Normális eloszlású valószínűségi változók

Emlékeztető: ξ standard normális eloszlású valószínűségi változó, ha eloszlását a következő képlet határozza meg:

$$P(\xi < x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\, dt = \Phi(x).$$

(Általános jelölési szokás: A standard normális eloszlásfüggvényt $\Phi(x)$, a standard normális sűrűségfüggvényt pedig $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ jelöli.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók, és vezessük be a $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ jelölést. Legyen $\mathbf{A}$ egy $n \times n$-es mátrix, és $\eta = \xi\mathbf{A}$. Ekkor η n-dimenziós normális eloszlású 0 várható értékű valószínűségi változó. Minden n-dimenziós 0 várható értékű normális eloszlású valószínűségi változó ilyen alakú, azaz az η n dimenziós valószínűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású 0 várható értékkel, ha létezik olyan $\mathbf{A}$ $n \times n$-es mátrix, hogy η eloszlása megegyezik az $\xi\mathbf{A}$, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ valószínűségi változó eloszlásával, ahol $\xi_1, \dots, \xi_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Legyen $m = (m_1, \dots, m_n)$ n dimenziós vektor. Ekkor $\eta + m$ n dimenziós normális valószínűségi változó m várható értékkel, ha η n dimenziós normális eloszlású valószínűségi vektor 0 várható értékkel. Minden normális eloszlású valószínűségi változó előállítható ilyen módon.

Feladatok:

1.) Legyen $\eta = \xi\mathbf{A} + m$, ahol $\mathbf{A}$ $n \times n$ mátrix, $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$, ahol $\xi_1, \dots, \xi_n$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók, és m n dimenziós vektor. Lássuk be, hogy η karakterisztikus függvénye

$$\varphi(t) = Ee^{i(t,\eta)} = e^{-t\mathbf{A}^*\mathbf{A}t^*/2 + i(m,t)},$$

ahol $t = (t_1, \dots, t_n)$ n dimenziós vektor, $(\cdot, \cdot)$ skalárszorzatot és * transzponáltat jelöl.

2.) Legyen $\eta = \xi\mathbf{A} + m$ olyan mint az előző feladatban. Tegyük fel ezenkívül azt, hogy az $\mathbf{A}$ mátrix invertálható. Ekkor az η valószínűségi változónak van sűrűségfüggvénye, amelyik a következő alakú:

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\det \mathbf{A}|} \exp\left\{-(x - m)(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}(x - m)^*/2\right\},$$

ahol $x = (x_1, \dots, x_n) \in R^n$ n dimenziós vektor.

3.) Az $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_n)$ valószínűségi változó akkor és csak akkor normális eloszlású, ha a karakterisztikus függvénye $e^{-t\mathbf{D}t^*/2 + i(m,t)}$ alakú, ahol $\mathbf{D}$ pozitív (szemi)definit mátrix. A $\mathbf{D}$ mátrix az η sztochasztikus vektor $\mathbf{D} = (d_{j,k}) = (E\eta_j\eta_k - E\eta_j E\eta_k)$ kovarianciamátrixa, $m = (E\eta_1, \dots, E\eta_n)$ az η vektor várható értéke.

Mutassuk meg, hogy egy normális eloszlású valószínűségi változó eloszlását meghatározza annak kovarianciamátrixa és várható érték vektora. Ebben az állításban a normális eloszlás megkövetelése fontos. Mutassuk meg, hogy tetszőleges normális eloszláshoz megadható olyan nem normális eloszlás, melynek megegyezik a kovarianciamátrixa és várható értéke ezzel a normális valószínűségi változóval.

Mutassuk meg, hogy tetszőleges $(X_1, \dots, X_k)$ (nem feltétlenül normális eloszlású) valószínűségi vektornak, mely mindegyik koordinátájának létezik második momentuma, azaz $EX_p^2 < \infty$, $p = 1, \dots, k$, a $\mathbf{D} = (d_{p,q})$, $d_{p,q} = EX_pX_q - EX_pEX_q$, $1 \le p, q \le k$, kovarianciamátrixa pozitív (szemi)definit. Ezért létezik olyan $(Y_1, \dots, Y_k)$ normális vektor, melynek a kovarianciamátrixa és várható értékvektora megegyezik az $(X_1, \dots, X_k)$ kovarianciamátrixával és várható értékével.

