Sztochasztikus és egy valószínűségi konvergencia

1.) Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$ független valószínűségi változók sorozata, melyre $P(\xi_n = n) = P(\xi_n = -n) = \dfrac{1}{10n\log(n+1)}$, $P(\xi_n = 0) = 1 - \dfrac{1}{5n\log(n+1)}$, $n = 1, 2, \dots$.

Lássuk be, hogy az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ részletösszegek teljesítik a következő állításokat:

a.) $\dfrac{S_n}{n} \Rightarrow 0$, ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl.

b.) Az $\dfrac{S_n(\omega)}{n}$ sorozat 1 valószínűséggel divergál.

2.) Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } |x| \le 2 \\ \dfrac{C}{x^2 \log|x|} & \text{ha } |x| \ge 2 \end{cases}$$

sűrűségfüggvénnyel. (A C konstanst az $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$ egyenlet határozza meg.) Lássuk be, hogy az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ részletösszegek teljesítik az $\dfrac{S_n}{n} \Rightarrow 0$, ha $n \to \infty$, tulajdonságot, ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl, és $E|\xi_n| = \infty$

Megjegyzés 1: Ha ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók, akkor a valószínűségszámítás egyik klasszikus eredménye szerint a ξ_n sorozat akkor és csak akkor teljesíti a nagy számok erős törvényét, ha $E|\xi_n| < \infty$. Részletesebben: Az $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ átlagok egy valószínűséggel divergálnak, ha $E|\xi_n| = \infty$, és egy valószínűséggel konvergálnak, ha $E|\xi_n| < \infty$. Ez utóbbi esetben a limesz egy valószínűséggel az $E\xi_n$ konstans. Ez az állítás következik a 3. és 9. feladat eredményeiből.

3.) Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata. Ha $E|\xi_n| = \infty$, akkor az $A_n = \{|\xi_n| > n\}$ események közül végtelen sok következik be egy valószínűséggel. Ezért az $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ átlagok egy valószínűséggel divergálnak.

4.) Az X_n, $n = 1, 2, \dots$, valószínűségi változók sorozata akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel nullához, ha minden $\varepsilon > 0$-ra

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\sup_{k\ge n} |X_k| > \varepsilon\right) = 0.$$

5.) Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, (nem feltétlenül független) valószínűségi változók sorozata, és legyen $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$. Ha minden $\varepsilon > 0$-ra teljesül a

$$\sum_{n=1}^{\infty} P\left(\sup_{2^{n-1}\le k\le 2^n} |S_k| > \varepsilon 2^n\right) < \infty$$

feltétel, akkor az $\dfrac{S_n}{n}$ sorozat egy valószínűséggel konvergál nullához.

6.) Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyre $E\xi_n = 0$ és $E|\xi_n|^k < \infty$ valamilyen egész $k \ge 1$ számmal. Ekkor $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ részletösszegekre $|ES_n^k| < Cn^{k/2}$ alkalmas $C > 0$ számmal. Ezért, ha k páros szám, akkor $P\left(\sup\limits_{1\le k\le n} |S_k| > \varepsilon n\right) \le C(\varepsilon) n^{-k/2+1}$. Ha $E\xi_n^4 < \infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} \to 0$ 1 valószínűséggel.

6a.) Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyre $E\xi_n = 0$ és $E|\xi_n|^k < \infty$ minden $k \ge 1$ számra. Ekkor az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ részletösszegek teljesítik az

$$ES^{2k-1} = o\left(n^{(2k-1)/2}\right) \qquad \text{és} \qquad ES_n^{2k} = 1 \cdot 3 \cdots (2k-1) n^k \left(1 + o\,(1)\right)$$

aszimptotikus azonosságokat.

Megjegyzés: Az előző feladat azonosságai azt jelentik, hogy az $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ valószínűségi változók momentumai konvergálnak a standard normális eloszlású valószínűségi változók momentumaihoz. Be lehet látni, hogy ebből következik az, hogy a $\dfrac{S_n}{\sqrt{n}}$ valószínűségi változók eloszlása konvergál a standard normális eloszláshoz. E kérdés részleteit ebben a feladatsorban nem tárgyaljuk. Mindössze egy olyan feladatot tekintünk (7. feladat), amelyikre szükség van ahhoz, hogy a 6a) feladat eredményeiből levezessük a centrális határeloszlátételt.

A nagy számok törvénye azt fejezi, ki hogy független nulla várható értékű valószínűségi változók összege kisebb, mint ahogy azt triviális becslésekből kapnánk. Jó természetes becslést kaphatunk a momentumok vizsgálatával, és minél több momentuma van az összeadandóknak, annál jobb becslést kaphatunk. Ha az összes momentum létezik, akkor a természetes módon normált összegek momentumai a normális eloszlás momentumaihoz tartanak. E tényből levezethető a centrális határeloszlástétel is. Bár ebben az érvelésben az összes momentum konvergenciájára szükség van, mégis levezethető ilyen módon a centrális határeloszlás mindössze két momentum létezése esetén is. Ehhez célszerű az összeadandókat egy nagy K számnál levágni, azaz érdemes az összeadandókat $\xi_k = \xi_k' + \xi_k''$, $\xi_k' = \xi_k I(|\xi_k| < K)$ és $\xi_k'' = \xi_k I(|\xi_k| \ge K)$ formában felírni. A ξ_k' valószínűségi változók részletösszegeinek momentumait jól tudjuk becsülni. A ξ_k'' változók összege relative kicsi, és ezt a Csebisev egyenlőtlenségből is le lehet vezetni.

A fenti érvelés jelzi, hogy érdemes vizsgálni az összeadandók különösen nagy értékeinek hatását a részletösszegekre. Ezt mutatják a feladatsor azon eredményei is, melyek megadják a nagy számok gyenge és erős törvényének szükséges és elégséges feltételét független, egyforma eloszlású valószínűségi változók részletösszegeire.

7.) Legyen az $F(x)$ eloszlásfüggvény olyan, hogy momenutumai megegyeznek a standard normális eloszlás momentumaival, azaz legyen

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^k F(\,dx) = \begin{cases} 1\cdot 3\cdots(2l-1) & \text{ha } k=2l \\ 0 & \text{ha } k=2l-1 \end{cases}$$

Ekkor $F(x)$ a standard normális eloszlásfüggvény.

A nagy számok erős törvényének bizonyításában fontos szerepet játszik a következő **Kolmogorov egyenlőtlenség**.

Legyenek $\xi_1,\dots,\xi_n$ független, (nem feltétlenül egyforma eloszlású) valószínűségi változók, $E\xi_k=0$, $E\xi_k^2=\sigma_k^2$, $S_k=\sum\limits_{p=1}^{k}\xi_p$, $k=1,\dots,n$. Ekkor

$$P\left(\sup_{1\le k\le n}|S_k|\ge x\right)\le \frac{ES_n^2}{x^2}=\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\sigma_k^2}{x^2}$$

minden $x>0$-ra.

Érdemes megjegyezni, hogy a Kolmogorov egyenlőtlenség ugyanazt a felső becslést adja annak valószínűségére, hogy az S_k részletösszegek szuprémuma nagyobb mint valamilyen $x>0$ szám, mint amit a Csebisev egyenlőtlenség ad annak az eseménynek a valószínűségére, hogy az utolsó tag S_n nagyobb, mint x.

Ugyancsak nagyon hasznos a nagy számok törvényének bizonyításában következő technikai jellegű lemma.

Kronecker lemma: *Ha az a_n és q_n, $n=1,2,\dots$ számsorozatok olyanok, hogy a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ összeg konvergens, a q_n sorozat monoton nő és $\lim\limits_{n\to\infty}q_n=\infty$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{q_n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_kq_k=0$.*

Érdemes megemlíteni a következő speciális esetet. Ha a $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x_n}{n}$ összeg konvergens, akkor $\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$ sorozat nullához tart $n\to\infty$ esetén. Ez az állítás következik a Kronecker lemmából $a_n=\frac{x_n}{n}$ és $q_n=n$ választással.

