Talagrand elmélete arról, hogyan becsüljük valószínűségi változok maximumának a várható értékét, és az elmélet alkalmazása az Ajtai–Komlós–Tusnády tétel bizonyítására.

A kiinduló probléma:

Legyenek ξ_t, $t \in T$, (együttesen) normális eloszlású valószínűségi változók, amelyekre $E\xi_t = 0$, és $E(\xi_s - \xi_t)^2 = d(s,t)^2$, $s, t \in T$.

Feladat:

$$E \sup_{t \in T} \xi_t \le \text{jó becslés a } d(\cdot,\cdot) \text{ mennyiség segítségével.}$$

A feladat vizsgálatában a normális eloszlású valószínűségi változók következő tulajdonságát használtuk fel:

$$P(|\xi_t - \xi_s| > u) \le 2e^{-u^2/2d^2(s,t)} \quad \text{minden } s,t \in T \text{ indexre és } u > 0 \text{ számra.} \tag{1}$$

Általánosabb probléma: Legyenek ξ_t, $t \in T$, általános valószínűségi változók, amelyekre

$$P(|\xi_t - \xi_s| > u) \le h(u, d_1(s,t), d_2(s,t)), \quad \text{minden } s, t \in T,$$

alkalmas $d_1(\cdot,\cdot)$, és $d_2(\cdot,\cdot)$ metrikákkal a T téren és valamely $h(\cdot,\cdot,\cdot)$ függvénnyel.

Feladat:

$$E \sup_{t \in T} \xi_t \le \text{jó becslés a } d_1(\cdot,\cdot) \text{ és } d_2(\cdot,\cdot) \text{ mennyiségek segítségével.}$$

Fontos speciális eset: Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független egyforma eloszlású valószínűségi változók μ eloszlással, és legyen $\mathcal{F}$ a (korlátos) függvények alkalmas osztálya, amelynek $f \in \mathcal{F}$ elemeire $Ef(\xi_1) = 0$. Vezessük be a $S_n(f) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum\limits_{j=1}^{n} f(\xi_j)$, $f \in \mathcal{F}$, összegeket.

Feladat:

$$E \sup_{f \in \mathcal{F}} S_n(f) \le \text{jó becslés.}$$

E feladat vizsgálatában alkalmazható a Bernstein egyenlőtlenség, amely szerint:

$$P(|S_n(f) - S_n(g)| > u) = P\left(\left| \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^{n} [f(\xi_j) - g(\xi_j)] \right| > u \right) \le h_n(u, d_1(f,g), d_2(f,g)),$$

később megadott $h_n(\cdot)$ függvénnyel, ahol $d_1^2(f,g) = E(f(\xi_1) - g(\xi_1))^2 = \int [f(x) - g(x)]^2 \mu(\,dx)$, és $d_2(f,g) = \sup\limits_x |f(x) - g(x)|$.

Ilyen tipusú becslések egy alkalmazása:

Ajtai–Komlós–Tusnády tételben vizsgált probléma.

Legyen adva N független, egyenletes eloszlású $X_1,\dots,X_N$ valószínűségi változó a $D=[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzeten, valamint N egyenletesen elhelyezett $Y_1,\dots,Y_N$ pont ugyanezen a D egységnégyzeten. (Az Y_l pontok egyenletes elhelyezkedése a D egységnégyzeten azt jelenti, hogy a D egységnégyzet felbontható N darab $1/N$ területű közös belső pontot nem tartalmazó, nem elfajuló téglalap uniójára úgy, hogy mindegyikük pontosan egy Y_l pontot tartalmaz. Egy téglalap nem elfajuló, ha befogóinak aránya $1/10$ és 10 között van.) Általánosabban egy $Y_1,\dots,Y_N$ pontelhelyezést az egységnégyzeten egyenletesnek nevezünk, ha mindegyik pontnak $\frac{1}{N}$ súlyt adva, létezik e tömegeloszlásnak olyan szállítása, amelyre az átszállított tömeg egyenletes eloszlású az egységnégyzeten, és a teljes tömegszállítás hosszának a várható értéke kisebb, mint $C\sqrt{N}$ alkalmas fix $C>0$ univerzális számmal. Valójában az egyenletes elhelyezésnek ezt a tulajdonságát használjuk fel.

A (véletlen) X_l, $1\le l\le N$, pontokat úgy akarjuk átindexelni az $1,\dots,N$ pontok egy $(\pi(1),\dots,\pi(N))$ permutációja segítségével, hogy a $\sum\limits_{l=1}^{N} d(X_{\pi(l)},Y_l)$ távolságösszeg, ahol $d(X_{\pi(l)},Y_l)=|X_{\pi(l)}-Y_l|$ az $X_{\pi(l)}$ és Y_l pontok euklideszi távolsága, minél kisebb legyen. Milyen kicsivé tehető az $E\left(\sum\limits_{l=1}^{N} d(X_{\pi(l)},Y_l)\right)$ várható érték alkalmas (véletlen) permutáció segítségével?

Ajtai–Komlós–Tusnády tétel. *Alkalmas (véletlen, pontosabban az $X_1,\dots,X_N$ pontok helyétől függő $\pi(\cdot)$) permutációval*

$$E\left(\sum_{l=1}^{N} d(X_{\pi(l)},Y_l)\right)\le L\sqrt{N\log N}$$

egy univerzális L konstanssal.

Talagrand ezt az eredményt az általa kidolgozott elmélet segítségével bizonyítja. Először megmutatja egy kombinatorikai mini-max tételnek a segítségével, hogy a tétel állítása következik az

$$E\sup_{f\in\mathcal{C}}\left|\sum_{l=1}^{N}\left(f(X_l)-\int f(u)\lambda(\,du)\right)\right|\le L\sqrt{N\log N} \tag{2}$$

egyenlőtlenségből, ahol $\mathcal{C}$ a D egységnégyzeten definiált Lipschitz 1 függvények halmaza. (Egy $f(x)$ függvény Lipschitz 1 függvény egy (T,d) metrikus téren, ha $|f(x)-f(y)|\le d(x,y)$ minden $x,y\in T$ pontpárra.) Azután ezt az egyenlőtlenséget bizonyítja.

Az átfogalmazás bizonyításához szükséges kombinatorikai mini-max tétel.

Egy kombinatorikai mini-max tétel. *Legyen $C=(c_{i,j})$, $1\le i,j\le N$, egy $N\times N$-es mátrix, és vezessük be az $M(C)=\inf\sum\limits_{i=1}^{N} c_{i,\pi(i)}$ összeget, ahol az infimumot az $\{1,\dots,N\}$ halmaz összes lehetséges $(\pi(1),\dots,\pi(N))$ permutációjára vesszük. Ekkor*

$$M(C)=\sup\sum_{1\le i\le N}(w_i+w_i'),$$

ahol a szuprémumot az összes olyan $(w_1,\dots,w_N)$ és $(w'_1\dots,w'_N)$ sorozatpárra vesszük, amelyre

$$w_i+w'_j\le c_{i,j}\quad \textit{minden } 1\le i,j\le N \textit{indexre.} \tag{3}$$

A Talagrand-féle redukció indoklása:

Legyen $f(x)=f(x|w_i,w'_j,\ 1\le i,j\le N)=\min\limits_{1\le j\le N}[d(x,Y_j)-w'_j]$, minden olyan w_i, w'_j, $1\le i,j\le N$, sorozatpárra, amely teljesíti a (3) relációt a $c(i,j)=d(X_i,Y_j)$, $1\le i,j\le N$, (véletlen) mátrix-szal. Ekkor $f(x)$ Lipschitz 1 függvény, és

$$\begin{aligned}\inf_\pi\sum_{1\le l\le N} d(X_l,Y_{\pi(l)}) &\le \sup_{\substack{w_i,w'_i \text{teljesíti (3)-t}\\ \text{a } c(ij)=d(X_i,Y_j) \text{ mátrix-szal}}} \sum_{1\le i\le N}(w_i+w'_i)\\
&\le \sup_{f\in\mathcal{C}}\sum_{1\le i\le N}(f(X_i)-f(Y_i))\\
&\le \sup_{f\in\mathcal{C}}\left|\sum_{j=1}^N(f(X_j)-\int f(u)\lambda(\,du))\right|+\sup_{f\in\mathcal{C}}\left|\sum_{j=1}^N(f(Y_j)-\int f(u)\lambda(\,du))\right|.\end{aligned}$$

(Valójában elég csak az $f(x|w_i,w'_j,\ 1\le i,j\le N)$ alakú függvények szuprémumát venni az $f\in\mathcal{C}$ függvényosztály helyett. A fenti egyenlőtlenség második sora a $w_i\le f(X_i|w_i,w'_j)$ és $w'_j\le -f(Y_j|w_i,w'_j)$ relációkból következik.) Várható értéket véve és az Y_j sorozat egyenletes elhelyezkedését kihasználva kapjuk a követező egyenlőtlenséget, amely biztosítja a kívánt redukciót.

$$E\inf_\pi\sum_{1\le l\le N} d(X_l,Y_{\pi(l)})\le E\sup_{f\in\mathcal{C}}\left|\sum_{j=1}^N(f(X_j)-\int f(u)\lambda(\,du))\right|+O(\sqrt{N}).$$

Megjegyzés: A redukciót biztosító elv bizonyítása megjelenik már Kantorovics és Wasserstein munkáiban.

