékek sorozata, amelyek gyengén konvergálnak egy M_0 kanonikus mértékhez. Teljesüljön továbbá az $M_0(\{0\})=0$ és $M_k(\{0\})=0$, $k=1,2,\dots$, feltétel. Legyen $\mu_k(\,du)=\frac{M_k(\,du)}{u^2}$, $k=0,1,2,\dots$. Ekkor* *definiálhatóak olyan μ_k, $k = 1,2,\dots$ számlálómértékű $\xi_{k,1},\xi_{k,2},\dots$, és μ_0 számlálómértékű $\bar\xi_{k,1},\bar\xi_{k,2},\dots$, Poisson folyamatok, amelyekre a $\xi_{k,1},\xi_{k,2},\dots$ Poisson folyamatok által meghatározott (az (1.9) formula után definiált) η_k és a $\bar\xi_{k.1},\bar\xi_{k,2},\dots$ Poisson folyamatok által meghatározott $\bar\eta_k$ korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változók teljesítik az $\eta_k-\bar\eta_k \Rightarrow 0$ relációt, ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl. (Megjegyezzük, hogy a $\bar\eta_k$ valószínűségi változók eloszlása nem függ a k indextől).*

Megjegyzés: Némi további munkával a 2. Segédtétel némileg élesebb változata is bizonyítható. Lehet olyan konstrukciót is adni, amelyben $\bar\eta_k=\bar\eta$, azaz ez a valószínűségi változó nem függ a k indextől. Továbbá elérhető az is, hogy az $\eta_k-\bar\eta_k\to 0$ reláció egy valószínűséggel teljesüljön. Viszont az általunk megfogalmazott gyengébb eredmény egyszerűbben bizonyítható, és a vizsgált problémában ugynanolyan jól használható. Ezért fogalmaztuk meg a 2. Segédtételt ebben az alakban.

Megmutatatjuk, hogy az 1. és 2. Segédtételből valamint a Tétel A-ból következik az 1. Tétel. Tekintsük az 1. Tételben konstruált $\eta'_{k,j}$, $\eta''_{k,j}$, és $\eta_{k,j}=\eta'_{k,j}+\eta''_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változókat valamint a $T_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}(\eta_{k,j}-E\tau(\eta_{k,j}))$, $T'_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}(\eta'_{k,j}-E\eta'_{k,j})$ és $T''_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}(\eta''_{k,j}-E\tau(\eta''_{k,j}))$ összegeket. Először azt mutatjuk meg, hogy a T_k összegek eloszlásban konvergálnak egy olyan eloszláshoz, amelynek karakterisztikus függvényének logaritmusát az (1.3) formula adja meg. Valóban, $T_k=T'_k+T''_k$, a T'_k és T''_k valószínűségi változók függetlenek, a T'_k valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak egy nulla várható értékű $M_0(\{0\})$ szórásnényzetű normális valószínűségi változóhoz az 1. Segédtétel alapján. Másrészt a T''_k valószínűségi változók eloszlásban konvergálnak az M'' kanonikus mérték által meghatározott korlátlanul osztható eloszláshoz. Ez következik a 2. Segédtételből és abból a tényből, hogy az (1.9) formulában szereplő $\bar M''_k$ kanonikus mértékek konvergálnak ahhoz az ahhoz az M''_0 kanonikus mértékhez, amelyik az M_0 mérték megszorítása az $\mathbf{R}^1\setminus\{0\}$ halmazra. Az $\bar M''_k$ kanonikus mértékek gyenge konvergenciája az M''_0 kanonikus mértékhez következik abból a tényből, az M_k mértékek megszorításai a $\mathbf{R}^1\setminus[-\varepsilon_k,\varepsilon_k]$ halmazokra konvergálnak az M''_0 mértékhez az 1. Lemma eredménye szerint, továbbá a $\sum\limits_{j=1}^{n_k}\frac{\bar p_{k,j}-p_{k,j}}{p_{k,j}}G_{k,j}(\,du)$ mértékek konvergálnak az azonosan nulla mértékhez. Ez utóbbi reláció azért igaz, mert $\frac{\bar p_{k,j}-p_{k,j}}{p_{k,j}}\ge 0$, és $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le j\le n_k}\frac{\bar p_{k,j}-p_{k,j}}{p_{k,j}}\to 0$. Valóban, a $\bar p_{k.j}$ mennyiség $1-e^{-\bar p_{k,j}}=p_{k,j}$ definiciójából következik, hogy $\bar p_{k,j}=-\log(1-p_{k,j})$, ahonnan nagy k indexekre, (mivel ekkor $p_{k,j}$ nagyon kicsi minden j indexre) $p_{k,j}\le\bar p_{k,j}\le p_{k,j}+p^2_{k,j}$. Ezért teljesülnek a $p_{k,j}$ és $\bar p_{k,j}$ mennyiségekre megfogalmazott relációk.

Végül az 1. Segédtétel és a Tétel A lehetővé teszi az 1. Tétel bizonyításának befejezését. Ezen éredmények miatt elég megmutatni azt, hogy az az 1. Segédtételben definiált $\tilde\xi_{k,j}$ valószínűségi változók $\tilde S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\tilde\xi_{k,j}=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\left(\tilde\xi_{k,j}-E\tau(\tilde\xi_{k,j})\right)$ összegei teljesítik az 1. Tételt. Ez viszont igaz, mert az (1.8) formula alapján $\tilde S_k-T_k\Rightarrow 0$, ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl. Ezért a T_k sorozatra már bebizonyított konvergenciából és a Tétel A-ból következik az 1. Tétel.

Egy olyan állítást is bizonyítani fogunk a fenti perturbációs elv segítségével, amely szerint néhány természetes további megkötés esetén nemcsak a sorösszegekre vonatkozó határeloszlástétel, hanem annak egy élesebb változata, az úgynevezett funkcionális határeloszlástétel is érvényes. Azt látjuk be, hogy ha nemcsak az egyes szériasorozatok összes elemének az eloszlásfüggvényeiből készített kanonikus mértékek, hanem a szériasorozatok részletösszegeihez tartozó természetes módon definiálható kanonikus mértékek is konvergálnak, akkor élesebb állítás is érvényes. Ennek az állításnak a megfogalmazása érdekében először felidézzük annak az irodalomban $D([0,1])$ térnek nevezett metrikus tér fogalmát, ahol az eredményt meg tudjuk fogalmazni.

Azt mondjuk, hogy egy $x(t)$, $0 \le t \le 1$, függvény cadlag függvény (continue à droite, limite à gauche), ha az $x(t)$ függvény minden pontjában jobbról folytonos, és létezik baloldali határértéke. A cadlag függvények alkotják a $D([0,1])$ teret alkalmas metrikával e függvények terén. Az egyik lehetséges metrika ezen a téren a következő $d(\cdot,\cdot)$ távolság: Legyen $x, y \in D([0,1])$, két cadlag függvény, $\varepsilon > 0$ valós szám. A $d(x,y) \le \varepsilon$ reláció akkor teljesül, ha létezik olyan szigorúan monoton növekvő folytonos $\lambda(t)$ függvény, amely a $[0,1]$ intervallumnak önmagára vett homomorfizmusa, $\sup\limits_{0\le t\le 1} |\lambda(t) - t| \le \varepsilon$, és $\sup\limits_{0\le t\le 1} |y(t) - x(\lambda(t))| \le \varepsilon$.

A $D([0,1])$ tér a fenti metrikával szeparábilis, de nem teljes metrikus tér. Az, hogy két $x(\cdot)$ és $y(\cdot)$ cadlag függvény közel van egymáshoz a fenti $d(\cdot,\cdot)$ metrika szerint azt fejezi ki, hogy bár a szuprémum norma szerint ez a két függvény távol lehet egymástól, de az egyik függvény paramétertartományának kis transzformációjával a két függvény közel vihető egymáshoz.

Nem ez az egyetlen lehetőség egy metrika bevezetésének a $D([0,1])$ téren. Definiálhatjuk például a következő $d_0(\cdot,\cdot)$ metrikát a $D([0,1])$ téren. Legyen $x(\cdot)$, $y(\cdot)$ két cadlag függvény. Azt mondjuk, hogy $d_0(x,y) \le \varepsilon$, ha létezik a $[0,1]$ intervallumnak olyen $\lambda(\cdot)\colon [0,1] \to [0,1]$ homomorfizmusa önmagára, amelyre

$$\lambda(0) = 0, \quad \sup_{t\ne s} \log \left| \frac{\lambda(t) - \lambda(s)}{t - s} \right| \le \varepsilon, \quad \text{és } |x(t) - y(\lambda(t))| \le \varepsilon \text{ minden } t \in [0,1] \text{ számra.}$$

Be lehet látni, hogy a $d(\cdot,\cdot)$ és $d_0(\cdot,\cdot)$ metrikák ugyanazt a topológiát definiálják a $D([0,1])$ téren. A lényeges különbség az, hogy a $D([0,1])$ tér a fenti $d_0(\cdot,\cdot)$ távolsággal teljes szeparábilis metrikus tér, míg a $d_0(\cdot,\cdot)$ távolsággal nem az.

Megjegyezzük, hogy a Tétel A eredményének megfogalmazásában csak azt tettük fel, hogy a tekintett (X,ρ) metrikus tér szeparábilis, de nem követeltük meg, hogy teljes is legyen. Ez teszi lehetővé, hogy a d metrikát használhassuk a továbbiakban.

A 2. Tétel megfogalmazása érdekében bevezetünk néhány jelölést. Adva egy az egyenletes kicsiséget teljesítő $\xi_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozat, ahol $F_{k,j}$ jelöli a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét definiáljuk az

$$S_{k,0} = 0, \quad S_{k,l} = \sum_{j=1}^{l} \xi_{k,j}, \quad 1 \le l \le n_k \tag{1.11}$$

részletösszegeket, illetve rögzítve minden $k = 1, 2, \dots$ számra egy alkalmas $0 = u_{k,0} \le u_{k,1} \le u_{k,2} \le \dots \le u_{k,n_k} = 1$ számsorozatot az

$$\begin{aligned} S_k(t) = S_k(t, u_{k,0}, \dots, u_{k,n_k}) = S_{k,l-1}, \quad 0 < t \le 1, \quad \text{ha } u_{k,l-1} \le t < u_{k,l}, \\ 1 \le l \le n_k, \quad S_k(1) = S_{k,n_k}, \end{aligned} \tag{1.12}$$

véletlen cadlag függvényeket minden $k = 1, 2, \dots$ indexre. Definiálunk továbbá bizonyos N_k mértékeket a számegyenes és a $[0, 1]$ intervallum $\mathbf{R}^1 \times [0, 1]$ direkt szorzatán a következő módon: Legyen $0 = u_{k,0} \le u_{k,1} \le u_{k,2} \le \dots \le u_{k,n_k} = 1$ ugyanaz a számsorozat mint amelyik az (1.12) formulában szerepelt.

$$\text{Az } N_k(\cdot) \text{ mérték az } \mathbf{R}^1 \times \bigcup_{l=1}^{n_k} \{u_{k,l}\} \text{ halmazra van koncentrálva,} \tag{1.13}$$

és az $N_k(\cdot)$ mérték megszorítása a $\{(t, u)\colon t \in \mathbf{R}^1, u = u_{k,l}\}$ egyenesekre, $1 \le l \le n_k$, legyen az $x^2 F_{k,l}(dx)$ mérték, azaz

$$N_k(B \times \{u_{k,l}\}) = \int_B x^2 F_{k,l}(\,dx), \quad \text{ha } 1 \le l \le n_k, \text{ és } B \subset \mathbf{R}^1 \text{ mérhető halmaz.} \tag{1.14}$$

Vezessük be a kanonikus mértékek konvergenciájának a következő megfelelőjét a $\mathbf{R}^1 \times [0, 1]$ sávban definiált alkalmas tulajdonságú mértékekre, amelyeket szintén kanonikus mértékeknek fogunk nevezni. Az (1.13), és (1.14) formulákban definiált M_k mértékek szintén kanonikus mértékek.

Kanonikus mértékek definiciója és konvergenciája a sík bizonyos sávjain. *Nevezzünk egy az $\mathbf{R}^1 \times [0, 1]$ sávon definiált $N(\cdot)$ mértéket kanonikusnak, ha minden $s > 0$ számra*

$$N([-s, s] \times [0, 1]) < \infty, \quad \textit{és} \quad \int_{\{(u,v)\colon\, |u| \ge s,\ 0 \le v \le 1\}} \frac{N(\,du,\,dv)}{v^2} < \infty.$$

Legyen adva N_k, $k = 0, 1, 2, \dots$, kanonikus mértékek egy sorozata az $\mathbf{R}^1 \times [0, 1]$ sávon. Azt mondjuk, hogy az N_k kanonikus mértékek sorozata konvergál az N_0 kanonikus mértékhez a $\mathbf{R}^1 \times [0, 1]$ sávon $k \to \infty$ esetén, ha tetszőleges olyan $0 \le a \le b \le 1$ számokra, amelyek az N_0 mérték folytonossági pontjai, azaz amelyekre $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} N_0([-R, R] \times [a - \varepsilon, a + \varepsilon]) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} N_0([-R, R] \times [b - \varepsilon, b + \varepsilon]) = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|u| > R,\, |v - a| < \varepsilon} \frac{N_0(du,dv)}{v^2} = 0$, $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int_{|u| > R,\, |v - b| < \varepsilon} \frac{N_0(du,dv)}{v^2} = 0$ minden $R > 0$ számra, az $M_{k,a,b}(B) = N_k(B \times [a, b])$, $k = 1, 2, \dots$, képlettel a számegyenesen definiált $M_{k,a,b}(\cdot)$ kanonikus mértékek konvergálnak a számegyenesen az $M_{0,a,b}(B) = N_0(B \times [a, b])$ képlettel definiált $M_{0,a,b}(\cdot)$ kanonikus mértékhez, ha $k \to \infty$.

Az alább megfogalmazott 2. Tétel azt mondja ki, hogy ha az (1.13), és (1.14) képletekben az $\mathbf{R}^1 \times [0, 1]$ sávon definiált N_k kanonikus mértékek konvergálnak egy az $\mathbf{R}^1$ sávon deffiniált N_0 kanonikus mértékhez, akkor az (1.12) képletben definiált $S_k(\cdot)$ $D([0,1])$ térbeli valószínűségi változók gyengén konvergálnak egy $D([0,1])$ térbeli valószínűségi változóhoz, amelynek véges dimenziós eloszlásait az N_0 kanonikus mérték segítségével explicit módon meg tudjuk adni.

2. Tétel. *Legyen $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, az egyenletes kicsiségnek eleget tevő szériasorozat, amelynek minden tagja teljesíti az $E\tau(\xi_{k,j})=0$ feltételt az (1.2) képletben definiált $\tau(x)=\tau_a(x)$ függvénnyel, ahol $a>0$ valamilyen rögzített szám. Definiáljunk minden $k=1,2,\dots$ számra egy olyan $0=u_{k,0}\le u_{k,1}\le u_{k,2}\le\cdots\le u_{k,n_k}=1$ számsorozatot, amelyre $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le l\le n_k}|u_{k,l}-u_{k,l-1}|=0$, és tekintsük az (1.13) és (1.14) képletek és az előbbi $0=u_{k,0}\le u_{k,1}\le u_{k,2}\le\cdots\le u_{k,n_k}=1$ számsorozat segítségével definiált N_k kanonikus mértéket az $\mathbf{R}^1\times[0,1]$ sávon. Tegyük fel, hogy az $\mathbf{R}^1\times[0,1]$ sávon definiált N_k kanonikus mértékek sorozata konvergál egy alkalmas N_0 kanonikus mértékhez. Tegyük fel továbbá, hogy*

- *a.) Az N_0 határmérték segítségével definiált $\lambda(t)=N_0(\{0\}\times[0,t])$, $0\le t\le1$, függvény a $[0,1]$ intervallumban folytonos.*
- *b.) Minden $b>0$ számra az N_0 határmérték segítségével definiált*

$$\nu_b(t)=\int_{\{(x,y)\ |x|>b,\ 0\le y\le t\}}\frac{N_0(dx,dy)}{x^2},\qquad 0\le t\le1,$$

függvény a $[0,1]$ intervallumban folytonos.

