

Normális eloszlású valószínűségi változók

Emlékeztető: ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, ha eloszlását a következő képlet határozza meg:

$$P(\xi < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt = \Phi(x).$$

(Általános jelölési szokás: A standard normális eloszlásfüggvényt $\Phi(x)$, a standard normális sűrűségfüggvényt pedig $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ jelöli.) Legyenek ξ_1, \dots, ξ_n független standard normális eloszlású valószínűségi változók, és vezessük be a $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ jelölést. Legyen \mathbf{A} egy $n \times n$ -es mátrix, és $\eta = \xi \mathbf{A}$. Ekkor η n -dimenziós normális eloszlású 0 várható értékű valószínűségi változó. Minden n -dimenziós 0 várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó ilyen alakú, azaz az η n dimenziós valószínűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású 0 várható értékkel, ha létezik olyan \mathbf{A} $n \times n$ -es mátrix, hogy η eloszlása megegyezik az $\xi \mathbf{A}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi változó eloszlásával, ahol ξ_1, \dots, ξ_n független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $m = (m_1, \dots, m_n)$ n dimenziós vektor. Ekkor $\eta + m$ n dimenziós normális valószínűségi változó m várható értékkel, ha η n dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektor 0 várható értékkel. Minden normális eloszlású valószínűségi változó előállítható ilyen módon.

Feladatok:

- 1.) Legyen $\eta = \xi \mathbf{A} + m$, ahol \mathbf{A} $n \times n$ mátrix, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, ahol ξ_1, \dots, ξ_n független standard normális eloszlású valószínűségi változók, és m n dimenziós vektor. Lássuk be, hogy η karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = E e^{i(t, \eta)} = e^{-t \mathbf{A}^* \mathbf{A} t^* / 2 + i(m, t)},$$

ahol $t = (t_1, \dots, t_n)$ n dimenziós vektor, (\cdot, \cdot) skalárszorzatot és $*$ transzponáltat jelöl.

- 2.) Legyen $\eta = \xi \mathbf{A} + m$ olyan mint az előző feladatban. Tegyük fel ezenkívül azt, hogy az \mathbf{A} mátrix invertálható. Ekkor az η valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, amelyik a következő alakú:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det \mathbf{A}|} \exp \left\{ -(x - m) (\mathbf{A}^* \mathbf{A})^{-1} (x - m)^* / 2 \right\},$$

ahol $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ n dimenziós vektor.

- 3.) Az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ valószínűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású, ha a karakterisztikus függvénye $e^{-t \mathbf{D} t^* / 2 + i(m, t)}$ alakú, ahol \mathbf{D} pozitív (szemi)definit mátrix. A \mathbf{D} mátrix az η sztochasztikus vektor $\mathbf{D} = (d_{j,k}) = (E \eta_j \eta_k - E \eta_j E \eta_k)$ kovarianciamátrixa, $m = (E \eta_1, \dots, E \eta_n)$ az η vektor várható értéke.

Mutassuk meg, hogy egy normális eloszlású valószínűségi változó eloszlását meghatározza annak kovarianciamátrixa és várható érték vektora. Ebben az állításban a

normális eloszlás megkövetelése fontos. Mutassuk meg, hogy tetszőleges normális eloszláshoz megadható olyan nem normális eloszlás, melynek megegyezik a kovarianciamátrixa és várható értéke ezzel a normális valószínűségi változóval.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges (X_1, \dots, X_k) (nem feltétlenül normális eloszlású) valószínűségi vektornak, mely mindegyik koordinátájának létezik második momentuma, azaz $EX_p^2 < \infty$, $p = 1, \dots, k$, a $\mathbf{D} = (d_{p,q})$, $d_{p,q} = EX_p X_q - EX_p EX_q$, $1 \leq p, q \leq k$, kovarianciamátrixa pozitív (szemi)definit. Ezért létezik olyan (Y_1, \dots, Y_k) normális vektor, melynek a kovarianciamátrixa és várható értékvektora megegyezik az (X_1, \dots, X_k) kovarianciamátrixával és várható értékével.

- 4.) Az előző feladatban szereplő η vektornak akkor van sűrűségfüggvénye, ha a \mathbf{D} mátrix pozitív definit. A sűrűségfüggvény

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det \mathbf{D}|^{1/2}} \exp \left\{ -(x - m) \mathbf{D}^{-1} (x - m)^* / 2 \right\},$$

alakú.