A Gauss változókról szóló maximum probléma vizsgálata.

Természetes skálázás:

$$N_0=1,\ N_n=2^{2^n},\quad n=1,2,\dots$$

Legyen
$d(s,t)=\left[E(\xi_s-\xi_t)^2\right]^{1/2}$, $s,t\in T$, a (természetes) metrika a T téren,
$d(t,A)=\inf\limits_{s\in A} d(s,t)$, $t\in T$, $A\subset T$, a t pont távolsága az A halmaztól,
$\Delta(A)=\sup\limits_{s,t\in A} d(s,t)$ az A halmaz átmérője.

Tétel Gauss mezők szuprémumának a várható értékéről. *Legyen T véges vagy megszámlálható halmaz, T_n, $n=0,1,\dots$, a T halmaz olyan részhalmazainak sorozata,* *amelyekre* $|T_0| = 1$, *és* $|T_n| \le N_n = 2^{2^n}$, $n = 1, 2, \dots$, *ahol* $|A|$ *jelöli egy* A *halmaz elemeinek számát. Ekkor*

$$E \sup_{t \in T} \xi_t \le L \sup_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} d(t, T_n)$$

alkalmas univerzális L *konstanssal.*

Ez a becslés Dudley egy korábbi eredményének a javítása, és éles becslés. Megfogalmazom két következményét. Az első következmény valójában a tétel ekvivalens átfogalmazása, a második Dudley egy korábbi eredményével ekvivalens. Ezek megfogalmazása érdekében bevezetem a következő definiciót.

Megengedett particiósorozat definiciója. $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots$ *a* T *halmaz megengedett particiósorozata, ha* $\mathcal{A}_{n+1}$ *az* $\mathcal{A}_n$ *partició finomítása minden* n*-re, és* $\mathcal{A}_n$ *elemszáma nem nagyobb, mint* N_n*.*

Adva egy $\mathcal{A}_n$ (megengedett) particiósorozat és $t \in T$ pont, jelölje $A_n(t)$ az $\mathcal{A}_n$ partició t pontot tartalmazó elemét. A következő mennyiségek bevezetése hasznosnak bizonyult.

$$\gamma_2(T, d) = \inf \sup_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \Delta(A_n(t)),$$

és általánosabban minden $\alpha > 0$ számra

$$\gamma_\alpha(T, d) = \inf \sup_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/\alpha} \Delta(A_n(t)),$$

ahol az infimum az összes $\mathcal{A}_n$, $n = 0, 1, 2, \dots$, megengedett particiósorozatra vétetik.

Gauss mezők szuprémumának a várható értékéről szóló tétel egy változata. *Legyen* T *véges vagy megszámlálható halmaz. Ekkor*

$$E \sup_{t \in T} \xi_t \le L \gamma_2(T, d)$$

alkalmas univerzális L *konstanssal.*

Igaz e tétel alábbi megfordítása.

Alsó becslés Gauss mezők szuprémumának a várható értékéről. *Legyen* T *véges vagy megszámlálható halmaz. Ekkor*

$$E \sup_{t \in T} \xi_t \ge \frac{1}{L} \gamma_2(T, d)$$

alkalmas univerzális $L > 0$ *konstanssal.*

A Dudley eredmény megfogalmazása érdekében vezessük be a következő mennyiséget.

$$e_n(T) = e_n(T, d) = \inf \sup_{t \in T} d(t, T_n) \tag{4}$$

ahol az infimum T összes legfeljebb N_n elemű ($N_n = 2^{2^n}$, ha $n \ge 1$, $N_0 = 1$) T_n részhalmazára vétetik. (Azaz azt a lehető legkisebb $\varepsilon > 0$ számot keressük, amelyre a T halmaz lefedhető legfeljebb N_n darab ε sugarú gömbbel. A T_n halmaz a fedést biztosító gömbök középpontjainak a halmaza.)

Dudley becslése Gauss mezők szuprémumának a várható értékéről.

$$E \sup_{t \in T} \xi_t \le L \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} e_n(T).$$

A felső becslések bizonyítása valójában csak azt használja fel, hogy normális eloszlású valószínűségi változók teljesítik az (1) egyenlőtlenséget. Hasonlóan bizonyítható ennek egy változata, amely a Bernstein egyenlőtlenséggel együtt becslést ad független, egyforma eloszlású valószínűségi változók összegeiből álló véletlen mennyiségek szuprémumának a várható értékére.

Tétel alkalmas valószínűségi változók szuprémumának a várható érték becsléséről. *Legyen adva egy T, megszámlálható sok elemből álló téren két $\bar d_2(\cdot,\cdot)$ és $\bar d_1(\cdot,\cdot)$ távolság, valamint X_t, $t \in T$, valószínűségi változók családja, amelyre $EX_t = 0$ minden $t \in T$ pontra, létezik olyan $t_0 \in T$ pont, amelyre $X_{t_0} \equiv 0$, és*

$$P(|X_t - X_s| > u) \le 2 \exp\left\{ -\min\left(\frac{u^2}{\bar d_2(s,t)^2}, \frac{u}{\bar d_1(s,t)} \right) \right\} \tag{5}$$

minden $s, t \in T$ elempárra és $u > 0$ számra. Ekkor

$$E \sup_{t \in T} E|X_t| \le L \left(\gamma_1(T, \bar d_1) + \gamma_2(T, \bar d_2) \right).$$

Bernstein egyenlőtlenség. *Legyenek $Y_1, Y_2, \dots$ független valószínűségi változók, amelyekre $EY_j = 0$, $|Y_j| \le U$ valamilyen U számmal minden j indexre. Ekkor minden $v > 0$ számra*

$$P\left(\left| \sum_{j \ge 1} Y_j \right| > v \right) \le 2 \exp\left\{ -\min\left(\frac{v^2}{4 \sum\limits_{j \ge 1} EY_j^2}, \frac{v}{2U} \right) \right\}.$$

A Bernstein egyenlőtlenség speciálisan lehetővé teszi az előtte kimondott tétel alkalmazását a következő esetben. Legyen adva N független, egyforma eloszlású $Y_1, \dots, Y_N$ valószínűségi változó μ eloszlással, és korlátos függvények egy (megszámlálható) $\mathcal{F}$ osztálya, $0 \in \mathcal{F}$, amelynek elemeire $\int f\, d\mu = 0$ minden $f \in F$-re. Vezessük be az $S_N(f) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum\limits_{j=1}^{N} f(Y_j)$, $f \in \mathcal{F}$, mennyiségeket. Ha $\mathcal{F}$ játssza a T halmaz szerepét, akkor az (5) formula teljesül $\bar d_2 = 2d_2$ és $\bar d_1 = \frac{2d_\infty}{\sqrt{N}}$ választással, ahol d_2 és d_∞ az L_2

illetve az L_∞ norma által definiált távolság az $(X, \mathcal{A}, \mu)$ mértéktérben. Ezért érvényes a fenti két eredménynek az alábbi következménye.