8.) Legyenek ξ_n, $n=1,2,\dots,$ független valószínűségi változók, $E\xi_n=0$, $E\xi_n^2=\sigma_n^2$. Lássuk be a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével azt, hogy ha $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sigma_n^2}{n^2}<\infty$, akkor $\frac{S_n}{n}$ egy valószínűséggel tart nullához $n\to\infty$ esetén.

9.) Lássuk be a Megjegyzés 1-ben megfogalmazott állítás másik felét, azaz a következőt: Ha ξ_n, $n=1,2,\dots,$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata,

$E|\xi_1| < \infty$, $E\xi_1 = 0$, $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$, $n = 1, 2, \dots$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{S_n}{n} = 0$ 1 valószínűséggel.

10.) Legyen X_n (nem feltétlenül független) valószínűségi változók sorozata, és az X_n valószínűségi változó karakterisztikus függvénye legyen $\varphi_n(t) = Ee^{itX_n}$, $-\infty < t < \infty$. Az X_n sorozat akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan nullához, ha $\varphi_n(t) \to 1$, $n \to \infty$ esetén minden $-\infty < t < \infty$-re. A $\varphi_n(t) \to 1$ konvergencia egyenletes minden véges $|t| < A$, $A > 0$ intervallumban.

11.) Legyenek ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók. Az $\dfrac{S_n}{n} = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ átlagok akkor és csak akkor konvergálnak sztochasztikusan nullához, ha a ξ_n valószinűségi változók karakterisztikus függvénye a 0-ban differenciálható, és ez a derivált nulla.

Megjegyzés: Az előző feladat szükséges és elégséges feltételt adott arra, — a karakterisztikus függvények tulajdonságaival kifejezve — hogy független egyforma eloszlású valószínűségi változók részletösszegei mikor teljesítik a nagy számok gyenge törvényét. Pontosabban, e feladat eredménye arra ad szükséges és elégséges feltételt, hogy mikor konvergál e valószínűségi változók átlaga sztohasztikusan nullához. Ennek az eredménynek a segítségével viszont nem nehéz megadni annak szükséges és elégséges feltételét, hogy mikor konvergál az átlag sztohasztikusan valamilyen a számhoz. Természetes kívánság viszont, hogy a feltételt ne a (némileg mesterséges) karakterisztikus függvény, hanem az eloszlásfüggvény tulajdonságai segítségével fejezzük ki. Ez a célja a következő feladatnak.

12.) Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, független, egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata. Jelölje $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ e valószínűségi változók részletösszegeit, $\varphi(t) = Ee^{it\xi_1}$ és $F(x) = P(\xi_1 \le x)$ pedig a ξ_1 valószínűségi változó karakterisztikus illetve eloszlásfüggvényét. A következő állítások ekvivalensek:

a.) Az $\dfrac{S_n}{n}$ valószínűségi változók sztochasztikusan konvergálnak nullához.

b.) A $\varphi(t)$ karakterisztikus függvény a nullában differenciálható, és a derivált nulla.

c.) $\lim\limits_{x\to\infty} x\,[F(-x) + (1 - F(x))] = 0$, és $\lim\limits_{u\to\infty} \int_{-u}^{u} xF(\,dx) = 0$.

Az előző feladatokban (3., 9., 12. feladatok) maegadtuk a szükséges és elégséges feltételét annak, hogy független egyforma eloszlású valósz1nűségi változók átlaga egy valószínűséggel vagy sztochasztikusan nullához tartson. Megvizsgáljuk a következő kérdést: Mi a szükséges és elégséges feltétele annak, hogy független és egyforma eloszlású $\xi_1, \xi_2 \dots$, valószínűségi változók $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ összegeire az $\dfrac{S_n}{n} - a_n$ valószínűségi változók sztochasztikusan vagy egy valószínűséggel nullához konvergáljanak alkalmas (determinisztikus) a_n konstansokkal. Mint látni fogjuk, az egy valószínűségi konvergencia estén ez a gyengébb követelmény nem bővíti lényegesen a lehetséges ξ_n sorozatok osztályát. Mindössze annyit enged meg, hogy a ξ_n valószínűségi változókhoz egy konstanst hozzáadjunk, amit normáláskor levonunk. A sztochasztikus konvergencia esetén viszont az ezt a gyengített feltételt kielégítő sorozatok osztálya valamivel bővül.

13.) Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független, egyforma eloszlású valószínűségi változók $F(x)$ eloszlásfüggvénnyel. Ha $\lim\limits_{x\to\infty} x[1-F(x)+F(-x)] = 0$, akkor az $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ részletösszegekre $\frac{S_n}{n} - a_n \Rightarrow 0$ $n \to \infty$ esetén $a_n = \int_{-n}^{n} uF(\,du)$ választással. Az a_n sorozatot a fenti reláció majdnem egyértelműen meghatározza. Azaz, ha a fenti sztochasztikus konvergencia teljesül valamilyen a_n sorozattal, akkor egy másik $\bar{a}_n$ sorozattal ez a konvergencia akkor és csak akkor teljesül, ha $\lim\limits_{n\to\infty} (a_n - \bar{a}_n) = 0$.

14.) A 13. feladat állítása megfordítható. Azaz, ha a feladat jelöléseivel $\frac{S_n}{n} - a_n \Rightarrow 0$, $n \to \infty$ esetén alkalmas a_n sorozattal, akkor $\lim\limits_{x\to\infty} x[1-F(x)+F(-x)] = 0$, és $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{x} \int_{-x}^{x} u^2 F(\,du) = 0$.

15.) Ha a $\xi_1, \xi_2, \dots$ független valószínűségi változók részletösszegeire $\frac{S_n}{n} - a_n \to 0$ $n \to \infty$ esetén egy valószínűséggel, akkor $E|\xi_1| < \infty$, és $a_n = E\xi_1 + o(1)$.

16.) Tekintsük az $f_s(x) = \frac{1}{\pi} \frac{s}{s^2+x^2}$, $-\infty < x < \infty$, $s > 0$ (Cauchy eloszlást definiáló) sűrűségfüggvényeket. Lássuk be, hogy $f_s * f_t(x) = f_{s+t}(x)$, ahol $*$ konvolució jelöl.

17.) Legyenek ξ_k, $k = 1, \dots, n$, független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata $f(x) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}$ eloszlással. Mi a $\frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k$ valószínűségi változó eloszlása? Miért nem igaz ezekre a valószínűségi változókra a nagy számok (gyenge) törvénye?

18.) Határozzuk meg a Cauchy eloszlású valószínűségi változók karakterisztikus függvényét.

19.) Legyen ξ_n, $n = 1, 2, \dots$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók sorozata $f(x)$ sűrűségfüggvénnyel. Teljesíti-e ezen valószínűségi változók átlaga a nagy számok erős és a nagy számok gyenge törvényét, ha

a.) $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2}$

b.) $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2 \log(x^2+4)}$

c.) $f(x) = \dfrac{C}{1+x^2 \log^2(x^2+4)}$

A klasszikus valószínűségszámítás egyik klasszikus eredménye az un. három sor tétel a következő kérdéssel foglalkozik: Legyenek $\xi_1, \xi_2, \dots,$ független valószínűségi változók sorozata. Ekkor a 0–1 törvény alapján a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \xi_k$ egy valószínűséggel konvergens vagy divergens. Az alább megfogalmazandó és az azt követő három feladatban bebizonyítandó három sor tétel megadja annak szükséges és elégséges feltételét, hogy ez az összeg egy valószínűséggel konvergáljon.

Három sor tétel. *Legyenek* $\xi_1, \xi_2, \dots,$ *független valószínűségi változók. A* $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ *véletlen összeg akkor és csak akkor konvergál egy valószínűséggel, ha rögzítve egy tetszőleges* $C > 0$ *számot és tekintve a* $\xi'_k = \xi_k I(\{|\xi_k| < C\})$ *valószínűségi változókat, ahol* $I(\mathbf{A})$ *az* $\mathbf{A}$ *halmaz indikátorfüggvénye, ez a sorozat teljesíti a következő feltételeket:*

(i) $\sum_{k=1}^{\infty} P(\xi_k \neq \xi'_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(|\xi_k| \geq C) < \infty,$

(ii) *A* $\sum_{k=1}^{\infty} E\xi'_k$ *összeg konvergens.*

(iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} \xi'_k < \infty.$

20.) Bizonyítsuk be (a Kolmogorov egyenlőtlenség segítségével), hogy ha a független valószínűségi változók $\xi_1, \xi_2, \dots$ sorozata teljesíti a három sor tétel feltételeit, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ összeg egy valószínűséggel konvergál.

