Centrális határeloszlástétel martingálokra.

1. Bevezetés. A fő eredmények megfogalmazása.

Ebben az írásban a a valószínűségszámítás egyik legfontosabb eredményének az egyes soraiban független valószínűségi változókat tartalmazó szériasorozatok sorösszegeiről szóló centrális határeloszlástételnek egy tartalmas, martingálokról szóló általánosítását ismertetem. Annak érdekében, hogy a martingálokról szóló eredményt jobban megértsük, felidézem először az egyes soraiban független valószínűségi változókat tartalmazó szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástételt.

Centrális határeloszlástétel egyes soraiban független valószínűségi változókat tartalmazó szériasorozatok sorösszegeiről. *Legyen adva egy szériasorozat, azaz valószínűségi változók két pozitív egész számmal indexelt $X_{k,j}$, $k=1,2,\dots$, $1\le j\le n_k$, rendszere, ahol n_k, $k=1,2,\dots$ pozitív egész számok sorozata. Teljesítse e szériasorozat a következő tulajdonságokat:*

a) Az egyes sorokban levő valószínűségi változók függetlenek, és nulla várható értékűek, azaz minden $k=1,2,\dots$ indexre a $X_{k,1},\dots,X_{k,n_k}$ valószínűségi változók függetlenek, és $EX_{k,j}=0$ minden $k=1,2,\dots$ és $1\le j\le n_k$ indexre.

b.) A szériarozat egy sorában levő valószínűségi változók szórásnégyzeteinek az összege 1-hez tart, ha $k\to\infty$, azaz

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k} EX_{k,j}^2=1$$

c) A szériasorozat teljesíti az úgynevezett Lindeberg feltételt, azaz

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k} EX_{k,j}^2 I(|X_{k,j}|>\varepsilon)=0 \quad \textit{minden } \varepsilon>0 \textit{ számra.} \tag{1.1}$$

(Itt, és a továbbiakban $I(A)$ egy A halmaz indikátorfüggvényét jelöli.)

Ekkor az $S_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k} X_{k,j}$ sorösszegek eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz, ha $k\to\infty$.

Ebben az írásban egy centrális határeloszlástételt ismertetek olyan szériasorozatokra, amelyek az előző tételhez hasonló, de gyengébb feltételeket teljesítenek. A szériasorozatok egyes soraiban szereplő valószínűségi változókról azt tesszük fel, hogy azok martingálkülönbségsorozatot alkotnak. Ez a megkötés úgy tekinthető, mint az előző tétel a) feltételének gyengített változata. A b) feltétel helyett azt tesszük fel, hogy a szériasorozat egy sorban levő valószínűségi változóinak múltra vett feltételes szórásnégyzeteinek (véletlen) összege 1-hez tart. Végül a centrális határeloszlástétel teljesüléséhez szükség van még a c) pontban megfogalmazott Lindeberg feltétel egy némileg gyengébb megfelelőjére. A pontos eredmény a következő állítást mondja ki.

Martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel. *Legyen adva minden $k = 1, 2, \dots$ számra valószínűségi változók $X_{k,1}, \dots, X_{k,n_k}$ és növekvő $\mathcal{F}_{k,0} \subset \mathcal{F}_{k,1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{k,n_k}$, σ-algebrák olyan rendszere, amely teljesíti a következő feltételeket:*

a.) Az $X_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, valószínűségi változók és $\mathcal{F}_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $0 \le j \le n_k$, σ-algebrák martingál különbség szériasorozatot alkotnak, azaz az $X_{k,j}$ valószínűségi változó mérhető az $\mathcal{F}_{k,j}$ σ-algebrára, és $E(X_{k,j}|\mathcal{F}_{k,j-1}) = 0$ egy valószínűséggel minden $k = 1, 2, \dots$ és $1 \le j \le n_k$ indexre.

b.) $EX_{k,j}^2 < \infty$ minden $k = 1, 2, \dots$ és $1 \le j \le n_k$ indexre, és vezessük be a $\sigma_{k,j}^2 = E(X_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1})$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$ feltételes szórásnégyzeteket. Teljesül a

$$\sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 \Rightarrow 1, \quad \text{ha } k \to \infty \tag{1.2}$$

reláció. (Itt és a továbbiakban $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl.)

c.) Teljesül a következő Lindeberg típusú feltétel

$$\sum_{j=1}^{n_k} E(X_{k,j}^2 I(|X_{k,j}| > \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1}) \Rightarrow 0, \quad \text{ha } k \to \infty \tag{1.3}$$

minden $\varepsilon > 0$ számra.

E feltételek teljesülése esetén az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} X_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszlásfüggvényhez, ha $k \to \infty$.

Igaz a fenti tétel következő általánosítása, amely martingál különbség szériasorozatok helyett 'majdnem martingál különbség' szériasorozatokra mond ki hasonló centrális határeloszlástételt.

Majdnem martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel. *Legyen adva minden $k = 1, 2, \dots$ számra valószínűségi változók $X_{k,1}, \dots, X_{k,n_k}$ és növekvő $\mathcal{F}_{k,0} \subset \mathcal{F}_{k,1} \subset \cdots \subset \mathcal{F}_{k,n_k}$, σ-algebrák olyan rendszere, amelyekre az $X_{k,j}$ valószínűségi változó mérhető az $\mathcal{F}_{k,j}$ σ-algebrára minden $k = 1, 2, \dots$ és $1 \le j \le n_k$ indexre, és a $\mu_{k,j} = E(X_{k,j}|\mathcal{F}_{k,j-1})$ feltételes várható értékek kicsik a következő értelemben:*

$$\sum_{j=1}^{n_k} \mu_{k,j} \Rightarrow 0, \quad \text{ha } k \to \infty. \tag{1.4}$$

Ha az $X_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, valószínűségi változók és $\mathcal{F}_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $0 \le j \le n_k$, σ-algebrák teljesítik az (1.2), (1.3) és (1.4) feltételeket azzal a módosítással, hogy jelen esetben az (1.2) formulában a

$$\sigma_{k,j}^2 = E\left((X_{k,j} - \mu_{k,j})^2|\mathcal{F}_{k,j-1}\right) = E(X_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1}) - \mu_{k,j}^2 \tag{1.5}$$

valószínűségi változók szerepelnek, akkor az $S_k = \sum_{j=1}^{n_k} X_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, *összegek eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszlásfüggvényhez* $k \to \infty$ *esetén.*