- 5.) Definiáljuk a következő $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt: $\Omega = [0, 1]$, \mathcal{B} a Borel σ -algebra $[0, 1]$ -en, és \mathbf{P} a Lebesgue mérték. Definiáljuk a következő ξ és η valószínűségi változókat ezen a mezőn: $\xi(x) = \Phi^{-1}(x)$,

$$\eta(x) = \begin{cases} \Phi^{-1}(1 - x) & \text{ha } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ \Phi^{-1}(x - \frac{1}{2}) & \text{ha } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}.$$

Lássuk be, hogy ξ és η normális eloszlású valószínűségi változók, de a (ξ, η) vektor nem normális eloszlású valószínűségi vektor.

- 6.) Legyen $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n$ valós számok. Lássuk be, hogy létezik olyan (ξ_1, \dots, ξ_n) normális eloszlású valószínűségi vektor, melyre $E\xi_k = 0$ és $E\xi_j \xi_k = \min(u_j, u_k)$ minden $1 \leq j, k \leq n$ -re.

- 7.) Minden $x > 0$ -ra

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3} \right) \varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x} \varphi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ és $\varphi(x)$ a standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény.

- 8.) Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ normális eloszlású valószínűségi vektor. Ha valamilyen $1 \leq p < n$ -re a kovariancia függvény teljesíti az $E\xi_j \xi_k - E\xi_j E\xi_k = 0$ feltételt minden $1 \leq j \leq p < k \leq n$ esetén, akkor a (ξ_1, \dots, ξ_p) és $(\xi_{p+1}, \dots, \xi_n)$ véletlen vektorok függetlenek.

- 9.) Legyen (ξ, η) normális eloszlású vektor $m = (m_1, m_2) = (E\xi, E\eta)$ várható értékkel és

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,1} & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1} & \sigma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\xi^2 - (E\xi)^2 & E\xi\eta - E\xi E\eta \\ E\xi\eta - E\xi E\eta & E\eta^2 - (E\eta)^2 \end{pmatrix}$$

kovarianciamátrix-szal. Ekkor ξ feltételes eloszlása $\eta = y$ feltétel esetén a normális eloszlás $\sigma_{1,1} - \frac{\sigma_{1,2}^2}{\sigma_{2,2}}$ szórásnégyzettel és $m_1 - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}} m_2 + \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}} y$ várható értékkel.

Hogy lehet látni, hogy a ξ feltételes eloszlásának a szórása nem negatív? Mikor egyenlő 0-val ez a szórás?

Hogy általánosítható a fenti állítás abban az esetben, ha ξ és η vektorváltozók is lehetnek?

10.) Az (ξ_1, \dots, ξ_k) valószínűségi vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha tetszőleges $\sum_{p=1}^k a_p \xi_p$ lineáris kombináció normális eloszlású.

10') A $(\xi_{1,n}, \dots, \xi_{k,n})$ valószínűségi vektorok akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban a (ξ_1, \dots, ξ_k) vektorhoz $n \rightarrow \infty$ esetén, ha tetszőleges $\sum_{p=1}^k a_p \xi_{p,n}$ lineáris

kombináció eloszlásban konvergál a $\sum_{p=1}^k a_p \xi_p$ vektorhoz $n \rightarrow \infty$ esetén.

11.) Legyenek ξ és η független, normális, egyforma eloszlású valószínűségi változók 0 várható értékkel. Lássuk be, hogy

a.) $\xi^2 + \eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda = 1/2$ paraméterrel.

b.) A $\frac{\xi}{\eta}$ valószínűségi változó Cauchy eloszlású, azaz az eloszlás sűrűségfüggvénye $\frac{1}{\pi(1+x^2)}$.

12.) A következő játékot játszuk: Pénzdarabot dobunk fel ezerszer. Fej dobás esetén 1 forintot nyerünk, írás esetén 1 forintot veszítünk. A játék eredménye 400 fej és 600 írás, azaz kétszáz forint veszteség. Mire gyanakszunk, rossz szerencsére vagy szabálytalan pénzdarabra? A válasz természetesen szubjektív, de érdekes tudni a következőt: Mi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos pénzdarab feldobása esetén ilyen eredmény születik?