21.)

a.) Legyen ξ korlátos valószínűségi változó, $P(|\xi| < K) = 1$, $E\xi = 0$. Ekkor minden olyan t számra, melyre $|t| \leq \frac{1}{K}$ igaz, hogy a ξ $\varphi(t) = Ee^{it\xi}$ karakterisztikus függvénye teljesíti az $1 - \Re\varphi(t) > \frac{t^2}{4}$ egyenlőtlenséget.

b.) Ha ξ_k, $k = 1, 2, \dots,$ független szimmetrikus eloszlású valószínűségi változók sorozata (azaz $P(\xi_k > x) = P(\xi_k < -x)$ minden k-ra és $x \geq 0$-ra $\varphi_k(t)$, $-\infty < t < \infty$, karakterisztikus függvényekkel, és $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ összeg (eloszlásban) konvergál, akkor $\sum_{k=1}^{\infty} [1 - \varphi_k(t)] < \infty$ elég kis t-re.

c.) Ha a független szimmetrikus eloszlású ξ_k valószínűségi változók teljesítik a $|\xi_k| < C$ alkalmas (k-tól független) $C > 0$ számmal, és $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ egy valószínűséggel konvergens, (elég feltenni, hogy ez az összeg eloszlásban konvergál,) akkor $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} \xi_k < \infty$.

22.) Bizonyítsuk be, hogy ha a független ξ_k valószínűségi változókra $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ egy valószínűséggel konvergál, akkor teljesül a három sor tételben megfogalmazott (i), (ii) és (iii) tulajdonság.

23.) Bizonyítsuk be a három sor tétel segítségével, hogy ha a ξ_k független valószínűségi változók teljesítik az $E\xi_k = 0$ és $\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2 < \infty$ feltételeket, akkor a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ összeg egy valószínűséggel konvergál. Ha $E|\xi_k|^{2+\alpha} \le K\left(E\xi_k^2\right)^{(2+\alpha)/2}$ valamilyen $\alpha > 0$ és a k indextől függő K számmal (ez a becslés azt fejezi ki, hogy $E\xi_k^{2+\alpha}$ nem túl nagy, kisebb mint a Hölder egyenlőtlenség alapján erre a momentumra megadható alsó becslés), és $\sum\limits_{k=1}^\infty E\xi_k^2 < \infty$ akkor a $\sum\limits_{k=1}^\infty \xi_k$ összeg egy valószínűséggel divergens.

24.) Adjunk példát független valószínűségi változók olyan ξ_k, $k = 1, 2, \dots$, sorozatára, melyre $E\xi_k = 0$, $\sum\limits_{k=1}^\infty E\xi_k^2 = \infty$ és a $\sum\limits_{k=1}^\infty \xi_k$ sorozat egy valószínűséggel konvergál.

Megoldások

1.) $ES_n = 0$, és $ES_n^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} E\xi_k^2 = \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{25\log(k+1)}$. Ezért a Csebisev egyenlőtlenség alapján tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra $P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon n^2} \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{k}{25\log(k+1)} \to 0$. Tehát $\frac{S_n}{n} \Rightarrow 0$.

Mivel a $\{|\xi_n| \ge n\}$ események függetlenek, és $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{5n\log(n+1)} = \infty$, a Borel–Cantelli lemma alapján egy valószínűséggel igaz az, hogy a $\{|\xi_n| \ge n\}$ esemény végtelen sok n-re bekövetkezik. Ha az $\frac{S_n(\omega)}{n}$ sorozat konvergens, akkor $\frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{S_{n-1}(\omega)}{n} = \frac{\xi_n(\omega)}{n} \to 0$, ez pedig egy valószínűséggel nem lehetséges.

2.) Definiáljuk rögzített n-re a $\xi_k = \xi_k^{(1,n)} + \xi_k^{(2,n)}$ dekompoziciót, $1 \le k \le n$, ahol $\xi_k^{(1,n)} = \xi_k I(\{|\xi_k| \le n\})$, $\xi_k^{(2,n)} = \xi_k I(\{|\xi_k| \ge n\})$, és $I(A)$ az A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Ekkor $E\xi_k^{(1,n)} = 0$, $E{\xi_k^{(1,n)}}^2 = \int_{-n}^{n} x^2 f(x)\,dx \le \frac{\text{const.}\, n}{\log n}$, és $P(\xi_k^{(2,n)} \ne 0) \le \frac{\text{const.}}{n\log n}$. Ezért a Csebisev egyenlőtlenség segítségével kapjuk, hogy

$$P\left(\left|\frac{S_n}{n}\right| \ge \varepsilon\right) \le P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} \xi_k^{(1,n)}\right| \ge n\varepsilon\right) + \sum_{k=1}^{n} P(\xi_k^{(2,n)} \ne 0) \le \frac{\text{const.}\, n}{\varepsilon \log n} + \frac{\text{const.}}{\log n} .$$

A fenti kifejezés nullához tart, ha $n \to \infty$. Ez azt jelenti, hogy $\frac{S_n}{n} \Rightarrow 0$. Másrészt, $E|\xi_n| = 2\int_2^{\infty} \frac{C'}{x\log x}\,dx = \infty$.

3.) Ha $E|\xi_1| = \infty$, akkor $\sum\limits_{k=1}^{\infty} P(|\xi_1| > k) = \infty$. Innen $\sum\limits_{n=1}^{\infty} P(|\xi_n| > n) = \infty$, és a Borel–Cantelli lemma alapján 1 valószínűséggel $|\xi_n| > n$ végtelen sok n-re. Ha $\frac{S_n(\omega)}{n}$ konvergál, akkor $\frac{S_n(\omega)}{n} - \frac{S_{n-1}(\omega)}{n} = \frac{X_n(\omega)}{n} \to 0$, ami egy valószínűséggel nem lehetséges.

4.) Tegyük fel, hogy $X_n \to 0$ 1 valószínűséggel. Definiáljuk a következő $A(n,\varepsilon)$ halmazokat: $A(n,\varepsilon) = \{\omega\colon \sup\limits_{k \ge n} |X_k(\omega)| > \varepsilon\}$. Ekkor $\cdots A(n,\varepsilon) \supset A(n+1,\varepsilon) \supset \cdots$, és $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A(n,\varepsilon)\right) = 0$. Ezért a mértékek folytonossága miatt $\lim\limits_{n\to\infty} P(A(n,\varepsilon)) = 0$, és ez a bizonyítandó állítás egyik fele.

Ha $\lim\limits_{n\to\infty} P(A(n,\varepsilon)) = 0$, akkor $P\left(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A(n,\varepsilon)\right) = 0$, ami azt jelenti, hogy

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} |X_n| \le \varepsilon\right) = 1 .$$

Alkalmazva ezt az állítást minden $\varepsilon = 1/k$, $k = 1, 2, \dots$ számra, kapjuk, hogy $X_n \to 0$ 1 valószínűséggel, és ez az állítás másik fele.

5.) Az adott feltételek mellett a Borel–Catelli lemma alapján 1 valószínűségi halmazon $\sup\limits_{2^{n-1}\le k\le 2^n} |S_k(\omega)| > 2^n\varepsilon$, ha $n > n_0(\omega,\varepsilon)$. Ha $2^{n-1} \le l < 2^n$, $n > n_0(\omega,\varepsilon)$ akkor $\dfrac{|S_l|}{l} \le 2\varepsilon$. Alkalmazva ezt az állítást $\varepsilon = \dfrac{1}{k}$-ra. $k = 1, 2, \dots$, kapjuk az állítást.