A fenti eredmények a legáltalánosabb ismert centrális határeloszlástételek martingálkülönbség, illetve majdnem martingál különbség szériasorozatokra. Érdemes külön hangsúlyozni, hogy az (1.2) feltételben csak azt követeltük meg, hogy a $\sigma_{k,j}^2$ feltételes második momentumok összegei rögzített k indexre 1-hez tartanak, ha $k \to \infty$, de nem fogalmaztunk meg olyan feltételt, amelyből az következne, hogy a $\sigma_{k,j}^2 = E(X_{k,j}^2 | \mathcal{F}_{k,j-1})$ feltételes második momentumok közel vannak a $d_{k,j}^2 = EX_{k,j}^2$ második momentumokhoz. Ilyen gyenge feltétel mellett a bizonyítás finomabb gondolatokat igényel. Két olyan dolgozatot ismerek, ahol a centrális határeloszlást ilyen feltételek mellett bizonyították. Ezek egyike B. M. Brown *Martingale Central Limit Theorems* című dolgozata, amely a *The Annals of Mathematical Statistics* (1971) vol 42 No. 1 59–66 kötetben jelent meg. A másik Aryeh Dvoretzky *Asymptotic normality for sums of dependent random variables* című a *Sixth Berkeley Symposium* II. kötet 513–535 oldalán megjelent munkája. A két dolgozat a bizonyítás fő nehézségét különböző módszer segítségével küzdi le. Brown dolgozata az egyszerűbb, és az ő módszere alkalmasabbnak látszik általánosabb határeloszlástétel problémák vizsgálatában. Ezért itt Brown bizonyításának egy kissé módosított változatát ismertetem. Bár Brown cikke martingálok normalizáltjaira bizonyít határeloszlástételt, tehát nem szériasorozatokat vizsgál, az eredmény általánosítása szériasorozatokra nem okoz nehézséget. Az ismertetés végén röviden összehasonlítom Brown és Dvoretzky módszerét. Ezenkívül ismertetek egy eredményt, amely a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel funkcionális centrális határeloszlástétel változatának tekinthető. Brown dolgozata tartalmaz egy hasonló eredményt abban a speciális esetben, amikor martingál sorozatok normalizált tagjait tekintjük. Az általános szériasorozatokat azért érdemes külön tárgyalni, mert ekkor olyan jelenségeket is figyelembe kell venni a tétel megfogalmazásában, amelyek a Brown dolgozatában tárgyalt esetben nem jelennek meg. A martingál különbség szériasorozatokról szóló funkcionális centrális határeloszlástételt megfogalmazom, de annak bizonyítását nem tárgyalom. Csak a bizonyítás néhány fontos gondolatát ismertetem.

E bevezetés végén rövid megjegyzést teszek a centrális határeloszlástétel (1.3) Lindeberg típusú feltételével kapcsolatban. Az (1.1) formulában megadott Lindeberg feltételből következik az (1.3) formula, mert

$$\sum_{j=1}^{n_k} EX_{k,j}^2 I(|X_{k,j}| > \varepsilon) = E\left(\sum_{j=1}^{n_k} E(X_{k,j}^2 I(|X_{k,j}| > \varepsilon) | \mathcal{F}_{k,j-1})\right),$$

így ha az (1.1) formula teljesül, akkor az (1.3) kifejezés baloldala L_1-normában is konvergál nullához. Az állítás megfordítása nem igaz. Lehet olyan szériasorozatokat konstruálni, amelyekre az (1.3) reláció teljesül, de az (1.1) reláció nem. Viszont a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel bizonyításának első lépésében a bizonyítást egy olyan speciális esetre redukáljuk, amelyben egyéb a bizonyítás szempontjából hasznos tulajdonságok mellett az is igaz, hogy az (1.3) feltételt az (1.1) feltétellel lehet helyettesíteni.

2. Az eredmények bizonyítása.

A martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel bizonyítása. Először azt mutatom meg, hogy a tétel bizonyítását arra az esetre lehet redukálni, amelyben a szériasorozat elemei teljesítik a tétel feltételei mellett a

$$\lim_{k\to\infty} P\left(\sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 \le 2\right) = 1 \tag{2.1}$$

relációt is. (Valójában ebben a formulában szereplő egyenlőtlenség jobb oldalán a 2 helyett tetszőleges $C > 1$ számot írhattunk volna.)

Ezen állítás bizonyításának érdekében vezessük be a

$$\tau_k = \min\left[n_k,\, \max\left\{j\colon\ \sum_{l=1}^{j} \sigma_{k,l}^2 \le 2\right\}\right] \qquad (\tau_k = 0 \text{ ha } \sigma_{k,1}^2 > 2.) \tag{2.2}$$

megállási szabályokat, és az $\bar{X}_{k,j}$,

$$\bar{X}_{k,j} = \begin{cases} X_{k,j}, & \text{ha } j \le \tau_k, \\ 0, & \text{ha } j > \tau_k, \end{cases} \qquad 1 \le j \le n_k,$$

valószínűségi változókat. A most definiált τ_k valóban megállási szabály az $\mathcal{F}_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$, σ-algebrák rendszerére nézve, mert $\sigma_{k,j+1}^2$ $\mathcal{F}_{k,j}$ mérhető valószínűségi változó, így a j időpontban el tudjuk dönteni, hogy a $\{\tau_k \le j\}$ vagy a $\{\tau_k \ge j+1\}$ esemény következik-e be. (Vegyük észre, hogy $\sigma_{k,j+1}^2$ $\mathcal{F}_{k,j}$ és nemcsak $\mathcal{F}_{k,j+1}$ mérhető valószínűségi változó.) Vezessük be a $\bar{\sigma}_{k,j}^2 = E(\bar{X}_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1})$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, valószínűségi változókat is. Rögzített k indexre az $\bar{X}_{k,j}$, $1 \le j \le n_k$, valószínűségi változókból és $\mathcal{F}_{k,j}$, $0 \le j \le n_k$, σ-algebrákból álló rendszer martingálkülönbség sorozatot alkot. Továbbá $\bar{\sigma}_{k,j}^2(\omega) = \sigma_{k,j}^2(\omega)$, ha $\tau_k(\omega) \ge j$, és $\bar{\sigma}_{k,j}^2(\omega) = 0$, ha $\tau_k(\omega) < j$. Valóban, $E(\bar{X}_{k,j}|\mathcal{F}_{k,j-1}) = E(X_{k,j}I(\tau_k \ge j)|\mathcal{F}_{k,j-1}) = I(\tau_k \ge j)E(X_{k,j}|\mathcal{F}_{k,j-1}) = 0$, és $\bar{\sigma}_{j,k}^2 = E(X_{k,j}^2 I(\tau_k \ge j)|\mathcal{F}_{k,j-1}) = I(\tau_k \ge j)E(X_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1}) = I(\tau_k \ge j)\sigma_{k,j}^2$.

Ezenkívül az (1.3) reláció érvényben marad, ha abban az $X_{k,j}$ valószínűségi változókat az $\bar{X}_{k,j}$ valószínűségi változókkal helyettesítjük, mivel $|\bar{X}_{k,j}| \le |X_{k,j}|$. Továbbá az (1.2) reláció miatt $\lim\limits_{k\to\infty} P(\tau_k = n_k) = 1$.

A fentiekből következik, hogy az (1.2) reláció érvényben marad, ha a $\sigma_{k,j}^2$ valószínűségi változókat a $\bar{\sigma}_{k,j}^2$ valószínűségi változókkal cseréljük ki, és a (2.1) reláció is érvényes, ha abban $\bar{\sigma}_{k,j}^2$-t írunk $\sigma_{k,j}^2$ helyett. Végül az $\bar{S}_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \bar{X}_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, összegek teljesítik az $\bar{S}_k - S_k \Rightarrow 0$ relációt, ha $k \to \infty$, mert $\bar{S}_k = S_k$, ha $\tau_k = n_k$. A fenti összefüggésekből következik, hogy elég a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástételt az $X_{k,j}$ szériasorozat helyett az $\bar{X}_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozatra belátni, és ez utóbbi szériasorozat változói (és a hozzájuk tartozó) $\bar{\sigma}_{k,j}^2$ valószínűségi változók) jelöléséből elhagyva a felülvonást olyan szériasorozatot kapunk, amely teljesíti e tétel feltételeit és ezenkívül a (2.1) relációt is.