4.) Az előző feladatban szereplő η vektornak akkor van sűrűségfüggvénye, ha a $\mathbf{D}$ mátrix pozitív definit. A sűrűségfüggvény

$$f(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\det \mathbf{D}|^{1/2}} \exp\left\{-(x-m)\mathbf{D}^{-1}(x-m)^*/2\right\} ,$$

alakú.

5.) Definiáljuk a következő $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbf{P})$ valószínűségi mezőt: $\Omega = [0,1]$, $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebra $[0,1]$-en, és $\mathbf{P}$ a Lebesgue mérték. Definiáljuk a következő ξ és η valószínűségi változókat ezen a mezőn: $\xi(x) = \Phi^{-1}(x)$,

$$\eta(x) = \begin{cases} \Phi^{-1}(1-x) & \text{ha } 0 \le x < \frac{1}{2} \\ \Phi^{-1}\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{ha } \frac{1}{2} \le x \le 1 \end{cases} .$$

Lássuk be, hogy ξ és η normális eloszlású valószínűségi változók, de a (ξ, η) vektor nem normális eloszlású valószínűségi vektor.

6.) Legyen $0 \le u_1 \le u_2 \le \cdots \le u_n$ valós számok. Lássuk be, hogy létezik olyan $(\xi_1, \dots, \xi_n)$ normális eloszlású valószínűségi vektor, melyre $E\xi_k = 0$ és $E\xi_j\xi_k = \min(u_j, u_k)$ minden $1 \le u_j, u_k \le n$-re.

7.) Minden $x > 0$-ra

$$\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x^3}\right)\varphi(x) < 1 - \Phi(x) < \frac{1}{x}\varphi(x),$$

ahol $\Phi(x)$ és $\varphi(x)$ a standard normális eloszlás és sűrűségfüggvény.

8.) Legyen $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ normális eloszlású valószínűségi vektor. Ha valamilyen $1 \le p < n$-re a kovariancia függvény teljesíti az $E\xi_j\xi_k - E\xi_jE\xi_k = 0$ feltételt minden $1 \le j \le p < k \le n$ esetén, akkor a $(\xi_1, \dots, \xi_p)$ és $(\xi_{p+1}, \dots, \xi_n)$ véletlen vektorok függetlenek.

9.) Legyen (ξ, η) normális eloszlású vektor $m = (m_1, m_2) = (E\xi, E\eta)$ várható értékkel és

$$\begin{pmatrix} \sigma_{1,1}, & \sigma_{1,2} \\ \sigma_{2,1}, & \sigma_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E\xi^2 - (E\xi)^2, & E\xi\eta - E\xi E\eta \\ E\xi\eta - E\xi E\eta, & E\eta^2 - (E\eta)^2 \end{pmatrix}$$

kovarianciamátrix-szal. Ekkor ξ feltételes eloszlása $\eta = y$ feltétel esetén a normális eloszlás $\sigma_{1,1} - \dfrac{\sigma_{1,2}^2}{\sigma_{2,2}}$ szórásnégyzettel és $m_1 - \dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}m_2 + \dfrac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}y$ várható értékkel.

Hogy lehet látni, hogy a ξ feltételes eloszlásának a szórása nem negatív? Mikor egyenlő 0-val ez a szórás?

Hogy általánosítható a fenti állítás abban az esetben, ha ξ és η vektorváltozók is lehetnek?

10.) Az $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ valószínűségi vektor akkor és csak akkor normális eloszlású, ha tetszőleges $\sum\limits_{p=1}^k a_p\xi_p$ lineáris kombináció normális eloszlású.

10′) A $(\xi_{1,n},\dots,\xi_{k,n})$ valószínűségi vektorok akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban a $(\xi_1,\dots,\xi_k)$ vektorhoz $n\to\infty$ esetén, ha tetszőleges $\sum\limits_{p=1}^k a_p\xi_{p,n}$ lineáris kombináció eloszlásban konvergál a $\sum\limits_{p=1}^k a_p\xi_p$ vektorhoz $n\to\infty$ esetén.