Következmény. *Tekintsük az előbb definiált $Y_1, \dots, Y_N$ valószínűségi változókat, $\mathcal{F}$ függvényosztályt, valamint d_2 és d_∞ metrikákat. Legyen $S_N(\mathcal{F}) = \sup\limits_{f \in \mathcal{F}} S_N(f)$. Ekkor*

$$ES_N(\mathcal{F}) \le L\left(\gamma_2(\mathcal{F}, d_2) + \frac{1}{\sqrt{N}}\gamma_1(\mathcal{F}, d_\infty)\right) \tag{6}$$

alkalmas univerzális $L > 0$ konstanssal.

A Gauss mezők szuprémumának várható értékéről szóló tétel bizonyítása. Feltehetjük, hogy a T halmaz véges, a tekintett $T_0, T_1, \dots, T_n$ sorozatra $T_n = T$ alkalmas n index-szel, és $T_0 = \{t_0\}$ olyan, hogy $\xi_{t_0} \equiv 0$. (Ez utóbbi feltevést azért tehetjük, mert $E\sup\limits_{t\in T}\xi_t = E\sup\limits_{t\in T}\xi_t - E\xi_{t_0} = E\sup\limits_{t\in T}(\xi_t - \xi_{t_0})$, és $d^2(s,t) = E(\xi_s - \xi_t)^2 = E[(\xi_s - \xi_{t_0}) - (\xi_t - \xi_{t_0})]^2$.) Legyen $X = \sup\limits_{t\in T}\xi_t$. Ekkor $P(X \ge 0) = 1$, és $EX = -\int_0^\infty v dP(X \ge v) = \int_0^\infty P(X \ge v)\, dv$. Ezért a $P(X \ge v)$ valószínűségek jó becslésére van szükségünk.

Minden $t \in T$ pontra és $0 \le k \le n$ számra definiáljuk azt a $t_{\pi(k)} \in T_k$ pontot, amelyre $d(t, t_{\pi(k)}) = \min\limits_{s \in T_k} d(t,s)$. Ekkor $\xi_t = \sum\limits_{k=1}^n (\xi_{t_{\pi(k)}} - \xi_{t_{\pi(k-1)}})$. Egy rögzített $u > 0$ számra legyen

$$\Omega_k(u) = \{\omega\colon\, |\xi_{t_{\pi(k)}}(\omega) - \xi_{t_{\pi(k-1)}}(\omega)| < u2^{k/2} d(t_{\pi(k)}, t_{\pi(k-1)}) \text{ minden } t \in T \text{ pontra.}\},$$

$1 \le k \le n$, és $\Omega(u) = \bigcap\limits_{k=1}^n \Omega_k(u)$. Ekkor $P(\Omega \setminus \Omega_k(u)) \le N_k N_{k-1} \cdot 2e^{-2^k u^2/2}$, és minden $u \ge 2$ számra $P(\Omega \setminus \Omega(u)) \le \sum\limits_{k=1}^n 2^{3/2 \cdot 2^k} \cdot 2e^{-u^2/2} e^{-2(2^k-1)} \le 4e^{-u^2/2}$. Másrészt minden $\omega \in \Omega(u)$ elemi eseményre $\sup\limits_{t\in T}\xi_t(\omega) \le uS$, ahol

$$S = \sup_{t\in T} \sum_{k \ge 1} 2^{k/2} d(t_{\pi(k)}, t_{\pi(k-1)}).$$

Innen $P\left(\frac{X}{S} \ge u\right) \le 4e^{-u^2/2}$, ha $u \ge 2$. Másrészt $P\left(\frac{X}{S} \ge u\right) \le 1$, ha $u \le 2$, ezért $E\frac{X}{S} \le L$ alkalmas $L > 0$ konstanssal. Viszont $d(t_{\pi(k)}, t_{\pi(k-1)}) \le d(t_{\pi(k)}), t) + d(t_{\pi(k-1)}, t) = d(t, T_k) + d(t, T_{k-1})$, és ezt az azonosságot $2^{k/2}$-val megszorozva, és k-ra összegezve, majd t-ben maximumot véve kapjuk, hogy $S \le (1+\sqrt{2}) \sup\limits_{t\in T} \sum\limits_{k\ge 0} 2^{k/2} d(t, T_k)$, és

$$E\sup_{t\in T}\xi_t \le LS \le (1+\sqrt{2}) L \sup_{t \in T} \sum_{n \ge 0} 2^{n/2} d(t, T_n).$$

Gauss mezők szuprémumának a várható értékéről szóló tétel egy változatának a bizonyítása. Tekintsünk egy megengedett $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots$ particiósorozatot. Válasszunk ki az $\mathcal{A}_n$ partició minden $A \in \mathcal{A}_n$ eleméből egy $s \in A$ pontot, és ezek egyesítése legyen a T_n halmaz. Ekkor $d(t,T_n) \le \Delta(A_n(t))$, mert az $s \in T_n \cap A_n(t)$ pontra $d(s,t) \le \Delta((A_n(t))$. Ezért

$$E \sup_{t\in T} \xi_t \le L \sup_{t\in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} d(t,T_n) \le L \sup_{t\in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \Delta(A_n(t)),$$

és infimumot véve az összes lehetséges megengedett particióra megkapjuk a kívánt állítást.

Dudley becslésének bizonyítása.

$$E \sup_{t\in T} \xi_t \le L \sup_{t\in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} d(t,T_n) \le L \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \sup_{t\in T} d(t,T_n)$$

minden olyan $T_n \subset T$, $n = 1,2,\dots$, sorozatra, amelyre $|T_n| \le N_n$. Válasszuk a T_n halmazt úgy, hogy $|T_n| \le N_n$, és $\sup\limits_{t\in T_n} d(t_n,T) \le 2e_n(T)$. Ezzel a választással megkapjuk a kívánt becslést.

Példa, amikor Dudley eredménye gyengébb becslést ad, mint Talagrand-é. *Legyen $b_1, b_2, \dots$ független standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata, $\xi_n = \frac{b_n}{\sqrt{\log n}}$, $2 \le n \le N_p + 1$. Becsüljuk meg az $E \max\limits_{2\le n\le N_p+1} \xi_n$ kifejezést Dudley és Talagrand eredményének a segítségével.*

Ekkor $e_m(T) \ge \frac{1}{2} 2^{-m}$, ha $1 \le m \le p$, mert minden T_m, $|T_m| \le N_m$, $1 \le m \le p$, halmazhoz létezik olyan $t \notin T_m$ pont, amelyre $t \le 2^{2^m} + 2$, és erre a t pontra $d(t,T_m) \ge \frac{1}{2} 2^{-m/2}$. Ezért $\sum 2^{m/2} e_m(T) \ge \frac{1}{2} p$, és Dudley eredménye nem ad jobb becslést, mint Lp. Talagrand eredményének a segítségével az $E \max\limits_{2\le n\le N_p+1} \xi_n \le L$ becslést kapjuk. Azaz olyan becslést kapunk, amely nem függ a p paramétertől. Valóban, legyen $T_m = \{2,\dots,N_m\} \cup \{N_p+1\}$, $1 \le m \le p$. Ezzel a választással, $|T_m| = N_m$, $1 \le m \le p$, és ha egy t pontra $N_{m-1} < t \le N_m$, akkor $d(t,T_l) = 0$ az $l \ge m$ esetben, és $d(t,T_l) \le d(t, N_p+1) \le 2 \cdot 2^{-m/2}$, ha $l < m$. Ezért $\sum\limits_{l=0}^{\infty} 2^{l/2} d(t,T_l) \le 2 \sum\limits_{l=0}^{m} 2^{(l-m)/2} \le L_1$.

Az alkalmas valószínűségi változók szuprémumának a várható érték becsléséről szóló tétel bizonyítása hasonló a Gauss mezők szuprémumának várható értékéről szóló tétel bizonyításához. Ezért ennek az eredménynek a bizonyítását nem tárgyalom.

Gauss valószínűségi változó maximumának várható értékére adott alsó becslés bizonyítása.

A Gauss változók maximumának várható értékére adott alsó becslés az alábbi két tételen múlik. Ezek megfogalmazásában a következő jelölést használjuk.

Jelölés: Adva egy (T,d) metrikus tér, egy $a \in T$ pont és egy $r > 0$ szám $B_d(a,r)$ jelöli az a középpontú r sugarú kört a T téren a d metrika szerint.