6.) Felírva az S_k momentumait, elvégezve a beszorzásokat és felhasználva azt, hogy független valószínűségi változók szorzatának a várható értéke megegyezik a változók várható értékének a szorzatával kapjuk azt, hogy

$$ES_n^k = E\left(\sum_{j=1}^n \xi_j\right)^k = \sum_{\substack{1\le l_r\le n,\ r=1,\dots,k\\ s_1+\cdots s_r=k}} E\xi_{l_1}^{s_1}\cdots E\xi_{l_r}^{s_r}\ .$$

Mivel a ξ_l valószínűségi változók várható értéke nulla, ezért az előző összegben szereplő tagokra $E\xi_{l_1}^{s_1}\cdots E\xi_{l_r}^{s_r} = 0$, ha ebben a szorzatban valamelyik s_j nullával egyenlő. Ezért

$$ES_n^k = \Sigma_1(n) + \Sigma_2(n)\ ,$$

ahol

$$\begin{aligned}\Sigma_1(n) &= \sum_{1\le l_r\le n,\ 1\le r\le p} E\xi_{l_1}^2\cdots E\xi_{l_p}^2\\ &= n(n-1)\cdots(n-p+1)\cdot(k-1)\cdots 3\cdot 1 \quad \text{ha } k=2p\ ,\\ \Sigma_1(n) &= 0, \quad \text{ha } k=2p+1\end{aligned}$$

és

$$\Sigma_2(n) = \sum_{\substack{1\le l_r\le n,\ r=1,\dots,k\\ s_1+\cdots+s_r=k\\ s_j\ge 2, j=1,\dots,r\\ \text{létezik } 1\le m\le r \text{ melyre } s_m\ge 3}} E\xi_{l_1}^{s_1}\cdots E\xi_{l_r}^{s_r}\ .$$

A $\Sigma_2(n)$-ben szereplő szorzatok legfeljebb $(k-1)/2$ tényezőből áll. Ezért ennek az összegnek legfeljebb const. $n^{(k-1)/2}$ tagból áll. Mindegyik tag kisebb mint egy alkalmas (n-től független) konstans. Ezért

$$\Sigma_2(n) \le \text{const.}\, n^{(k-1)/2}\ .$$

Mivel $\Sigma_2(n) \le \text{const.}\, n^{k/2}$, innen következik, hogy $|ES_n^k| \le \text{const.}\, n^{k/2}$. Ha k páros szám, és $m \le n$ akkor innen következik, hogy $P(S_m > \varepsilon n) \le C(\varepsilon)n^{-k/2}$, ezért $P\left(\sup\limits_{1\le m\le n} S_m > \varepsilon n\right) \le C(\varepsilon)n^{-k/2+1}$. Speciálisan,

$$P\left(\sup_{1\le m\le n} S_m > \varepsilon n\right) \le C(\varepsilon)n^{-1} \quad k=4 \text{ választással.}$$

Ebből a becslésből és az előző feladat eredményéből következik, hogy ha $E\xi_1^4 < \infty$, akkor $\dfrac{S_n}{n} \to 1$ egy valószínűséggel.

6a.) A 6. feladat becslései adják, hogy $\Sigma_2(n) = o\left(n^{k/2}\right)$, ezért $ES_n^k = \Sigma_1(n) + o(n^{k/2})$. Ha k páratlan, akkor $\Sigma_1(n) = 0$, ha k páros, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} n^{-k/2}\Sigma_1(n) = 1\cdot 3\cdots(2k-1)$. Ezen összefüggésekből következik a 6a.) feladat állítása.

7.) Mivel az eloszlásfüggvényt egyértelműen meghatározza a karakterisztikus függvény, ezért elég belátni azt, hogy az adott feltételek mellett $\varphi(t) = \int e^{itx} F(\,dx) = e^{-t^2/2}$. Viszont ebben az esetben $\varphi^{(2k-1)}(0) = 0$, $\varphi^{(2k)}(0) = (i^{2k})1\cdot 3\cdots(2k-1)$, és a Taylor sorfejtés alapján

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} F(\,dx) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{i^{2k} 1\cdot 3\cdots(2k-1)}{2k!} t^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\left(\frac{-t^2}{2}\right)^k = e^{-t^2/2}\ .$$

8.) A Kronecker lemma alapján elég belátni, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{k}\xi_k(\omega)$ sorozat egy valószínűséggel konvergens. Ehhez elég belátni, hogy tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra

$$P\left(\sup_{N\ge n}\left|\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k}\xi_k\right| > \varepsilon\right) \to 0 \quad \text{ha } n\to\infty\ .$$

Ebből ugyanis következik, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}\xi_k$ sorozat egy valószínűséggel Cauchy sorozat. A kívánt egyenlőtlenség viszont következik a Kolmogorov egyenlőtlenségből, mivel

$$P\left(\sup_{N\ge n}\left|\sum_{k=n}^{N} \frac{1}{k}\xi_k\right| > \varepsilon\right) \le \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{\infty} \frac{E\xi_k^2}{k^2} \to 0 \quad \text{ha } n\to\infty\ .$$

9.) Definiáljuk a $\xi_n = \xi_n' + \xi_n''$, $\xi_n' = \xi_n I(|\xi_n| \le n)$, $\xi_n'' = \xi_n I(|\xi_n| > n)$ felbontást, ahol $I(A)$ az A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n} P(\xi_k'' \ne 0) = \sum_{k=1}^{n} P(|\xi_k| > k) = \sum_{k=1}^{n} P(|\xi_1| > k) \le 1 + E|\xi_1| < \infty\ .$$

Ezért a Borel–Cantelli lemma alapján egy valószínűséggel csak véges sok k-ra teljesül a $\xi_k'' \ne 0$ esemény, és ezért $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k'' \to 0$ egy valószínűséggel.

$$\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\xi_k'\right| = \left|-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E\xi_k''\right| \le \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} E|\xi_1| I(|\xi_1| \ge k) \to 0\ ,$$

ha $n\to\infty$, mert $E|\xi_1| < \infty$, és ezért $E|\xi_1| I(|\xi_1| > k) \to 0$, ha $k\to\infty$.

Az előző feladathoz hasonlóan érvelhatünk. Kolmogorov egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\sup_{n\le k\le N}\sum_{j=n}^{k}\frac{1}{j}(\xi_j'-E\xi_j')>\varepsilon\right)\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}E(\xi_k'-E\xi_k')^2\le\frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}E{\xi_k'}^2$$

minden n-re N-re és $\varepsilon>0$-ra. Mivel

$$\sum_{k=n}^{N}\frac{1}{k^2}E{\xi_k'}^2\le\sum_{k=n}^{\infty}\frac{1}{k^2}E\xi_1^2I(|\xi_1|>k)\le\text{const.}\sum_{j=n}^{\infty}j^2P(j\le|\xi_1|<j+1)\left(\sum_{k=j}^{\infty}\frac{1}{k^2}\right)$$
$$\le\text{const.}\sum_{j=n}^{\infty}jP(j\le|\xi_1|<j+1)\le\text{const.}\,E|\xi_1|I(|\xi_1|>n)\ ,$$

és az utolsó kifejezés jobboldala nullához tart, ha $n\to\infty$, ezért a Kolmogorov egyenlőtlenségből következik, hogy a $T_n(\omega)=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{k}(\xi_k'(\omega)-E\xi_k')$ sorozat Cauchy sorozat egy valószínűséggel, azaz a $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{1}{k}(\xi_k'-E\xi_k')$ sorozat egy valószínűséggel konvergál. A Kronecker lemma alapján $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}(\xi_k'-E\xi_k')\to0$ egy valószínűséggel. Mivel $\dfrac{1}{n}\sum E\xi_k'\to0$, és $\dfrac{1}{n}\sum\xi_k''\to0$ egy valószínűséggel, innen következik az állítás.

10.) A feladat állításának két bizonyítását adjuk.

Első bizonyítás: Az állítás következik a valószínűségszámítás standard eredményeiből. Az X_n sorozat akkor és csak akkor konvergál sztochasztikusan nullához, ha eloszlásban konvergál a nulla pontba koncentrált mértékhez. Ez utóbbi akkor és csak akkor teljesül, ha a $\varphi_n(t)$ karakterisztikus függvények sorozata konvergál a nulla pontba koncentrált mérték karakterisztikus függvényéhez minden t-re, és ez utóbbi a $\varphi(t)\equiv0$ függvény. A konvergencia minden véges intervallumban egyenletes.