Ekkor az (1.12) képletben definiált $S_k(t)$, $0\le t\le1$, sztochasztikus folyamatok mint $D([0,1])$ térben értelmezett valószínűségi változók gyengén konvergálnak egy olyan $S(t)$, $0\le t\le1$, sztochasztikus folyamathoz, amely szintén tekinthető, mint egy $D([0,1])$ térbeli valószínűségi változó. Ez az $S(t)$ folyamat független növekményű sztochasztikus folyamat, amelyet egy egy N_0 számlálómértékű Poisson folyamat definiál természetes módon. Tekintsük e sztochasztikus folyamat egyik $S(v)-S(u)$, $0\le u\le v\le1$, alakú növekményét. E valószínűségi változó eloszlása olyan korlátlanul osztható eloszlás, amelyeket az $M_{0,u,v}(\,dx)=N_0(\,dx\times[0,v])$ képlettel definiált $M_{0,u,v}$ kanonikus mértékek határoz meg. Ez azt jelenti, hogy az $S(v)-S(u)$ valószínűségi változó $\varphi_{u,v}(t)$ karakterisztikus függvényének létezik logaritmusa, amelyet az (1.3) képlet alábbi változata ad meg:

$$\log\varphi_{u,v}(t)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}-1-it\tau(x)}{x^2}M_{0,u,v}(\,dx).\tag{1.15}$$

Megjegyzés: A 2. Tétel a.) feltételében megfogalmazott első látásra talán nem természetes feltétel azt fejezi ki, hogy a határfolyamat Gauss része olyan független növekményű $X(t)$, $0\le t\le1$, Gauss folyamat, amelyre az $s(t)=\operatorname{Var}X(t)$ függvény folytonos a $[0,1]$ intervallumban. Hasonlóan a b.) feltétel segítségével bizonyos nem folytonosságból származó ellenpéldákat kívánunk kizárni.

Az 1. és 2. Tétel bizonyítása hasonló elven alapul. Az 1. Tételben használt 1. Segédtétel konstrukciója, amely lehetővé teszi a szériasorozatokban szereplő valószínűségi változóknak alkalmas korlátlanul osztható valószínűségi változókkal való helyettesítését alkalmazható a 2. Tétel bizonyításában is. Jegyezzük meg, hogy az 1. Segédtételben szereplő (1.8) formulát úgy fogalmaztuk meg, hogy az alkalmas legyen a 2. Tétel bizonyításában is, és a $\sup\limits_{1\le j\le n_k}$ kifejezés azért szerepel ebben a formulában.

Röviden áttekintjük az 1. Tétel bizonyításának gondolatát. A 2. Tétel bizonyítása ehhez hasonló módon történhet. Az 1. Lemma és az 1. Segédtétel lehetővé teszi, hogy a vizsgálandó összegek vizsgálatát helyettesíteni tudjuk két másik összeg vizsgálatával, és ennek a két összegnek a vizsgálatát szeparálni tudjuk. Mind a két esetben egy alkalmasan definiált szériasorozat összegeinek határeloszlását kell vizsgálnunk. Az első összeg viselkedése adja meg a határérték normális a másik összeg pedig annak nem normális részét. Az első összeg viselkedését le tudjuk írni a centrális határeloszlástétel segítségével. A második összeg vizsgálatát másként végezhetjük. Ekkor az 1. Lemma, az 1. Segédtétel és a Tétel A lehetővé teszi, hogy a vizsgálandó szériasorozat tagjait korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változókkal helyettesítsük, és belássuk hogy ezen korlátlanul osztható valószínűségi változók összegeinek ugyanaz a határeloszlása mint az eredeti valószínűségi változók összegeinek. Ez utóbbi korlátlanul osztható valószínűségi változók összegeinek vizsgálata már egyszerűbb, és ezt a vizsgálatot hajtjuk végre a 2. Lemmában. A fenti gondolatmenet természetes módon adaptálható a 2. Tétel bizonyításában.

A fentiek alapján a határeloszlások nem normális komponensének megjelenését informálisan következőképp magyarázhatjuk. Az egyes összeadandók közel vannak egy korlátlanul osztható valószínűségi változóhoz, és ezen korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változók összegeinek határeloszlása viszonylag könnyen megadható. Ez azt is jelenti, hogy a nem normális határeloszlással rendelkező határeloszlástételekben az egyes összeadandóknak speciálisnak alakúaknak kell lenniük.

Jegyezzük meg, hogy bár rejtve, de az egyes valószínűségi változók helyettesítése egy közeli korlátlanul osztható valószínűségi változóval szintén megjelenik a II. részben alkalmazott a karakterisztikus függvények segítségével megadott bizonyításban.

Valóban tekintsünk egy $\xi_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, az egyenletes kicsiség feltételét teljesítő szériasorozat. Jelölje $\varphi_{k,j}(t)$ a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változó karakterisztikus függvényét. Ekkor a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változók $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\xi_{k,j}$ összegeinek karakterisztikus függvényei teljesítik a

$$\lim_{k\to\infty}\prod_{j=1}^{n_k}\varphi_{k,j}(t)=\psi(t)$$

relációt alkalmas $\psi(t)$ karakterisztikus függvénnyel. Beláttuk azt a (nem triviális) tényt, hogy a fenti relációban lehet logaritmust venni, azaz ez ekvivalens a

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\log\varphi_{k,j}(t)=\log\psi(t)$$

relációval. A bizonyítás másik fontos lépése az volt, hogy mivel a $\xi_{k,j}$ változók egyenletes kicsik, ezért a $\log\varphi_{k,j}(t)$ tag a fenti összegben helyettesíthető az $-(1-\varphi_{k,j}(t))$ kifejezéssel, azaz a fenti formula ekvivalens azzal, hogy

$$\lim_{k\to\infty} -\sum_{j=1}^{n_k}(1-\varphi_{k,j}(t)) = \log\psi(t).$$

Vegyük észre, hogy mint azt az I. részben beláttuk, az $-(1-\varphi_{k,j}(t))$ függvény annak a korlátlanul osztható valószínűségi változó karakterisztikus függvényének a logaritmusa, amelyet az a Poisson folyamat határoz meg, amelynek számláló mértéke a $\xi_{k,j}$ valószínűségi változó $F_{k,j}$ eloszlásfüggvénye. Így a $\log\varphi_{k,j}(t)$ függvénynek a fenti helyettesítése felel meg az egyes valószínűségi változók helyettesítésének egy korlátlanul osztható valószínűségi változóval.

2. Az 1. Tétel bizonyítása.

Ebben a részben belátjuk az 1. Tétel bizonyításában felhasznált eredményeket, azaz az 1. Lemmát, az 1. Segédtételt és a 2. Segédtételt.

Az 1. Lemma bizonyítása: Válasszunk egy olyan monoton csökkenő η_p, $p=1,2,\dots$, sorozatot, amelyre $\lim\limits_{p\to\infty}\eta_p=0$, és $\pm\eta_p$ az M_0 mérték folytonossági pontja. Ekkor teljesül a $\lim\limits_{p\to\infty} M_0((-\eta_p,\eta_p))=M_0(\{0\})$ reláció. Ezenkívül minden $p=1,2,\dots$ számhoz létezik olyan $k(p)$ küszöbindex, amelyre $|M_k((-\eta_p,\eta_p))-M_0(-\eta_p,\eta_p))|\le\frac1p$, ha $k\ge k(p)$. Továbbá, ha az origó az M_0 mérték folytonossági pontja, azaz $M(\{0\})=0$, akkor $|M_k((0,\eta_p))-M_0(0,\eta_p))|\le\frac1p$. Feltehetjük azt is, hogy $|M_0^\pm(\eta_p)-M_k^\pm(\eta_p)|\le\frac1p$, ha $k\ge k(p)$, ahol az $M_0^\pm(\cdot)$ és $M_k^\pm(\cdot)$ függvényeket az (1.4) formulában definiáltuk. Az egyenletes kicsiség feltételének teljesülése miatt biztosítható az is, hogy

$$\sup_{1\le j\le n_k}(1-F_{k,j}(\eta_p))+\sup_{1\le j\le n_k}F_{k,j}(-\eta_p)\le\frac{1}{p(M_0^+(\eta_p)+M_0^-(\eta_p))+2},$$

ha $k\ge k(p)$ és a $k(p)$ küszöbindexet elég nagynak választjuk. Feltehetjük azt is, hogy a küszöbindexek $k(p)$ sorozata szigorúan monoton növekvő. Legyen $\varepsilon_k=\eta_p$, ha $k(p)\le k<k(p+1)$. Ezzel a választással teljesülnek a Lemma állításai. Ugyanis,

$$\lim_{k\to\infty} M_k'([a,b])=\lim_{k\to\infty} M_k'([-\eta_{k(p)},\eta_{k(p)}])=M_0(\{0\})=M_0'([a,b]),$$

ha az $[a,b]$ intervallum a belsejében tartalmazza az origót, és $\lim\limits_{k\to\infty} M_k'([a,b])=0=M_0'([a,b])$, ha az $[a,b]$ intervallum nem tartalmazza belsejében az origót, és az a és b pontok az M_0 mérték folytonossági pontjai (tehát akkor is, ha 0 az M_0 mérték folytonossági pontja, és $a=0$ vagy $b=0$). E tényekből, illetve abból, hogy az M_k', $k=1,2,\dots$, és M_0' mérték egy véges $[-A,A]$ intervallumba van koncentrálva, következik, hogy az M_k' mértékek (gyengén) konvergálnak az M_0' mértékhez. Mivel az M_k mértéksorozat (gyengén) konvergál az M_0 mértékhez, az M'_k mértéksorozat pedig az M'_0 mértékhez az $M''_k = M_k - M'_k$ mértéksorozat is (gyengén) konvergál az $M''_0 = M_0 - M'_0$ mértékhez. Továbbá

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n_k}[(1-F_{k,j}(\varepsilon_k))+F_{k,j}(-\varepsilon_k)]^2 \\
&\qquad\le \sup_{1\le j\le n_k}[(1-F_{k,j}(\varepsilon_k))+F_{k,j}(-\varepsilon_k)]\sum_{j=1}^{n_k}[(1-F_{k,j}(\varepsilon_k))+F_{k,j}(-\varepsilon_k)] \\
&\qquad= \sup_{1\le j\le n_k}[(1-F_{k,j}(\varepsilon_k))+F_{k,j}(-\varepsilon_k)](M_k^+(\varepsilon_k)+M_k^-(\varepsilon_k)) \\
&\qquad\le \frac{1}{p(M_0^+(\eta_p)+M_0^-(\eta_p))+2}\left(M_0^+(\varepsilon_k)+M_0^-(\varepsilon_k)+\frac{2}{p}\right)\le\frac{2}{p},
\end{aligned}$$

ha $k \ge k(p)$. Innen $k\to\infty$ határátmenettel kapjuk az 1. Lemma még nem bizonyított állítását.

Az 1. Segédtétel bizonyítása: Mivel $\tilde\xi_{k,j} = \eta'_{k,j}I(\zeta_{k,j}=0)+\gamma_{k,j,1}I(\zeta_{k,j}\ge 1)$, és $\zeta_{k,j}$ független a többi valószínűségi változótól, ezért tetszőleges $A\subset \mathbf{R}^1$ mérhető halmazra

$$\begin{aligned}
P(\tilde\xi_{k,j}\in A) &= P(\tilde\xi_{k,j}\in A|\zeta_{k,j}=0)P(\zeta_{k,j}=0)+P(\tilde\xi_{k,j}\in A|\zeta_{k,j}\ge 1)P(\zeta_{k,j}\ge 1) \\
&= P(\eta'_{k,j}\in A)P(\zeta_{k,j}=0)+P(\gamma_{k,j,1}\in A)P(\zeta_{k,j}\ge 1) \\
&= \nu'(A)p_{k,j}+\nu''(A)(1-p_{k,j}) \\
&= P(\xi_{k,j}\in A\cap\{x\colon |x|<\varepsilon_k\})+P(\xi_{k,j}\in A\cap\{x\colon |x|\ge\varepsilon_k\}) \\
&= P(\xi_{k,j}\in A),
\end{aligned}$$

azaz $\tilde\xi_{k,j}$ és $\xi_{k,j}$ azonos eloszlásúak. A konstrukcióból azonnal látható, hogy rögzített k-ra a $\tilde\xi_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változók függetlenek. Ugyancsak könnyen következik ebből a konstrukcióból, hogy rögzített k-ra a $\eta'_{k,j}$, $\eta''_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változók függetlenek, és $P(|\xi'_{k,j}|\le\varepsilon_k)=P(|\eta'_{k,j}|\le\varepsilon_k)=1$. A $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}|E\xi'_{k,j}-E\eta'_{k,j}|=0$ reláció bizonyítása érdekében vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned}
|E\xi'_{k,j}-E\eta'_{k,j}| &= (1-P(\zeta_{k,j}=0))|E\eta'_{k,j}| = \frac{1-P(\zeta_{k,j}=0)}{P(\zeta_{k,j}=0)}|E\xi'_{k,j}| \\
&= \frac{P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)}{P(|\xi_{k,j}|<\varepsilon_k)}|E\tau(\xi''_{k,j})| \le 2P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)|E\tau(\xi''_{k,j})|,
\end{aligned}$$

ha $k\ge k_0$ alkalmas k_0 konstanssal, mert $0=E\tau(\tilde\xi_{k,j})=E\xi'_{k,j}+E\tau(\xi''_{k,j})$, és $P(\zeta_{k,j}\ge 1)=1-e^{-\bar p_{k,j}}=p_{k,j}=P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)$, ahol $\bar p_{k,j}$ a $p_{k,j}=1-e^{-\bar p_{k,j}}$ egyenlet megoldása, $p_{k,j}=P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)$, és $p_{k,j}\le\frac12$, ha $k\ge k_0$. Mivel $|E\tau(\xi''_{k,j})|\le aP(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)$ innen kapjuk, hogy $|E\xi'_{k,j}-E\eta'_{k,j}|\le 2aP(|\xi_{k,j}|\le\varepsilon_k)^2=2a\,[(1-F_{k,j}(\varepsilon_k))+F_{k,j}(-\varepsilon_k)]^2$.

Ezeket az egyenlőtlenséget összegezve a $j=1,\dots,n_k$ számokra és felhasználva az (1.5) formulát megkapjuk a bízonyítandó (1.7) relációt.

Az (1.8) formula első relációját a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével bizonyíthatjuk. Valóban, tetszőleges $\varepsilon>0$ számra

$$
\begin{aligned}
P\left(\sup_{1\le p\le n_k}\left|\sum_{j=1}^{p}(\xi'_{k,j}-E\xi'_{k,j})-(\eta'_{k,j}-E\eta'_{k,j})\right|>\varepsilon\right)&\le\frac{\sum\limits_{j=1}^{n_k}\mathrm{Var}\,(\xi'_{k,j}-\eta'_{k,j})}{\varepsilon^2}\\
=\frac{\sum\limits_{j=1}^{n_k}(1-P(\zeta_{k,j}=0))^2\mathrm{Var}\,\eta'_{k,j}}{\varepsilon^2}&\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sup_{1\le j\le n_k}(1-P(\zeta_{k,j}=0))^2\sum_{j=1}^{n_k}E{\eta'_{k,j}}^2\\
=\frac{1}{\varepsilon^2}M_k([-\varepsilon_k,\varepsilon_k])\sup_{1\le j\le n_k}P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)^2\to 0&
\end{aligned}
$$

ha $k\to\infty$, mert az 1. Lemmában megadott konstrukcióban $\limsup\limits_{k\to\infty}M_k([-\varepsilon_k,\varepsilon_k])\le M_0(\{0\})<\infty$, és $\sup\limits_{1\le j\le n_k}(P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)^2\to 0$ ha $k\to\infty$.

Az (1.8) formula második állításának bizonyítása érdekében belátjuk először azt, hogy

$$
E\tau(\eta''_{k,j})=\frac{\bar p_{k,j}}{p_{k,j}}\int_{\{|u|\ge\varepsilon_k\}}\tau(u)F_{k,j}(\,du)=\frac{\bar p_{k,j}}{p_{k,j}}E\tau(\xi''_{k,j}). \tag{2.1}
$$

ahol, $p_{k,j}=P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)=[(1-F_{k,j}(\varepsilon_k)+F_{k,j}(-\varepsilon_k)]$, és $\bar p_{k,j}$ az $1-e^{-\bar p_{k,j}}=p_{k,j}$ egyenlet megoldása. Valóban, felhasználva, hogy ha $\eta_1,\eta_2,\dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók, és τ nem negatív egész értékű valószínűségi változó, amely független az η_j valószínűségi változóktól, akkor $E(\eta_1+\cdots+\eta_\tau)=E\tau E\eta_1$, továbbá $E\zeta_{k,j}=\bar p_{k,j}$ kapjuk, hogy

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{l=1}^{\zeta_{k,j}}\gamma_{k,j,l}I(|\gamma_{k,j,l}|\le a)\right)&=\frac{E\zeta_{k,j}}{p_{k,j}}\int_{\{\varepsilon_k\le|u|\le a\}}\tau(u)F_{k,j}(\,du)\\
&=\frac{\bar p_{k,j}}{p_{k,j}}\int_{\{\varepsilon_k\le|u|\le a\}}\tau(u)F_{k,j}(\,du),
\end{aligned}
$$

és hasonlóan

$$
\begin{aligned}
E\left(\sum_{l=1}^{\zeta_{k,j}}I(|\gamma_{k,j,l}|\ge a)\right)&=\bar\nu_{k,j}((-\infty,-a]\cup[a,\infty))E\zeta_{k,j}\\
&=\frac{\bar p_{k,j}}{p_{k,j}}\left[1-F_{k,j}(a)+F(-a_{k,j})\right].
\end{aligned}
$$

Mivel

$$E\tau(\eta''_{k,j}) = E\left(\sum_{l=1}^{\zeta_{k,j}} \gamma_{k,j,l} I(|\gamma_{k,j,l}| \le a)\right) + aE\left(\sum_{l=1}^{\zeta_{k,j}} I(|\gamma_{k,j,l}| \ge a)\right),$$

a fenti két azonosságból következik a (2.1) formula.