11.) Legyenek ξ és η független, normális, egyforma eloszlású valószínűségi változók 0 várható értékkel. Lássuk be, hogy

a.) $\xi^2+\eta^2$ exponenciális eloszlású valószínűségi változó $\lambda=1/2$ paraméterrel.

b.) A $\dfrac{\xi}{\eta}$ valószínűségi változó Cauchy eloszlású, azaz az eloszlás sűrűségfüggvénye $\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$.

12.) A következő játékot játszuk: Pénzdarabot dobunk fel ezerszer. Fej dobás esetén 1 forintot nyerünk, írás esetén 1 forintot veszítünk. A játék eredménye 400 fej és 600 írás, azaz kétszáz forint veszteség. Mire gyanakszunk, rossz szerencsére vagy szabálytalan pénzdarabra? A válasz természetesen szubjektiv, de érdekes tudni a következőt: Mi a valószínűsége annak, hogy egy szabályos pénzdarab feldobása esetén ilyen eredmény születik?

13.) Legyen $(\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ nulla várható értékű normális valószínűségi vektor. Lássuk be, hogy

$$E\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4=E\xi_1\xi_2E\xi_3\xi_4+E\xi_1\xi_3E\xi_2\xi_4+E\xi_1\xi_4E\xi_2\xi_3\,.$$

Segítség, megoldások, megoldásvázlatok:

1.) Használjuk fel, hogy a ξ standard normális valószínűségi változó karakterisztikus függvénye $\varphi(s) = Ee^{is\xi} = Ee^{-s^2/2}$, és mivel $\xi_1, \dots, \xi_n$ független standard normális valószínűszínűségi változók, ezért tetszőleges $s_1, \dots, s_n$ valós számokra

$$Ee^{i(s_1\xi_1+\cdots+s_n\xi_n)} = \prod_{k=1}^{n} e^{-s_k^2/2} = e^{-(s,s)/2} \ ,$$

ahol $s = (s_1, \dots, s_n)$. Ezért $Ee^{i(t,\eta)} = Ee^{i(t\mathbf{A}^*,\xi)+i(t,m)} = e^{-t\mathbf{A}^*\mathbf{A}t^*/2+i(t,m)}$.

2.) Az alábbi számolás lényege a következő: Annak a valószínűségét, hogy az $\eta \in B$ tetszőleges mérhető $B \subset R^n$ tartományra fejezzük ki, mint annak a valószínűségét, hogy a ξ valószínűségi változó beesik egy alkalmas tartományba, és ezt a valószínűséget fejezzük ki az ismert sűrűségfüggvényű ξ valószínűségi változó integráljaként. Integráltranszformáció segítségével fejezzük ki ezt a mennyiséget, mint egy alkalmas függvény integrálját a B tartományban. Mivel az így kapott függvény nem függ a B tartománytól, ez lesz a keresett sűrűségfüggvény.

$$\begin{aligned}P(\eta \in B) = P(\xi \in (B-m)\mathbf{A}^{-1}) &= \int_{u\in(B-m)\mathbf{A}^{-1}} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} e^{-(u,u)/2}\,du \\ &= \int_{u\in B} \frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\det A|} e^{-(u-m)(\mathbf{A}^*\mathbf{A})^{-1}(u-m)^*/2}\,du.\end{aligned}$$

Az utolsó azonosság bizonyításában használjuk fel, hogy ha $\mathbf{T}$ invertálható leképezése egy $D \subset R^n$ tartománynak egy $\mathbf{T}(D)$ tartományra, $\mathbf{T}(u) = (\mathbf{T}_1(u), \dots, \mathbf{T}_n(u))$, $u \in R^n$, továbbá mind $\mathbf{T}$ mind annak inverze $\mathbf{T}^{(-1)}$ differenciálható, akkor a következő integrálhelyettesítési transzformáció érvényes:

$$\int_{u\in D} f(u)\,du = \int_{u\in\mathbf{T}^{-1}D} f(\mathbf{T}u)\frac{1}{\left|\det\left(\frac{\partial\mathbf{T}_j}{\partial u_k}\right)\right|}\,du \ .$$

Itt a $\left(\dfrac{\partial\mathbf{T}_j}{\partial u_k}\right)$ mátrix a $\mathbf{T}$ transzformáció Jacobianja. (Válasszunk $\mathbf{T}(u) = (u-m)\mathbf{A}^{-1}$-et és $D = (B-m)\mathbf{A}^{-1}$-et). Mi a szemléletes tartalma az integráltranszformációs formulának? Olvassuk ki a segítségével kapott azonosságból a kívánt eredményt.