Második bizonyítás: Ha $X_n(t)\Rightarrow0$, akkor $e^{itX_n}\Rightarrow1$ minden t-re, ahol $\Rightarrow$ sztochasztikus konvergenciát jelöl. Másrészt $|e^{itX_n}|\le1$. Ezért a Lebesgue tétel alapján $\varphi_n(t)=\int e^{itX_n(\omega)}dP(\omega)\to\int1\,dP(\omega)=1$. Mivel $|e^{itX_n(\omega)}-1|\le A|X_n(\omega)|$, ha $|t|\le A$, be lehet látni, hogy a konvergencia egyenletes minden véges intervallumon.

Ha $\varphi_n(t)\to1$ minden t-re, akkor tetszőleges $A>0$-ra $\int_{-A}^{A}\Re\,(1-\varphi_n(t))\,dt\to0$, ha $n\to\infty$. Viszont

$$\int_{-A}^{A}\Re\,(1-\varphi_n(t))\,dt=\int_{-A}^{A}\int_{-\infty}^{\infty}\Re\left(1-e^{itx}\right)\,dtF_n(\,dx)$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-A}^{A}(1-\cos tx)\,dtF_n(\,dx)=\int_{-A}^{A}2A\left(1-\frac{\sin Ax}{Ax}\right)F_n(\,dx)\ ,$$

ahol $F_n(x)$ az X_n valószínűségi változó eloszlásfüggvénye. Mivel $1-\frac{\sin Ax}{Ax}\ge 0$, $\frac{\sin Ax}{Ax}\le\frac{1}{2}$, ha $|x|>\frac{2}{A}$, ezért

$$\int_{|x|>2/A}\Re\left(1-\varphi_n(t)\right)\,dt\ge\int_{|x|>2/A}AF_n(\,dx)=AP\left(|X_n|>\frac{2}{A}\right)\to 0.$$

Mivel ez az állítás igaz minden $A>0$-ra, $X_n\Rightarrow 0$.

11.) Az $\frac{S_n}{n}\Rightarrow 0$ feltétel ekvivalens azzal, hogy $\varphi\left(\frac{t}{n}\right)^n-1\to 0$ minden t-re. Ha a karakterisztikus függvény a nullában differenciálható, és a derivált nulla, akkor $\left|\left(\varphi^n\left(\frac{t}{n}\right)-1\right)\right|=n\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-1\right|\cdot\left|\frac{1}{n}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\varphi^k\left(\frac{t}{n}\right)\right|\le n\left|\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-1\right|\to 0.$
A másik irány bizonyításához vegyük észre, hogy $\frac{S_n}{n}\Rightarrow 0$ esetén $\varphi\left(\frac{t}{n}\right)^n-1=\exp\left\{n\log\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\right\}-1\to 0$ egyenletesen minden $t\in[-A,A]$, $A>0$ intervallumon, ezért $n\log\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\to 0$ és $n\cdot\arg\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\to 0$ egyenletesen $|t|<A$-ra, ha $n\to\infty$. Ennek bizonyításához azt kell észrevenni, hogy bár az adott feltételből rögzített t-re csak az következik, hogy $n\cdot\arg\varphi\left(\frac{t}{n}\right)\sim 2k\pi$ valamilyen egész k-ra, de a $\varphi\left(\frac{t}{n}\right)^n$ függvény egyenletes konvergenciájából, a $\varphi\left(\frac{t}{n}\right)^n$ görbe folytonosságából és a $\varphi(0)=1$ relációból következik, hogy $k=0$. Mivel $|1-z|\le\text{const.}\,|\log z|$, ha $|1-z|\le\frac{1}{10}$, innen következik, hogy $n\left(\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-1\right)\to 0$, ha $n\to\infty$, és a konvergencia minden korlátos intervallumban egyenletes. Ezért minden $\varepsilon>0$-hoz létezik olyan $n=n(\varepsilon)$ küszöbindex, hogy $\left|\frac{\varphi\left(\frac{t}{n}\right)-1}{\frac{t}{n}}\right|<\varepsilon$, ha $n\ge n(\varepsilon)$, és $\frac{1}{2}\le|t|\le 1$. Innen következik, hogy hogy $\varphi'(0)=0$, ahogy állítottuk.

12.) Az a.) és b.) rész állítás ekvivaleciája az előző feladat eredménye.
A c.) $\Rightarrow$ b.) állítás bizonyítása:

$$\frac{\varphi(h)-1}{h}=\int_{-T}^{T}\frac{e^{ihx}-1}{h}F(\,dx)+\int_{|x|>T}\frac{e^{ihx}-1}{h}F(\,dx)=I(T,h)+II(T,h).$$

Mivel $\left|\frac{e^{ihx}-1}{h}\right|\le\frac{2}{h}$ és $\left|\frac{e^{ihx}-1}{h}-ix\right|\le\frac{x^2}{h}$ rögzítve egy kis $\varepsilon>0$ számot $T=\frac{\varepsilon}{h}$ választással a következő becsléseket tehetjük:

$$|II(T,h)|\le\frac{1}{h}\int_{x>|T|}F(\,dx)=\frac{T\,[F(-T)+(1-F(T)]}{h}\to 0\quad\text{ha } h\to 0\ ,$$

$$|I(T,h)| \le \left|\int_{-T}^{T} xF(\,dx)\right| + \left|\int_{-T}^{T} \frac{x^2}{h}F(\,dx)\right| = |I_1(T,h)| + |I_2(T,h)|\,,$$

$$|I_1(T,h)| \to 0 \quad \text{ha } h \to 0$$

és parciális integrálással kapjuk, hogy

$$I_2(T,h) = \left((1-F(T))\frac{T^2}{h} - F(-T)\frac{T^2}{h}\right) - 2\int_0^T (1-F(x))\frac{x}{h}\,dx - 2\int_{-T}^0 F(x)\frac{x}{h}\,dx\,.$$

Továbbá $\left[F(x)\frac{x^2}{h}\right]_{-T}^{T} \to 0$ ha $h \to 0$, és

$$\left|\int_{-T}^{T} F(x)\frac{x}{h}\,dx\right| \le \int_{-T}^{T} \frac{\text{const.}}{|x|}\frac{|x|}{h}\,dx \le \frac{T}{h} \le \text{const.}\,\varepsilon\,.$$

Mivel ezek az egyenlőtlenségek minden $\varepsilon > 0$-ra igazak, ezért

$$\varphi'(0) = \lim_{h\to 0} \frac{\varphi(h)-1}{h} = 0$$

A b.) $\Rightarrow$ c.) állítás bizonyítása: A b.) feltétel teljesülése esetén tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra $|\Re[1-\varphi(u)]| < \frac{\varepsilon}{x}^{-1}$ ha $u < \frac{1}{x}$ és $x > x(\varepsilon)$. Ezért elég nagy x-re

$$\begin{aligned}
\varepsilon > x^2 \int_0^{1/x} \Re[1-\varphi(u)]\,du &= \int_0^{1/x}\int_{-\infty}^{\infty} x^2(1-\cos ut)F(d\,u)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^{1/x} x^2(1-\cos ut)\,dtF(d\,u) = \int_{-\infty}^{\infty}\left(x - \frac{x^2\sin\frac{u}{x}}{u}\right)F(\,du) \\
&\ge \frac{x}{2}\int_{\{|t|>2x\}} F(\,du) = \frac{x}{2}\left[(1-F(2x)) + F(-2x)\right]\,.
\end{aligned}$$

Innen következik a c.) rész egyik állítása. A c.) $\Rightarrow$ b.) bizonyításában az $II(T,h)$ és $I_2(T,h)$ tag becslésében ($T = \frac{\varepsilon}{h}$ választással) ezt a már bizonyított relációt használtuk fel. Ezekből a becslésekből következik, hogy

$$\left|\frac{\varphi(h)-1}{h} - \int_{-T}^{T} xF(\,dx)\right| \to 0 \quad \text{ha } h \to 0\,. \quad (T = \frac{\varepsilon}{h})$$

Mivel $\frac{\varphi(h)-1}{h} \to 0$, ha $h \to 0$ innen következik a c.) rész másik állítása is.