Tétel A. *Legyen adva normális eloszlású valószínűségi változók egy ξ_t, $t \in T$, rendszere egy (T,d) metrikus téren, (T véges vagy megszámlálható halmaz), amelyre $E\xi_t = 0$,*

$t\in T$, és $E(\xi_t-\xi_s)^2=d^2(s,t)$, $s,t\in T$. Ha ebben a rendszerben megadunk m darab $\xi_{t_1}, \dots, \xi_{t_m}$ valószínűségi változót úgy, hogy $d(t_j,t_l)\ge a$ minden $1\le j<l\le m$ indexre valamely $a>0$ számmal, valamint $H_l\subset B_d(t_l,\sigma)$, $1\le l\le m$, halmazokat valamely $\sigma>0$ számmal, és $H=\bigcup\limits_{j=1}^m H_j$, akkor teljesül az

$$E\sup_{t\in H}\xi_t\ge\frac{a}{L_1}\sqrt{\log m}-L_2\sigma\sqrt{\log m}+\min_{1\le l\le m}E\sup_{t\in H_l}\xi_t$$

egyenlőtlenség valamely univerzális $L_1>0$ és $L_2>0$ számokkal.

Speciálisan, ha $\sigma<\frac{a}{2L_1L_2}$, akkor

$$E\sup_{t\in H}\xi_t\ge\frac{a}{2L_1}\sqrt{\log m}+\min_{1\le l\le m}E\sup_{t\in H_l}\xi_t.$$

A második eredmény megfogalmazása érdekében bevezetjük a következő definiciót.

Növekedési tulajdonság definiciója egy metrikus téren adott funkcionálokra. *Legyen adva egy $F(A)$, $A\subset T$, (nem feltétlenül lineáris) funkcionál egy metrikus tér részhalmazain, amelyre $F(A)\le F(B)$, ha $A\subset B$. Ez a funkcionál teljesíti a növekedési tulajdonságot $\tau\ge1$, $c>0$ és $r\ge4$, paraméterekkel, ha minden $n\ge0$, $m=N_{n+\tau}=2^{2^{n+\tau}}$ (a τ paraméter csak az m szám definiciójában jelenik meg), egész és $a>0$ valós számokra, valamint olyan $t_1,\dots,t_m$ pontokra a T térben, amelyekre $d(t_j,t_l)>a$ minden $1\le j,l\le m$, $j\ne l$, indexpárra, és $t_l\in B_d(s,ar)$, $1\le l\le m$, valamely $s\in T$ pontra, és tetszőleges $H_l\subset B_d\left(t_l,\frac{a}{r}\right)$, $1\le l\le m$, halmazokra*

$$F\left(\bigcup_{1\le l\le m}H_l\right)\ge ca2^{(n+1)/2}+\min_{1\le l\le m}F(H_l).\tag{7}$$

(A fenti definicióban megköveteltük, hogy a tekintett t_l pontok mindegyike egy rögzített ar sugarú gömbben legyen, de viszonylag távol legyenek egymástól. Sőt, a t_l pontok $H_l\subset B_d(t_l,\frac{a}{r})$ "környezetei" is viszonylag távol vannak egymástól. Valójában a legfontosabb olyan bizonyításokban, ahol a növekedési tulajdonság teljesülését ellenőrizni kell, olyan t_l, $1\le l\le m$, pontrendszereket tekintünk, amelyek nem feltétlenül teljesítik a $t_l\in B_d(s,ar)$ feltételt alkalmas $s\in T$ ponttal minden $1\le l\le m$ indexre, de a másik két feltétel, amely a H_l, $1\le l\le m$, halmazok viszonylagos nagy távolságát biztosítja, érvényes rájuk. Ez azt jelenti, hogy a növekedési tulajdonság definiciójában szereplő (7) relációt H_l halmazok egy gazdagabb osztályában ellenőrizzük, mint szükséges volna. Ez azonban általában nem okoz problémát.)

Tétel B. *Legyen $F(A)$, $A\subset T$, növekedési tulajdonságot teljesítő funkcionál egy (T,d) (megszámlálható számosságú) metrikus téren valamely $\tau\ge1$, $c>0$ és $r\ge4$ paraméterekkel, amelyre $F(A)\le F(B)$, ha $A\subset B$. Ekkor létezik a T térnek olyan $\mathcal{A}_0\subset\mathcal{A}_1\subset$*

$A_2 \subset \cdots$ *(finomodó) partíciósorozata, amelyre a* $\mathcal{A}_n$ *partíció elemszáma kisebb, mint* $2^{2^{n+\tau}}$*, és*

$$\sup_{t\in T} \sum_{n=0}^{\infty} c2^{n/2}\Delta(A_n(t)) \le Lr(F(T)+c\Delta(T)) \tag{8}$$

alkalmas univerzális $L>0$ *konstanssal.*

A Tétel B-ben szereplő partíciósorozat lehet nem megengedett, mert abban $\mathcal{A}_n$ elemszáma $N_{n+\tau}$-val van becsülve N_n helyett. De ez nem okoz problémát, mert e tétel segítségével könnyen lehet találni a (8) formulát teljesítő megengedett partíciósorozatot is. Ugyancsak érdemes megjegyezni, hogy érdekes alkalmazásokban $\Delta(T) \le \text{const.}\, F(T)$, és ekkor a $\Delta(T)$ szám elhagyható a (8) becslés jobboldalán az L konstans megnővelése árán.

A Tétel A-ban tekintett $F(A) = E\sup\limits_{t\in A} \xi_t$ funkcionál teljesíti a növekedési tulajdonságot $\tau = 1$, elég kicsi $c>0$ és elég nagy $r \ge 4$ számokkal. Ezért alkalmazható rá a Tétel B. Sőt, mivel $\Delta(T) = \sup\limits_{s,t\in T} \left[E(\xi_s-\xi_t)^2\right]^{1/2} \le \text{const.} \sup\limits_{s,t\in T} E|\xi_s-\xi_t| \le \text{const.}\, E\sup\limits_{s,t\in T}(\xi_s-\xi_t) \le \text{const.}\, F(T)$, a (8) formulából megkapjuk az *alsó becslés Gauss mezők szuprémumának a várható értékéről* nevű tétel bizonyítását.

A Tétel A bizonyítása Ledoux koncentrációs egyenlőtlenségén alapul normális valószínűségi változók maximumáról valamint a Szudakov egyenlőtlenségen. Ez két egyébként is nagyon fontos eredmény normális valószínűségi változókról.

Ledoux koncentrációs egyenlőtlensége normális eloszlású valószínűségi változók maximumáról. *Legyen adva* ξ_t*,* $t\in T$*,* $E\xi_t = 0$*, (együttesen) Gauss valószínűségi változók egy rendszere, ahol* T *vagy véges halmaz vagy* T *megszámlálható, és* $E\sup\limits_{t\in T}\xi_t < \infty$*. Legyen* $\sigma^2 \ge \sup\limits_{t\in T} E\xi_t^2$*. Ekkor*

$$P\left(\left|\sup_{t\in T}\xi_t - E\sup_{t\in T}\xi_t\right| > u\right) \le 2e^{-u^2/2\sigma^2} \quad \textit{minden } u>0 \textit{ számra.}$$

Szudakov egyenlőtlensége. *Legyen adva* m *darab* $\xi_1,\dots,\xi_m$ *normális valószínűségi változó, amelyekre* $E\xi_j = 0$*, és* $E(\xi_j-\xi_k)^2 \ge a^2$ *minden* $1\le j<k\le m$ *indexpárra valamely* $a>0$ *számmal. Ekkor*

$$E\sup_{1\le j\le m}\xi_j \ge \frac{a}{L}\sqrt{\log m}$$

valamely univerzális $L>0$ *számmal.*

A Tétel A bizonyítása. Legyen $\eta_t = \xi_t - \xi_{t_l}$, ha $t\in H_l$, és $Y_l = \sup\limits_{t\in H_l}\eta_t$. Ekkor

$$\sup_{t\in H_l}\xi_t = \xi_{t_l} + Y_l = \xi_{t_l} + EY_l + (Y_l - EY_l) \ge \xi_{t_l} + EY_l - |Y_l - EY_l| \ge \xi_{t_l} + EY_l - V,$$

ahol $V=\max\limits_{1\le l\le m}|Y_l-EY_l|$. Innen

$$\sup_{t\in H}\xi_t=\max_{1\le l\le m}\sup_{t\in H_l}\xi_t\ge\max_{1\le l\le m}\xi_{t_l}+\min_{1\le l\le m}EY_l-V,$$

és várható értéket véve

$$E\sup_{t\in H}\xi_t\ge E\max_{1\le l\le m}\xi_{t_l}+\min_{1\le l\le m}EY_l-EV.$$

Továbbá $E\max\limits_{1\le l\le m}\xi_{t_l}\ge\frac{a}{L_1}\sqrt{\log m}$ a Szudakov egyenlőtlenség alapján, $\min\limits_{1\le l\le m}EY_l=\min\limits_{1\le l\le m}E\sup\limits_{t\in T_l}\xi_t$, mert $E\sup\limits_{t\in T_l}(\xi_t-\xi_{t_l})=E\sup\limits_{t\in T_l}\xi_t$, és Ledoux koncentrációs egyenlőtlensége alapján $EV\le L\sigma\sqrt{\log m}$, mert $P(V>u)\le\min\left(1,2me^{-u^2/2\sigma^2}\right)$, és $EV=\int_0^\infty P(V>u)\,du$.