3.) Az első feladat segítségével lássuk be, hogy egy normális eloszlás karakterisztikus függvénye az adott alakú. Azt, hogy minden ilyen alakú karakterisztikus függvény valóban előáll, lássuk be azt a lineáris algebrai állítást bizonyítva be először, hogy tetszőleges (szimmetrikus) pozitív szemidefinit $\mathbf{D}$ mátrixból lehet négyzetgyököt vonni, azaz a $\mathbf{D} = \mathbf{A}^2$ reprezentáció lehetséges alkalmas (szimmetrikus, pozitív definit) $\mathbf{A}$ mátrix segítségével. Az utolsó állítás bizonyításában használjuk ki, hogy a karakterisztikus függvény meghatározza az eloszlást.

Be kell látni, hogy tetszőleges $u = (u_1, \dots, u_k)$ vektorra $u\mathbf{D}u^* \geq 0$. De $u\mathbf{D}u^* = \sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} u_p u_q E(X_p - EX_p)(X_q - EX_q) = E\left(\sum_{p=1}^{q} u_p(X_p - EX_p)\right)^2 \geq 0$. (Ha X_p-nek létezik második momentuma, akkor létezik várható értéke is. Miért?)

4.) Lássuk, be az állítást a második feladat és a $\det \mathbf{AB} = \det \mathbf{A} \det \mathbf{B}$ azonosság segítségével.

5.) A ξ és η valószínűségi változók azonos eloszlásúak. Továbbá,

$$P(\xi > x) = \lambda(\Phi(x), 1]) = 1 - \Phi(x) \ .$$

Az, hogy (ξ, η) vektor nem normális eloszlású következik például a $P(\xi + \eta = 0) = 1/2$ azonosságból. Miért?

6.) Legyen $v_k = u_k - u_{k-1}$, $k = 1, \dots, n$, ahol $u_0 = 0$. Legenek $\eta_1, \dots, \eta_n$ független normális eloszlású valószínűségi változók $E\eta_k = 0$, $E\eta_k^2 = v_k$, $k = 1, \dots, n$. Ekkor $\xi_k = \sum_{j=1}^{k} \eta_j$, $k = 1, \dots, n$ teljesíti az állítás feltételeit.

Másik megoldás: Elég belátni, hogy a $\mathbf{D} = (d_{j,k}) = (\min(u_j, u_k)$ pozitív definit mátrix, azaz

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \min(u_j, u_k) x_j x_k = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\sum_{p=1}^{\min(j,k)} v_p x_j x_k = \sum_{p=1}^{n} v_p \left(\sum_{k=p}^{n} x_k\right)^2 \geq 0$$

tetszőleges valós $x_1, \dots, x_n$ számokra.

7.) Lássuk be parciális integrálással, hogy

$$\begin{aligned}\int_x^\infty e^{-u^2/2}\,du &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \int_x^\infty \frac{1}{u^2}e^{-u^2/2}\,du \\ &= \frac{1}{x}e^{-x^2/2} - \frac{1}{x^3}e^{-x^2/2} + \int_x^\infty \frac{3}{u^4}e^{-u^2/2}\,du\ ,\end{aligned}$$

és vezessük le az állítást ebből az azonosságból.

8.) A ξ és η vektorok akkor és csak akkor függetlenek, ha az együttes karakterisztikus függvényük szorzatalakban áll elő, azaz $Ee^{i(s,\xi)+i(t,\eta)} = Ee^{i(s,\xi)}Ee^{i(t,\eta)}$ tetszőleges s és t vektorra. Miért? Lássuk be az állítást ezen összefüggés segítségével.