Az (1.3) és (2.1) feltételből következik az (1.1) Lindeberg feltétel is az $X_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, szériasorozatra, mert a Lebesgue tétel szerint, és az

$$\sum_{j=1}^{n_k} E(X_{k,j}^2 I(|X_{k,j}| > \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1}) \le \sum_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 \le 2$$

reláció miatt

$$\sum_{j=1}^{n_k} EX_{k,j}^2 I(|X_{k,j}| > \varepsilon) = E\left(\sum_{j=1}^{n_k} E(X_{k,j}^2 I(|X_{k,j}| > \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1})\right) \to 0,$$

ha $k \to \infty$. Hasonlóan megmutatható, hogy az (1.2) formulában a (2.1) reláció teljesülése esetén L_1 konvergenciát is írhatunk a sztochasztikus konvergencia helyett, és

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} E\sigma_{k,j}^2 = \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{n_k} EX_{k,j}^2 = 1. \tag{2.3}$$

A bizonyítandó centrális határeloszlástétel ekvivalens azzal az állítással, hogy

$$\lim_{k\to\infty} Ee^{itS_k} = e^{-t^2/2} \quad \text{minden } t \text{ valós számra.} \tag{2.4}$$

Megmutatjuk, hogy a (2.4) reláció levezethető (a (2.1) formula felhasználásával) a

$$\lim_{k\to\infty} Ee^{itS_k + t^2U_k/2} = 1, \quad \text{minden } t \text{ valós számra} \tag{2.5}$$

könnyebben igazolható formulából, ahol $U_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2$, $k = 1, 2, \dots$.

Valóban az (1.2) formula szerint $U_k \Rightarrow 1$, ha $k \to \infty$, és $0 \le U_k \le 2$ minden $k = 1, 2, \dots$ számra a (2.1) formula miatt. Ezért $e^{itS_k + t^2U_k/2} - e^{itS_k + t^2/2} \Rightarrow 0$, ha $k \to \infty$ minden valós t számra, és $|e^{itS_k + t^2U_k/2} - e^{itS_k + t^2/2}| \le 2 \cdot 2^{1+t^2}$. Ezért a Lebesgue tétel szerint $\lim\limits_{k\to\infty} E(e^{itS_k + t^2U_k/2} - e^{itS_k + t^2/2}) = 0$. A (2.4) képlet következik ebből az összefüggésből és a (2.5) formulából.

A (2.5) formula bizonyítása érdekében először megmutatjuk, hogy létezik olyan csak a t paramétertől függő $K(t) > 0$ szám, amelyre

$$|Ee^{itS_k + t^2U_k/2} - 1| \le K(t) \sum_{j=1}^{n_k} E\left|e^{t^2\sigma_{k,j}^2/2} E\left(e^{itX_{k,j}}|\mathcal{F}_{k,j-1}\right) - 1\right|. \tag{2.6}$$

Valóban, vezessük be az

$$S_{k,j}=\sum_{l=1}^{j}X_{k,l},\quad U_{k,j}=\sum_{l=1}^{j}\sigma_{k,l}^2,\quad 1\le j\le n_k$$

és $S_{k,0}=0$, $U_{k,0}=0$ valószínűségi változókat minden $k=1,2,\dots$ indexre. Ekkor $S_{k,n_k}=S_k$, $U_{k,n_k}=U_k$, és

$$\begin{aligned}Ee^{itS_k+t^2U_k/2}-1&=\sum_{j=1}^{n_k}E\left(e^{itS_{k,j}+t^2U_{k,j}/2}-e^{itS_{k,j-1}+t^2U_{k,j-1}/2}\right)\\&=\sum_{j=1}^{n_k}Ee^{itS_{k,j-1}+t^2U_{k,j-1}/2}E\left(e^{itX_{k,j}+t^2\sigma_{k,j}^2/2}-1\middle|\mathcal{F}_{k,j-1}\right).\end{aligned}$$

Mivel az $e^{itS_{k,j-1}+t^2U_{k,j-1}/2}$ valószínűségi változó korlátos, kisebb mint valamely $K(t)$ csak a t paramétertől függő szám, a fenti azonosságból következik, hogy

$$|Ee^{itS_k+t^2U_k/2}-1|\le K(t)\sum_{j=1}^{n_k}E\left|E\left(e^{itX_{k,j}+t^2\sigma_{k,j}^2/2}-1|\mathcal{F}_{k,j-1}\right)\right|,$$

és mivel $E\left(e^{itX_{k,j}+t^2\sigma_{k,j}^2/2}-1|\mathcal{F}_{k,j-1}\right)=e^{t^2\sigma_{k,j}^2/2}E(e^{itX_{k,j}}|\mathcal{F}_{k,j-1})-1$, innen következik a (2.6) becslés.

Annak érdekében, hogy a (2.5) formulát belássuk a (2.6) egyenlőtlenség segítségével jó becslést kell adnunk az $E\left|e^{t^2\sigma_{k,j}^2/2}E\left(e^{itX_{k,j}}|\mathcal{F}_{k,j-1}\right)-1\right|$ kifejezésekre. E kifejezések alább ismertetendő becslésének a hátterében a következő heurisztikus gondolatmenet van. Az $e^{t^2\sigma_{k,j}^2/2}$ függvény Taylor sorfejtése $1+\frac{t^2\sigma_{k,j}^2}{2}+\cdots$, az $E(e^{itX_{k,j}}|\mathcal{F}_{k,j-1})$ függvény sorfejtése pedig (az $E(X_{k,j}|\mathcal{F}_{k,j-1})=0$ reláció miatt)

$$E(e^{itX_{k,j}}|\mathcal{F}_{k,j-1})=1+E(itX_{k,j}|\mathcal{F}_{k,j-1})-\frac{E(t^2X_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1})}{2}+\cdots=1-\frac{t^2\sigma_{k,j}^2}{2}+\cdots$$

alakú. Ezért az $e^{t^2\sigma_{k,j}^2/2}E\left(e^{itX_{k,j}}|\mathcal{F}_{k,j-1}\right)-1$ kifejezés Taylor sorfejtésének a konstans, az első és másodrendű tagja eltűnik, és ez a kifejezés kicsi. Azt várjuk, hogy emiatt jó becslést tudunk adni a (2.6) formula jobboldalára. A számolás során ki kell használni, hogy a (2.1) és (1.1) formulák miatt a $\sigma_{k,j}^2$ valószínűségi változók kicsik.