Az (1.8) reláció második formulájának bizonyítása érdekében vegyük észre, hogy

$$\xi''_{k,j} - \eta''_{k,j} = \xi''_{k,j} - \sum_{l=1}^{\zeta_{k,j}} \gamma_{k,j,l} = I(\zeta_{k,j} \ge 2) \sum_{l=2}^{\zeta_{k,j}} \gamma_{k,j,l}$$

mert a konstrukció szerint a $\zeta_{k,j} = 0$ halmazon $\xi''_{k,j} = \eta''_{k,j} = 0$, és a $\zeta_{k,j} = 1$ halmazon $\xi''_{k,j} = \eta''_{k,j} = \gamma_{k,j,1}$. Ezt felhasználva kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{j=1}^{p} \xi''_{k,j} - \sum_{j=1}^{p} \eta''_{k,j} \ne 0 \text{ valamilyen } 1 \le p \le n_k \text{ számra}\right) \le \sum_{j=1}^{n_k} P(\zeta_{k,j} \ge 2) \\ &\qquad \le \sum_{j=1}^{n_k} [(1 - F_{k,j}(\varepsilon_k) + F_{k,j}(-\varepsilon_k))]^2 \to 0 \quad \text{ha } k \to \infty \end{aligned}$$

az (1.5) formula alapján. Ezért az (1.8) reláció második formulájának bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} |E\tau(\xi''_{k,j}) - E\tau(\eta''_{k,j})| = 0.$$

Viszont a (2.1) formula alapján

$$|E\tau(\xi''_{k,j}) - E\tau(\eta''_{k,j})| = \left|\frac{\bar p_{k,j} - p_{k,j}}{p_{k,j}} E\tau(\xi''_{k,j})\right| \le 2ap^2_{k,j} = 2aP^2(|\xi_{k,j}| \ge \varepsilon_k),$$

ha $k \ge k_0$. Innen

$$\sum_{j=1}^{n_k} |E\tau(\xi''_{k,j}) - E\tau(\eta''_{k,j})| \le 2a \sum_{j=1}^{n_k} [(1 - F_{k,j}(\varepsilon_k) + F_{k,j}(-\varepsilon_k)]^2 \to 0 \quad \text{ha } k \to \infty$$

az (1.5) formula alapján. A fenti relációkból következik az (1.8) formula.

Végül az (1.6) formulában szereplő azonosságokat összeadva rögzített k-ra és minden $1 \le j \le n_k$ számra, és felhasználva az M''_k mértéknek az 1. Lemmában megadott definicióját kapjuk, hogy

$$\log E \exp\left\{ it \left(\sum_{j=1}^{n_k} (\eta''_{k,j}\right)\right\} = \int \frac{e^{itu} - 1}{u^2} \bar M''_k(\,du),$$

és mivel a (2.1) azonosságot összegezve a j változóban az $\sum\limits_{j=1}^{n_k} E\tau(\eta''_{k,j})) = \int \frac{\tau(u)}{u^2}\bar{M}''_k(\,du)$ azonosságot kapjuk, innen kövekezik az (1.9) formula. Az $\eta'_{k,j}-E\eta'_{k,j}$, $1\le j\le n_k$, valószínűségi változók függetlenek, $|\eta'_k - E\eta'_k| \le \varepsilon_k$, ezért a $T'_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k}(\eta'_{k,j}-E\eta_{k,j})$ összegekre alkalmazható a centrális határeloszlástétel. Az 1. Segédtétel bizonyítását befejezzük, ha megmutatjuk, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}\operatorname{Var}\eta'_{k,j}=M_0(\{0\})$. Ez következik az alább bizonyítandó

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\left(E\eta'_{k,j}\right)^2=0,\quad \lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}\left|E\eta'^{\,2}_{k,j}-E\xi'^{\,2}_{k,j}\right|=0 \tag{2.2}$$

azonosságokból, mert $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}E\xi'^{\,2}_{k,j}=M_0(\{0\})$.

Az (1.7) formula bizonyításához hasonlóan kapjuk, hogy

$$\left|E\eta'_{k,j}\right|=\frac{|E\xi'_{k,j}|}{P(\zeta_{k,j}=0)}=\frac{|E\tau(\xi''_{k,j})|}{P(|\xi_{k,j}|<\varepsilon_k)}\le 2|E\tau(\xi''_{k,j})|\le 2aP(|\xi_{k,j}|>\varepsilon_k),$$

ha $k\ge k_0$ alkalmas k_0 konstanssal. Innen és az (1.5) formulából következik a (2.2) formula első állítása. Másrészt

$$\begin{aligned}\left|E\xi'^{\,2}_{k,j}-E\eta'^{\,2}_{k,j}\right|&=(1-P(\zeta_{k,j}=0))E\eta'^{\,2}_{k,j}=\frac{1-P(\zeta_{k,j}=0)}{P(\zeta_{k,j}=0)}E\xi'^{\,2}_{k,j}\\&\le 2P(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)E\xi'^{\,2}_{k,j}.\end{aligned}$$

Innen és a Schwarz egyenlőtlenségből következik, hogy

$$\sum_{j=1}^{n_k}\left|E\xi'^{\,2}_{k,j}-E\eta'^{\,2}_{k,j}\right|\le\left(\sum_{j=1}^{n_k}4P^2(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)\cdot\sum_{j=1}^{n_k}\left(E\xi'^{\,2}_{k,j}\right)^2\right)^{1/2}\to 0,\quad\text{ha } k\to\infty,$$

mert $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}P^2(|\xi_{k,j}|\ge\varepsilon_k)=0$ az (1.5) formula alapján, és

$$\sum_{j=1}^{n_k}\left(E\xi'^{\,2}_{k,j}\right)^2\le\text{const.}\sum_{j=1}^{n_k}E\xi'^{\,2}_{k,j}\le\text{const.}$$

minden $k\ge1$ számra.

A 2. Segédtétel bizonyítása. Mivel az M_k kanonikus mértékek konvergálnak az M_0 kanonikus mértékhez, és $M_0(\{0\})=0$, ezért minden $\varepsilon>0$ számhoz léteznek olyan $\delta=\delta(\varepsilon)>0$, $R=R(\varepsilon)$ számok és olyan $\bar n=\bar n(\varepsilon)$ küszöbindex, amelyekre

$$M_k((-\delta,\delta))<\varepsilon^3,\qquad\int_{\{u\colon|u|>R\}}\frac{1}{u^2}M_k(\,du)<\varepsilon,\quad\text{ha } k\ge\bar n(\varepsilon). \tag{2.3}$$

Továbbá azt is feltehetjük, hogy a $\pm\delta = \pm\delta(\varepsilon)$ és $\pm R = \pm R(\varepsilon)$ számok az M_0 mérték folytonossági pontjai.

Vezessük be a $\mu_k(\,dx) = \frac{M_k(dx)}{x^2}$, $k = 1, 2, \dots$, és $\mu_0(\,dx) = \frac{M_0(dx)}{x^2}$ mértékeket a számegyenesen. Válasszunk olyan $\delta = x_1 < x_2 < \dots < x_s = R$ számokat, ahol s egy alkalmas pozitív egész szám, amelyekre $\pm x_l$ az M_0 mérték folytonossági pontja, $1 \le l \le s$, és $\frac{\varepsilon^4}{2L} < x_l - x_{l-1} < \frac{\varepsilon^4}{L}$, $1 < l \le s$, ahol $L = \sup\limits_{k \ge 0} \mu_k\left((-R, -\delta) \cup (\delta, R)\right)$. Valójában a most definiált definiált $\delta = x_1 < x_2 < \dots < x_s = R$ sorozat az $\bar{n}(\varepsilon)$ küszöbindexen keresztül függ ez ε számtól is, de ezt a függést nem fogjuk feltüntetni a jelölésünkben.

Tekintsük az $\varepsilon_j = 2^{-j}$, $j = 1, 2, \dots$, számsorozatot. Választani fogunk egy alkalmas $n_j = n_j(\varepsilon_j) \ge \bar{n}(\varepsilon_j)$, $j = 1, 2, \dots$, számsorozatot és megkonstuáljuk az η_k és $\bar{\eta}_k$ korlátlanul osztható valószínűségi változókat $n_j \le k \le n_{j+1}$ sorozatokat indexekre, majd belátjuk, hogy az n_j sorozat alkalmas megválaztása esetén az η_k és $\bar{\eta}_k$, $k = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók teljesítik a 2. Segédtétel állítását.

A konstruálandó η_k és $\bar{\eta}_k$ korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változókat egy $\xi_{k,1}, \xi_{k,2}, \dots$, μ_k számlálómértékű és egy $\bar{\xi}_{k,2}, \bar{\xi}_{k,2}, \dots$, μ_0 számlálómértékű Poisson folyamat segítségével konstruáljuk meg a szokásos módon definiálható regularizált összegezés segítségével úgy mint azt az első részben tettük. Azaz, legyen

$$\begin{aligned}
\eta_k(\omega) &= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{p\colon\, |\xi_{k,p}(\omega)| \ge 2^{-N}} \xi_{k,p}(\omega) - E\left(\sum_{p\colon\, |\xi_{k,p}(\omega)| \ge 2^{-N}} \tau(\xi_{k,p}(\omega)\right)\right), \\
\bar{\eta}_k(\omega) &= \lim_{N \to \infty} \left(\sum_{p\colon\, |\bar{\xi}_{k,p}(\omega)| \ge 2^{-N}} \bar{\xi}_{k,p}(\omega) - E\left(\sum_{p\colon\, |\bar{\xi}_{k,p}(\omega)| \ge 2^{-N}} \tau(\bar{\xi}_{k,p}(\omega)\right)\right),
\end{aligned} \tag{2.4}$$

ahol a $\tau(x) = \tau_a(x)$ függvényt az (1.2) képletben definiáltuk. Az első részben láttuk, hogy a (2.4) képletben definiált limesz egy valószínűséggel létezik, és az e formulában konstruált η_k és $\bar{\eta}_k$ valószínűségi változók az előírt eloszlásokkal rendelkeznek. (Pontosabban, az első részben egy ezzel ekvivalens állítást láttunk be, ahol a $\tau(\cdot)$ normalizáló tag helyett más normalizálást választottunk. A $|\xi_{k,p}(\omega)| > 2^{-N}$ feltételben 2^{-N} helyett bármilyen mononoton csőkkenő $A_N \to 0$ sorozatot választhattunk volna.) Megmutatjuk, hogy a (2.4) képletben szereplő Poisson folyamatok alkalmas konstrukciójával el tudjuk érni, hogy az $(\eta_k, \bar{\eta}_k)$ párok teljesítsék a 2. Segédtétel állítását.

A $\xi_{k,1}, \xi_{k,2}, \dots$, μ_k számlálómértékű és $\bar{\xi}_{k,2}, \bar{\xi}_{k,2}, \dots$, μ_0 számlálómértékű Poisson folyamatok megkonstruálását olyan $\zeta^{\pm}_{k,l}$ és $\bar{\zeta}^{\pm}_{k,l}$, $1 \le l < s$, valószínűségi változók megkonstruálásával kezdjük, amelyek közül $\zeta^{+}_{k,l}$ és $\bar{\zeta}^{+}_{k,l}$ megadják, hogy a $\xi_{k,l}$ illetve $\bar{\xi}_{k,l}$, $l = 1, 2, \dots$, Poisson folyamatok hány pontot tartalmaznak az $[x_l, x_{l+1})$ intervallumban és hasonlóan a $\zeta^{-}_{k,l}$ és $\bar{\zeta}^{-}_{k,l}$ változók megadják, hogy ezek a $\xi_{k,l}$ illetve $\bar{\xi}_{k,l}$ Poisson folyamatok hány pontot tartalmaznak az $[-x_{l+1}, -x_l)$ intervallumban.

Legyenek $\alpha^{\pm}_{k,l}$, $\beta^{\pm}_{k,l}$, $1 \le l < s$, független Poisson eloszlású valószínűségi változók $\alpha^{+}_{k,l}$ $\min(\mu_k((x_l, x_{l+1})), \mu((x_l, x_{l+1})))$ és $\beta^{+}_{k,l}$

$$\max(\mu_k((x_l, x_{l+1})), \mu_0((x_l, x_{l_1}))) - \min(\mu_k((x_l, x_{l+1}), \mu_0(x_l, x_{l+1})))$$

paraméterekkel. Hasonlóan az $\alpha^-_{k,l}$ valószínűségi változónak legyen

$$\min(\mu_k((-x_{l+1},-x_l)),\mu_0((-x_{l+1},-x_l)))$$

és a $\beta^-_{k,l}$ változónak pedig legyen

$$\max(\mu_k((-x_{l+1},-x_l)),\mu_0((-x_{l+1},-x_l))) \\ -\min(\mu_k((-x_{l+1},-x_l)),\mu_0((-x_{l+1},-x_l)))$$

a paramétere. Ha $\mu_k((x_l,x_{l+1}))\le\mu_0((x_l,x_{l+1}))$ akkor legyen $\zeta^+_{k,l}=\alpha^+_{k,l}$, $\bar\zeta^+_{k,l}=\alpha^+_{k,l}+\beta^+_{k,l}$, ha pedig $\mu_k((x_l,x_{l+1}))>\mu_0((x_l,x_{l+1}))$ akkor legyen $\bar\zeta^+_{k,l}=\alpha^+_{k,l}$, $\zeta^+_{k,l}=\alpha^+_{k,l}+\beta^+_{k,l}$, $1\le l<s$. Hasonlóan definiáljuk a $\zeta^-_{k,l}$ és $\bar\zeta^-_{k,l}$ valószínűségi változókat, csak itt az (x_l,x_{l+1}) intervallumot a $(-x_{l+1},-x_l)$ intervallummal az $\alpha^+_{k,l}$ és $\beta^+_{k,l}$ valószínűségi változókat pedig az $\alpha^-_{k,l}$ és $\beta^-_{k,l}$ valószínűségi változókkal helyettesítjük.

Az előbb konstruált $\zeta^+_{k,l}$ és $\zeta^-_{k,l}$ valószínűségi változók Poisson eloszlásúak, és paramétereik $\mu_k((x_l,x_{l+1}))$ illetve $\mu_k((-x_{l+1},-x_l))$. Hasonlóan, a $\bar\zeta^+_{k,l}$ és $\bar\zeta^-_{k,l}$ valószínűségi változók Poisson eloszlásúak $\mu((x_l,x_{l+1}))$ illetve $\mu((-x_{l+1},-x_l))$ paraméterekkel. Továbbá,

$$\begin{aligned} E\left|\zeta^+_{k,l}-\bar\zeta^+_{k,l}\right| &= \left|E\left(\zeta^+_{k,l}-\bar\zeta^+_{k,l}\right)\right| = \left|\mu_k((x_l,x_{l+1}))-\mu_k((x_l,x_{l+1}))\right|, \\ E\left|\zeta^-_{k,l}-\bar\zeta^-_{k,l}\right| &= \left|E\left(\zeta^-_{k,l}-\bar\zeta^-_{k,l}\right)\right| = \left|\mu_k((-x_{l+1},-x_l))-\mu_k((-x_{l+1},-x_l))\right|. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Dobjunk $\zeta^+_{k,l}$ számú pontot egymástól függetlenül az (x_l,x_{l+1}) intervallumba úgy, hogy a pontok $\frac{\mu(A)}{\mu((x_l,x_{l+1}))}$ valószínűséggel essenek egy $A\subset(x_l,x_{l+1})$ halmazba, és $\zeta^-_{k,l}$ számú pontot egymástől függetlenül a $(-x_{l+1},x_l)$ intervallumba úgy, hogy a pontok $\frac{\mu(A)}{\mu((x_{-l+1},-x_l))}$ valószínűséggel essenek egy $A\subset(x_l,x_{l+1})$ halmazba, $1\le l<s$. Hasonlóán tekintünk egy $M_k(-x_1,x_1)$ paraméterű Poisson eloszlású $\zeta_{k,0}$ valószínűségi változót, egy $M_k((-\infty,-x_s)\cup(x_s,\infty)$ paraméterű Poisson eloszlású $\zeta_{k,s}$ valószínűségi változót, és dobjunk le egymástől függetlenül $\zeta_{k,0}$ pontot a $(-x_1,x_1)$ halmazba úgy, hogy minden pontot $\frac{\mu_k(A)}{\mu_k((-x_1,x_1))}$ valószínűséggel dobunk egy $A\subset(-x_1,x_1)$ halmazba, dobjunk le egymástől függetlenül $\zeta_{k,s}$ pontot a $(-\infty,-x_s)\cup(x_s,\infty)$ halmazba úgy, hogy minden pontot $\frac{\mu_k(A)}{\mu_k((-\infty,-x_s)\cup(x_s,\infty))}$ valószínűséggel dobunk egy $A\subset(-\infty,-x_s)\cup(x_s,\infty)$ halmazba. Legyen az összes előbb tekintett $\zeta_{k,l}$ valószínűségi változó független egymástól, és végezzük a pontdobásokat a különböző halmazokba egymástől függetlenül. Ekkor a ledobott pontok egyesítése egy μ_k számlálómértékű $\xi_{k,1},\xi_{k,2},\dots,$ Poisson folyamat lesz a számegyenesen. Hasonlóan konstruálhatunk egy μ_0 számlálómértékű $\bar\xi_{k,1}$, $\bar\xi_{k,2},\dots$, Poisson folyamatot a számegyenesen, csak most a $\zeta_{k,l}$ valószínűségi változókat a $\bar\zeta_{k,l}$ valószínűségi változókkal, a $\zeta_{k,0}$ és $\zeta_{k,s}$ valószínűségi változókat egy $\bar\zeta_{k,0}$ és $\bar\zeta_{k,s}$ valószínűségi változóval helyettesítjük, amelynek definiciójában a μ_k mértéket a μ_0 mértékkel helyettesítettük.