13.) Legyen $(\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ nulla várható értékű normális valószínűségi vektor. Lássuk be, hogy

$$E\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = E\xi_1\xi_2E\xi_3\xi_4 + E\xi_1\xi_3E\xi_2\xi_4 + E\xi_1\xi_4E\xi_2\xi_3 .$$

Segítség, megoldások, megoldásvázlatok:

- 1.) Használjuk fel, hogy a ξ standard normális valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi(s) = Ee^{is\xi} = Ee^{-s^2/2}$, és mivel ξ_1, \dots, ξ_n független standard normális valószínűségi változók, ezért tetszőleges s_1, \dots, s_n valós számokra

$$Ee^{i(s_1\xi_1 + \dots + s_n\xi_n)} = \prod_{k=1}^n e^{-s_k^2/2} = e^{-(s,s)/2},$$

ahol $s = (s_1, \dots, s_n)$. Ezért $Ee^{i(t,\eta)} = Ee^{i(t\mathbf{A}^*,\xi) + i(t,m)} = e^{-t\mathbf{A}^*\mathbf{A}t^*/2 + i(t,m)}$.

- 2.) Az alábbi számolás lényege a következő: Annak a valószínűségét, hogy az $\eta \in B$ tetszőleges mérhető $B \subset R^n$ tartományra fejezzük ki, mint annak a valószínűségét, hogy a ξ valószínűségi változó beesik egy alkalmas tartományba, és ezt a valószínűséget fejezzük ki az ismert sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változó integráljaként. Integráltranszformáció segítségével fejezzük ki ezt a mennyiséget, mint egy alkalmas függvény integrálját a B tartományban. Mivel az így kapott függvény nem függ a B tartománytól, ez lesz a keresett sűrűségfüggvény.

$$\begin{aligned} P(\eta \in B) &= P(\xi \in (B - m)\mathbf{A}^{-1}) = \int_{u \in (B-m)\mathbf{A}^{-1}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-(u,u)/2} du \\ &= \int_{u \in B} \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\det A|} e^{-(u-m)(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}(u-m)^*/2} du. \end{aligned}$$

Az utolsó azonosság bizonyításában használjuk fel, hogy ha \mathbf{T} invertálható leképezése egy $D \subset R^n$ tartománynak egy $\mathbf{T}(D)$ tartományra, $\mathbf{T}(u) = (\mathbf{T}_1(u), \dots, \mathbf{T}_n(u))$, $u \in R^n$, továbbá mind \mathbf{T} mind annak inverze $\mathbf{T}^{(-1)}$ differenciálható, akkor a következő integrálhelyettesítési transzformáció érvényes:

$$\int_{u \in D} f(u) du = \int_{u \in \mathbf{T}^{-1}D} f(\mathbf{T}u) \frac{1}{\left| \det \left(\frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial u_k} \right) \right|} du.$$

Itt a $\left(\frac{\partial \mathbf{T}_j}{\partial u_k} \right)$ mátrix a \mathbf{T} transzformáció Jacobianja. (Válasszunk $\mathbf{T}(u) = (u - m)\mathbf{A}^{-1}$ -et és $D = (B - m)\mathbf{A}^{-1}$ -et). Mi a szemléletes tartalma az integráltranszformációs formulának? Olvassuk ki a segítségével kapott azonosságból a kívánt eredményt.

- 3.) Az első feladat segítségével lássuk be, hogy egy normális eloszlás karakterisztikus függvénye az adott alakú. Azt, hogy minden ilyen alakú karakterisztikus függvény valóban előáll, lássuk be azt a lineáris algebrai állítást bizonyítva be először, hogy tetszőleges (szimmetrikus) pozitív szemidefinit \mathbf{D} mátrixból lehet négyzetgyököt vonni, azaz a $\mathbf{D} = \mathbf{A}^2$ reprezentáció lehetséges alkalmas (szimmetrikus, pozitív definit) \mathbf{A} mátrix segítségével. Az utolsó állítás bizonyításában használjuk ki, hogy a karakterisztikus függvény meghatározza az eloszlást.

Be kell látni, hogy tetszőleges $u = (u_1, \dots, u_k)$ vektorra $u\mathbf{D}u^* \geq 0$. De $u\mathbf{D}u^* = \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k u_p u_q E(X_p - EX_p)(X_q - EX_q) = E \left(\sum_{p=1}^k u_p (X_p - EX_p) \right)^2 \geq 0$. (Ha X_p -nek létezik második momentuma, akkor létezik várható értéke is. Miért?)

- 4.) Lássuk, be az állítást a második feladat és a $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ azonosság segítségével.
- 5.) A ξ és η valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Továbbá,

$$P(\xi > x) = \lambda(\Phi(x), 1]) = 1 - \Phi(x).$$

Az, hogy (ξ, η) vektor nem normális eloszlású következik például a $P(\xi + \eta = 0) = 1/2$ azonosságból. Miért?