Az $e^{t^2\sigma_{k,j}^2/2}$ kifejezés $e^{t^2\sigma_{k,j}^2/2}=1+\frac{t^2\sigma_{k,j}^2}{2}+\eta_{k,j}^{(1)}$ alakban írható alkalmas $\eta_{k,j}^{(1)}$ valószínűségi változóval, amelyre teljesül az $|\eta_{k,j}^{(1)}|\le K_1(t)\sigma_{k,j}^4$ egyenlőtlenség valamely csak a t számtól függő $K_1(t)$ számmal, mert $\sigma_{k,j}^2\le 2$ a (2.1) formula szerint. Hasonlóan becsülhetjük az

$$\eta_{k,j}^{(2)}=E\left(e^{itX_{k,j}}-1+\frac{t^2X_{k,j}^2}{2}\middle|\mathcal{F}_{k,j-1}\right)$$

kifejezést. Ennek érdekében rögzítsünk egy kis $\varepsilon > 0$ számot, és írjuk fel az

$$\left|e^{itX_{k,j}} - 1 - itX_{k,j} + \frac{t^2X_{k,j}^2}{2}\right| \le \alpha(X_{k,j}) = \alpha_{\varepsilon,t}(X_{k,j})$$

egyenlőtlenséget, ahol $\alpha(x) = t^2x^2I(|x| > \varepsilon) + \frac{\varepsilon}{6}|t|^3x^2I(|x| \le \varepsilon)$. Valóban, ha $|x| > \varepsilon$, akkor az $\left|e^{itx} - 1 - itx + \frac{t^2x^2}{2}\right|$ kifejezésre a t^2x^2 és ha $|x| \le \varepsilon$, akkor a $\frac{|t|^3|x|^3}{6} \le \varepsilon\frac{|t|^3x^2}{6}$ felső becslést adva megkapjuk a fenti formulát. Felhasználva az $E(X_{k,j}|\mathcal{F}_{k,j-1}) = 0$ relációt és véve az előző egyenlőtlenségben szereplő valószínűségi változók feltételes várható értékét a $\mathcal{F}_{k,j-1}$ σ-algebra szerint a következő egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\begin{aligned}|\eta_{k,j}^{(2)}| &= \left|E\left(e^{itX_{k,j}} - 1 - itX_{k,j} + \frac{t^2X_{k,j}^2}{2}\middle|\mathcal{F}_{k,j-1}\right)\right| \\ &\le E\left(\left|e^{itX_{k,j}} - 1 - itX_{k,j} + \frac{t^2X_{k,j}^2}{2}\right|\middle|\mathcal{F}_{k,j-1}\right) \\ &\le E(\alpha(X_{k,j})|\mathcal{F}_{k,j-1}) \le t^2E(X_{k,j}^2I(|X_{k,j}| > \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1}) + \frac{\varepsilon}{6}|t|^3\sigma_{k,j}^2.\end{aligned}$$

Mivel $\sigma_{k,j}^2 \le 2$ a (2.1) formula miatt, ezért mind $\eta_{k,j}^{(1)}$, mind $\eta_{k,j}^{(2)}$ korlátos valószínűségi változó (csak a t paramétertől függő) korláttal, és a fenti becslésekből kapjuk, hogy

$$\begin{aligned}&\left|e^{t^2\sigma_{k,j}^2/2}E\left(e^{itX_{k,j}}|\mathcal{F}_{k,j-1}\right) - 1\right| = \left|\left(1 + \frac{t^2\sigma_{k,j}^2}{2} + \eta_{k,j}^{(1)}\right)\left(1 - \frac{t^2\sigma_{k,j}^2}{2} + \eta_{k,j}^{(2)}\right) - 1\right| \\ &\le t^4\sigma_{k,j}^4 + K_3(t)\left(|\eta_{k,j}^{(1)}| + |\eta_{k,j}^{(2)}|\right) \\ &\le K_4(t)(\sigma_{k,j}^4 + E(X_{k,j}^2I(|X_{k,j}| > \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1}) + \varepsilon\sigma_{k,j}^2).\end{aligned}$$

Vegyünk várható értéket az utolsó egyenlőtlenségben, és összegezzük azt minden $1 \le j \le n_k$ indexre. Az így kapott egyenlőtlenségből és a (2.6) formulából következik, hogy

$$|Ee^{itS_k + t^2U_k/2} - 1| \le K_5(t)\left(\sum_{j=1}^{n_k}E\sigma_{k,j}^4 + \sum_{j=1}^{n_k}EX_{k,j}^2I(|X_{k,j}| > \varepsilon) + \varepsilon\sum_{j=1}^{n_k}E\sigma_{k,j}^2\right). \tag{2.7}$$

A (2.7) egyenlőtlenség jobboldalán levő első összeg becslésének érdekében írjuk fel, felhasználva a $\sigma_{k,j}^2 \le 2$ relációt, a következő egyenlőtlenséget:

$$\begin{aligned}E\sigma_{k,j}^4 &= E\left((EX_{k,j}^2I(|X_{k,j}| > \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1}) + (EX_{k,j}^2I(|X_{k,j}| \le \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1})\right)^2 \\ &\le 2\left(E(EX_{k,j}^2I(|X_{k,j}| > \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1})^2 + E(EX_{k,j}^2I(|X_{k,j}| \le \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1})^2\right) \\ &\le 2E\sigma_{k,j}^2E(X_{k,j}^2I(|X_{k,j}| > \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1}) + 2\varepsilon^2E(EX_{k,j}^2I(|X_{k,j}| \le \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1}) \\ &\le 4EX_{k,j}^2I(|X_{k,j}| > \varepsilon) + 2\varepsilon^2E\sigma_{k,j}^2.\end{aligned}$$

(Válasszuk ebben a becslésben ugyanazt az $\varepsilon > 0$ számot, mint (2.7)-ban. E becslés alapján felírhatjuk a (2.7) formula alábbi következményét.

$$|Ee^{itS_k+t^2U_k/2}-1| \le K_6(t)\left(\sum_{j=1}^{n_k} EX_{k,j}^2 I(|X_{k,j}|>\varepsilon)+\varepsilon\sum_{j=1}^{n_k} E\sigma_{k,j}^2\right). \tag{2.8}$$

Mivel a (2.8) formula érvényes minden $\varepsilon > 0$ számra, ezért a (2.5) formula következik az (1.1), (2.3) és (2.8) relációkból. A martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástételt bebizonyítottuk.

Rátérek a majdnem martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel bizonyítására. A természetes gondolat az, hogy az $\bar X_{k,j} = X_{k,j} - \mu_{k,j}$ valószínűségi változók bevezetésével visszavezetjük a feladatot a már bebizonyított martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástételre. A fő nehézséget a c) Lindeberg feltétel ellenőrzése okozza erre az új sorozatra. E nehézség leküzdésének érdekében érdemes a módszert kissé finomítani és az előző bizonyítás elején alkalmazott csonkítási eljárás természetes adaptációjával kombinálni.

A majdnem martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel bizonyítása. Vezessük be ebben az esetben is a (2.2) formulában definiált τ_k megállási szabályokat azzal a különbséggel, hogy jelen esetben a $\sigma_{k,j}^2$ valószínűségi változók megegyeznek az (1.5) képletben bevezetett kifejezésekkel. Vezessük be az $\bar X_{k,j} = X_{k,j} I(\tau_k \ge j)$, $\bar\mu_{k,j} = E(\bar X_{k,j}|\mathcal{F}_{k,j-1})$ és $\bar\sigma_{k,j}^2 = E(\bar X_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1}) - \bar\mu_{k,j}^2$ valószínűségi változókat is, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$. Ekkor $\lim\limits_{k\to\infty} P(\tau_k = n_k) = 1$, annak valószínűsége, hogy $\bar X_{k,j} = X_{k,j}$, $\bar\mu_{k,j} = \mu_{k,j}$, $\bar\sigma_{k,j}^2 = \sigma_{k,j}^2$ minden $1 \le j \le n_k$ indexre 1-hez tart, ha $k \to \infty$, és $|\bar X_{k,j}| \le |X_{k,j}|$. Ezért az előző bizonyítás érveléséhez hasonlóan a majdnem martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel bizonyítását visszavezethetjük arra az esetre, amikor a tétel feltételeinek teljesülése mellett a (2.1) reláció is érvényes.