A Tétel B bizonyítását, amely egy meglehetősen bonyolult teljes indukciós eljáráson alapul elhagyom, csak néhány kommentárt fűzök hozzá. A tételben szereplő partíciósorozatot bizonyos optimalitási tulajdonságokat figyelembe vevő mohó algoritmussal kapjuk meg, és ez egy meglehetősen implicit eljárást ad. Ezért a bizonyítás nem ad effektív, konstruktív módszert egy jó particiósorozat megtalálására. A bizonyítás fő nehézségét annak az indukciós állításnak a megfogalmazása és igazolása jelenti, amelyből következik a tétel állítása.

A Talagrand könyvben szereplő Tétel B valójában az itt megfogalmazott állításnál általánosabb eredményt tartalmaz. Ott az van bebizonyítva, hogy ha az $F(A)$, $A\subset T$, funkcionál (sőt az általános esetben nem feltétlenül egy F funkcionált, hanem esetleg egy F_n, $n=1,2\dots$, funkcionálsorozatot tekintünk) egy a (7) formulához hasonló, de általánosabb tipusú egyenlőtlenséget teljesít, akkor abból egy a (8) formulához hasonló explicit módon megfogalmazott egyenlőtlenség következik. Számunkra ennek az általánosabb eredménynek a következő speciális esete lesz különösen fontos. Ha

$$F\left(\bigcup_{1\le l\le m}H_l\right)\ge c2^{(n+1)p/\alpha}a^p+\min_{1\le l\le m}F(H_l).\tag{9}$$

valamilyen $2\ge p\ge1$ és $2\ge\alpha\ge1$ számokkal, (és a H_l halmazok teljesítik az egy metrikus téren adott funkcionálokra bevezetett növekedési tulajdonság definiciójában szereplő feltételeket), akkor

$$\sup_{t\in T}\sum_{n=0}^\infty c2^{np/\alpha}\Delta^p(A_n(t))\le Lr^p(F(T)+c\Delta^p(T))\tag{10}$$

alkalmas univerzális $L>0$ konstanssal és egy olyan $\mathcal{A}_0\subset A_1\subset A_2\subset\cdots$ particiósorozattal, amelyre a $\mathcal{A}_n$ partició elemszáma kisebb, mint $2^{2^{n+\tau}}$.

A (9) és (10) formulában megfogalmazott eredményt fogjuk alkalmazni a számunkra fontos, később tárgyalandó ellipszoid tétel bizonyításában, amely a (11) képletben bevezetett $\gamma_{\alpha,p}(T,d)$ mennyiségre ad felső becslést bizonyos speciális (T,d) terekben. Ez az eredmény teszi lehetővé, hogy bizonyos feladatokban jó becslést adjunk a minket érdeklő $\gamma_2(T,d)$ mennyiségre is. Az ellipszoid tétel bizonyításában a Tételt B-t fordított szereposztásban alkalmazzuk, mint a Gauss mezők szuprémumának várható értékére adott alsó becslés bizonyításában. Itt a $\gamma_{\alpha,p}(T,d)$ kifejezésre akarunk felső becslést adni, és ennek érdekében egy jó, a (9) formulát teljesítő F funkcionált keresünk. Ezután a (10) formula segítségével kapunk jó felső becslést a $\gamma_{\alpha,p}(T,d)$ kifejezésre.

A tárgyalt eredmények alkalmazása, az Ajtai–Komlós–Tusnády tétel bizonyítása.

Jelölje ℓ^2 a $t=(t_1,t_2,\dots)$, $\sum\limits_{j=1}^{\infty} t_j^2<\infty$, sorozatokból álló Hilbert teret, legyen adva független standard normális valószínűségi változók egy $g_1,g_2\dots$ sorozata, és definiáljuk minden $t=(t_1,t_2,\dots)\in\ell^2$ pontra az $X_t=\sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k g_k$ valószínűségi változót. Adva egy $T\subset\ell^2$ halmaz meg akarjuk becsülni az $E\sup\limits_{t\in T} X_t$ várható értéket. Az általános feladat arról, hogy becsüljük meg Gauss valószínűségi változók szuprémumának a várható értékét visszavezethető erre a problémára. A most megfogalmazott kérdés valójában ekvivalens a $\gamma_2(T,d)$ mennyiség becslésével, ahol d az L_2 norma által definiált metrika az ℓ^2 térben.

A $\gamma_2(T,d)$ becslése nehéz feladat az általános esetben. Viszont e mennyiség nagyságrendje explicite megadható, ha T a következő $\mathcal{E}=\mathcal{E}(a_1,a_2,\dots)$ alakú ellipszoid.

$$\mathcal{E}=\mathcal{E}(a_1,a_2,\dots)=\left\{t=(t_1,t_2,\dots)\colon \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_k^2}{a_k^2}\le 1\right\} \tag{11}$$

valamely $a_1,a_2,\dots$ pozitív számokkal. Feltesszük, hogy a (11) formulában szereplő $a_k\ge 0$ együtthatók között minden $A>0$ számra csak véges sok olyan a_k szám van, amelyre $a_k>A$.

Sok fontos probléma megoldásában nem elegendő a $\gamma_2(T,d)$ becslése ilyen $T=\mathcal{E}$ ellipszoidokra, hanem a $\gamma_2(T,d)$ mennyiséget olyan $T\subset\mathcal{E}$ alakú halmazokra kell megbecsülni, amelyek lényegesen kisebbek, mint az $\mathcal{E}$ halmaz. Például véges sok elemből álló T halmazokat kell tekintenünk. Az ilyen kérdések vizsgálata érdekében hasznosnak bizonyult a következő mennyiség bevezetése és vizsgálata:

$$\gamma_{\alpha,p}(T,d)=\left(\inf\sup_{t\in T}\sum_{n\ge0}\left(2^{n/\alpha}\Delta(A_n(t)\right)^p\right)^{1/p}\qquad \alpha>0,\ p>0 \tag{12}$$

ahol az infimum az összes megengedett particiósorozatra vétetik fel. A legfontosabb eset (a $p=1$ paraméter mellett) a $p=2$ eset. Ilyen választással jó becslést tudunk adni a $\gamma_{\alpha,2}(\mathcal{E},d)$ mennyiségekre, ahol $\mathcal{E}$ egy a (11) formulában definiált ellipszoid. De sok érdekes esetben $\gamma_2(\mathcal{E},d)=\gamma_{2,1}(\mathcal{E},d)=\infty$, és annak érdekében, hogy jó becslést kapjunk a $\gamma_2(T,d)$ mennyiségre egy véges sok elemből álló $T \subset \mathcal{E}$ alakú halmazra, olyan minél kisebb $\alpha \ge 1$ számot keresünk, amelyre $\gamma_{\alpha,2}(\mathcal{E},d) < \infty$.