Vezessük be a következő jelöléseket. Adva az előbb konstruált $\xi_{k,p}$ Poisson folyamat μ_k számlálómértékkel, legyen $\xi^{(l)}_{k,p}(\omega) = \xi_{k,p}(\omega)I(\xi_{k,p}(\omega) \in (x_l, x_{l+1}), \xi^{(-l)}_{k,p}(\omega) = \xi_{k,p}(\omega)I(\xi_{k,p}(\omega) \in (-x_{l+1}, -x_l)$, ha $1 \le l < s$, $\xi^{(s)}_{k,p}(\omega) = \xi_{k,p}(\omega)I(\xi_{k,p}(\omega) \in (-\infty, -x_s) \cup (x_s, \infty)$, $\xi^{(0)}_{k,p}(\omega) = \xi_{k,p}(\omega)I(\xi_{k,p}(\omega) \in (-x_1, x_1)$, és adva egy N pozitiv egész szám, $\xi^{(0,N)}_{k,p}(\omega) = \xi_{k,p}(\omega)I(2^{-N} < |\xi_{k,p}(\omega)| \le x_1)$. Hasonlóan definiáljuk a $\bar\xi^{(l)}_{k,p}$ és $\bar\xi^{(0,N)}_{k,p}$ valószínűségi változókat azzal a különbséggel, hogy a $\xi_{k,p}$ Poisson folyamatot az előbb konstuált μ_0 számlálómértékú $\bar\xi_{k,p}$ Poisson folyamattal helyettesítjük. Jelölje B_l az (x_l, x_{l+1}) intervallumot, ha $1 \le l < s$ és az (x_{l-1}, x_l) intervallumot, ha $-1 \ge l > -s$.

Ha $k \ge n_j \ge \bar n(\varepsilon_j)$, akkor az M_k mérték teljesíti a (2.3) relációt $\varepsilon_j = 2^{-j}$ számmal. Ugyancsak teljesül ez a reláció, ha az M_k mértéket az M_k mértékek limeszével az M_0 mértékkel helyettesítjük. A (2.3) formula második relációja alapján a $\zeta_{k,s}$ és $\bar\zeta_{k,s}$ Poisson eloszlású valószínűségi változók paramétere kisebb mint 2^{-j}, így annak valószínűsége, hogy azon $\xi_{k,p}$ illetve $\bar\xi_{k,p}$ valószínűségi változók száma, amelyekre $|\xi_{k,p}| > R$ illetve $|\bar\xi_{k,p}| > R$ nullával egyenlő nagyobb, mint $1 - 2 \cdot 2^{-j}$. Továbbá az ilyen valószínűségi változók számának a várható értéke kisebb mint $2 \cdot 2^{-j}$. Mivel $|\tau(x)| \le a$ minden $x \in R^1$ számra a fenti relációkból következik, hogy

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left|\sum_{\{p\colon |\xi_{k,p}|\ge R\}} \xi_{k,p} - E\left(\sum_{\{p\colon |\bar\xi_{k,p}|\ge R\}} \tau(\xi^{(s)}_{k,p})\right)\right| \le 2a \cdot 2^{-j}\right) < 2 \cdot 2^{-j} \quad \text{ha } k \ge n_j \\
&P\left(\left|\sum_{\{p\colon |\bar\xi_{k,p}|\ge R\}} \bar\xi_{k,p} - E\left(\sum_{\{p\colon |\bar\xi_{k,p}|\ge R\}} \tau(\bar\xi^{(s)}_{k,p})\right)\right| \le 2a \cdot 2^{-j}\right) < 2 \cdot 2^{-j} \quad \text{ha } k \ge n_j
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

Mivel egy $[a, b]$ intervallumban definiált μ számlálómértékű ξ_p, Poisson folyamatra a $\sum\limits_p \xi_p$ véletlen összeg szórásnégyzete $\int_a^b u^2 \mu(\,du)$, (lásd például az első részben szereplő Lemmát), ezért a (2.3) képlet első része és a Chebishev egyenlőtlenség alapján (vegyük észre, hogy $\delta < a$ esetén, amit feltehetünk, $\tau(x) = \tau_a(x) = x$, ha $|x| \le \delta$.)

$$
\begin{aligned}
&P\left(\left|\sum_{\{l\colon 2^{-N}\le|\xi_{k,p}|\le\delta\}} \xi_{k,p} - E\left(\sum_{\{l\colon 2^{-N}\le|\xi_{k,p}|\le\delta\}} \tau(\xi^{(0,N)}_{k,p})\right)\right| \ge 2^{-j}\right) \\
&\qquad \le 2^{2j}\operatorname{Var}\left(\sum_{\{l\colon 2^{-N}\le|\xi_{k,p}|\le\delta\}} \xi^{(0,N)}_{k,p}\right) \le 2^{2j}\varepsilon_j^3 = 2^{-j} \\
&P\left(\left|\sum_{\{l\colon 2^{-N}\le|\bar\xi_{k,p}|\le\delta\}} \bar\xi_{k,p} - E\left(\sum_{\{l\colon 2^{-N}\le|\bar\xi_{k,p}|\le\delta\}} \tau(\bar\xi^{(0,N)}_{k,p})\right)\right| \ge 2^{-j}\right) \\
&\qquad \le 2^{2j}\operatorname{Var}\left(\sum_{\{p\colon 2^{-N}\le|\bar\xi_{k,p}|\le\delta\}} \bar\xi^{(0,N)}_{k,p}\right) \le 2^{2j}\varepsilon_j^3 = 2^{-j}, \quad \text{ha } k \ge n_j \text{ és } 2^{-N} < \delta.
\end{aligned}
\tag{2.7}
$$

Továbbá azt állítjuk, hogy ha az n_j indexeket elég nagyra választjuk, akkor

$$\begin{aligned} P\Bigg(\sum_{l:\ 1\le|l|<s} &\left(\sum_{p:\ \xi_{k,p}\in B_l} \xi_{k,p} - E\left(\sum_{p:\ \xi_{k,p}\in B_l} \tau(\xi^{(l)}_{k,p}) \right)\right) \\ &- \left(\sum_{p:\ \xi_{k,p}\in B_l} \bar\xi_{k,p} - E\left(\sum_{p:\ \xi_{k,p}\in B_l} \tau(\bar\xi^{(l)}_{k,p}) \right)\right) > 2^{-j} \Bigg) < 2^{-j} \quad \text{ha } k\ge n_j \end{aligned} \tag{2.8}$$

Először megmutatjuk, hogy a (2.4), (2.6), (2.7) és (2.8) relációkból következik, hogy $\eta_k - \bar\eta_k \Rightarrow 0$, azaz igaz a 2. Segédtétel állítása. Valóban, a (2.6), (2.7) és (2.8) formulákat összeadva kapjuk, hogy minden olyen N egész számra, amelyre $2^{-N}<\delta$

$$\begin{aligned} P\Bigg(&\left(\sum_{p:\ |\xi_{k,p}|\ge 2^{-N}} \xi_{k,p} - E\left(\sum_{p:\ |\xi_{k,p}|\ge 2^{-N}} \tau(\xi_{k,p}) \right)\right) \\ &- \left(\sum_{p:\ |\bar\xi_{k,p}|\ge 2^{-N}} \bar\xi_{k,p} - E\left(\sum_{p:\ |\xi_{k,p}|\ge 2^{-N}} \tau(\bar\xi_{k,p}) \right)\right) > (4a+3)\cdot 2^{-j} \Bigg) < 5\cdot 2^{-j}, \end{aligned} \tag{2.9}$$

ha $k\ge n_j$.

Tekintve azon események $\liminf$-jét az N változóban, amelyeknek a valószínűségét becsültük a (2.9) formulában, ($\liminf\limits_{N\to\infty} A_N = \bigcup\limits_{N=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{L=N}^{\infty} A_L\right)$), és felhasználva a (2.4) formulát kapjuk, hogy $P\left(|\eta_k-\bar\eta_k| > (4a+3)\cdot 2^{-j}\right) < 5\cdot 2^{-j}$, ha $k\ge n_j$. Ezért $\eta_k-\bar\eta_k\Rightarrow 0$, amint azt állítottuk.

Annak érdekében, hogy a még hiányzó (2.8) formulát is bebizonyítsuk először megmutatjuk, hogy

$$\begin{aligned} &P\left(\sum_{l:\ 1\le|l|<s} \left(\sum_{p:\ \xi_{k,p}\in B_l} \xi_{k,p} - E\left(\sum_{p:\ \xi_{k,p}\in B_l} \tau(\xi^{(l)}_{k,p}) \right) - \zeta_{k,l}x_l + \tau(x_l)\mu_k(B_l) \right) > 2^{-2j} \right) \\ &\qquad < 2\cdot 2^{-2j} \quad \text{és} \\ &P\left(\sum_{l:\ 1\le|l|<s} \left(\sum_{p:\ \bar\xi_{k,p}\in B_l} \bar\xi_{k,p} - E\left(\sum_{p:\ \xi_{k,p}\in B_l} \tau(\bar\xi^{(l)}_{k,p}) \right) - \bar\zeta_{k,l}x_l + \tau(x_l)\mu_0(B_l) \right) > 2^{-2j} \right) \\ &\qquad < 2\cdot 2^{-2j}, \end{aligned} \tag{2.10}$$

ha $k\ge n_j$.

A (2.10) formula első egyenlőtlensége arra ad becslést, hogy mekkora hibát követünk el, ha egy minden a B_l halmazba eső $\xi_{k,p}$ pontra a $\xi_{k,p}$ mennyiséget az x_l számmal helyettesítjük, és ezeket a hibákat összegezzük a Poisson folyamat minden olyan pontjára, amelyre $\delta \le |\xi_{k,l}| \le R$. Mivel

$$|\xi_{k,p} - x_l| \le \sup_{1\le |l|\le s} |x_{l+1} - x_l| \le \frac{\varepsilon_j^4}{L},$$

$$\left| E\left(\sum_{p\colon\, \xi_{k,p}\in B_l} \tau(\xi_{k,p}^{(l)}) \right) - \tau(x_l)\mu_k(B_l) \right| \le \sup_{1\le |l|\le s} |x_{l+1} - x_l| \mu_k(B_l) \le \frac{\varepsilon_j^4}{L}\mu_k(B_l)$$

ha $k \ge n_j$, ezért a (2.10) formula első relációja következik a

$$\begin{aligned}\sum_{l\colon\, 1\le |l|<s} & \left| E\left(\sum_{p\colon\, \xi_{k,p}\in B_l} \tau(\xi_{k,p}^{(l)}) \right) - \tau(x_l)\mu_k(B_l) \right| \\ & \le \sum_{l\colon\, 1\le |l|<s} \frac{\varepsilon_j^4}{L}\mu_k(B_l) = \varepsilon_j^4 \frac{\mu_k((-R,R)\setminus(-\delta,\delta))}{L} \le \varepsilon_j^4\end{aligned}$$

és

$$\begin{aligned}P & \left(\sum_{l\colon\, 1\le |l|<s} \left(\sum_{p\colon\, \xi_{k,p}\in B_l} \xi_{k,p} - \zeta_{k,l} x_l \right) > \varepsilon_j^2 \right) \\ & \le P\left(\#\{p\colon\, \delta < |\xi_{k,p}| < R\} > \frac{L}{2\varepsilon_j^2} \right) \le \frac{2\varepsilon_j^2 E\left(\#\{p\colon\, \delta < |\xi_{k,p}| < R\}\right)}{L} \\ & = \frac{2\varepsilon_j^2 \mu_k\left((-R,-\delta)\cup(\delta,R)\right)}{2L} \le 2\varepsilon_j^2 = 2\cdot 2^{-2j}, \quad \text{ha } k \ge n_j\end{aligned}$$

egyenlőtlenségből. A (2.10) reláció második egyenlőtlensége hasonlóan bizonyítható, csak ebben az esetben a $\xi_{k,p}$ Poisson folyamat helyett a $\bar\xi_{k,p}$ Poisson folyamatot, a μ_k mérték helyett pedig a μ_0 mértéket kell tekinteni.

A (2.10) formula alapján a (2.8) formula és így a 2. Segédtétel bizonyításának befejezéséhez elég megmutatni, hogy ha az $n_j \ge \bar n_j$ sorozat tagjait elég nagynak választjuk, akkor

$$P\left(\sum_{l\colon\, 1\le |l|<s} \left| x_l(\zeta_{k,l} - \bar\zeta_{k,l}) - \tau(x_l)(\mu_k(B_l) - \mu_0(B_l)) \right| > 2^{-2j} \right) \le \frac{2^{-j}}{2}, \quad \text{ha } k \ge n_j. \tag{2.11}$$

illetve azt, hogy igaz a következő erősebb egyenlőtlenség:

$$\sum_{l\colon\, 1\le |l|<s} \left(|x_l|\, E|\zeta_{k,l} - \bar\zeta_{k,l}| + |\tau(x_l)|\, |\mu_k(B_l) - \mu_0(B_l)| \right) < 2^{-4j}, \quad \text{ha } k \ge n_j. \tag{2.12}$$

A (2.5) relációból viszont következik, hogy $E|\zeta_{k,l}-\bar\zeta_{k,l}|=C_j|\mu_k(B_l)-\mu_0(B_l)|$. Másrészt $\lim\limits_{k\to\infty}\mu_k(B_l)=\mu_0(B_l)$ az M_k mértékeknek az M_0 mértékhez való konvergenciája miatt. Mivel a (2.12) formulában szereplő összeg csak véges sok (a j indextől függő számú) tagot tartalmaz, a benne szereplő együtthatók szintén becsülhetőek csak a j indextől függő számokkal, ezért a (2.12) formula következik az előző észrevételekből, ha az n_j indexet elég nagynak választjuk.

3. Funkcionális határeloszlástétel. A 2. Tétel bizonyítása.

A.) Poisson közelítés. A határfolyamat normális és Poisson részének szétválasztása.

Az 1. Lemma, az 1. Segédtétel illetve az 1. Lemma után megadott konstrukció segítségével a 2. Tétel állítását is vissza tudjuk vezetni egy egyszerűbben bizonyítható állításra.

Tekintsük az 1. Lemma kimondása után definiált $\xi'_{k,j}$, $\xi''_{k,j}$, $\eta'_{k,j}$, $\eta''_{k,j}$, $\tilde\xi_{k,j}=\xi'_{k,j}+\xi''_{k,j}$ és $\eta_{k,j}=\eta'_{k,j}+\eta''_{k,j}$ valószínűségi változókat, $1\le j\le n_k$, és a segítségükkel definiálható $S'_{k,l}=\sum\limits_{j=1}^{l}\xi'_{k,j}$, $S''_{k,l}=\sum\limits_{j=1}^{l}\xi''_{k,j}$, $\tilde S_{k,l}=S'_{k,l}+S''_{k,l}$, $T'_{k,l}=\sum\limits_{j=1}^{l}(\eta'_{k,j}-E\eta'_{k,j})$, $T''_{k,l}=\sum\limits_{j=1}^{l}(\eta''_{k,j}-E\tau(\eta''_{k,j}))$, $T_{k,l}=T'_{k,l}+T''_{k,l}$ részletösszegeket, $1\le l\le n_k$, valamint a belőlük definiálható $S'_k(t)$, $S''_k(t)$, $\tilde S_k(t)$, $T'_k(t)$, $T''_k(t)$ és $T_k(t)$, $0\le t\le 1$, $D([0,1])$ sztochasztikus folyamatokat hasonlóan az (1.12) formulához, azzal a különbséggel, hogy az (1.12) formulában szereplő $S_{k,l}$ valószínűségi változókat az $S'_{k,l}$, $S''_{k,l}$, $\tilde S_{k,l}$, illetve $T'_{k,l}$, $T''_{k,l}$ és $T_{k,l}$ valószínűségi változókkal helyettesítjük. Az (1.8) formulából és az $E\tau(\xi'_{k,j})+E\tau(\xi''_{k,j})=E\tau(\tilde\xi_{k,j})=0$ relációkból következik, hogy

$$\sup_{0\le l\le 1}|T_k(t)-\tilde S_k(t)|\Rightarrow 0,\quad \text{ha } k\to\infty, \tag{3.1}$$

ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl. Az $S_k(t)$ és $\tilde S_k(t)$ folyamatok eloszlása megegyezik. Továbbá, ha $x_k(\cdot)$ és $y_k(\cdot)$ olyan $D([0,1])$ térbeli függvények, amelyekre $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{0\le t\le 1}|x_k(t)-y_k(t)|=0$, akkor teljesül a $\lim\limits_{k\to\infty}d(x_k(\cdot),y_k(\cdot))=0$ reláció. Ezért a Tétel A-ból és a (3.1) formulából következik, hogy a 2. Tétel bizonyításához elegendő belátni azt, hogy a $T_k(t)$, $0\le t\le 1$, sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak a 2. Tételben definiált határfolyamathoz.