Hagyjuk el az előbb definiált $\bar X_{k,j}$, $\bar\sigma_{k,j}^2$ és $\bar\mu_{k,j}$ valószínűségi változók jelölésében a vonást és definiáljuk segítségükkel az $\tilde X_{k,j} = X_{k,j} - \mu_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, valószínűségi változókat. Azt akarjuk belátni, hogy az $(\tilde X_{k,j}, \mathcal{F}_{k,j})$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$ rendszer teljesíti a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel feltételeit. Ez a rendszer nyílvánvalóan teljesíti a tétel a) és b) feltételeit, de a c), azaz a Lindeberg feltétel teljesülése indoklásra szorul. Mivel tudjuk, hogy az (1.1) formula teljesül az $X_{k,j}$ szériasorozatra, ahhoz, hogy bebizonyítsuk a Lindeberg feltétel teljesülését az $\tilde X_{k,j}$ szériasorozatra és így befejezzük a tétel bizonyítását, elég a következő állítást igazolni: Ha egy $(X_{k,j}, \mathcal{F}_{k,j})$ szériasorozat teljesíti az (1.1) feltételt, és $\mu_{k,j} = EX_{k,j}$, akkor

$$\lim_{k\to\infty}\sum_{j=1}^{n_k} E(X_{k,j}-\mu_{k,j})^2 I(|X_{k,j}-\mu_{k,j}|>\varepsilon) = 0 \quad \text{minden } \varepsilon > 0 \text{ számra.}$$

Ez az összefüggés azonnal következik az alábbi lemmából, amely megegyezik Dvoretzky a bevezetésben idézett cikkének Lemma 3.3 eredményével. (Egy apró különbség van. Kényelmi okokból a Dvoretzky lemmájában szereplő 4 együtthatót 8-ra cseréltem, ennek azonban nincs jelentősége.)

Lemma. *Legyen X négyzetesen integálható valószínűségi változó, $\mathcal{F} \subset \mathcal{A}$ σ-algebra, $\mu = E(X|\mathcal{F})$ egy $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ valószínűségi mezőn. Ekkor*

$$8EX^2 I(|X| > \varepsilon) \geq E(X-\mu)^2 I(|X-\mu| > 2\varepsilon) \quad \textit{minden } \varepsilon > 0 \textit{ számra.} \tag{2.9}$$

Megjegyzés: Tudjuk, hogy $E(X - E(X|\mathcal{F}))^2 \leq EX^2$ tetszőleges véges második momentummal rendelkező X valószínűségi változóra. Ha az ebben az egyenlőtlenségben szereplő valószínűségi változókat csonkítjuk, akkor az egyenlőtlenség érvényét vesztheti. Viszont érvényes marad annak egy olyan gyengített változata, amely megfelel céljainknak. Ez a fenti lemma fő mondanivalója.

A Lemma bizonyítása. Véve az X valószínűségi változó feltételes eloszlását az $\mathcal{F}$ σ-algebrára, és E-vel jelölve a várható értéket eme (véletlen) mérték szerint is, a (2.9) formula a következő egyenlőtlenségre redukálható:

$$8EX^2 I(|X| > \varepsilon) \geq E(X-EX)^2 I(|X-EX| > 2\varepsilon) \quad \text{minden } \varepsilon > 0 \text{ számra,}$$

vagy ekvivalens módon az $Y = X - EX$ helyettesítéssel

$$8E(Y+c)^2 I(|Y+c| > \varepsilon) \geq EY^2 I(|Y| > 2\varepsilon) \tag{2.10}$$

minden valós c és $\varepsilon > 0$ számra, ha $EY = 0$ és $EY^2 < \infty$.

A (2.10) egyenlőtlenség tovább redukálható. Elég azt a speciális esetet tekinteni, amikor Y eloszlása $P(Y = Aq) = p$, $P(Y = -Ap) = q$ alakú valamely $A > 0$, $0 \leq p, q \leq 1$, $p + q = 1$ számokkal. Innen következik ugyanis a (2.10) formula abban az esetben is, ha az Y valószínűségi változó a következő alakú. Létezik az Ω halmaznak olyan $\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 + \Omega_3$ particiója, amelyre $Y = a$ az Ω_1 halmazon, $Y = -b$ az Ω_2 halmazon valamely $a > 0$ és $b > 0$ számokkal, $aP(\Omega_1) - bP(\Omega_2) = 0$, és $Y = 0$ az Ω_3 halmazon. Továbbá a (2.10) egyenlőtlenség igaz minden olyan Y valószínűségi változóra, amely véges sok értéket vesz fel, és $EY = 0$, mert ezek előállíthatóak olyan az előbbi tulajdonsággal rendelkező valószínűségi változók összegeként, amelyeknek a tartója diszjunkt. Ezután a (2.10) állítást megkapjuk az általános esetben, ha egy Y, $EY = 0$ vaószínűségi változót véges sok értéket felvevő Y_n, $EY_n = 0$ valószínűségi változókkal közelítünk alkalmas módon.

Tovább egyszerűsíthetjük a (2.10) egyenlőtlenség bizonyítását (a c és ε paraméterek esetleges módosításával) azzal, hogy csak olyan Y valószínűségi változókat tekintünk, amelyekre $A = 1$, és $q \geq \frac{1}{2} \geq p \geq 0$. Ebben a speciális esetben a (2.10) egyenlőtlenség nyílván teljesül, ha $\varepsilon \geq \frac{q}{2}$, mert ekkor a jobboldal nullával egyenlő. Ha $0 \leq \varepsilon < \frac{q}{2}$, akkor a (2.10) formula jobboldala kisebb vagy egyenlő, mint $EY^2 = pq^2 + p^2q = pq$, és elég megmutatni, hogy $8E(Y+c)^2 I(|Y+c| > \varepsilon) \ge pq$ minden c valós számra, ha $0 \le \varepsilon < \frac{q}{2}$.

Ha $c \ge -\frac{q}{2}$, és $0 \le \varepsilon < \frac{q}{2}$, akkor $q+c \ge \frac{q}{2} > \varepsilon$, és $8E(Y+c)^2 I(|Y+c| > \varepsilon) \ge 8P(Y = q)(q+c)^2 = 8p(q+c)^2 \ge 2pq^2 \ge pq$. Ha $c < -\frac{q}{2}$, és $0 \le \varepsilon < \frac{q}{2}$, akkor $|-p+c| > \frac{q}{2} \ge \varepsilon$, és $8E(Y+c)^2 I(|Y+c| > \varepsilon) \ge 8P(Y = -p)(p+|c|)^2 = 8q(p+|c|)^2 \ge 2q^3 \ge pq$. A lemmát bebizonyítottuk.

3. Néhány megjegyzés. A funkcionális centrális határeloszlástétel.

A martingálkülönbségek szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástételek különböző bizonyításainak összehasonlítását az eredmény hagyományos 'klasszikus' bizonyításának rövid tárgyalásával kezdem.