Az előbb említett probléma jelenik meg akkor is, ha egyforma eloszlású, független valószínűségi változók összegeiként megjelenő valószínűségi változók szuprémának a várható értékét becsüljük meg az (6) formula segítségével. Itt a $\gamma_2(\mathcal{F},d_2)$ mennyiségen kívül a $\gamma_1(\mathcal{F},d_\infty)$ mennyiséget is meg kell becsülni. De az igazi nehézséget az első mennyiség becslése okozza. A következő lemmában, illetve annak következményében megmutatjuk, hogyan vezet az Ajtai–Komlós–Tusnády tétel Talagrand féle átfogalmazásának a vizsgálata egy $\gamma_2(T,d)$, $T \subset \mathcal{E}$, alakú kifejezés becslésének a vizsgálatához.

Lemma korlátos deriváltakkal rendelkező függvények tulajdonságairól. *Legyen $f(x,y)$ olyan kétváltozós függvény, amelyre $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 1$, $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 1$, és $f(x,0)=f(x,1)$, $0 \le x \le 1$, $f(0,y)=f(1,y)$, $0 \le y \le 1$. Ekkor az $f(x,y)=\sum c(j,k)e^{2\pi i(jx+ky)}$, Fourier sor $c(j,k)$ együtthatói teljesítik a $\sum\limits_{-\infty<j,k<\infty} (j^2+k^2)|c(j,k)|^2 \le \frac{1}{2\pi^2}$ egyenlőtlenséget.*

Ez a becslés akkor is érvényben marad, ha az $f(x,y)$ függvény differenciálhatósági feltételeit a következő némileg gyengébb feltétellel helyettesítjük. Az $f(x,y)$ függvény, mint az y változó függvénye abszolut folytonos majdnem minden x-re, és mint az x változó függvénye abszolut folytonos majdnem minden y-ra. Továbbá e függvény majdnem mindenütt létező parciális deriváltjai majdnem minden x és y pontra teljesítik a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right| \le 1$ és $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le 1$ egyenlőtlenségeket. Ezek a feltételek teljesülnek, ha $f(x,y)$ Lipschitz 1 függvény.

Bizonyítás: Számítsuk ki $\frac{\partial f}{\partial x}$ Fourier együtthatóit, és alkalmazzuk e függvény Fourier sorára a Parseval formulát. Parciális integrálással

$$c(-j,-k)=\int e^{2\pi i(jx+ky)}f(x,y)\,dx\,dy=-\frac{1}{2\pi ij}\int e^{2\pi i(jx+ky)}\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\,dx\,dy,$$

ha $j\ne 0$, ahonnan $\sum\limits_{-\infty<j,k<\infty} 4\pi^2 j^2|c(j,k)|^2 \le \int \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 dx\,dy \le 1$. (Az utolsó becslés első egyenlőtlenségében azért nem írhatunk azonosságot, mert a $\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}$ függvény $C(0,k)$ alakú Fourier együtthatói helyett nullát írtunk.) Hasonlóan

$$\sum_{-\infty<j,k<\infty} k^2|c(j,k)|^2 \le \frac{1}{4\pi^2}\int\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2 dx\,dy \le \frac{1}{4\pi^2},$$

és ebből a két egyenlőtlenségből következik a lemma első bekezdésének az állítása.

Ugyanez az érvelés érvényben marad a második bekezdésben megfogalmazott tulajdonságok teljesülése esetén is. Azt kell meggondolni, hogy az alkalmazott parciális deriválással kapott azonosság ekkor is érvényben marad, mert

$$\int_0^1 \frac{\partial\left(e^{2\pi i(jx+ky)}f(x,y)\right)}{\partial x}\,dx=\left[e^{2\pi(jx+ky)}f(x,y)\right]_0^1=0 \quad \text{majdnem minden } y\text{-ra}$$

az abszolut folytonossági feltétel miatt, és hasonló módon megkapjuk a másik számunkra szükséges azonosságot az x és y változó szerepének felcserélésével. Ha $f(x,y)$ Lipschitz 1 függvény, akkor teljesíti az abszolut folytonosságról előírt tulajdonságokat, és a parciális deriváltjai kisebbek, mint 1.

Megfogalmazom a lemma alábbi (nyilvánvaló) 1. következményét. Ez az eredmény azért hasznos a számunkra, mert ez lehetővé teszi, hogy olyan Lipschitz 1 függvényekkel is dolgozhassunk, amelyek periodikusan kiterjeszthetők Lipschitz 1 függvénnyé az egész síkon.

1. következmény. *Adva egy $f(x,y)$ Lipschitz 1 függvény az egységnégyzeten definiáljuk ennek $f_e(x,y)$ periodikusan folytatható kiterjesztését a $[0,2]\times[0,2]$ négyzetre a következő módon: Legyen $f_1(x,y)=f(x,y)$, ha $0\le x,y\le 1$, és $f_1(x,y)=f(x,2-y)$, ha $0\le x\le 1$, és $1\le y\le 2$. Legyen ezután $f_e(x,y)=f_1(x,y)$, ha $0\le x\le 1$ és $0\le y\le 2$, $f_e(x,y)=f_1(2-x,y)$, ha $1\le x\le 2$ és $0\le y\le 2$. Ekkor $f_e(x,y)=\sum\limits_{-\infty<j,k\le\infty} c(j,k)e^{i\pi(jx+ky)}$ olyan $c(j,k)$ Fourier együtthatókkal, amelyekre $\sum(k^2+j^2)|c(j,k)|^2\le\frac{2}{\pi^2}$.*

Az Ajtai–Komlós–Tusnády tétel Talagrand-féle átfogalmazásának bizonyításában hasznos lesz az 1. következmény. Vegyük ugyanis a (2) formulában tekintett az egységnégyzeten definiált Lipschitz 1 függvények $\mathcal{C}$ osztályának véges $T\subset\mathcal{C}$ véges részhalmazait. Szükségünk lesz egy olyan jó becslésre a T halmaztól függő $\gamma_2(T,d_2)$ mennyiségre, amely csak a T halmaz számosságától függ. Ilyen becslést az alább megfogalmazott 2. következmény segítségével tudunk adni, amely könnyen látható az 1. következmény segítségével. Ennek érdekében vezessük be az

$$\mathcal{E}=\left\{(a(j,k),b(j,k)),\ 0\le j,k<\infty,\ (j,k)\ne(0,0),\quad \sum_{(j,k)}\frac{a^2(j,k)+b^2(j,k)}{\frac{1}{2\pi^2(j^2+k^2)}}\le 1\right\} \tag{13}$$

ellipszoidot. Ezen ellipszoid segítségével megfogalmazzuk a következő állítást.

2. következmény. *Legyen T az egységnégyzeten definiált az $\int_{[0,1]\times[0,1]}f(x,y)\,dx\,dy=0$ feltételt teljesítő Lipschitz 1 függvényekből álló, $\mathcal{C}$ függvényosztály egy véges részhalmaza. Ekkor $\gamma_2(T,d_2)\le\sup\limits_{U\in\mathcal{E},\ |U|=|T|}\gamma_2(U,d)$, ahol $\mathcal{E}$ a (13) formulában definiált ellipszoid, az egyenlőtlenség jobboldalán szereplő d a $\mathcal{E}$ téren definiált L_2 norma által indukált metrikát jelöli, és $|U|=|T|$ azt jelenti, hogy U és T elemszáma megegyezik.*

Bizonyítás. Tekintsük minden $f\in C$ függvénynek a 2. következményben definiált f_e kiterjesztését a $[0,2]\times[0,2]$ négyzetre, és legyen T_e az $\{f_e\colon f\in T\}$ halmaz. Ekkor $\gamma_2(T,d_2)=\frac{1}{2}\gamma_2(T_e,d_2)$, mert $d_2(f,g)=\frac{1}{2}d_2(f_e,g_e)$ minden $f,g\in\mathcal{C}$ függvényre. Írjuk fel minden $f_e\in T_e$ függvény

$$f_e(x,y)=\sum_{\substack{(j,k)\colon 0\le j,k<\infty,\\ (j,k)\ne(0,0)}}\left[\sqrt{2}a(j,k)\frac{\cos(\pi(jx+ky))}{\sqrt{2}}+\sqrt{2}b(j,k)\frac{\sin(\pi(jx+ky))}{\sqrt{2}}\right]$$

Fourier sorát. Az 1. következmény alapján e Fourier sor együtthatói teljesítik az $\sum(j^2+k^2)(2a^2(j,k)+2b^2(j,k))\le\frac{4}{\pi^2}$ egyenlőtlenséget. (Azért tértünk át a $\frac{1}{\sqrt{2}}\sin$ és $\frac{1}{\sqrt{2}}\cos$ függvényekre az $e^{i(sx+ty)}$ alakú függvények helyett, hogy valós értékű (ortonormált) függvényekkel és együtthatókkal dolgozhassunk.) Feleltessük meg minden f függvénynek az $2a(j,k)$ és $2b(j,k)$, $0\le j,k<\infty$, $(j,k)\neq(0,0)$ együtthatókat. Ezen együtthatók sorozata benne van a a $\frac{2\sqrt{2}}{\pi}\mathcal{E}$ ellipszoidban, ahol $\mathcal{E}$-t a (13) formulában definiáltuk. Továbbá ez a leképezés izomorfia az $L_2([0,1]\times[0,1])$ tér és a a $\{j,k),\ 0\le j,k<\infty,\ (j,k)\neq 0\}$ párokkal indexezett az L_2 normával ellátott tér között. Innen következik, hogy ha U jelöli a T_e halmaz képét ezen transzformáció szerint, akkor $\gamma_2(T_e,d_2)\le\gamma_2(U,d)$, ezért igaz a 3. következmény.