A $T_k(t)=T'_k(t)+T''_k(t)$ azonosság teljesül, és az ebben az azonosságban szereplő $T'_k(t)$ és $T''_k(t)$, $1\le t\le 1$, sztochasztikus folyamatok egymástól függetlenek. Azt fogjuk belátni, hogy a $T'_k(\cdot)$ folyamatok a határfolyamat Gauss a $T''_k(\cdot)$ folyamatok pedig a határfolyamat Poisson komponenséhez konvergálnak $k\to\infty$ esetén. Ahhoz, hogy ezt megmutassuk először tisztázni kell, hogy az $\mathbf{R}^1\times[0,1]$ sávon definiált N_k kanonikus mértékek konvergenciája az N_0 mértékhez hogyan tükröződik a $T'_k(\cdot)$ és $T''_k(\cdot)$ folyamatokhoz kapcsolódó megfelelő mértékek viselkedésében.

Tekintsünk egy az 1. Lemmát kielégítő ε_k számsorozatot, és definiáljuk, az 1. Lemma jelölését használva, azt az N'_k mértéket a $[0,1]$ intervallumon, amely az $0 \le u_{k,1} \le u_{k,2} \le \dots \le u_{k,n_k} = 1$ pontokba van koncentrálva, és $N'_k(u_{k,l}) = G_{k,l}(\varepsilon_k) - G_{k,l}(-\varepsilon_k)$, $k = 1,2,\dots$, ahol az 1. Lemmához hasonlóan $G_{k,l}(\,dx) = x^2 F_{k,l}(\,dx)$. Ezenkívül definiáljuk azt az N''_k kanonikus mértéket a $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon, amely az $\mathbf{R}^1 \times u_{k,l}$, $1 \le l \le n_k$, egyenesek uniójára van koncentrálva, és

$$N''_k(B \times \{u_{k,l}\}) = \int_{B\cap\{u\colon |u|\ge\varepsilon_k\}} u^2 F_{k,l}(\,du), \quad 1 \le l \le n_k, \quad k = 1,2,\dots.$$

Azt állítjuk, hogy a 2. Tétel feltételeinek teljesülése esetén a $[0,1]$ intervallumon definiált N'_k mértékek gyengén konvergálnak az N'_0 mértékhez, amelyet az $N'_0(B) = N_0(\{0\}\times B)$ képlet definiál, $B \subset [0,1]$. Az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávban definiált N''_k kanonikus mértékek az $\mathbf{R}^1 \times [0,1])$ sávon pedig ahhoz az N''_0 kanonikus mértékhez konvergálnak, amelyet az $N''_0(B) = N_0(B \setminus (\{0\} \times [0,1]))$, $B \subset \mathbf{R}^1 \times [0,1]$, képlet határoz meg.

Ezen állítások bizonyítása érdekében vegyük észre, hogy ha $B \subset [0,1]$ olyan halmaz, amelynek ∂B határára $\lambda(\partial B) = 0$, $C \subset \mathbf{R}_1$ olyan korlátos halmaz, amelyre $M_0(\partial B) = 0$, akkor a 2. Tétel feltételeinek teljesülése esetén $\lim\limits_{k\to\infty} N_k(C \times B) = N_0(C \times B)$. Továbbá $\lim\limits_{k\to\infty} N'_k([0,1]) = M(\{0\})$ az 1. Lemma szerint. Azt állítjuk, hogy tetszőleges olyan $B \subset [0,1]$ halmazra, amelynek ∂B határára $\lambda(\partial B) = 0$, $\limsup\limits_{k\to\infty} N'_k(B) \le N_0(\{0\} \times B) = N'_0(B)$. Ugyanis minden $\delta > 0$ számra létezik olyan $[-\eta,\eta]$ intervallum, $\eta > 0$, amelyre $\pm\eta$ az M mérték folytonossági pontja, és $M_0([-\eta,\eta]) \le M_0(\{0\}) + \delta$, ahonnan $N_0([-\eta,\eta] \times B) \le N_0(\{0\} \times B) + \delta$. Mivel $\varepsilon_k \to 0$, ha $k \to \infty$, innen következik, hogy $\limsup\limits_{k\to\infty} N'_k(B) \le \lim\limits_{k\to\infty} N_k(B \times [-\eta,\eta]) = N_0([-\eta,\eta] \times B) \le N_0(\{0\} \times B) + \delta)$. Mivel ez az állítás minden $\delta > 0$ számra érvényes, ezért $\limsup\limits_{k\to\infty} N'_k(B) \le N'_0(B)$. Ezt az egyenlőtlenséget alkalmazva mind a B mind az $[0,1] \setminus B$ halmazra kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} N'_0([0,1]) = & M_0(\{0\}) = \lim_{k\to\infty} N'_k([0,1) \le \limsup_{k\to\infty} N'_k(B) + \limsup_{k\to\infty} N'_k([0,1] \setminus B) \\ & \le N'_0(B) + N'_0([0,1] \setminus B)) = M'_0([0,1]). \end{aligned}$$

Ez az egyenlőtlenségsor viszont csak úgy lehet érvényes, ha a $\lim\limits_{k\to\infty} N'_k(B) = N'_0(B)$ reláció teljesül.

Vezessük be az $\bar N'_k$, $k = 1,2,\dots$, és $\bar N'_0$ kanonikus mértékeket az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon az $\bar N'_k(A) = N_k(A \cap [-\varepsilon_k, \varepsilon_k])$, $\bar N'_0(A) = N_0(A \cap \{0\} \times [0,1])$, $A \subset \mathbf{R}^1 \cap [0,1]$ képlet segítségével. Ekkor az N'_k mértékek konvergenciájából az N'_0 mértékhez következik, hogy az $\bar N'_k$ kanonikus mértékek konvergálnak az $\bar N'_0$ kanonikus mértékhez. Továbbá, $N''_k = N_k - \bar N'_k$, $k = 1,2,\dots$, és az hogy az N''_k kanonikus mértékek konvergálnak az N''_0 kanonikus mértékhez az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon következik abból, hogy az N_k kanonikus mértékek konvergálnak az N_0 az $\bar N'_k$ mértékek pedig konvergálnak az $\bar N'_0$ kanonikus mértékhez az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon.

Definiáljuk a $T'_{k,l} = \sum\limits_{j=1}^{l} \eta'_{k,j}$, $1 \le l \le n_k$, $T'_{k,0} = 0$, valószínűségi változókat és a $T'_k(t)$, $T'_k(t) = T'_{k,l}$, ha $u_{k,l-1} \le t < u_{k,l}$, $T_{k,l}(1) = T'_{k,n_k}$ sztochasztikus folyamatot, és tekintsük 2. Tétel a) feltételében definiált $\lambda(t)=N_0(\{0\}\times[0,t])$, $0\le t\le 1$, folytonos függvényt a $[0,1]$ intervallumon. Azt állítjuk, hogy a $T'_k(t)$, $0\le t\le 1$, sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak egy $W(\lambda(t))$, $0\le t\le 1$, sztochasztikus folyamathoz, ahol $W(t)$, $0\le t\le M(\{0\})$, egy standard Wiener folyamat.

Ezen állítás bizonyítása érdekében tekintsük az $\bar u_{k,0}=0$, $\bar u_{k,l}=\frac{1}{U_k}\sum\limits_{j=1}^{l}\operatorname{Var}\eta'_{k,j}$, számokat, $1\le l\le n_k$, $k=1,2,\dots$, ahol $U_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\operatorname{Var}\eta'_{k,j}$, és a $\bar T'_{k,l}$ sztochasztikus folyamatokat, amelyeket a $T'_{k,l}$ sztochasztikus folyamatokhoz analóg módon definiálunk azzal a különbséggel, hogy az $u_{k,l}$ számokat az $\bar u_{k,l}$ számokkal helyettesítjük. Ekkor a klaszzikus funkcionális határeloszlástétel alapján az $\frac{1}{\sqrt{U_k}}\bar T'_{k,l}(t)$, $0\le t\le 1$, sztochasztikus folyamat gyengén konvergál egy $W(t)$ standard Wiener folyamathoz.

Definiáljuk a $\lambda_k(t)$, $k=1,2,\dots$, monoton és folytonos függvényeket úgy, hogy $\lambda_k(u_{k,l})=\bar u_{k,l}$, $0\le l\le k_n$, és a $\lambda_k(\cdot)$ függvény lineáris az $[u_{k,l-1},u_{k,l}]$, $1\le k\le n_k$ intervallumokon. Vegyük észre, hogy $T'_k(t)=\sqrt{U_k}\bar T'_k(\lambda_k(t))$. Azt állítjuk, hogy

$$\lim_{k\to\infty}U_k=M_0(\{0\}),\qquad \lim_{k\to\infty}\sup_{0\le t\le 1}\left|\lambda_k(t)-\frac{\lambda(t)}{M_0(\{0\})}\right|=0, \tag{3.2}$$

és innen következik, hogy a $T'_k(t)$, $0\le t\le 1$ sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak az $\sqrt{M_0(\{0\})}W\left(\frac{\lambda(t)}{M_0(\{0\})}\right)$ sztochasztikus folyamathoz, amelynek eloszlása megegyezik a $W(\lambda(t))$, $0\le t\le 1$, sztochasztikus folyamat eloszlásával.

Valóban, az 1. Lemmából és a (2.2) formulából következik, hogy

$$\lim_{k\to\infty}U_k=\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k}E{\xi'_{k,j}}^2=M(\{0\}).$$

Hasonlóan kapjuk, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le l\le n_k}\left|\bar u_{k,l}U_k-\sum\limits_{j=1}^{l}E{\xi'_{k,j}}^2\right|=0$, azaz

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{1\le l\le n_k}|\bar u_{k,l}M_0(\{0\})-N_0k([-\varepsilon_k,\varepsilon_k])\times[0,u_{k,l}])|=0.$$

Mivel a monoton $N_k([-\varepsilon_k,\varepsilon_k])\times[0,t])$ függvények minden $0\le t\le 1$ számra konvergálnak a folytonos $\lambda(t)=N_0(\{0\}\times[0,t])$ függvényhez, ezért ez utóbbi konvergencia egyenletes, és $\lim\limits_{k\to\infty}\sup\limits_{1\le l\le n_k}|\bar u_{k,l}M_0(\{0\})-\lambda(u_{k,l})|=0$, ezért

$$\lim_{k\to\infty}\sup_{1\le l\le n_k}\left|\lambda_k(u_{k,l})-\frac{\lambda(u_{k,l})}{M_0(\{0\})}\right|=0.$$

Innen következik a (3.2) reláció.

Ahhoz, hogy $T'_k(t) = \frac{1}{\sqrt{U_k}}\bar{T}'_k(\lambda_k(t))$ sztochasztikus folyamatok gyenge konvergencáját a $W(\lambda(t))$ sztochasztikus folyamathoz belássuk, elég megmutatni, hogy

$$\sqrt{U_k}\bar{T}'_k(\lambda_k(t)) - \sqrt{U_k}\bar{T}'_k\left(\frac{\lambda(t)}{M_0(0)}\right) \Rightarrow 0, \tag{3.3}$$

ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl. Ugyanis a $\sqrt{U_k}\bar{T}'_k\left(\frac{\lambda(t)}{M_0(0)}\right)$ folyamat gyenge konvergenciáját a $W(\lambda(t))$ folyamathoz tudjuk, ezért a kívánt állítás következik a (3.3) relációból és a Tétel A-ból. Viszont a (3.3) reláció következik a (3.2) formulából és abból a tényből, hogy az általános elmélet szerint $\sqrt{U_k}\bar{T}'_k\left(\frac{\lambda(t)}{M_0(0)}\right)$ sztochasztikus folyamatok gyenge konvergenciájából egy folytonos trajektóriájú folyamathoz következik, hogy e folyamatok eloszlásai egyenletesen feszesek, azaz minden $\varepsilon > 0$ és $\eta > 0$ számokhoz létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon, \eta) > 0$ szám amelyre

$$P\left(\sup_{(s,t):\ |t-s|\le\delta}\left|\sqrt{U_k}\bar{T}'_k\left(\frac{\lambda(t)}{M_0(0)}\right) - \sqrt{U_k}\bar{T}'_k\left(\frac{\lambda(s)}{M_0(0)}\right)\right| > \eta\right) \le \varepsilon$$

minden $k = 1, 2, \dots$ számra. (A $\delta = \delta(\varepsilon, \eta)$ küszöbindex nem függ a k számtól.)

B.) A bizonyítás módszere. A Poisson rész konvergenciájának vizsgálata.

Az A.) részben definiáltuk $T_k(t) = T'_k(t) + T''_k(t)$, $1 \le t \le 1$, $k = 1, 2, \dots$, sztochasztikus folyamatok egy sorozatát, és beláttuk, hogy a 2. Tétel bizonyítása visszavezethető annak az állításnak az igazolására, hogy a $T_k(t)$ sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak ugyanahhoz az $S(t)$, $D([0,1])$ térbeli sztochasztikus folyamathoz, mint az eredetileg vizsgált $S_k(t)$ sztochasztikus folyamatok. Másrészt, a $T'_k(t)$ és $T''_k(t)$ függetlenek, és a $T'_k(t)$ sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak egy olyan Gauss folyamathoz, amely a 2. Tételben leírt határfolyamathoz hasonló módon is megadható azzal a különbséggel, hogy az abban szereplő az $\mathbf{R}^1 \times [0,1])$ sávon értelmezett $N_0(\cdot,\cdot)$ számlálómértéket az $\bar{N}'_0$, $\bar{N}'_0(A) = N_0(A \cap \{0\})$ mértékkel helyettesítjük. Ezért a 2. Tétel bizonyításának befejezéséhez elég belátni, hogy a $T''_k(t)$ sztochasztikus folyamatok gyengén konvergálnak egy az $N''_0(\cdot,\cdot)$, $N''_0(A) = N_0(A \cap \mathbf{R}^1 \setminus \{0\} \times [0,1])$ számlálómérték által meghatározott $S''_k(t)$, $0 \le t \le 1$, független növekményű sztochasztikus folyamathoz. A továbbiak érdekében vezessük be a következő definiciót.

Sztochasztikus folyamat (időbeli) diszkretizáltjának a definiciója. *Legyen $Z(t)$, $0 \le t \le 1$, a $[0,1]$ intervallumon definiált sztochasztikus folyamat, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s = 1$, egy értékeit a $[0,1]$ intervallumon felvevő monoton számsorozat. Ekkor a $Z(t)$ sztochasztikus folyamatnak a $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s = 1$ sorozat által meghatározott $\bar{Z}(t) = \bar{Z}_{t_0,t_1,\dots,t_s}(t)$ diszkretizáltja a*

$$\bar{Z} = \bar{Z}_{t_0,t_1,\dots,t_s}(t) = T_0(t_{l-1}), \quad \text{ha } t_{l-1} \le t < t_l,\ 1 \le l \le s, \quad \bar{T}_0(t) = T_0(1)$$

képlet segítségével definiált sztochasztikus folyamat a $[0,1]$ intervallumon.

Vegyük észre, hogy a $T_k''(t)$ sztochasztikus folyamatok olyan korlátlanul osztható sztochasztikus folyamatok diszkretizáltjai, amelyeket olyan $\nu_k(dx,dy) = \frac{N_k(dx,dy)}{x^2}$ számlálómértékű Poisson folyamatok határoznak meg, amelyekre az N_k az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon definiált kanonikus mértékek konvergálnak az N_0'' kanonikus mértékhez, és teljesül az $N_k(\{0\} \cap [0,1]) = 0$ azonosság. Ezért a 2. Tétel bizonyítását befejezzük, ha bebizonyítjuk az alább megfogalmazandó, a 2. Segédtétel függvénytérbeli általánosításaként tekinthető állítást.