- 6.) Legyen $v_k = u_k - u_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, ahol $u_0 = 0$. Legenek η_1, \dots, η_n független normális eloszlású valószínűségi változók $E\eta_k = 0$, $E\eta_k^2 = v_k$, $k = 1, \dots, n$. Ekkor $\xi_k = \sum_{j=1}^k \eta_j$, $k = 1, \dots, n$ teljesíti az állítás feltételeit.

Másik megoldás: Elég belátni, hogy a $\mathbf{D} = (d_{j,k}) = (\min(u_j, u_k))$ pozitív definit mátrix, azaz

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \min(u_j, u_k) x_j x_k = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{p=1}^{\min(j,k)} v_p x_j x_k = \sum_{p=1}^n v_p \left(\sum_{k=p}^n x_k \right)^2 \geq 0$$

tetszőleges valós x_1, \dots, x_n számokra.

- 7.) Lássuk be parciális integrálással, hogy

$$\begin{aligned} \int_x^\infty e^{-u^2/2} du &= \frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{1}{u^2} e^{-u^2/2} du \\ &= \frac{1}{x} e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3} e^{-x^2/2} + \int_x^\infty \frac{3}{u^4} e^{-u^2/2} du, \end{aligned}$$

és vezessük le az állítást ebből az azonosságból.

- 8.) A ξ és η vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha az együttes karakterisztikus függvényük szorzatalakban áll elő, azaz $Ee^{i(s,\xi)+i(t,\eta)} = Ee^{i(s,\xi)} Ee^{i(t,\eta)}$ tetszőleges s és t vektorra. Miért? Lássuk be az állítást ezen összefüggés segítségével.
- 9.) Lássuk be, hogy a $\xi - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}\eta$ független az η valószínűségi változótól. Lássuk be ennek az állításnak és a feltételes eloszlás tulajdonságai alapján, hogy

$$\begin{aligned} P(\xi < x | \eta = y) &= P \left(\xi - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}\eta < x - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}}y \mid \eta = y \right) \\ &= P \left(\xi - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}\eta < x - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}y \right) = P \left(\xi - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}\eta + \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}y < x \right). \end{aligned}$$

Ez egy $m_1 - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}m_2 + \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}y$ várható értékű és $\sigma_{1,1} - \frac{\sigma_{1,2}^2}{\sigma_{2,2}}$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó eloszlása. Olvassuk ki ebből az összefüggésből az állítást.

A $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$ vektorváltozók esetét hasonlóan vizsgálhatjuk. Ehhez lássuk be, hogy létezik olyan \mathbf{A} mátrix, melyre η és $\xi - \eta\mathbf{A}$ függetlenek. Lássuk be először, hogy létezik olyan \mathbf{U} unitér mátrix melyre az $\eta\mathbf{U} = (\bar{\eta}_1, \dots, \bar{\eta}_p) = \bar{\eta}$ vektor koordinátái függetlenek. Legyen $\bar{\xi}_r = \xi_r - \sum_{k=1}^p \frac{E\xi_r\bar{\eta}_k}{E\bar{\eta}_k^2}\bar{\eta}_k$, $r = 1, \dots, s$. Ezt mátrixjelöléssel írjuk $\bar{\xi} = \xi - \bar{\eta}\mathbf{B}$ formában. Lássuk be, hogy a $\xi - \bar{\eta}\mathbf{B}$ és $\bar{\eta}$ vektorok függetlenek. Ebből következik, hogy a $\xi - \bar{\eta}\mathbf{B} = \xi - \eta\mathbf{UB}$ az $\eta = \bar{\eta}\mathbf{U}^*$ vektortól független. Ezért a ξ feltételes eloszlása az $\eta = y$ feltétel mellett megegyezik a $\xi - \eta\mathbf{UB} + y\mathbf{UB}$ vektor eloszlásával.