Tekintsük egy $X_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $1 \le j \le n_k$, valószínűségi változókból és $\mathcal{F}_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, $0 \le j \le n_k$, rögzített k indexre növekvő σ-algebrákból álló martingál különbség szériasorozatot, és definiáljuk az $S_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} X_{k,j}$, $k = 1, 2, \dots$, részletösszegeket. Azt akarjuk megmutatni, hogy alkalmas feltételek teljesülése esetén az S_k véletlen összegek eloszlásban konvergálnak a standard normális eloszláshoz, vagy ami ezzel ekvivalens, $\lim\limits_{k\to\infty} Ee^{itS_k} = e^{-t^2/2}$ minden valós számra.

A hagyományos, klasszikusnak tekinthető bizonyítás a következő érvelésen alapul. Vezessünk be minden k indexre olyan $Y_{k,1}, \dots, Y_{k,n_k}$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változókat, amelyek függetlenek az $\mathcal{F}_{k,n_k}$ σ-algebrától, definiáljuk a $T_k = \sum\limits_{j=1}^{n_k} d_{k,j} Y_j$ összeget, ahol $d_{k,j}^2 = EX_{k,j}^2$, és mutassuk meg, hogy $\lim\limits_{k\to\infty} E(e^{itS_k} - e^{iT_k}) = 0$ alkalmas feltételek teljesülése esetén. Ezt úgy látjuk be, hogy az Ee^{itS_k} kifejezésben szereplő S_k összegben kicseréljük először az X_{k,n_k} változót a $d_{k,n_k} Y_{k,n_k}$ valószínűségi változóval, aztán az X_{k,n_k-1} változót a $d_{k,n_k-1} Y_{k,n_k-1}$ valószínűségi változóval, és így tovább egész addig, amíg a T_k összeghez nem jutunk. Eközben jó becslést adunk arra, hogy az egyes cserék által mennyit változott a tekintett összeg karakterisztikus függvénye. Expliciten megfogalmazva a következő eljárást alkalmazzuk. Definiáljuk az $S_{k,j} = \sum\limits_{l=1}^{j} X_{k,l} + \sum\limits_{l=j+1}^{n_k} d_{k,l} Y_{k,l}$, $1 \le j \le n_k - 1$, $S_{k,0} = T_k$ és $S_{k,n_k} = S_k$ összegeket. Ekkor

$$E(e^{itS_k} - e^{itT_k}) = \sum_{j=1}^{n_k} E(e^{itS_{k,j}} - e^{itS_{k,j-1}}). \tag{3.1}$$

A centrális határeloszlástétel bizonyításához jó becslést kell adnunk az $|E(e^{itS_{k,j}} - e^{iS_{k,j-1}})|$ kifejezésekre. Nem nehéz belátni, hogy

$$\begin{aligned} \left|E(e^{itS_{k,j}} - e^{iS_{k,j-1}})\right| &\le E\left|E(e^{itX_{k,j}} | \mathcal{F}_{k,j-1}) - Ee^{itd_{k,j}Y_{k,j}}\right| \\ &= E\left|E(e^{itX_{k,j}} | \mathcal{F}_{k,j-1}) - e^{-t^2 d_{k,j}^2/2}\right|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Vegyük észre, hogy a (3.1) és (3.2) formula együttese hasonlít a (2.6) egyenlőtlenséghez. A (3.2) formula jobboldalán levő kifejezésre jó becsést tudunk kapni, ha tekintjük az

$$E(e^{itX_{k,j}}|\mathcal{F}_{k,j-1})-e^{-t^2d_{k,j}^2/2}$$

kifejezésnek a t változó szerinti Taylor-sor fejtését. Vegyük észre, hogy a Taylor-sor másodrendű tagja $\frac{t^2}{2}(d_{k,j}^2-\sigma_{k,j}^2)$, ahol $\sigma_{k,j}^2=E(X_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1})$. Mivel a (3.2) kifejezés jobboldalán egy valószínűségi változó abszolút értékének a várható értékét vesszük, e becslések segítségével akkor bizonyíthatjuk be a centrális határeloszlástételt, ha a $\sum\limits_{j=1}^{n_k}|\sigma_{k,j}^2-d_{k,j}^2|$ összeg nagy k indexre kicsi. Ilyen módon olyan eredményt kapunk, amely sok vizsgálatban hasznos, de csak viszonylag erős feltételek mellett érvényes. A martingál különbség szériasorozatokról az első fejezetben megfogalmazott centrális határeloszlástételben viszont jóval enyhébb feltételeket írtunk elő. Ott a tipikus 'nem elfajuló' esetben, amikor $\lim\limits_{k\to\infty}\sum\limits_{j=1}^{n_k}d_{k,j}^2=1$, azt követeltük meg az (1.2) formulában, hogy

$$\sum_{j=1}^{n_k}\left(\sigma_{k,j}^2-d_{k,j}^2\right)\Rightarrow 0,\quad \text{ha } k\to\infty,$$

azaz a fenti relációban nem kellett a $\sigma_{k,j}^2-d_{k,j}^2$ tagok abszolút értékét venni.

Brown és Dvoretzky bizonyításának a fő érdekessége az, hogy az előbb vázolt módszer nem triviális finomításának segítségével ilyen gyengébb feltételek mellett bizonyították be a centrális határeloszlástételt martingál különbség szériasorozatokra.

Dvoretzky az előbb tárgyalt módszerhez hasonló konstrukció segítségével bizonyította be eredményét, de ő olyan T_k és $S_{k,j}$ véletlen összegeket vezetett be, ahol a $d_{k,l}Y_{k,l}$ összeandandókat $\sigma_{k,l}Y_{k,l}$ alakú tagokkal helyettesítette. Akkor tudjuk ilyen módon bebizonyítani a centrális határeloszlástételt, ha igazolni tudjuk a (3.2) formulának egy olyan változatát, amelynek középső tagjában $E(e^{it\sigma_{k,j}Y_{k,j}}|\mathcal{F}_{k,j-1})=e^{-t^2\sigma_{k,j}^2/2}$ szerepel $Ee^{itd_{k,j}Y_{k,j}}$ helyett. Egy ilyen becslés lehetővé teszi a centrális határeloszlástétel itt kimondott élesebb alakjának a bizonyítását, mert ekkor a megfelelő Taylor sorfejtésben a másodfokú tag együtthatója is nulla.

Dvoretzky egy ilyen becslést bizonyított, de csak azon plusz feltétel mellett, hogy

$$\sum_{j=1}^{n_k}\sigma_{k,j}^2=1\quad \text{minden } k \text{ indexre.} \tag{3.3}$$

Erre a feltételre azért volt szüksége, mert ez biztosítja azon valószínűségi változók és σ-algebrák függetlenségét, amelyeket a (3.2) formula módosított alakjának a bizonyításában használt. E tulajdonság megfogalmazását, amelyet Dvoretzky cikkének Lemma 3.2 eredménye tartalmaz elhagyom. (Megjegyzem, hogy $T_k=\sum\limits_{j=1}^{n_k}\sigma_{k,j}Y_j$ standard normális eloszlású valószínűségi változó, ha teljesül a (3.3) feltétel, mert ekkor T_k feltételes eloszlása feltéve az $\mathcal{F}_{k,n_k}$ σ-algebrát a normális eloszlás nulla várható értékkel, és $\sum\limits_{j=1}^{n_k} \sigma_{k,j}^2 = 1$ szórásnégyzettel.)

Miután Dvoretzky bebizonyította a centrális határeloszlástételt azon plusz megkötés mellett, hogy a (3.3) formula teljesül, megmutatta, hogy alkalmas, a (2.2) formulához hasonló megállási szabály bevezetésének a segítségével az általános eset visszavezethető erre a speciális esetre.