Meg akarjuk becsülni a $\gamma_2(U,d)$ mennyiséget véges $U\subset\mathcal{E}$ halmazokra. Nyílvánvaló, hogy $\gamma_2(U,d)\le\gamma_2(\mathcal{E},d)$. Viszont, mint később ismertetett eredményekből látszik, $\gamma_2(\mathcal{E},d)=\infty$, ezért ilyen módon nem kapunk hasznos eredményt. Viszont hasznos a következő becslés, amely a Talagrand könyv egyik legfontosabb eredménye.

Ellipszoid tétel. *Tekintsük a (11) formulában definiált $\mathcal{E}$ ellipszoidot. Erre az ellipszoidra a (12) formulában definiált $\gamma_{\alpha,p}(T,d)$ mennyiség $p=2$ és $\alpha\ge 1$ választással valamint a szokásos Euklideszi d metrikával teljesíti a*

$$\gamma_{\alpha,2}(\mathcal{E},d)\le K(\alpha)\sup_{\varepsilon>0}\varepsilon\cdot\operatorname{card}\{i\colon\ a_i\ge\varepsilon\}^{1/\alpha}$$

egyenlőtlenséget egy csak az α paramétertől függő $K(\alpha)$ konstanssal.

Az Ajtai–Komlós–Tusnády tétel Talagrand-féle bizonyításában a (13) formulában definiált ellipszoidot kell tekintenünk. Erre $\operatorname{card}\{i\colon\ a_i\ge\varepsilon\}\le\text{const.}\,\varepsilon^{-2}$. (Azon (j,k) nem negatív egészekből álló párokat kell tekinteni, amelyekre $j^2+k^2\le\varepsilon^{-2}$.) Ezért $\gamma_{2,2}(\mathcal{E},d)\le\text{const.}$ Ez a becslés segít a kívánt egyenlőtlenség bizonyításában.

Ezenkívül szükségünk van egy olyan becslésre, amely a $\gamma_1(\mathcal{C},d_\infty)$ kifejezés becslését teszi lehetővé a (6) formulában, ahol d_∞ a szuprémum metrika az $\mathcal{C}$ tér elemei között. Erről szól a következő eredmény.

Tétel Lipschitz függvények L_∞ normában sűrű hálóinak nagyságáról. *Tekintsük az egységnégyzeten definiált Lipschitz 1 függvények $\mathcal{C}$ terét a d_∞ szuprémum normával, és vezesük be a következő $N(B,d_\infty,\varepsilon)$ mennyiséget minden $B\subset\mathcal{C}$ halmazra és $\varepsilon>0$ számra. $N(B,d_\infty,\varepsilon)$ a legkisebb elemszámú a B halmazt lefedő (a d_∞ szuprémum norma szerint) ε sugarú gömbökből álló rendszer számossága. Ekkor minden $\varepsilon>0$ számra $N(\mathcal{C},d_\infty,\varepsilon)\le e^{L/\varepsilon^2}$ valamilyen univerzális $L>0$ számmal. Ebből a relációból következik, hogy (4) formulában bevezetett $e_n(T,d)$ függvény $T=\mathcal{C}$ és $d=d_\infty$ választással teljesíti az $e_n(\mathcal{C},d_\infty)\le L2^{-n/2}$ egyenlőtlenséget alkalmas $L>0$ konstanssal.*

Bizonyításvázlat. Tekintsük egy $h\in\mathcal{C}$ függvény $A(h,2^{-k})=\{f\colon\ \sup|f(x,y)-h(x,y)|\le 2^{-k},\ f\in\mathcal{C}\}$ 2^{-k} sugarú környezetét, $k=0,1,2,\dots$. Be lehet látni, hogy

$$N(A(h,2^{-k}),d_\infty,2^{-(k+1)})\le e^{L2^{2(k+1)}}.$$

Azt kell ennek érdekében felhasználni, hogy ha két f_1 és f_2 Lipschitz 1 tulajdonságú függvénynek a $[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzetnek egy $2^{-(k+2)}$ szélességű rácsára vett megszorítására a szuprémum norma szerinti távolság kisebb, mint $2^{-(k+2)}$, akkor

$$\sup_{(x,y)\in[0,1]\times[0,1]} |f_1(x,y)-f_2(x,y)| \le 2^{-(k+1)}.$$

Ennek az egyenlőtlenségnek a felhasználásával be lehet látni k szerinti teljes indukcióval, hogy $N(\mathcal{C},d_\infty,2^{-k}) \le e^{2L2^{2k}}$ minden $k=0,1,\dots$ számra. Innen viszont következik, hogy $N(\mathcal{C},d_\infty,\varepsilon) \le e^{\bar L/\varepsilon^2}$ valamilyen univerzális $L>0$ számmal számmal minden $\varepsilon>0$ számra, ahonnan $e_n(\mathcal{C},d_\infty)\le L2^{-n/2}$.

Az Ajtai–Komlós–Tusnády tétel Talagrand–féle bizonyítása. Elég belátni a (2) egyenlőtlenség érvényességét akkor, ha $\mathcal{C}$ a $[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzeten definiált, és az egész síkra kiterjeszthető Lipschitz 1 függvények családja, és $X_1,\dots,X_N$ független, a $[0,1]\times[0,1]$ egységyzeten egyenletes eloszlású valószínűségi változók sorozata. Sőt, azt is feltehetjük, hogy $Ef(X_1)=0$ minden $f\in\mathcal{C}$ függvényre.

Válasszuk azt a legnagyobb m egész számot, amelyre $2^{-m}\ge\frac{1}{N}$. Ekkor az előző tétel alapján $e_m(\mathcal{C},d_\infty)\le L2^{-m/2}\le\frac{L}{\sqrt N}$, azaz meg lehet adni a $\mathcal{C}$ halmazosztálynak olyan $N_m=2^{2^m}$ vagy annál kevesebb elemből álló olyan $T=T_N$ részhalmazát, amelyre minden $f\in\mathcal{C}$ függvényre létezik olyan $\bar f\in T$ függvény, hogy $\sup|f(x,y)-\bar f(x,y)|\le \frac{L}{\sqrt N}$. Ebből speciálisan az is következik, hogy $\left|\sum\limits_{j=1}^N f(X_j)-\sum\limits_{j=1}^N \bar f(X_j)\right|\le L\sqrt N$. Ezért

$$E\sup_{f\in\mathcal{C}}\left|\sum_{j=1}^N f(X_j)\right| \le E\sup_{f\in T}\left|\sum_{j=1}^N f(X_j)\right| + L\sqrt N,$$

ahonnan következik, hogy elég belátni azt, hogy

$$E\sup_{f\in T}\left|\frac{1}{\sqrt N}\sum_{j=1}^N f(X_j)\right| = E\sup_{f\in T} S_N(f)\le L\sqrt{\log N}.$$

Ezen egyenlőtlenség bizonyításához elég megmutatni a (6) formula alapján, hogy

$$\gamma_2(T,d_2)\le L\sqrt{\log N}, \quad \text{és} \quad \gamma_1(T,d_\infty)\le L\sqrt{N\log N},$$

ahol d_2 az L_2 és d_∞ az L_∞ szuprémum norma által definiált metrika a $[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzeten definiált függvények terén.