10.) Az állítás nem triviális része: Tegyük fel, hogy minden lineáris kombináció normális eloszlású. Írjuk fel ezt az állítást a karakterisztikus függvények nyelvén. Ennek alapján mutassuk meg, hogy a vektor karakterisztikus függvénye is normális eloszlású.

$$\begin{aligned} E \exp \left\{ i \sum_{p=1}^k t_p \xi_p \right\} &= \exp \left\{ -E \left(\sum_{p=1}^k t_p \xi_p - E \left(\sum_{p=1}^k t_p \xi_p \right) \right)^2 / 2 + iE \left(\sum_{p=1}^k t_p \xi_p \right) \right\} \\ &= \exp \left\{ - \sum_{p=1}^k \sum_{q=1}^k t_p t_q (E\xi_p \xi_q - E\xi_p E\xi_q) / 2 + \sum_{p=1}^k t_p iE\xi_p \right\} \\ &= e^{-t\mathbf{D}t^*/2 + i(m,t)}. \end{aligned}$$

E számolás során kihasználtuk, hogy a valószínűségi változóknak van második momentumuk, mert $Ee^{it\xi_j} = e^{-t^2(E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2)/2 + itE\xi_j}$.

10') Használjuk fel, hogy valószínűségi (vektor)változók akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban egy valószínűségi változóhoz, ha a karakterisztikus függvényeik konvergálnak e változó karakterisztikus függvényéhez.

11.) Legyen ξ és η standard normális eloszlású.

a.) $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$. Ezért ξ^2 és η^2 sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}}$, ha $x \geq 0$ és $g(x) = 0$ ha $x < 0$. Konvolúció segítségével kapjuk, hogy $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f(x) &= g * g(x) \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{u(x-u)\pi}} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2} du = e^{-x/2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)\pi}} dv = \frac{1}{2} e^{-x/2} \end{aligned}$$

Másik megoldás az a.) részre. Mivel a (ξ, η) valószínűségi vektor sűrűségfüggvénye

$g(u, v) = \frac{e^{-(u^2+v^2)/2}}{2\pi}$ ezért a kívánt valószínűséget felírva, majd átírva polárkoordináta rendszerbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\xi^2 + \eta^2 < x) &= \iint_{u^2+v^2 < x} \frac{e^{-(u^2+v^2)/2}}{2\pi} du dv \\ &= \iint_{r^2 < x, 0 \leq \varphi < 2\pi} r \frac{e^{-r^2/2}}{2\pi} dr d\varphi = \int_0^{\sqrt{x}} r e^{-r^2/2} dr \\ &= \left[-e^{-r^2/2} \right]_0^{\sqrt{x}} = 1 - e^{-x/2}. \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\xi}{\eta} < x\right) &= \iint_{\frac{v}{u} < x} \frac{1}{2\pi} e^{-(u^2+v^2)/2} du dv \\ &= 2 \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi/2}^{\arctan x} \int_0^{\infty} r e^{-r^2/2} dr d\varphi = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan x \end{aligned}$$

12.) Alkalmazzuk a centrális határeloszlástételt azon esemény valószínűségének a kiszámításához, hogy az átlagtól való eltérés nagyobb mint 100. A szórásnégyzet $1000 \times 1/4 = 250$ ezért a keresett valószínűség körülbelül annyi mint annak a valószínűsége, hogy egy standard normális valószínűségi változó értéke nagyobb, mint $2\sqrt{10}$. Becsüljük meg ennek az értékét az 6. feladat eredményének a segítségével.

Felmerül a következő kérdés: A centrális határeloszlástétel csak közelítő becslést ad. Nem lehetséges-e, hogy a valószínűség valójában sokkal nagyobb a kiszámítottnál, mert abban a hibatag dominál? Be lehet látni (nem triviális eredmények segítségével), hogy ez nincs így, de ennek bizonyítására nem térünk ki.

13.) Két különböző megoldásvázlatot adok.

a.) Lássuk be az állítást abban a speciális esetben, amikor a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ normális vektor egyes koordinátái függetlenek vagy megegyeznek. Vezessük le az általános esetet ebből a speciális esetből felhasználva, hogy tetszőleges ξ vektor kifejezhető ilyen vektorok lineáris kombinációjaként, és az azonosság mindkét oldala a ξ vektor multilineáris függvénye.

b.) Legyen a $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \xi_4)$ vektor karakterisztikus függvénye $\varphi(t_1, t_2, t_3, t_4)$. Lássuk be, hogy

$$E\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = \left. \frac{\partial^4 \varphi(t_1, t_2, t_3, t_4)}{\partial t_1 \partial t_2 \partial t_3 \partial t_4} \right|_{t_1=t_2=t_3=t_4=0},$$

és

$$E\xi_1\xi_2 = - \left. \frac{\partial^2 \varphi(t_1, t_2, t_3, t_4)}{\partial t_1 \partial t_2} \right|_{t_1=t_2=t_3=t_4=0}.$$

Vezessük le az állítást ezekből az azonosságokból és a normális eloszlás karakterisztikus függvényének az alakjából.