Brown itt ismertetett bizonyításának gondolatmenete hasonló Dvoretzkyéhez. Ebben a bizonyításban azonban az Ee^{itS_k} karakterisztikus függvény helyett először (a második fejezetben bevezetett jelöléssel) az $Ee^{itS_k+t^2U_k/2}$ kifejezést becsüljük meg. Annak érdekében, hogy ezt megtehessük, először az eredeti szériasorozat egy olyan alkalmas módosítását definiáltuk a (2.2) képletben bevezetett τ_k megállási szabály segítségével, amely az eredeti szériasorozat egyfajta csonkítottjának tekinthető. Az eredeti és módosított szériasorozat sorösszegeinek a határeloszlása megegyezik, és a módosított szériasorozat megőrzi az eredeti szériasorozat martingál különbség tulajdonságát is. Ezenkívül a módosított szériasorozat segítségével definiált S_k és U_k valószínűségi változókra az $Ee^{itS_k+t^2U_k/2}$ várható érték véges, sőt a $\sigma_{k,j}^2$ valószínűségi változók (és azok összegei is) korlátosak.

Megjegyzem, hogy mivel ez a megállási szabály segítségével definiált módosított szériasorozat teljesíti az (1.1) Lindeberg feltételt is, ezért az $\tilde{X}_{k,j} = X_{k,j}I(|X_{k,j}| \le \varepsilon) - E(X_{k,j}I(|X_{k,j}| \le \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1})$, $k = 1, 2, \dots, 1 \le j \le n_k$, képlet segítségével definiált szériasorozat az eredeti rendszer olyan kis perturbációja, amely teljesíti a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel feltételeit, és korlátos valószínűségi változókat tartalmaz. (Vegyük észre, hogy az $X_{k,j} - \tilde{X}_{k,j} = X_{k,j}I(|X_{k,j}| > \varepsilon) - E(X_{k,j}I(|X_{k,j}| > \varepsilon)|\mathcal{F}_{k,j-1})$ valószínűségi változók összegei jól becsülhetőek. Továbbá az (1.1) Lindeberg feltétel azt is biztosítja, hogy az $X_{k,j}$ valószínűségi változók kicserélése az $\tilde{X}_{k,j}$ valószínűségi változókkal csak elhanyagolhatóan kis hibát okoz.) Ennek az észrevételnek a centrális határeloszlástétel bizonyításában nincs jelentősége, de az alább ismertetett funkcionális centrális határeloszlástétel bizonyításában hasznos lehet, mert lehetővé teszi, hogy exponenciális momentumokkal dolgozhassunk.

Dvoretzky és Brown módszerének a hasonlóságát jobban megérthetük a következő észrevétel segítségével. Az e fejezet elején bevezetett jelölésekkel

$$E\left(e^{it\sigma_{k,j}Y_{k,j}+t^2\sigma_{k,j}^2/2}|\mathcal{F}_{k,j-1}\right) = E(e^{ituY_{k,j}+t^2u^2/2})\Big|_{u=\sigma_{k,j}^2} = 1 \tag{3.4}$$

minden $k = 1, 2, \dots, 1 \le j \le n_k$ indexre. Vezessük be a korábban definiált $S_{k,j}$, S_k és T_k valószínűségi változók $\bar{S}_{k,j} = \bar{S}_{k,j}(t) = \sum\limits_{l=1}^{j}(itX_{k,l} + \frac{t^2}{2}\sigma_{k,l}^2) + \sum\limits_{l=j+1}^{n_k}(it\sigma_{k,l}Y_{k,l} + \frac{t^2}{2}\sigma_{k,l}^2)$, $1 \le j \le n_k - 1$, $\bar{S}_{k,0} = \bar{S}_{k,0}(t) = \bar{T}_k = \sum\limits_{l=1}^{n_k}(it\sigma_{k,j}Y_{k,j} + \frac{t^2}{2}\sigma_{k,j}^2)$, és $\bar{S}_{k,n_k} = \bar{S}_{k,n_k}(t) = \bar{S}_k = \sum\limits_{l=1}^{n_k}(itX_{k,j} + \frac{t^2}{2}\sigma_{k,j}^2)$ megfelelőit. Ha az Ee^{itS_k} helyett az $Ee^{itS_k+t^2U_k/2} = e^{\bar{S}_k}$

kifejezést akarjuk először megbecsülni, akkor érdemes felírni az

$$Ee^{\bar{S}_k}-1=E\left(e^{\bar{S}_k}-e^{\bar{T}_k}\right)=\sum_{j=1}^{n_k}E\left(e^{\bar{S}_{k,j}}-e^{\bar{S}_{k,j-1}}\right)$$

azonosságot, és azt jól becsülni. Vegyük észre, hogy a (3.4) képlet miatt az előző fejezet (2.5) képletében és az azt követő számolásokban egy ilyen programot hajtottuk végre.

A martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel hátterében levő képet, illetve illetve Brown bizonyítását jobban megérthetjük, ha megfogalmazzuk ennek az eredménynek a funkcionális centrális határeloszlástétel változatát. Ez a funkcionális centrális határeloszlástétel informális nyelven azt állítja, hogy a martingálkülönbség szériasorozat egyes soraiban levő valószínűségi változókból természetes módon elkészített véletlen töröttvonalfüggvények nagy k indexre közelítőleg úgy viselkednek, mint egy Wiener folyamat. A Wiener folyamatok egy fontos tulajdonsága az, hogy egy $W(u)$, $u\ge 0$, Wiener folyamatra a $Z_t(u)=e^{tW(u)-t^2u/2}$, $u\ge 0$, sztochasztikus folyamat martingál. Ezért minden szép τ megállási szabályra $Ee^{Z_t(\tau)}=1$. Ez az állítás nemcsak valós, hanem komplex t számokra is igaz. Azt várjuk, hogy ha a Wiener folyamatot egy hozzá közeli $V(t)$ sztochasztikus folyamattal helyettesítjük, akkor $Ee^{tV(\tau)-t^2\tau}\sim 1$. A centrális határeloszlástétel bizonyításában, a (2.5) formula megfogalmazásában és annak bizonyításában egy ilyen érvelést használtunk tisztán imaginárius t számmal.

A martingálkülönbség szériasorozatokról szóló funkcionális centrális határeloszlástétel megfogalmazása érdekében először bevezetek néhány jelölést.