13.) Rögzítsünk egy tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ számot, és definiáljuk rögzített n-re a $\xi'_k = \xi_k I(|\xi_k| \le n)$ és $\xi''_k = \xi_k I(|\xi_k| > n)$, $1 \le k \le n$ valószínűségi változókat, ahol $I(A)$

az A halmaz indikátor függvényét jelöli. Legyen $S'_n = \sum_{k=1}^{n} \xi'_k$ és $S''_n = \sum_{k=1} < n\xi''_k$. Rögzítsünk egy tetszőleges kis $\varepsilon > 0$ számot. Elég nagy $n > n(\varepsilon)$-ra $P(|S''_n| > \varepsilon n) \le P(S''_n \ne 0) \le \sum_{k=1}^{n} P(|\xi_k| > n) = n[1 - F(n) + F(-n)] \le \varepsilon$. Másrészt, a Csebisev egyenlőtlenség alapján $P(|S'_n - ES'_n| > n) \le \frac{\operatorname{Var}\xi'_1}{\varepsilon^2 n} \le \varepsilon$, mivel $\operatorname{Var}\xi'_1 \le E{\xi'_1}^2 = \int_{-n}^{n} u^2 F(\,du)$, és $\frac{1}{n}\int_{-n}^{n} u^2 F(\,du) \to 0$, ha $n \to \infty$. Az utolsó reláció azért igaz, mert $\int_{T<|u|<2T} u^2 F(\,du) \le \varepsilon \mathbf{T}$, ha $T > T(\varepsilon)$ a feladat feltételének teljesülése esetén, ezért $\int_{-n}^{n} u^2 F(\,du) \le \varepsilon T + \text{const.}\,(\varepsilon)$. Mivel a fenti állítások tetszőleges $\varepsilon > 0$ és elég nagy n számra igazak, és $S_n = S'_n + S''_n$, innen következik, hogy $\frac{S_n}{n} - a_n \Rightarrow 0$, $a_n = E\xi'_1 = \int_{-n}^{n} uF(\,du)$. Végül, ha a fenti reláció egy másik $\bar{a}_n$ számsorozatra is érvényes, akkor ezeket egymásból kivonva kapjuk, hogy $\bar{a}_n - a_n \to 0$, ha $n \to \infty$.

14.) Alkalmazzuk a következő szimmetrizációs eljárást. Legyen $\bar{\xi}_n$, $n = 1, 2, \dots$, független azonos eloszlású valószínűségi változók sorozata, mely független a ξ_n, $n = 1, 2, \dots$, sorozattól is. Legyen $\eta_n = \xi_n - \bar{\xi}_n$, $n = 1, 2, \dots$, $T_n = \sum_{k=1}^{n} \eta_k$, $n = 1, 2, \dots$. Ekkor $\frac{T_n}{n} \to 0$, ha $n \to \infty$. Ezért alkalmazhatjuk a 12. feladat eredményét, és annak c.) része alapján $\lim_{x\to\infty} xP(|\eta_1| > x) = 0$. Válasszunk egy olyan $A > 0$ számot, melyre $P(|\xi_1| > x) \le \frac{1}{2}$. Ekkor minden elég nagy x-re

$$\begin{aligned}\frac{\varepsilon}{x} \ge P(|\eta_1| > x) \ge P(|\xi_1 - \bar{\xi}_1| > x,\, |\bar{\xi}_1| \le A) \ge P(|\xi_1| > x + A,\, |\bar{\xi}_1|)\\ \ge \frac{1}{2} P(|\xi_1| > x + A)\,.\end{aligned}$$

Innen következik, hogy $x[1 - F(x) + F(-x)] = xP(|\xi_1| > x) \le 2\varepsilon$ tetszőleges $\varepsilon > 0$ és $x > x(\varepsilon)$ számra.

15.) Az előző feladat megoldásában is használt szimmetrizációs érv segítségével be tudjuk bizonyítani azt, hogy a feladat feltételeinek teljesülése esetén $E|\xi_1| \le \infty$. Legyen ugyanis $\bar{\xi}_n$, $n = 1, 2\dots$, a ξ_n sorozattól is független, azonos eloszlású független valószínűségi változók sorozata, mely változók ugyanolyan eloszlásúak mint ξ_1. Vezessük be továbbá az $\eta_n = \xi_n - \bar{\xi}_n$ valószínűségi változókat. Ekkor az η_n, $n = 1, 2, \dots$, változókra teljesül a nagy számok erős törvénye ($a_n = 0$ választással), ezért $|\eta_1| = E|\xi_1 = \bar{\xi}_1| < \infty$. Az előző feladat megoldásának végén adott becslés szerint $P(|\xi_1| > x + A) \le 2P(|\eta| > x)$ alkalmas (fix) A konstanssl minden $x > 0$ számra. Innen következik, hogy $E|\xi_1| < \infty$. Végül a nagy számok törvénye alapján a feladat állítás igaz $a_n = a - E\xi_1$ választással. A 13. feladat megoldásának végén használt érv jelen esetben azt adja, hogy $a_n = E\xi_1 + o(1)$ az összes lehetséges jó választás arra, hogy a feladatban szereplő limesz reláció érvényes legyen.

16.) A bizonyítandó állítás ekvivalens a következő azonossággal:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{st}{\left(s^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\right)\left(t^2+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2\right)}\,dy = \frac{(s+t)\pi}{(s+t)^2+x^2}$$

A fenti integrált, bár sok számolással, de az analízis standard módszereivel kiszámíthatjuk. Az integrálban szereplő törtet a következő módon kezelhetőbb alakra hozhatjuk:

$$\frac{st}{\left(s^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2\right)\left(t^2+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2\right)}\left(x^4+2x^2(s^2+t^2)+\left(t^2-s^2\right)^2\right)$$
$$= st\left(\frac{t^2-s^2+x^2+2x\left(\frac{x}{2}+y\right)}{s^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2}+\frac{s^2-t^2+x^2+2x\left(\frac{x}{2}-y\right)}{t^2+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2}\right)$$

Felhasználva az $\int \frac{2x}{1+x^2}\,dx = \log(1+x^2)$ azonosságot, belátható, hogy

$$\lim_{K\to\infty}\int_{-K}^{K}\left(\frac{2x\left(\frac{x}{2}+y\right)}{s^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2}+\frac{2x\left(\frac{x}{2}-y\right)}{t^2+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2}\right)dy = 0$$

(Két végtelenhez tartó integrál különbségét kapjuk, de a különbség nullához tart.) Ezért a bizonyítandó azonosság a következő állítássá redukálható:

$$\frac{1}{x^4+2x^2(s^2+t^2)+(t^2-s^2)^2}\int_{\infty}^{\infty} st\left(\frac{t^2-s^2+x^2}{s^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2}+\frac{s^2-t^2+x^2}{t^2+\left(\frac{x}{2}-y\right)^2}\right)dy$$
$$= \frac{(s+t)\pi}{1+(s+t)^2x^2}$$

A fenti integrál az $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \arctan x$ azonosság alapján kiszámítható, és azt kapjuk, hogy

$$\int \cdots = \frac{\pi st}{\left(t^2-s^2\right)^2+2x^2(s^2+t^2)+x^4}\left(\frac{(t^2-s^2+x^2)}{s}+\frac{(s^2-t^2+x^2)}{t}\right)$$

ami további számolással a következő kifejezéssé alakítható át:

$$\int \cdots = \pi\frac{(t+s)(x^2+(t-s)^2)}{(x^2+(t+s)^2)\,(x^2+(t-s)^2)} = \pi\frac{t+s}{(x^2+(t+s)^2)}.$$

Ez a kívánt azonosság.