Állítás. *Legyen N_k, $k = 0,1,2,\dots$, kanonikus mértékek egy sorozata az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon, amelyekre az N_k mértékek gyengén konvergálnak az N_0 mértékhez, ha $k \to \infty$, teljesítik a 2. Tételben megfogalmazott b.) feltételt, és $N_k(\{0\} \times [0,1]) = 0$, $k = 0,1,2,\dots$. Definiáljuk a $\nu_k(dx,dy) = \frac{N_k(dx,dy)}{y^2}$, $k = 0,1,2,\dots$, mértékeket és tekintsünk olyan $X_n(k) = (X_n^{(1)}(k), X_n^{(2)}(k))$, $X_n(k) \in \mathbf{R}^1 \times [0,1]$, $n = 1,2,\dots$, $k = 1,2,\dots$, Poisson folyamatokat az $R^1 \times [0,1])$ sávon, amelynek a számlálómértékei ezek a $\nu_k(dx,dy)$ mértékek. Jelölje $T_k(t)$, $0 \le t \le 1$, $k = 0,1,2,\dots$, az ezen Poisson folyamatok által meghatározott korlátlanul osztható folyamatotokat, amelyeket tekinthetünk mint $D([0,1])$ térbeli valószínűségi változókat is. A $T_k(t)$, $k = 1,2,\dots$, folyamatok eloszlásai gyengén konvergálnak a $T_0(t)$ sztochasztikus folyamat eloszlásához a $D([0,1])$ térben, ha $k \to \infty$.*

Legyen adva minden $k = 1,2,\dots$, számra egy $0 = u_{k,0} < u_{k,1} < \dots < u_{k,n_k} = 1$, amelyek teljesítik a $\sup\limits_{1 \le j \le n_k} |u_{k,j} - u_{k,j-1}| = 0$ feltételt, és tekintsük az előbb definiált $T_k(t)$ korlátlanul osztható folyamatok $\bar T_k(t) = \bar T_{k,u_{k,0},u_{k,1},\dots,u_{k,n_k}}$ diszkretizáltjait. Ezek a diszkretizált $\bar T_k(t)$ sztochasztikus folyamatok eloszlásai szintén gyengén konvergálnak a $T_0(t)$ folyamat eloszlásaihoz a $D([0,1])$ térben.

Megjegyezzük, hogy a 2. Tétel bizonyításának befejezéséhez szükséges állítás megegyezik a $\bar T_{k,u_{k,0},u_{k,1},\dots,u_{k,n_k}}$ sztochasztikus folyamatok eloszlásának a $T_0(t)$ folyamat eloszlásához való konvergenciával, ha a 2. Tételben definiált $0 = u_{k,0} < u_{k,1} < \dots < u_{k,n_k} = 1$ számsorozatokat tekintjük.

Megfogalmazunk két segédtételt, néhány megjegyzést füzünk hozzájuk, és megmutatjuk, hogy következik belőlük az Állítás. A segédtételeket a C.) részben fogjuk bizonyítani. E segédtételek megfogalmazása előtt idézzük fel, hogy amennyiben $X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$, $X_n \in \mathbf{R}^1 \times [0,1]$, $n = 1,2,\dots$, Poisson folyamat egy olyan ν számlálómértékkel az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon, amelyre $\nu(\mathbf{R}^1 \setminus [-b,b] \times [0,1]) < \infty$ minden $b > 0$ számra, akkor ez a Poisson folyamat meghatároz egy korlátlanul osztható $T(t)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamatot, amelyet a következő módon definiálhatunk. Válasszunk alkalmas A_L, $L = 1,2,\dots$, számsorozatot, $\lim\limits_{L \to \infty} A_L = 0$, és legyen

$$T^{(L)}(t) = \sum_{n\colon |X_n^{(1)}| > A_L,\, 0 \le X_n^{(2)} \le t} X_n^{(1)} - E\left(\sum_{n\colon |X_n^{(1)}| > A_L,\, 0 \le X_n^{(2)} \le t} \tau(X_n^{(1)}) \right), \quad 0 \le t \le 1,$$

$L = 1,2,\dots$, ahol a $\tau(\cdot)$ függvényt az (1.2) formulában definiáltuk. Ha az A_L számsorozatot alkalmasan választjuk meg, akkor a $T(t) = \lim\limits_{L \to \infty} T^{(L)}(t)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat egy valószínűséggel létezik, ahol a limesz a szuprémum normában értendő a $[0,1]$ intervallumon. Ez egy korlátlanul osztható folyamat, és ezt nevezzük az adott Poisson folyamat által meghatározott korlátlanul osztható folyamatnak. Ha N_0 kanonikus mérték az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon, akkor egy a $\nu_0(dx,dy) = \frac{N_0(dx,dy)}{x^2}$ számlálómértékű Poisson folyamat által meghatározott korlátlanul osztható folyamat növekményeit meghatározza az (1.15) formula. Az előbb megfogalmazott állítások következnek az 1. rész eredményeiből.

3. Segédtétel. *Legyen adva egy N_0 kanonikus mérték az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon, amelyre $N_0(\{0\} \times [0,1]) = 0$. Tegyük fel, hogy ez az N_0 mérték teljesíti a 2. Tétel kimondásában megfogalmazott b.) feltételt. Tekintsünk egy olyan $X_n = (X_n^{(1)}, X_n^{(2)})$, $X_n \in \mathbf{R}^1 \times [0,1]$, $n = 1,2,\dots,$ Poisson folyamatot az $R^1 \times [0,1]$ sávon amelynek a számlálómértéke a $\nu_0(dx,dy) = \frac{N_0(dx,dy)}{x^2}$ mérték, és legyen $T_0(t)$, $0 \le t \le 1$, az ezen Poisson folyamat által meghatározott korlátlanul osztható folyamat. Minden $\varepsilon > 0$ és $\eta > 0$ számra létezik olyan $= \delta(\varepsilon,\eta)$ szám, hogy minden olyan $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = 1$ számsorozatra amelyre teljesül a $\sup\limits_{1 \le l \le s} |t_l - t_{l-1}| < \delta$ egyenlőtlenség a $T_0(t)$ sztochasztikus folyamat és annak $\bar{T}_0(t) = \bar{T}_{0,t_0,t_1,\dots,t_s}(t)$ diszkretizáltja teljesíti a*

$$P\left(d(T_0(\cdot), \bar{T}_0(\cdot)) > \eta\right) < \varepsilon \tag{3.4}$$

egyenlőtlenséget, ahol $d(\cdot,\cdot)$ a $D([0,1])$ térben bevezetett (egyszerűbb, nem teljes) metrikát jelöli.

Legyen N_k, $k = 1,2,\dots,$ kanonikus mértékek sorozata az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon, amelyekre teljesül az $N_k(\{0\} \times [0,1]) = 0$ feltétel, és amelyek konvergálnak a fent tekintett N_0 kanonikus mértékhez. Definiáljuk a $\nu_k(dx,dy) = \frac{N_k(dx,dy)}{x^2}$, $k = 1,2,\dots,$ mértékeket. Tekintsünk olyan $X_n(k) = (X_n^{(1)}(k), X_n^{(2)}(k))$, $X_n(k) \in \mathbf{R}^1 \times [0,1]$, $n = 1,2,\dots,$ $k = 1,2,\dots,$ Poisson folyamatokat az $R^1 \times [0,1])$ sávon, amelynek a számlálómértékei ezek a $\nu_k(dx,dy)$ mértékek, és jelölje $T_k(t)$, $0 \le t \le 1$, $k = 1,2,\dots,$ az ezen Poisson folyamatok által meghatározott korlátlanul osztható folyamatokat. Adva egy $\varepsilon > 0$ és $\eta > 0$ szám létezik olyan $= \delta(\varepsilon,\eta)$ szám, és $k_0 = k_0(\eta,\varepsilon)$ küszöbindex, hogy minden $k \ge k_0$ szám és olyan $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = 1$ számsorozat esetén amelyre teljesül a $\sup\limits_{1 \le l \le s} |t_l - t_{l-1}| < \delta$ egyenlőtlenség a $T_k(t)$ sztochasztikus folyamat és annak $\bar{T}_k(t) = \bar{T}_{k,t_0,t_1,\dots,t_s}(t)$ diszkretizáltja teljesíti a

$$P\left(d(T_k(\cdot), \bar{T}_k(\cdot)) > \eta\right) < \varepsilon \quad \text{ha } k \ge k_0, \tag{3.5}$$

egyenlőtlenséget, ahol $d(\cdot,\cdot)$ ugyanaz a metrika a $D([0,1])$ térben mint amelyik a (3.4) formulában szerepelt.

Megjegyezzük, hogy a (3.5) formulában szereplő k_0 küszöbindex nem függ a $[0,1]$ intervallum elég finom felosztását biztosító $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = 1$ számsorozattól.

4. Segédtétel. *Legyen adva N_k, $k = 1,2,\dots,$ kanonikus mértékek sorozata az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon, amelyekre az N_k kanonikus mértékekek konvergálnak az N_0 kanonikus mértékhez,* *ha* $k \to \infty$, *és* $N_k(\{0\} \times [0,1]) = 0$ *minden* $k = 0, 1, 2, \ldots$ *számra. Legyen továbbá adva a* $[0,1]$ *intervallumon egy* $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s = 1$ *monoton véges pontsorozat. Minden* $k = 1, 2, \ldots$ *indexre lehet konstruálni egy olyan* ν_k *számlálómértékű* $X_n(k) = (X_n^{(1)}(k), X_n^{(2)}(k))$, $X_n(k) \in \mathbf{R}^1 \times [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$, *és egy* ν_0 *számlálómértékű* $X'_n(k) = (X'^{(1)}_n(k), X'^{(2)}_n(k))$, $X'_n(k) \in \mathbf{R}^1 \times [0,1]$, $n = 1, 2, \ldots$, *Poisson folyamatot az* $R^1 \times [0,1])$ *sávon, amelyekre az általuk meghatározott* $T_k(t)$ *és* $T'_k(t)$ *korlátlanul osztható sztochasztikus folyamatok illetve azok* $\bar{T}_k = \bar{T}_{k,t_0,t_1,\ldots,t_s}(t)$ *és* $\bar{T}'_k = \bar{T}'_{k,t_0,t_1,\ldots,t_s}(t)$ *diszkretizáltjai teljesítik a*

$$\sup_{0 \le t \le 1} |\bar{T}_k(t) - \bar{T}'_k(t)| \Rightarrow 0 \quad \textit{ha } k \to \infty$$

relációt, ahol $\Rightarrow$ *sztochasztikus konvergenciát jelöl.*

Teljesítsék az N_k, $k = 1, 2, \ldots$, kanonikus mértékek az Állítás feltételeit. Ekkor 3. és 4. Segédtétel alapján minden $\varepsilon > 0$ és $\eta > 0$ szám esetén meg lehet adni a $[0,1]$ intervallumnak olyan $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s = 1$ particióját, $t_l = t_l(\varepsilon)$, $0 \le l \le s$, és lehet konstruálni olyan $\nu_k(dx, dy) = \frac{N_k(dx,dy)}{y^2}$ számlálómértékű $X_n(k) = ({X_n}^{(1)}(k), {X_n}^{(2)}(k))$, és $\nu_0(dx, dy) = \frac{N_0(dx,dy)}{y^2}$ számlálómértékű $X'_n(k) = (X'^{(1)}_n(k), X'^{(2)}_n(k))$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, 2, \ldots$, Poisson folyamatokat az $R^1 \times [0,1]$ sávon, amelyekre az általuk meghatározott $T_k(t)$, és $T'_k(t)$, $k = 1, 2, \ldots$, korlátlanul osztható sztochasztikus folyamatok illetve azok $\bar{T}_k = \bar{T}_{k,t_0,t_1,\ldots,t_s}(t)$ és $\bar{T}'_k = \bar{T}'_{k,t_0,t_1,\ldots,t_s}(t)$ diszkretizáltjai teljesítik az alábbi relációkat:

$$\begin{aligned} P\left(d(T'_k(\cdot), \bar{T}'_{k,t_0,\ldots,t_s}(\cdot)) > \eta\right) &< \varepsilon \quad \text{minden } k \ge 1 \text{ számra} \\ P\left(d(T_k(\cdot), \bar{T}_{k,t_0,\ldots,t_s}(\cdot)) > \eta\right) &< \varepsilon, \quad \text{ha } k \ge k_0 \\ P\left(\sup_{0 \le t \le 1} \left|\bar{T}_{k,t_0,\ldots,t_s}(t) - \bar{T}'_{k,t_0,\ldots,t_s}(t)\right| > \eta\right) &< \varepsilon, \quad \text{ha } k \ge k_0, \end{aligned} \tag{3.6}$$

ahol $k_0 = k_0(\varepsilon, \eta)$ alkalmas küszöbindex.

Valóban a (3.6) formula első két relációja teljesül alkalmas $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s = 1$ számsorozatra minden $k \ge k_0$ számra, ha $k_0 = \bar{k}_0(\varepsilon, \eta)$ alkalmas küszöbindex a 3. Segédtétel alapján. E relációk érvényessége nem függ attól, hogyan konstruáljuk meg a ν_k számlálómértékű $X_n(k)$ és ν_0 számlálómértékű $X'_n(k)$ Poisson folyamatokat. Ezután a 4. Segédtétel alapján biztosítani tudjuk alkalmas konstrukció segítségével a (3.6) formula harmadik relációját is a k_0 küszöbindex esetleges növelésével.

Válasszunk $\varepsilon_j = \eta_j = \frac{1}{j}$ számokat a (3.6) formuláaban. Ekkor létezik olyan egész számoknak olyan $k_0\left(\frac{1}{j}\right)$ monoton sorozata és mindegyik j számra olyan $0 = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < t_2^{(j)} < \cdots < t_{s_j}^{(j)} = 1$ sorozat, amelyekre alkalmas konstrukció esetén érvényes a (3.6) rormulának az a változata minden $j = 1, 2, \ldots$ számra $\varepsilon = \eta = \frac{1}{j}$ választással, amelyben a $k \ge k_0$ feltételt a $k_0\left(\frac{1}{j}\right) \le k \le k_0\left(\frac{1}{j+1}\right)$ feltétellel helyettesítjük, és $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_s = 1$ helyett $0 = t_0^{(j)} < t_1^{(j)} < t_2^{(j)} < \cdots < t_{s_j}^{(j)} = 1$-et írunk, azaz a tekintett felosztássorozat függhet a j indextől. Ezért az Állítás feltételeinek teljesülése esetén a ν_k számlálómértékű Poisson folyamat segítségével konstruált $T_k(t)$ és a ν_0 számlálómértékű Poisson folyamat segítségével konstruált $T'_k(t)$ korlátlanul osztható folyamatok alkalmas $0 = t_0^{(k)} < t_1^{(k)} < t_2^{(k)} < \cdots < t_{s_k}^{(k)} = 1$ választással teljesülnek a

$$d\left(T'_k(\cdot), \bar{T}'_{k,t_0^{(k)},\dots,\, t_{s_k}^{(k)}}(\cdot)\right) \Rightarrow 0 \quad \text{ha } k \to \infty \tag{3.7a}$$

$$d\left(T_k(\cdot)\,, \bar{T}_{k,t_0^{(k)},\dots,t_{s_k}^{(k)}}(\cdot)\right) \Rightarrow 0 \quad \text{ha } k \to \infty \tag{3.7b}$$

$$\sup_{0\le t\le 1}\left|\bar{T}_{k,t_0^{(k)},\dots,t_{s_k}^{(k)}}(t) - \bar{T}'_{k,t_0^{(k)},\dots,t_s^{(k)}}(t)\right| \Rightarrow 0 \quad \text{ha } k \to \infty \tag{3.7c}$$

relációk.

A Tétel A és a (3.7a) reláció alapján a $\bar{T}'_{k,t_0^{(k)},\dots,\, t_{s_k}^{(k)}}(\cdot)$ sztochasztikus folyamatok eloszlásai konvergálnak a $T_0(\cdot)$ folyamat eloszlásához a $D([0,1])$ térben. (A $T'_k(\cdot)$ és $T_0(\cdot)$ sztochasztikus folyamatok eloszlása megegyezik.) Ezután a Tétel A-ból és a (3.7c) relációból következik, hogy a $\bar{T}_{k,t_0^{(k)},\dots,t_{s_k}^{(k)}}(\cdot)$, sztochasztikus folyamatok majd a Tétel A-ból és a (3.7c) relációból következik, hogy a $T_k(\cdot)$ sztochasztikus folyamatok eloszlásai konvergálnak a $T_0(\cdot)$ sztochasztikus folyamat eloszlásához a $D([0,1])$ térben, mint azt az Állítás első részében megfogalmaztuk. Ezután az Állítás második fele következik a Tétel A-ból és a 3. Segédtétel második feléből. E szerint az eredmény szerint ugyanis

$$d\left(T_k(\cdot)\,, \bar{T}_{k,u_{k,0}^{(k)},\dots,u_{k,n_k}^{(k)}}(\cdot)\right) \Rightarrow 0 \quad \text{ha } k \to \infty.$$

(Itt használjuk ki, hogy a (3.5) relációban szereplő k_0 küszöbindex nem függ attól, hogy amelyik elég sűrű $0 = t_0 < t_1 < \cdot < t_s$ sorozatot vesszük.)