9.) Lássuk be, hogy a $\xi - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}\eta$ független az η valószínűségi változótól. Lássuk be ennek az állításnak és a feltételes eloszlás tulajdonságai alapján, hogy

$$\begin{aligned}P(\xi < x | \eta = y) &= P\left(\xi - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}\eta < x - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{1,1}}y \,\middle|\, \eta = y\right) \\ &= P\left(\xi - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}\eta < x - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}y\right) = P\left(\xi - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}\eta + \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}}y < x\right)\ .\end{aligned}$$

Ez egy $m_1 - \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}} m_2 + \frac{\sigma_{1,2}}{\sigma_{2,2}} y$ várható értékű és $\sigma_{1,1} - \frac{\sigma_{1,2}^2}{\sigma_{2,2}}$ szórásnégyzetű normális eloszlású valószínűségi változó eloszlása. Olvassuk ki ebből az összefüggésből az állítást.

A $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_s)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$ vektorváltozók esetét hasonlóan vizsgálhatjuk. Ehhez lássuk be, hogy létezik olyan $\mathbf{A}$ mátrix, melyre η és $\xi - \eta\mathbf{A}$ függetlenek. Lássuk be először, hogy létezik olyan $\mathbf{U}$ unitér mátrix melyre az $\eta\mathbf{U} = (\bar\eta_1, \dots, \bar\eta_p) = \bar\eta$ vektor koordinátái függetlenek. Legyen $\bar\xi_r = \xi_r - \sum\limits_{k=1}^{p} \frac{E\xi_r\bar\eta_k}{E\bar\eta_k^2}\bar\eta_k$, $r = 1, \dots, s$. Ezt mátrixjelöléssel írjuk $\bar\xi = \xi - \bar\eta\mathbf{B}$ formában. Lássuk be, hogy a $\xi - \bar\eta\mathbf{B}$ és $\bar\eta$ vektorok függetlenek. Ebből következik, hogy a $\xi - \bar\eta\mathbf{B} = \xi - \eta\mathbf{UB}$ az $\eta = \bar\eta\mathbf{U}^*$ vektortól független. Ezért a ξ feltételes eloszlása az $\eta = y$ feltétel mellett megegyezik a $\xi - \eta\mathbf{UB} + y\mathbf{UB}$ vektor eloszlásával.

10.) Az állítás nem triviális része: Tegyük fel, hogy minden lineáris kombináció normális eloszlású. Írjuk fel ezt az állítást a karakterisztikus függvények nyelvén. Ennek alapán mutassuk meg, hogy a vektor karakterisztikus függvénye is normális eloszlású.

$$\begin{aligned} E\exp\left\{i\sum_{p=1}^{k} t_p\xi_p\right\} &= \exp\left\{-E\left(\sum_{p=1}^{k} t_p\xi_p - E\left(\sum_{p=1}^{k} t_p\xi_p\right)\right)^2\Big/ 2 + iE\left(\sum_{p=1}^{k} t_k\xi_p\right)\right\} \\ &= \exp\left\{-\sum_{p=1}^{k}\sum_{q=1}^{k} t_k t_l (E\xi_p\xi_q - E\xi_p E\xi_q)/2 + \sum_{p=1}^{k} t_p iE\xi_p\right\} \\ &= e^{-t\mathbf{D}t^*/2 + i(m,t)}\,. \end{aligned}$$

E számolás során kihasználtuk, hogy a valószínűségi változóknak van második momentumuk, mert $Ee^{it\xi_j} = e^{-t^2(E\xi_j^2 - (E\xi_j)^2)/2 + itE\xi_j}$.

10′) Használjuk fel, hogy valószínűségi (vektor)változók akkor és csak akkor konvergálnak eloszlásban egy valószínűségi változóhoz, ha a karakterisztikus függvényeik konvergálnak e változó karakterisztikus függvényéhez.