Tekintsük minden $k=1,2,\dots$ számra valószínűségi változók $X_{k,1},\dots,X_{k,n_k}$ és növekvő $\mathcal{F}_{k,0}\subset\mathcal{F}_{k,1}\subset\cdots\subset\mathcal{F}_{k,n_k}$, σ-algebrák olyan rendszerét, amely teljesíti a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel feltételeit. Definiáljuk az

$$S_{k,j}=\sum_{l=1}^{j}X_{k,j}\quad 1\le j\le n_k,\quad S_{k,0}=0, \tag{3.5}$$

részletösszegeket, a $d_{k,j}^2=EX_{k,j}^2$ és $\sigma_{k,j}^2=E(X_{k,j}^2|\mathcal{F}_{k,j-1})$, $1\le j\le n_k$, szórásnégyzeteket és feltételes szórásnégyzeteket. Vezessük be ezek segítségével a

$$z_{k,0}=0,\ z_{k,j}=\sum_{l=1}^{j}d_{k,j}^2,\qquad \zeta_{k,0}=0,\ \zeta_{k,j}=\sum_{l=1}^{j}\sigma_{k,j}^2,\quad 1\le j\le n_k, \tag{3.6}$$

determinisztikus, illetve véletlen osztópontokat a pozitív félegyenesen, és a $T_k(t)$ véletlen töröttvonalfüggvényt a $[0,z_{0,k}]$ intervallumon, valamint a $V_k(t)$ véletlen töröttvonal függvényt a $[0,\zeta_{0,k}]$ véletlen intervallumon a következő képletek segítségével:

$$\begin{aligned}T(z_{k,j})=S_{k,j},\quad \text{és } T_k(t)=\frac{z_{k,j+1}-t}{z_{k,j+1}-z_{k,j}}S_{k,j}+\frac{t-z_{k,j}}{z_{k,j+1}-z_{k,j}}S_{k,j+1},\\ \text{ha } z_{k,j}\le t\le z_{k,j+1},\quad 0\le j<n_k,\end{aligned} \tag{3.7}$$

és

$$V(\zeta_{k,j})=S_{k,j}, \quad \text{és } V_k(t)=\frac{\zeta_{k,j+1}-t}{\zeta_{k,j+1}-\zeta_{k,j}}S_{k,j}+\frac{t-\zeta_{k,j}}{\zeta_{k,j+1}-\zeta_{k,j}}S_{k,j+1}, \qquad \text{ha } \zeta_{k,j}\le t\le \zeta_{k,j+1}, \quad 0\le j<n_k. \tag{3.8}$$

Definiáljuk továbbá a $T_k(\cdot)$ és $V_k(\cdot)$ töröttvonalfüggvények

$$\tilde T_k(t)=T_k(tz_{k,n_k}), \qquad \tilde V_k(t)=V_k(t\zeta_{k,n_k}), \quad 0\le t\le 1 \tag{3.9}$$

transzformáltját a $[0,1]$ intervallumba. Megfogalmazom a martingál különbség szériasorozatokról szóló funkcionális centrális határeloszlástételt.

Funkcionális centrális határeloszlástétel martingál különbség szériasorozatokra. *Legyen adva minden $k=1,2,\dots$ számra valószínűségi változók $X_{k,1},\dots,X_{k,n_k}$ és növekvő $\mathcal{F}_{k,0}\subset\mathcal{F}_{k,1}\subset\cdots\subset\mathcal{F}_{k,n_k}$, σ-algebrák olyan rendszere, amely teljesíti a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástétel feltételeit. Tekintsük a (3.5), (3.6), (3.8) és (3.9) formulák segítségével definiált $\tilde V_k(t)$, $k=1,2,\dots$, véletlen töröttvonal függvények sorozatát. Ezek a $\tilde V_k(t)$ véletlen töröttvonal függvények gyengén konvergálnak a Wiener mértékhez a $C([0,1])$ térben, ha $k\to\infty$.*

A funkcionális centrális határeloszlástétel bizonyítását elhagyom, csak néhány utalást teszek arról, hogy hogyan lehet azt néhány klasszikus eredmény segítségével elvégezni. Egyrészt meg kell mutatni, hogy a véges dimenziós eloszlások konvergálnak. Ezt le lehet vezetni a martingál különbség szériasorozatokról szóló centrális határeloszlástételből alkalmas megállási szabályok segítségével. Ezenkívül szükség van az úgynevezett feszesség bizonyítására, ami bizonyos maximum egyenlőtlenséget jelent. Ilyen egyenlőtlenséget kaphatunk, kihasználva, hogy alkalmas csonkítással redukálni lehet a feladatot arra az esetre, amikor az $X_{k,j}$ valószínűségi változók korlátosak, sőt azt is feltehetjük, hogy ez a korlát nagyon kicsi. Abból, hogy az $(S_{k,j},\mathcal{F}_{k,j})$, $1\le j\le n_k$, sorozatok martingált alkotnak következik, hogy az $(e^{tS_{k,j}},\mathcal{F}_{k,j})$ sorozatok szubmartingált alkotnak, és alkalmazhatjuk rájuk a szubmartingálokra érvényes maximum egyenlőtlenséget. Ezenkívül az $Ee^{t(S_{k,j'}-S_{k,j})}$, $1\le j\le j'\le n_k$, momentumgeneráló függvényeket becsülhetjük a 2. fejezetben használt módszerek segítségével, és ilyen módon bebizonyíthatjuk a feszességhez szükséges egyenlőtlenséget.

A feszesség másként is bizonyítható. Brown cikkében ezt az ott bebizonyított Lemma 4 segítségével tette, amely a martingálok más tulajdonságain alapul. Egy lényeges különbség az itt kimondott és a Brown cikkben tárgyalt funkcionális centrális határeloszlástétel között az, hogy Brown cikkében ez az eredmény a $z_{k,j}$ determinisztikus osztópontok segítségével definiált $T_k(t)$, itt pedig a véletlen $\zeta_{k,j}$ osztópontok segítségével definiált $V_k(t)$ töröttvonalfüggvény $\tilde T_k(t)$ illetve $\tilde V_k(t)$ átskálázásaira mondja ki a konvergenciát. A különbség oka az, hogy Brown cikke csak azt a speciális esetet tekinti, amikor a szériasorozatok egy martingál részsorozatainak a normalizáltjaiként jelennek meg. Ekkor az (1.2) formulának az az erősebb alakja is érvényes, hogy $\lim\limits_{k\to\infty}\frac{\zeta_{k,[kt]}}{z_{k,[kt]}}\Rightarrow 1$ minden $0<t\le 1$ számra, ahol $[x]$ az x szám egész részét jelöli. Ennek következtében ebben a speciális esetben jogunk van a $\zeta_{k,j}$ véletlen osztópontokat a $z_{k,j}$ determinisztikus osztópontokkal helyettesíteni. De az általános esetben ezt nem tehetjük meg.

Az itt kimondott centrális határeloszlástétel nem a a martingálkükönbség sorozat részletösszegeiből a (3.7) képletben természetes módon definiált véletlen $T_k(t)$ töröttvonalfüggvényről állítja, hogy nagy k indexekre hasonlóan viselkedik egy Wiener folyamathoz, hanem annak egy $V_k(t)$ véletlen átskálázázottjáról. Azt mondhatjuk, hogy a természetes időskálát nem a szórásnégyzetek $z_{k,j}$ részletösszegei, hanem a feltételes szórásnégyzetek $\zeta_{k,j}$ részletösszegei határozzák meg. Hasonló jelenséggel találkozhatunk például egy az idő paramétertől függő $X(t) = \int_0^t e(s)W(\,ds)$ Itô integrál jellemzésénél. Egy ilyen sztochasztikus folyamat átskálázható alkalmas 'belső idő' bevezetésével Wiener folyamattá. (Lásd H. P. McKean: Stochastic integrals című könyvének 2.5 fejezetét.) Részletesebben megfogalmazva az igaz, hogy ha $X(t) = \int_0^t f(s,\omega)W(\,ds)$ egy Itô integrál, és bevezetjük a $\tau(t) = \int_0^t f^2(s,\omega)\,ds$ 'belső időt', akkor $Y(t) = X(\tau^{-1}(t))$ egy (esetleg véletlen időpontban megállított) Wiener folyamat.