Jegyezzük meg, hogy a 3. Segédtételben egy sztochasztikus folyamatnak illetve annak diszkretizáltjainak távolságát nem a szuprémum, hanem a $D([0,1])$ térben bevezetett $d(\cdot,\cdot)$ metrika szerint becsültük meg. Ez szükségszerű, hiszen, ha az eredeti sztochasztikus folyamatnak egy véletlen pontban nagy ugrása van, akkor e sztochasztikus folyamat és annak diszkretizáltja szükségszerűen távol van egymástól. Viszont, ha az ugráspontok nincsenek túl sűrűn, egy kis intervallumban legfeljebb egy ugráspont van akkor elég általános esetben egy sztochasztikus folyamat és annak elég finom diszkretizáltja közel van egymáshoz a $d(\cdot,\cdot)$ metrikában. A következő egyszerű lemmában egy olyan tényt fogalmazunk meg, amely lehetővé teszi a 3. Segédtételben szereplő becslések vizsgálatát.

2. Lemma. *Legyen $x(t)$ és $y(t)$, $0 \le t \le 1$, két cadlag függvény a $[0,1]$ intervallumon, amelyeknek p, $p < \infty$, ugráspontjuk van. (A két függvénynek ugyanannyi az ugráspontja.) Tegyük fel azt is, hogy az $x(\cdot)$ és $y(\cdot)$ függvények értékei az egymást követő ugráspontokban megegyeznek. Legyen $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_s = 1$ olyan véges monoton számsorozat, amelyre $\inf\limits_{1\le l\le s} |t_l - t_{l-1}| \le \delta$ valamilyen $\delta > 0$ számmal, és legyen az $x(\cdot)$ függvény konstans mindegyik $[t_{l-1}, t_l)$ intervallumban, $1 \le l \le s-1$. Továbbá, ha* *az $x(\cdot)$ függvény j-ik ugráspontja valamelyik t_{l_j} pont, akkor az $y(\cdot)$ j-ik ugráspontja az $(t_{l_{j-1}}, t_{l_j}]$ intervallum valamelyik pontjában van, $1 \le j \le p$. Ekkor $d(x(\cdot,\cdot) < \delta$.*

A 2. Lemma bizonyítása Legyenek $u_1, \dots, u_p$ az $y(\cdot)$ függvény ugráspontjai. Definiáljuk a $[0,1]$ intervallum következő homomorfizmusát önmagára: $\lambda(u_j) = t_{l_j}$, $1 \le j \le p$, és legyen a $\lambda(\cdot)$ függvény lineáris az $[u_{j-1}, u_j]$, $1 \le j \le p$, intervallumban. (A t_{l_j} pont az $x(\cdot)$ függvény j-ik ugráspontja.) Ekkor $y(\lambda(\cdot)) = x(\cdot)$, és $\sup\limits_{0 \le t \le 1} |\lambda(t) - t| \le \delta$. Ezért $d(x(\cdot), y(\cdot)) \le \delta$.

C.) A 3. ÉS 4. SEGÉDTÉTEL BIZONYÍTÁSA.

A 3. Segédtétel bizonyítása. Válasszunk egy olyan $\alpha > 0$ számot, amelyre $\pm\alpha$ az M_0 kanonikus mérték folytonossági pontja, és $M_0(-\alpha, \alpha]) < \frac{\varepsilon\eta^2}{8}$, ahol az M_0 mértéket az $M_0(B) = N_0(B \times [0,1])$, $B \in \mathbf{R}^1$ képlet definiálja. Vezessük be az $N_0''(\cdot) = N_{0,\alpha}(\cdot)$ és $N_{0,A_L}'(\cdot) = N_{0,A_L,\alpha}'(\cdot)$ kanonikus mértékeket az $\mathbf{R}^1 \times [0,1]$ sávon, amelyeket az $N_0''(B) = N_0(B \cap \{(x,y)\colon\ |x| \ge \alpha\})$ és $N_{0,A_L}'(B) = N_0(B \cap \{(x,y)\colon\ A_L \le |x| < \alpha\})$, $B \in \mathbf{R}^1 \cap [0,1]$, képletek definiálnak, és az A_L számokat úgy választjuk e képletekben, hogy azok tegyék lehetővé a $T_0(t)$ korlátlanul osztható folyamatokat definiáló regularizált összegek bevezetését. Definiáljuk továbbá a $\nu_0''(\,dx,\,dy) = \frac{N_0''(\,dx,\,dy)}{x^2}$ és $\nu_{0,A_L}'(dx,dy) = \frac{N_{0,A_L}'(dx,dy)}{x^2}$ mértékeket. Tekintsünk egy $X_n'' = (X_n''^{(1)}, X_n''^{(2)})$, $n = 1, 2, \dots$, ν_0'' számlálómértékű Poisson folyamatot és az általa meghatározott

$$T_0''(t) = \sum_{n\colon\ X_n''^{(1)} > \alpha,\ 0 \le X_n''^{(2)} \le t} X_n''^{(1)} - E\left(\sum_{n\colon\ X_n^{(1)} > \alpha,\ 0 \le X_n''^{(2)} \le t} \tau\left(X_n''^{(1)}\right)\right), \quad 0 \le t \le 1,$$

korlátlanul osztható eloszlású sztochasztikus folyamatot. Hasonlóan, tekintsünk egy $X_{n,A_L}' = (X_{n,A_L}'^{(1)}, X_{n,A_L}'^{(2)})$, $n = 1, 2, \dots$, ν_{0,A_L}' számlálómértékű Poisson folyamatot és az általa meghatározott

$$T_{0,A_L}'(t) = \sum_{n\colon\ A_L \le X_n'^{(1)} < \alpha,\ 0 \le X_n'^{(2)} \le t} X_n'^{(1)} - E\left(\sum_{n\colon\ A_L \le X_n'^{(1)} < \alpha,\ 0 \le X_n'^{(2)} \le t} \tau\left(X_n'^{(1)}\right)\right),$$

$0 \le t \le 1$, korlátlanul osztható eloszlású sztochasztikus folyamatot. Legyen $T_{0,A_L}(t) = T_{0,A_L}'(t) + T_0''(T)$, $0 \le t \le 1$. A $T_{0,A_L}(\cdot)$ sztochasztikus folyamatok egy valószínűséggel konvergálnak szuprémum normában a $T_0(\cdot)$ sztochasztikus folyamathoz, ezért a (3.4) formula bizonyításához elég megmutatni, hogy

$$P\left(d(T_{0,A_L}(\cdot), \bar{T}_{0,A_L,t_0,\cdots,t_s}(\cdot)) > \eta\right) < \varepsilon, \quad \text{minden } L \ge L_0 \text{ számra} \tag{3.8}$$

ahol L_0 alkalmas szám, és $\bar{T}_{0,A_L,t_0,\cdot,t_s}(\cdot))$ a $T_{0,A_L}(\cdot)$ folyamat diszkretizáltját jelöli. Valóban, $\left\{\omega\colon\ d(T_0, (\cdot), \bar{T}_0(\cdot))\right\} \subset \liminf\limits_{L \to \infty} \left\{\omega\colon\ d(T_{0,A_L}(\cdot), \bar{T}_{0,A_L,t_0,\cdots,t_s}(\cdot))\right\}$, ezért a (3.8) formulából következik a (3.4) formula.

Felírhatjuk, hogy

$$P\left(d(T_{0,A_L}(\cdot),\bar T_{0,A_L,t_1,\dots,t_s}(\cdot))>\eta\right)\le P\left(\sup_{0\le t\le 1}|T'_{0,A_L}(t)|>\frac{\eta}{2}\right)$$
$$+P\left(d(T''_0(\cdot),\bar T''_{0,t_1,\dots,t_s}(\cdot))>\frac{\eta}{2}\right),$$

ezért a (3.8) formula bizonyításához elég megmutatni azt, hogy

$$P\left(\sup_{0\le t\le 1}|T'_{0,A_L}(t)|>\frac{\eta}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{ha } L\ge L_0, \tag{3.9}$$

és

$$P\left(d(T''_0(\cdot),\bar T''_{0,t_1,\dots,t_s}(\cdot))>\frac{\eta}{2}\right)<\frac{\varepsilon}{2},\quad \text{ha } \sup_{1\le l\le s}|t_l-t_{l-1}|<\delta, \tag{3.10}$$

alkalmas $\delta>0$ számmal.

Mivel $T'_{0,A_L}(t)$ független növekményű sztochasztikus folyamat, amelynek trajektóriái cadlag függvények, ezért a Kolmogorov egyenlőtlenség alapján felírhatjuk, hogy

$$P\left(\sup_{0\le t\le 1}|T'_{0,A_L}(t)|>\frac{\eta}{2}\right)\le\frac{4ET'_{0,A_L}(1)^2}{\eta^2}=\frac{4}{\eta^2}\int u^2\mu'_{0,A_L}(\,du)\le\frac{4}{\eta^2}M_0([-\alpha,\alpha])<\varepsilon,$$

ahol $\mu'_{0,A_L}(B)=\nu'_{0,A_L}(B\times[0,1])$ minden $B\subset\mathbf{R}^1$ mérhető halmazra. Ezért érvényes a (3.9) egyenlőtlenség.

A (3.10) formula bizonyításának érdekében vezessük be a $\lambda_0(t)=\lambda_{0,\alpha}(t)$ függvényt, amelyet a $\lambda_0(t)=\nu''_0(\mathbf{R}^1\times[0,t])=\int_{\{(x,y)\colon |x|>\alpha,\ 0\le|y|<t\}}\frac{N_0(\,dx,\,dy)}{x^2}$, $0\le t\le 1$, képlet definiál. Jegyezzük meg, hogy a 2. Tétel b.) feltétele alapján a $\lambda_0(\cdot)$ függvény folytonos a $[0,1]$ intervallumban. Azt állítjuk, hogy létezik olyan $\delta>0$ szám, hogy minden $0=t_0<t_1<\cdots<t_s=1$ számsorozatra

$$\sum_{l=1}^{s}(\lambda_0(t_l)-\lambda_0(t_{l-1}))^2<\varepsilon,\quad \text{ha } |t_l-t_{l-1}|<\delta,\ \text{minden } 1\le l\le s \text{ számra}. \tag{3.11}$$

Valóban, a $\lambda_0(\cdot)$ függvény egyenletesen folytonos, ezért létezik olyan $\delta>0$ szám, amelyre $|\lambda_0(t)-\lambda_0(s)|<\frac{\varepsilon}{\lambda(1)}$, ha $|t-s|<\delta$. Továbbá, a $\lambda_0(\cdot)$ függvény monoton nő. Ezért $\sum\limits_{l=1}^{s}(\lambda_0(t_l)-\lambda_0(t_{l-1}))^2\le\sup\limits_{1\le l\le s}|\lambda_0(t_l)-\lambda_0(t_{l-1})|\sum\limits_{l=1}^{s}|\lambda_0(t_l)-\lambda_0(t_{l-1})|<\varepsilon$, ha $|t_l-t_{l-1}|<\delta$ minden $1\le l\le s$ számra, azaz a (3.11) formula érvényes.

Egy λ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó $1-e^{-\lambda}-\lambda e^{-\lambda}\le\frac{\lambda^2}{2}$ valószínűséggel lesz nagyobb vagy egyenlő mint kettő, ezért annak valószinűsége, hogy a ν''_0 számlálómértékű $X''_n=(X''^{(1)}_n,X''^{(2)}_n)$, $n=1,2,\dots$, Poisson folyamat legalább két olyan X''_{n_1} és X''_{n_2} pontot tartalmaz, amelyek ${X''_{n_1}}^{(2)}$ és ${X''_{n_2}}^{(2)}$ második koordinátái valamely $[s,t]$ intervallumba esnek, $0\le s<t\le 1$, kisebb mint $\frac{1}{2}\nu''(\mathbf{R}^1\times[s,t])^2=$

$\frac{1}{2}(\lambda(t)-\lambda(s))^2$. Ezért a (3.11) formula alapján adva egy ν''_0 számlálómértékű $X''_n = (X''^{(1)}_n, X''^{(2)}_n)$, $n=1,2,\dots$, Poisson folyamat és egy $0 \le t_0 < t_1 < \dots < t_s = 1$ számsorozat az

$$A(t_1,\dots,t_s) = \{\omega\colon \#\{n\colon t_{l-1} \le X''^{(2)}_n(\omega) \le t_l\} \le 1 \quad \text{minden } 1 \le l \le s \text{ számra}\}$$

esemény teljesíti az

$$1 - P\left(A(t_1,\dots,t_s)\right) = P\left(\Omega \setminus A(t_1,\dots,t_s)\right) \le \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{s}(\lambda_0(t_l)-\lambda_0(t_{l-1}))^2 \le \frac{\varepsilon}{2} \qquad (3.12)$$

egyenlőtlenséget, ha $\sup\limits_{1\le l\le s}|t_l - t_{l-1}| < \delta$. Tegyük fel, hogy a (3.12) formulában szereplő $\delta > 0$ szám teljesíti a $\delta < \frac{\eta}{2}$ egyenlőtlenséget is. A (3.12) formula azt jelenti, hogy egy legalább $1-\frac{\varepsilon}{2}$ halmazon az $x(t) = \bar{T}''_{0,t_0,t_1,\dots,t_s}(t,\omega)$ és $y(t) = T''_0(t,\omega)$ függvényekre és a $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = 1$ számokra teljesülnek a 2. Lemma feltételei, ezért $d(T''_0(\cdot,\omega), \bar{T}''_{0,t_0,\cdots,t_s}(\cdot,\omega)) \le \delta < \frac{\eta}{2}$, egy legalább $1-\frac{\varepsilon}{2}$ valószínűségű halmazon. Ezért a (3.10) és (3.4) relációk érvényesek.

A (3.5) reláció bizonyítása hasonló a (3.4) formuláéhoz. Definiáljuk az $N'_{k,A_L}(\cdot)$, $N''_k(\cdot)$ kanonikus mértékeket, $\nu'_{k,A_L}(\cdot)$, $\nu''_k(\cdot)$ mértékeket, a ν'_{k,A_L} illetve $\nu''_k(\cdot)$ számlálómértékekű $X'_{n,A_L} = (X'^{(1)}_{n,A_L}, X'^{(2)}_{n,A_L})$, $n=1,2,\dots$, és $X''_n = (X''^{(1)}_n, X''^{(2)}_n)$, $n=1,2,\dots$, Poisson folyamatokat hasonlóan a bizonyítás elején definiált mértékekhez és Poisson folyamatokhoz, azzal a különbséggel, hogy az N_0 mértéket mindenütt az N_k mértékekkel helyettesítjük. Ezután ezeknek a Poisson folyamatoknak a segítségével definiáljuk a $T'_{k,A_L}(t)$ és $T''_k(t)$, $k=1,2,\dots$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamatokat hasonlóan a $T'_{0,A_L}(t)$ és $T''_0(t)$ sztochasztikus folyamatokhoz.

Ezután a (3.5) formula bizonyításához elég megmutatni a (3.9) és (3.10) formula következő analogonjait:

$$P\left(\sup_{0\le t\le 1}|T'_{k,A_L}(t)| > \frac{\eta}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } k \ge k_0 \text{ és } L \ge L_0, \qquad (3.13)$$

alkalmas $k_0 = k_0(\varepsilon,\eta)$ küszöbindex-szel és

$$P\left(d(T''_k(\cdot), \bar{T}''_{k,t_1,\dots,t_s}(\cdot)) > \frac{\eta}{2}\right) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{ha } k \ge k_0, \text{ és } \sup_{1\le l\le s}|t_l - t_{l-1}| < \delta, \qquad (3.14)$$

alkalmas $k_0 = k_0(\varepsilon,\eta)$ küszöbindex-szel és $\delta > 0$ számmal.

A (3.13) formula ugyanúgy bizonyítható mint a (3.9) képlet, az egyetlen különbség az, hogy jelen esetben ki kell használni at, hogy abból, hogy a $\pm\alpha$ számok az M_0 mérték folytonossági pontjai, és $M_0((-\alpha,\alpha]) < \frac{\varepsilon\eta^2}{8}$ következik, hogy $M_k((-\alpha,\alpha]) < \frac{\varepsilon\eta^2}{8}$, ha $k \ge k_0$ és k_0 alkalmas küszöbindex.

A (3.14) formula ugyanúgy bizonyítható mint a (3.10) képlet, az egyetlen különbség az, hogy most a (3.11) formula következő analogonjára van szükségünk:

Minden $k = 1, 2, \dots,$ számra vezessük be a $\lambda_k(t) = \lambda_{k,\alpha}(t)$ függvényt, amelyet a $\lambda_k(t) = \nu_k''(\mathbf{R}^1 \times [0,t]) = \int_{\{(x,y)\colon |x|>\alpha,\ 0\le |y|<t\}} \frac{N_k(\,dx,dy)}{x^2}$, $0 \le t \le 1$, képlet definiál. Ekkor létezik olyan $\delta > 0$ szám és $k_0 = k_0(\delta)$ küszöbindex úgy, hogy minden $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = 1$ számsorozatra

$$\sum_{l=1}^{s} (\lambda_k(t_l) - \lambda_k(t_{l-1}))^2 \le \varepsilon, \quad \text{ha } k \ge k_0 \text{ és } |t_l - t_{l-1}| < \delta, \text{ minden } 1 \le l \le s \text{ számra.} \tag{3.15}$$

Hangsúlyozzuk, hogy a k_0 küszöbindex a (3.15) formulában csak a $\delta > 0$ számtól függ nem pedig a $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = 1$ számsorozattól.