11.) Legyen ξ és η standard normális eloszlású.

a.) $P(\xi^2 < x) = \Phi(\sqrt{x}) - \Phi(-\sqrt{x})$. Ezért ξ^2 és η^2 sűrűségfüggvénye $g(x) = \frac{\varphi(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = \frac{e^{-x/2}}{\sqrt{2\pi x}}$, ha $x \ge 0$ és $g(x) = 0$ ha $x < 0$. Konvolúció segítségével kapjuk, hogy $\xi^2 + \eta^2$ sűrűségfüggvénye

$$\begin{aligned} f(x) &= g * g(x) \\ &= \int_0^x \frac{1}{\sqrt{u(x-u)}\pi} e^{-u/2} e^{-(x-u)/2}\, du = e^{-x/2} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{v(1-v)}\pi}\, dv = \frac{1}{2} e^{-x/2} \end{aligned}$$

Másik megoldás az a.) részre. Mivel a (ξ, η) valószínűségi vektor sűrűségfüggvénye

$g(u,v) = \dfrac{e^{-(u^2+v^2)/2}}{2\pi}$ ezért a kívánt valószínűséget felírva, majd átírva polárkoordináta rendszerbe kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} P(\xi^2+\eta^2<x) &= \iint_{u^2+v^2<x} \frac{e^{-(u^2+v^2)/2}}{2\pi}\,du\,dv \\ &= \iint_{r^2<x,\,0\le\varphi<2\pi} r\frac{e^{-r^2/2}}{2\pi}\,dr\,d\varphi = \int_0^{\sqrt{x}} re^{-r^2/2}\,dr \\ &= \left[-e^{-r^2/2}\right]_0^{\sqrt{x}} = 1-e^{-x/2}\,. \end{aligned}$$

b.)

$$\begin{aligned} P\left(\frac{\xi}{\eta}<x\right) &= \iint_{\frac{v}{u}<x} \frac{1}{2\pi}e^{-(u^2+v^2)/2}\,du\,dv \\ &= 2\frac{1}{2\pi}\int_{\frac{-\pi}{2}<\varphi<\arctan x}\int_0^\infty re^{-r^2/2}\,dr\,d\varphi = \frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan x \end{aligned}$$

12.) Alkalmazzuk a centrális határeloszlástételt azon esemény valószínűségének a kiszámításához, hogy az átlagtól való eltérés nagyobb mint 100. A szórásnégyzet $1000\times 1/4 = 250$ ezért a keresett valószínűség körülbelül annyi mint annak a valószínűsége, hogy egy standard normális valószínűségi változó értéke nagyobb, mint $2\sqrt{10}$. Becsüljük meg ennek az értékét az 6. feladat eredményének a segítségével.

Felmerül a következő kérdés: A centrális határeloszlástétel csak közelítő becslést ad. Nem lehetséges-e, hogy a valószínűség valójában sokkal nagyobb a kiszámítottnál, mert abban a hibatag dominál? Be lehet látni (nem triviális eredmények segítségével), hogy ez nincs így, de ennek bizonyítására nem térünk ki.

13.) Két különböző megoldásvázlatot adok.

a.) Lássuk be az állítást abban a speciális esetben, amikor a $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ normális vektor egyes koordinátái függetlenek vagy megegyeznek. Vezessük le az általános esetet ebből a speciális esetből felhasználva, hogy tetszőleges ξ vektor kifejezhető ilyen vektorok lineáris kombinációjaként, és az azonosság mindkét oldala a ξ vektor multilineáris függvénye.

b.) Legyen a $\xi = (\xi_1,\xi_2,\xi_3,\xi_4)$ vektor karakterisztikus függvénye $\varphi(t_1,t_2,t_3,t_4)$. Lássuk be, hogy

$$E\xi_1\xi_2\xi_3\xi_4 = \left.\frac{\partial^4\varphi(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_1\partial t_2\partial t_3\partial t_4}\right|_{t_1=t_2=t_3=t_4=0}\,,$$

és

$$E\xi_1\xi_2 = -\left.\frac{\partial^2\varphi(t_1,t_2,t_3,t_4)}{\partial t_1\partial t_2}\right|_{t_1=t_2=t_3=t_4=0}\,.$$

Vezessük le az állítást ezekből az azonosságokból és a normális eloszlás karakterisztikus függvényének az alakjából.