17.) A $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\xi_k$ valószínűségi változó sűrűségfüggvénye $n\underbrace{f*\cdot*f}_{n}(nx)$, ahol $*$ konvolúciót jelöl, és $f(x)=\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$. Ez az elöző feladat alapján $f(x)$-szel egyenlő, tehát

n-től független. Ezért a nagy számok (gyenge) törvénye ebben az esetben nem érvényes. Jegyezzük meg, hogy az ilyen eloszlású valószínűségi változók abszolut értékének nincs várható értéke, sőt mint a következő feladat mutatja, a karakterisztikus függvény nullában nem differenciálható.

18.) A $\varphi(t)=\int_{\infty}^{\infty}\frac{e^{itx}}{\pi(1+x^2)}\,dx$ integrált a residium számítás segítségével kiszámíthatjuk. Ha a $g(x)=g(x,t)=\frac{e^{i}tx}{\pi(1+x^2)}$ függvényt a $|z|=R$ $\Im z\ge 0$ félkörön integráljuk $t>ge0$ esetén, a $|z|=R$, $\Im z\le 0$ félkörön integráljuk $t\le 0$ esetén, akkor az integál nullához tart $R\to 0$-ra. A $g(x)$ függvénynek két pólusa van, a $\pm i$ pontokban. Ha $t\ge 0$ az i pontban, ha $t\le 0$ a $-i$ pontban levő pólust kell figyelembe venni, és a rezidium (az integrál) $e^{-|t|}$-vel egyenlő.

19.) Az a.) esetben $1-F(x)=\int_x^{\infty}\dfrac{C}{1+u^2}\,du\sim\dfrac{C}{2x}$ nagy x-re, ezért $\lim\limits_{x\to\infty}x(1-F(x))>0$, tehát látható, hogy a nagy számok gyenge törvényének a 12. feladat c.) részében megfogalmazott feltételek, ezért a nagy számok gyenge (következésképp a nagy számok erős törvénye) nem teljesül ebben az esetben. Érdemes megjegyezni, hogy a 17. vagy 18. feladatból kiolvasható, hogy ebben az esetben a normálófaktor $C=\frac{1}{\pi}$, és az átlag eloszlása megegyezik ξ_1 eloszlásával. Innen is látható, hogy a nagy számok gyenge törvénye nem teljesül.

A b.) esetben $1-F(x)=F(-x)=\int_x^{\infty}\dfrac{C}{(1+u^2)\log(u^2+4)}\,du\sim\dfrac{\bar C}{x\log x}$ nagy x-re, ezért $\lim\limits_{x\to\infty}x[(1-F(x)+F(-x)]=0$, és $f(x)=f(-x)$. Innen következik, hogy a 12. feladat c.) részében megfogalmazott tulajdonságok ezért a nagy számok gyenge törvénye teljesül. Másrészt, $E|\xi_1|=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{C|u|}{(1+u^2)\log(u^2+4)}\,du=\infty$, mert $\dfrac{|u|}{(1+u^2)\log(u^2+4)}\,du\sim\dfrac{1}{2|u|\log u}$, ha $|u|\to\infty$, és $\int_2^{\infty}\frac{1}{u\log u}\,du=\infty$. Így a 3. feladat alapján a nagy számok erős törvénye nem teljesül.

c.) Ebben az esetben $E|\xi_1|=\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{C|u|}{(1+u^2)\log^2(u^2+4)}\,du<\infty$, mert

$$\frac{|u|}{(1+u^2)\log^2(u^2+4)}\,du\sim\frac{1}{4|u|\log^2 u},\quad \text{ha } |u|\to\infty,$$

és $\int_2^{\infty}\frac{1}{u\log^2 u}\,du<\infty$. Így a 9. feladat alapján ebben az esetben teljesül a nagy számok erős, (ezért a nagy számok gyenge) törvénye.

20.) A negyedik feladat állításából következik, hogy elég belátni azt, hogy tetszőleges $\varepsilon>0$-ra

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\sup_{m\ge n}\left|\sum_{k=n}^{m}\xi_k\right|>\varepsilon\right)\to 0.$$

Vegyük észre, hogy

$$P\left(\sup_{m\ge n}\left|\sum_{k=n}^{m}\xi_k\right|>\varepsilon\right)\le\sum_{k=n}^{\infty}P(\xi_k=\xi_k')+P\left(\sup_{m\ge n}\left|\sum_{k=n}^{m}(\xi_k'-E\xi_k')\right|>\varepsilon-\sum_{k=n}^{m}\xi_k'\right)$$

továbbá $\sum_{k=n}^{\infty} P(\xi_k = \xi_k') \to 0$ $n \to \infty$ esetén (i) miatt és $\sum_{k=n}^{m} E\xi_k' < \frac{\varepsilon}{2}$ minden $m \geq n$-re ha $n > n(\varepsilon)$ (ii) miatt. Végül a Kolmogorov egyenlőtlenség alapján

$$P\left(\sup_{m\geq n}\left|\sum_{k=n}^{m}(\xi_k' - E\xi_k')\right| > \frac{\varepsilon}{2}\right) \leq \frac{\sum\limits_{k=n}^{\infty} \operatorname{Var}\xi_k}{\varepsilon^2} \to 0 \quad \text{ha } n \to \infty.$$

a (iii) tulajdonság miatt. Ezekből az egyenlőtlenségekből következik a feladat állítása.

21.)

a.) Jelölje $F(x)$ a ξ valószínűségi változó eloszlásfüggvényét. Ekkor

$$\Re\,(1-\varphi(t)) = \int_{-\infty}^{\infty}(1 - costx)F(\,dx) \geq \int_{-\infty}^{\infty}\frac{t^2x^2}{4}F(\,dx) = \frac{t^2}{4}\operatorname{Var}\xi\ ,$$

ha $|tx| \leq |tK| \leq 1$ mivel $1 - \cos u > \frac{u^2}{4}$, ha $|u| \leq 1$.

b.) Ha a $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ összeg eloszlásban konvergál valamely ξ valószínűségi változóhoz $\varphi(t)$ karakterisztikus függvénnyel, akkor $\varphi(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)$. Tetszőleges $\varepsilon > 0$-hoz létezik olyan $\delta > 0$, hogy $|1 - \varphi(t)| < e$, és $|1 - \varphi_n(t)| < \varepsilon$ minden $n \geq 1$-re, ha $|t| < \delta$. (Az utóbbi egyenlőtlenség azért igaz, mert $\frac{\prod_{k=1}^{n+1}\varphi_k(t)}{\prod_{k=1}^{n}\varphi_k(t)} \to 1$, ha $n \to \infty$, és a konvergencia egyenletes, ha t egy véges intervallumban van.) Mivel a ξ_k valószínűségi változók szimmetrikus eloszlásúak, a $\varphi_k(t)$ karakterisztikus függvény valós értékű minden t-re, és a $\varphi(t) = \prod_{k=1}^{\infty}\varphi_k(t)$ azonosságnak véve a logaritmusát kapjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty}\log\varphi_k(t)$ összeg konvergens, sőt abszolut konvergens $|t| < \delta$ esetén, mivel ebben az esetben $1 - \varepsilon < \varphi(t) \leq 1$. Mivel $\log\varphi(t) > \frac{1}{s}(1 - \varphi(t))$, ha $\varepsilon > 0$ elég kicsinek választjuk, innen következik, hogy $\int \sum_{k=1}^{\infty}(1 - \varphi(t)) < \infty$ $|t| < \delta$ esetén.

c.) Az a.) és b.) részből következik, hogy $\sum_{k=1}^{\infty}\operatorname{Var}\xi_k \leq \frac{4}{t}\sum_{k=1}^{\infty}(1 - \varphi(t)) < \infty$ az adott feltételek mellett.