Lássuk be a (3.15) formulát először abban az esetben, ha a $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = 1$ számsorozat nemcsak a $|t_l - t_{l-1}| < \delta$, hanem a $|t_l - t_{l-1}| \ge \frac{\delta}{2}$ egyenlőtlenséget is teljesíti minden $1 \le l \le s$ számra. Ekkor az N_k kanonikus mértékeknek az N_0 mértékhez való konvergenciája miatt a monoton $\lambda_k(\cdot)$ függvények minden pontban konvergálnak a folytonos és monoton $\lambda_0(\cdot)$ függvényhez. Ilyen esetben viszont a $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k(t) = \lambda_0(t)$, $0 \le t \le 1$, konvergencia szükségszerűen egyenletes, és a (3.15) formula balodalán szereplő összeg legfeljebb $\frac{2}{\delta}$ tagot tartalmaz. Ezért eme plusz feltevés esetén a (3.15) formula a (3.11) formula direkt következménye.

Tekintsünk olyan $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_s = 1$ számsorozatot, amelyre $\sup\limits_{1\le s\le k} |t_l - t_{l-1}| < \frac{\delta}{2}$, azaz egy tetszőleges a (3.15) formulában szereplő számsorozat, azzal a különbséggel, hogy a δ számot most a $\frac{\delta}{2}$ számmal helyetesítettük. Nem nehéz belátni, hogy egy ilyen számsorozatnak létezik olyan $0 = t_{j_0} < t_{j_1} < \dots < t_{j_p} = 1$ részsorozatota, amelyre $\frac{\delta}{2} \le \left|t_{j_u} - t_{j_{u-1}}\right| < \delta$ minden $1 \le u \le p$ számra. Tekintsünk egy ilyen részsorozatot. Ekkor az előzőek alapján

$$\sum_{l=1}^{s} (\lambda_k(t_l) - \lambda_k(t_{l-1}))^2 \le \sum_{u=1}^{p} \left(\lambda_k(t_{j_u}) - \lambda_k(t_{j_{u-1}})\right)^2 < \varepsilon,$$

azaz a (3.15) formulát bebizonyítottuk ($\frac{\delta}{2}$ választással a δ szám helyett.) A (3.5) formula bizonyítása ezek után ugyanúgy történhet mint a (3.4) formuláé.

A 4. Segédtétel bizonyítása. A bizonyítás alapgondolata a következő. A vizsgálandó dirszkretizált $\bar{T}_k(\cdot) - \bar{T}'_k(\cdot)$ különbségek csak attól függnek, hogy a $T_k(\cdot)$ és $T'_k(\cdot)$ sztochasztikus folyamatokat meghatározó Poisson folyamatok hány pontot tartalmaznak a speciális $A \times [0, t_l]$, $A \subset \mathbf{R}^1$, alakú halmazokon. Ezért a kívánt Poisson folyamatoknak először csak alkalmas diszkretizáltjait konstruáljuk meg. Az, hogy ezen konstrukciókat el tudjuk végezni úgy, hogy teljesüljön a kívánt sztochasztikus konvergencia következik a 2. Segédtétel eredményéből. Végül alkalmas véletlenítéssel ki tudjuk egészíteni a Poisson folyamatok diszkretizáltjait egy a 4. Segédtétel állítását kielégítő konstrukcióvá.

A részletek kidolgozása érdekében bevezetünk néhány jelölést. Definiáljuk a következő $\tilde{N}_{k,l}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, $1 \le l \le s$, kanonikus mértékeket a számegyenesen és $\tilde{N}_k$, $k = 0, 1, 2, \dots$, kanonikus mértékeket az $\mathbf{R}^1 \times [0, 1]$ sávon. Definiáljuk először az

$\tilde N_{k,l}(B)=N_k(B\times[t_{l-1},t_l])$, $k=0,1,2,\dots$, $1\le l\le s$, $B\subset\mathbf{R}^1$ mértékeket. Vezessük be továbbá az $\tilde N'_{k,l}$ kanonikus mértékeket az $\mathbf{R}^1\times[0,1]$ sávon az $\tilde N'_{k,l}(B\times\{t_l\})=\tilde N'_{k,l}(B)$, $B\subset\mathbf{R}^1$, $\tilde N'_{k,l}(\mathbf{R}^1\times[0,1]\setminus\{0\})=0$, $k=0,1,2,\dots$, $1\le l\le s$ képletek segítségével, azaz legyen az $\tilde N'_{k,l}$ mérték az $\tilde N_{k,l}$ mérték eltoltja a számegyenesről az $\{(x,y)\colon\ y=t_l\}$ egyenesre. Végül legyen $\tilde N_k=\sum\limits_{l=1}^{s}\tilde N'_{k,l}$, $k=0,1,2,\dots$.

Definiáljuk ezután a $\tilde\nu_{k,l}(dx)=\frac{\tilde N_{k,l}(dx)}{x^2}$ a $\tilde\nu'_{k,l}(dx)=\frac{\tilde N'_{k,l}(dx)}{x^2}$ és $\tilde\nu_k(dx,dy)=\frac{\tilde N_k(dx,dy)}{x^2}$, $k=0,1,2,\dots$, $l=1,2,\dots,s$, mértékeket a szokásos módon. A 2. Segédtétel alapján konstruálhatunk olyan $\tilde\nu_{k,l}$ számlálómértékű $\xi_{k,l}(n)$, $n=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, $l\le 1\le s$, és $\tilde\nu_{0,l}$ számlálómértékű $\xi'_{k,l}(n)$, $n=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, $1\le l\le s$, Poisson folyamatokat, amelyekre az e Poisson folyamatok által meghatározott $U_{k,l}$ és $U'_{k,l}$ korlátlanul osztható eloszlású valószínűségi változók minden $1\le l\le s$ számra teljesítik az $U'_{k,l}-U_{k,l}\Rightarrow 0$ relációt, ha $k\to\infty$, ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl. Definiáljuk a $\tilde T_{k,j}=\sum\limits_{l=1}^{j}U_{k,l}$, $\tilde T'_{k,j}=\sum\limits_{l=1}^{j}U'_{k,l}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le s$, valószínűségi változókat. Ekkor teljesül a $\sup\limits_{1\le j\le s}\left|\tilde T_{k,j}-\tilde T'_{k,j}\right|\Rightarrow 0$ reláció, ha $k\to\infty$.

Ezután a 4. Segédtétel állításait kielégítő $T_k(t)$ és $T'_k(t)$ sztochasztikus folyamatok konstrukcióját adjuk meg. Tekintsük a $\nu_{k,l}$, $\nu_{k,l}(B)=\nu_k(B\cap\mathbf{R}^1\times[t_{l-1},t_l])$, $k=0,1,2,\dots$, $1\le l\le s$, mértékeket a $\mathbf{R}^1\times[0,1]$ sávon, ahol $\nu_k(dx,dy)=\frac{N_k(dx,dy)}{x^2}$. Ekkor minden $k=0,1,2\dots$, $1\le l\le s$ és $x\in\mathbf{R}^1$ számra létezik olyan $\nu_{k,l}(A|x)$ "feltételes mérték" a $[t_{l-1},t_l]$ intervalliumon, amelyre $\nu_{k,l}(\cdot|x)$ valószínűségi mérték a $[t_{l-1},t_l]$ intervallumon minden $x\in\mathbf{R}^1$ számra, $\nu_{k,l}(A|\cdot)$ mérhető függvény a $[t_{l-1},t_l]$ intervallumon minden $A\subset\mathbf{R}^1$ Borel-mérhető halmazra, és

$$\nu_{k,l}(B)=\int\nu(B|x)\tilde\nu'_{k,l}(\,dx)\quad\text{minden } B\subset\mathbf{R}^1\times[t_{l-1},t_l]\text{ mérhető halmazon}\qquad(3.16)$$

minden $k=0,1,2,\dots$ és $1\le l\le s$ számra, ahol $\tilde\nu_{k,l}$ az előző paragrafusban definiált mérték. A (3.16) formula érvényessége tekinthető mint a reguláris feltételes eloszlásáról szóló eredmény következménye.

Ezután megkonstruáljuk azokat az $X_{k,n}=(X^{(1)}_{k,n},X^{(2)}_{k,n})$, $n=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, ν_k számlálómértékű és $X'_{k,n}=({X'_{k,n}}^{(1)},{X'_{k,n}}^{(2)})$, $n=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, ν_0 számlálómértékű Poisson folyamatokat, amelyek olyan $T_k(t)$ és $T'_k(t)$ sztochasztikus folyamatokat határoznak meg, amelyek teljesítik a 4. Segédtételt. Tekintsük a már megkonstruált $\tilde\nu_{k,l}$ számlálómértékű $\xi_{k,l}(n)$, $n=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, $l\le 1\le s$, és $\tilde\nu_{0,l}$ számlálómértékű $\xi'_{k,l}(n)$, $n=1,2,\dots$, $k=1,2,\dots$, $1\le l\le s$, Poisson folyamatokat, és ezek segítségével definiáluk a megkonstruálandó Poisson folyamatoknak az $\mathbf{R}^1\times(t_{l-1},t_l]$ sávba eső pontjait. Minden $\xi_{k,l}(n)$ valószínűségi változóhoz konstruáljunk egy $\mu'_{k,l}(\cdot|\xi_{k,l}(n))$ eloszlású $\eta_{k,l}(n)$ valószínűségi változót a $[t_{l-1},t_l]$ intervallumon és minden $\xi'_{k,l}(n)$ valószínűségi változóhoz konstruáljunk egy $\nu'_{0.l}(\cdot|\xi'_{k,l}(n))$ eloszlású $\eta'_{k,l}(n)$ valószínűségi változót. Konstruáljuk ezeket a véletlen számokat egymástól függetlenül.

Egy rögzített k számra az $X_{k,n} = \left(X^{(1)}_{k,n}, X^{(2)}_{k,n}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, ν_k számlálómértékű Poisson folyamat álljon az előbb megkonstrált $(\xi_{k,l}(n), \eta_{k,l}(n))$, $n = 1, 2, \dots$, $1 \le l \le s$, pontpárokból, az és $X'_{k,n} = \left({X'_{k,n}}^{(1)}, {X'_{k,n}}^{(2)}\right)$, $n = 1, 2, \dots$, $k = 1, 2, \dots$, ν_0 számlálómértékű Poisson folyamat pedig álljon az előbb megkonstrált $(\xi'_{k,l}(n), \eta'_{k,l}(n))$, $n = 1, 2, \dots$, $1 \le l \le s$, pontpárokból. Azt állítjuk, hogy ilyen módon valóban ν_k illetve ν_0 számlálómértékű Poisson folyamatot kapunk, amelyek teljesítik a 4. Segédtétel állítását.

Ahhoz, hogy megmutassuk, hogy ilyen módon a kívánt számláló mértékkel rendelkező Poisson folyamatokat konstruáltunk elég megmutatni azt, hogy amennyiben a $B \times [t_{l-1}, t_l]$ téglalapra teljesül s $\nu_{k,l}(B \times [t_{l-1}, t_l]) < \infty$ feltétel, akkor a $B \times [t_{l-1}, t_l]$ téglalapba eső $(\xi_{k,l}(n), \eta_{k,l}(n))$, $n = 1, 2, \dots$, pontpárok egy $\nu_{k,l}$ számlálómértékű Poisson folyamatot alkotnak ezen a téglalapon minden $k = 1, 2, \dots$ és $1 \le l \le s$ számra. Amennyiben pedig a $\nu_{0,l}(B \times [t_{l-1}, t_l]) < \infty$ feltétel teljesül, akkor a $B \times [t_{l-1}, t_l]$ téglalapba eső $(\xi'_{k,l}(n), \eta'_{k,l}(n))$, $n = 1, 2, \dots$, pontpárok egy $\nu_{0,l}$ számlálómértékű Poisson folyamatot alkotnak ezen a téglalapon minden $k = 1, 2, \dots$ és $1 \le l \le s$ számra. Ezen állításokat viszont könnyen láthatjuk a következő észrevétel segítségével. Ezek a folyamatok ugyanolyan eloszlásúak mint az olyan pontfolyamatok, amelyeket úgy kapunk hogy veszünk véletlen számú pontot úgy, hogy ezen pontok száma $\nu_{k,l}(B \times [t_{l-1}, t_l])$ paraméterű Poisson eloszlású valószínűségi változó, és ezeket a pontokat véletlenül ledobjuk $\frac{\mu_{k,l}(dx,dy)}{\nu_{k,l}(B \times [t_{l-1}, t_l])}$ eloszlással a $B \times [t_{l-1}, t_l]$ téglalapra. Ezek az új pontfolyamatok ugyanis a kívánt számlálómértékkel rendelkező Poisson folyamatok.

Végül jegyezzük meg, hogy a konstruált Poisson folyamatok olyanok, hogy az általuk meghatározott korlátlanul osztható $T_k(\cdot)$ és $T'_k(\cdot)$ sztochasztikus folyamatok $\bar{T}_{k,t_0,\cdot,t_s}(\cdot)$ és $\bar{T}'_{k,t_0,\cdot,t_s}(\cdot)$ diszkretizáltjai teljesítik az $\bar{T}_{k,t_0,\cdot,t_s}(t) = \tilde{T}_{k,j-1}$ és $\bar{T}'_{k,t_0,\cdot,t_s}(t) = \tilde{T}'_{k,j-1}$, ha $t_{j-1} < t \le t_j$, $1 \le j \le s$, $\bar{T}_{k,t_0,\cdot,t_s}(1) = \tilde{T}_{k,s}$ és $\bar{T}'_{k,t_0,\cdot,t_s}(1) = \tilde{T}'_{k,s}$, $k = 1, 2, \dots$, azonosságokat. Ezért ezek a Poisson folyamatok, illetve az általuk meghatározott korlátlanul osztható folyamatok teljesítik a 4. Segédtétel állítását.

Appendix

A Tétel A bizonyítása. Elég bebizonyítani a szeparábilis metrikus terekben megfogalmazott állítást. Azt hogy a S_k valószínűségi változók gyengén konvergálnak egy μ mértékhez megfogalmazhatjuk úgy is, hogy az S_k valószínűségi változók μ_k eloszlásai teljesítik a $\limsup_{k\to\infty} \mu_k(\mathbf{F}) \le \mu(\mathbf{F})$ relációt minden zárt $\mathbf{F} \subset X$ halmazra. Azt fogjuk megmutatni, hogy a Tétel A feltételeinek teljesülése esetén az T_k valószínűségi változók $\bar\mu_k$ eloszlásai is teljesítik a $\limsup_{k\to\infty} \bar\mu_k(\mathbf{F}) \le \mu(\mathbf{F})$ relációt zárt $F \subset X$ halmazokra. (Jegyezzük meg, hogy a gyenge konvergencia e bizonyításban felhasznált jellemzése tetszőleges szeparábilis metrikus térben érvényes. A metrikus tér teljességét nem szükséges feltenni. Lásd például Billingsley Convergence of Probability Measures című könyvének 2.1 Tételét.)

Rögzítsünk egy $\varepsilon > 0$ számot. Mivel $\mathbf{F} = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \mathbf{F}_{\frac{1}{n}}$, ahol $\mathbf{F}_a = \{x\colon\ \rho(x,\mathbf{F}) \le a\}$, ezért létezik olyan $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ szám, amelyre $\mu(\mathbf{F}) \ge \mu(\mathbf{F}_\delta) - \varepsilon$. Továbbá teljesül a $\mu_k(\mathbf{F}_\delta) - \varepsilon < \mu(\mathbf{F}_\delta)$, ha $k \ge k_0 = k_0(\varepsilon,\delta,\mathbf{F})$. Mivel $\rho(S_k,T_k)$ sztochasztikusan tart nullához, ezért a $\bar\mu_k(\mathbf{F}) = P(T_k \in \mathbf{F}) \le P(S_k \in \mathbf{F}_\delta) + P(\rho(S_k,T_k) > \delta) \le \mu_k(\mathbf{F}_\delta) + \varepsilon$, egyenlőtlenség is teljesül, ha $k \ge k_0$, és a $k_0 = k_0(\varepsilon,\delta,\mathbf{F})$ küszöbindexet elég nagynak választjuk. A fenti egyenlőtlenségekből következik, hogy $\bar\mu_k(\mathbf{F}) \le \mu_k(\mathbf{F}_\delta) + \varepsilon \le \mu(\mathbf{F}_\delta) + 2\varepsilon \le \mu(\mathbf{F}) + 3\varepsilon$, ha $k \ge k_0(\varepsilon,\delta,\mathbf{F})$. Mivel a fenti egyenlőtlenség tetszőleges $\varepsilon > 0$ számra érvényes, innen következik, hogy $\limsup_{k\to\infty} \mu_k(\mathbf{F}) \le \mu(\mathbf{F})$, tehát a Tétel A-t bebizonyítottuk.