22.) Ha a $\sum_{k=1}^{\infty}\xi_k$ összeg egy valószínűséggel konvergens, akkor a $|\xi_k| > C$ esemény csak véges sok k indexre teljesül, ezért a Borel–Cantelli lemma alapján $\sum_{k=1}^{\infty}P(|\xi_k| > C) <$

∞, ezért az (i) tulajdonság teljesül. Továbbá a Borel-Cantelli lemma másik fele alapján a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k'$ összeg is egy valószínűséggel konvergens, ahol $\xi_k' = \xi_k I(|\xi_k| < C)$. A bizonyítás befejezését a más problémák megoldásában is hasznos un. szimmetrizálás segítségével tehetjük meg. Legyen ξ_k'' független valószínűségi változók sorozata, melyek a ξ_k' sorozattól is függetlenek, és ξ_k'' ugyanolyan eloszlású mint a ξ_k' valószínűségi változó. Legyen $\tilde{\xi}_k = \xi_k' - \xi_k''$. Ekkor $\tilde{\xi}_k$ független szimmetrikus eloszlású valószínűségi változók sorozata, melyekre a $\sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\xi}_k$ sorozat konvergens. Ezért az előző feladat alapján $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} \tilde{\xi}_k < \infty$, és mivel $\operatorname{Var} \tilde{\xi}_k = 2\operatorname{Var} \xi_k'$ innen következik a (iii) tulajdonság. A $\xi_k' - E\xi_k'$ sorozat teljesíti a három sor tétel mindhárom feltételét. Ezért e tételnek a 20. feladatban már bizonyított részét felhasználva kapjuk, hogy a $\sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k' - E\xi_k')$ és $\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k' = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k' - \sum_{k=1}^{\infty} (\xi_k' - E\xi_k')$ összegek konvergensek egy valószínűséggel. Ezért a (ii) tulajdonság is teljesül.

23.) Legyen $\xi_k' = \xi_k I(|\xi_k| < 1)$. Ekkor $\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Var} \xi_k' \le \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2 \le \sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2$, ezért a három sor tétel (iii) feltétele teljesül $C = 1$ választással. Mivel $|E\xi_k'| = |E\xi_k I(|\xi_k| >\ge 1) \le E\xi_k^2 I(|\xi_k| \ge 1) \le E\xi_k^2$ és hasonlóan $P(|\xi_k| \ge 1) \le E\xi_k^2$, ezért a a három sor tétel (i) és (ii) feltétele is következik a $\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2 < \infty$ feltételből.

A feladat másik állításának a bizonyításában feltehetjük, hogy $\lim_{k\to\infty} P(|\xi_k| \ge 1) = 0$, mert ellenkező esetben a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ összeg divergens a három sor tétel (i) tulajdonságának nem teljesülése miatt. Be kívánjuk bizonyítani, hogy e feltétel teljesülése esetén

$$\operatorname{Var} \xi_k I(|\xi_k| < 1) \ge \frac{1}{2} E\xi_k^2 \quad \text{ha } k \text{ elég nagy.}$$

Innen következik az állítás, mivel ebből az állításból és a $\sum_{k=1}^{\infty} E\xi_k^2 = \infty$ feltételből következik, hogy a három sor tétel (iii) feltétele nem teljesül.

Mivel $E\xi_k = 0$

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var} \xi_k I(\xi_k < 1) &= E\xi_k^2 I(\xi_k < 1) - (E\xi_k I(\xi_k < 1))^2 \\
&= E\xi_k^2 - E\xi_k^2 I(\xi_k \ge 1) - (E\xi_k I(\xi_k \ge 1))^2 \ge E\xi_k^2 - 2E\xi_k^2 I(\xi_k \ge 1).
\end{aligned}$$

A Hölder egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}
E\xi_k^2 I(|\xi_k| \ge 1) &\le \left(E\xi_k^{2+\alpha}\right)^{(2/2+\alpha)} P(|\xi_k| \ge 1)^{\alpha/(2+\alpha)} \\
&\le KE\xi_k^2 P(|\xi_k| \ge 1)^{\alpha/(2+\alpha)} \le \frac{1}{4} E\xi_k^2
\end{aligned}$$

elég nagy k-ra. Ezért $E\xi_k^2 I(|\xi_k| < 1) \ge \frac{1}{2} E\xi_k^2$, és innen következik a feladat állítása.

24.) Egy lehetséges példa: $P(\xi_k = k) = P\xi_k = -k) = \dfrac{1}{2k}$, $P(\xi_k = 0) = 1 - \dfrac{1}{k}$ minden $k = 1, 2, \ldots$-re. Ekkor $E\xi_k = 0$, $E\xi_k^2 = k$ és a Borel–Cantelli lemma alapján a $\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$ összegben egy valószínűséggel csak véges sok nem zéró tag van.

Kiegészítés

A Kolmogorov egyenlőtlenség bizonyítása. Definiáljuk a

$$\tau(\omega) = \min\{k\colon\ k \le n;\ |S_k(\omega)| \ge x\}$$

valószínűségi változót. ($\tau(\omega) = n$ ha $S_k(\omega) < x$ minden $k \le n$-re.) Azt állítjuk, hogy

$$ES^2_{\tau(\omega)} \le ES^2_n\ . \tag{a}$$

Az utolsó egyenlőtlenség és a Csebisev egyeenlőtlenség alapján

$$P\left(\max_{k\le n}|S_k| > x\right) = P\left(|S_{\tau(\omega)}| > x\right) \le \frac{ES^2_{\tau(\omega)}}{x^2} \le \frac{ES^2_n}{x^2}\ ,$$

és ez a Kolmogorov egyenlőtlenség.

A kívánt egyenlőtlenség bebizonyításához vegyük észre, hogy

$$\begin{aligned} ES^2_n - ES^2_{\tau(\omega)} &= \sum_{k=1}^n E(S_n-S_k)(S_n-S_k+2S_k)I(\{\tau(\omega)=k\}) \\ &= \sum_{k=1}^n E(S_n-S_k)^2 I(\{\tau(\omega)=k\}) + 2\sum_{k=1}^n E(S_n-S_k)S_k I(\{\tau(\omega)=k\})\ . \end{aligned} \tag{b}$$

Mivel az $S_n - S_k$ és $S_kI(\{\tau(\omega) = k\})$ valószínűségi változók függetlenek, (az $S_n - S_k$ a ξ_l, $l = k+1,\dots,n$, az $S_kI(\{\tau(\omega) = k\})$ az ξ_l, $l = 1,\dots,k$ valószínűségi változóktól függ,) és $E(S_n - S_k) = 0$, ezért

$$E(S_n-S_k)S_kI(\{\tau(\omega)=k\}) = E(S_n-S_k)ES_kI(\{\tau(\omega)=k\}) = 0\ .$$

Innen következik, hogy az (b) azonosság jobboldalának a második tagja nulla. Mivel az első tag egy nem negatív valószínűségi változó várható értéke, ezért az (b) azonosságból következik az (a) reláció. Így bebizonyítottuk a Kolmogorov egyenlőtlenséget.

A Kronecker lemma bizonyítása. A bizonyítás az un. Abel féle átrendezés módszerén alapul. Vezessük be az $s_n = \sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k$ mennyiségeket. Legyen $q_0 = 0$. Ekkor

$$\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^n a_kq_k = \frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^n (s_k - s_{k+1})q_k = \frac{1}{q_n}\left(-s_{n+1}q_n + \sum_{k=1}^n s_k(q_k-q_{k-1})\right)\ .$$

Rögzítve egy tetszőlegesen kicsi $\varepsilon > 0$ számot válasszunk egy olyan $N = N(\varepsilon)$ küszöbindexet, melyre igaz, hogy $|s_k| < \varepsilon$ ha $k > N$. (Ez lehetséges, mert $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = 0$.) Mivel $q_k - q_{k-1} \ge 0$ minden k-ra a q_k sorozat monotonitása miatt, ezért

$$\left|\frac{1}{q_n}\sum_{k=N}^n s_k(q_k-q_{k-1})\right| \le \frac{\varepsilon(q_n - q_{N-1})}{q_n} \le \varepsilon\ .$$

Másrészt, mivel $\lim_{n\to\infty} q_n = \infty$ és $\lim_{n\to\infty} s_n = 0$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q_n}\left(-s_{n+1}q_n + \sum_{k=1}^{N-1} s_k(q_k - q_{k-1})\right) = 0 \ .$$

A fenti becslésekből következik, hogy

$$\limsup_{n\to\infty} \left|\frac{1}{q_n}\sum_{k=1}^{n} a_k q_k\right| \le \varepsilon \ .$$

Mivel ez az állítás tetszőleges $\varepsilon > 0$-ra igaz, innen adódik a Kronecker lemma.