A $\gamma_2(T,d_2)\le L\sqrt{\log N}$ egyenlőtlenség bizonyításában felhasználjuk a 2. következményt. Ennek alapján elég megmutatni, hogy $\gamma_2(U,d)\le\sqrt{\log N}$ minden olyan $U\in\mathcal{E}$ halmazra, amelyre $|U|\le N_m=2^{2^m}$. Itt $\mathcal{E}$ a (13) formulában definiált ellipszoidot jelöli. Viszont $\gamma_{2,2}(U,d)\le\gamma_{2,2}(\mathcal{E},d)\le L$ egy univerzális $L>0$ számmal. Ez azt jelenti, hogy létezik az U halmaznak egy olyan megengedett $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_1 \subset \cdots \subset A_m$ particiósorozata, amelyre

$$\sum_{n=0}^{m-1} \left(2^{n/2}\Delta(A_n(t))\right)^2 \le L \quad \text{minden } t \in U \text{ pontra.}$$

(Mivel $|U| \le N_m$, feltehetjük, hogy a megengedett particiósorozat legfeljebb m különböző particióból áll, mert $\mathcal{A}_n = \mathcal{A}_m$, ha $n \ge m$, és az m-ik partició csupa 1 elemű, tehát nulla átmérőjű halmazból áll. Ezért $\Delta(A_n(t)) = 0$, ha $n \ge m$.) Innen a Cauchy–Schwarz egyenlőtlenség alapján

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{m-1} 2^{n/2}\Delta(A_n(t)) &\le \sqrt{m}\left(\sum_{n=1}^{m}\left(2^{n/2}\Delta(A_n(t))\right)^2\right)^{1/2} \\ &\le L\sqrt{m} \le L\sqrt{\log N} \quad \text{minden } t \in U \text{ pontra,}\end{aligned}$$

ahonnan $\gamma_2(U,d) \le L\sqrt{\log N}$, tehát a 2. következmény alapján $\gamma_2(T,d_2) \le L\sqrt{\log N}$.

Másrészt, adva egy (T,d) metrikus tér, definiáljuk a következő $\gamma_\alpha(T,d)$-hez hasonló mennyiséget. Tekintsünk olyan $T_0, T_1, \dots$ halmazokat, amelyekre $|T_n| \le N_n$, és $T_n \subset T$. A $\gamma_\alpha(T,d)$ mennyiséghez hasonlóan definálhatjuk a $\bar\gamma_\alpha(T,d|T_0,T_1,\dots) = \sup\limits_{t\in T} \sum\limits_{0\le n<\infty} 2^{n/\alpha} d(t,T_n)$ kifejezéseket, (illetve vehetjük ezek $\bar\gamma_\alpha(T,d)$ infimumát az összes a feltételeknek eleget tevő $T_0, T_1, \dots$ sorozatra). Bár itt nem tárgyaltam, a Talagrand könyvben be van bizonyítva, hogy $\gamma_\alpha(T,d) \le K(\alpha)\bar\gamma_\alpha(T,d|T_0,T_1,\dots)$ egy csak az α paramétertől függő $K(\alpha) > 0$ konstanssal. Ezt az eredményt fogom használni az alábbiakban. Ennek alapján elég a $\gamma_1(T,d_\infty)$ mennyiség helyett a $\bar\gamma_1(T,d_\infty|T_0,T_1,\dots)$ mennyiségre adni jó becslést alkalmas $T_0, T_1, \dots \subset T$ halmazokkal.

Válasszuk a T halmaz olyan T_n részhalmazait, amelyekre $\sup\limits_{t\in T} d_\infty(t,T_n) \le L2^{-n/2}$, és $|T_n| \le N_n$, ha $0 \le n \le m$. Ez az előző tétel szerint lehetséges. Legyen $T_n = T$, ha $n \ge m$. Ilyen választással

$$\begin{aligned}\gamma_1(T,d_\infty) \le K\bar\gamma_1(T,d_\infty|T_0,T_1,\dots) &\le K\sum_{n=0}^{m} 2^n \sup_{t\in T} d_\infty(t,T_n) \\ &\le KL\sum_{n=0}^{m} 2^{n/2} \le KL(\sqrt{2}+1)2^{m/2} \le \bar L\sqrt{N}.\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $\gamma_1(T,d_\infty) \le \bar L\sqrt{N}$, ami a kívántnál kissé élesebb becslés.

Nyílt probléma.

Legyen $g(x,y)$ sűrűségfüggvény a $[0,1]\times[0,1]$ egységnégyzeten, $X_1,\dots,X_N$ független valószínűségi változók sorozata $g(x,y)$ sűrűségfüggvénnyel, és $Y_1,\dots,Y_N$ a $g(x,y)$ sűrűségfüggvény által meghatározott mérték szerint egyenletesen elhelyezett pontok. (Ez azt jelenti, hogy az Y_l, $1 \le l \le N$, pontokba $\frac{1}{N}$ tömeget elhelyezve, ezek átszállíthatóak a $g(x,y)$ sűrűségfüggvény által meghatározott mérték szerinti eloszlásba úgy, hogy a *szállítási útvonal hosszának várható értéke kisebb, mint* const. $\sqrt{N}$.*) Létezik-e mindig az* $\{1, 2, \dots, N\}$ *halmaznak az*

$$E\left(\sum_{j=1}^{N} d(X_{\pi(j)}, Y_j)\right) \le L\sqrt{N \log N}$$

egyenlőtlenséget valamely univerzális $L > 0$ *konstanssal teljesítő* π *permutációja, vagy ehhez szükséges bizonyos megkötéseket tenni a* $g(x, y)$ *sűrűségfüggvény tulajdonságairól?*

Az ellipszoid tétel bizonyításának hátteréről.

Az ellipszoid tétel bizonyításában fontos szerepet játszik az alábbi egyszerű lemma, amely annak a valós számokból álló végtelen sorozatok terén definiált normának a geometriai tulajdonságairól szól, amely szerint a (11) formulában definiált ellipszoid az egységgömb. Tekintsük a (11) formulában bevezetett $\mathcal{E}$ ellipszoidot, és vezessük be a következő $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ normát a $t = (t_1, t_2, \dots)$ sorozatok terén. Legyen $\|t\|_{\mathcal{E}}^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{t_k^2}{a_k^2}$, ha $t = (t_1, t_2, \dots)$, és az a_k constansok megegyeznek a $\mathcal{E}$ ellipszoid definiciójában szereplő a_k konstansokkal.

Lemma végtelen sorozatok terén definiált L_2 normák tulajdonságairól. *Legyen* $x = (x_1, x_2, \dots)$ *és* $y = (y_1, y_2, \dots)$ *két olyan sorozat, amelyekre* $\|x\|_{\mathcal{E}} \le 1$ *és* $\|y\|_{\mathcal{E}} \le 1$. *Ekkor*

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathcal{E}} \le 1 - \frac{\|x-y\|_{\mathcal{E}}^2}{8}.$$

Bizonyítás.

$$\|x+y\|_{\mathcal{E}}^2 + \|x-y\|_{\mathcal{E}}^2 = 2\|x\|_{\mathcal{E}}^2 + 2\|y\|_{\mathcal{E}}^2 \le 4,$$

ahonnan

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_{\mathcal{E}} \le \left(1 - \frac{1}{4}\|x-y\|_{\mathcal{E}}^2\right)^{1/2} \le 1 - \frac{1}{8}\|x-y\|_{\mathcal{E}}^2.$$

Az ellipszoid tétel egy olyan általánosabb tétel következményeként adódik, amely olyan norma által indukált távolsággal rendelkező terekkel foglalkozik, amely norma egy az előző lemmához hasonló tulajdonsággal rendelkezik. Ezért bevezetjük a következő definiciót.

p-konvex Banach terek definiciója. *Egy Banach teret valamely* $\|\cdot\|$ *normával* p*-konvexnek nevezünk* $p \ge 1$ *kitevővel és* η *paraméterrel, ha e Banach tér minden olyan* x, y *vektorára, amelyekre* $\|x\| \le 1$ *és* $\|y\| \le 1$

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\| \le 1 - \eta\|x-y\|^p, \quad p \ge 1.$$

A következő tétel érvényes p-konvex Banach terekre.

Tétel p-konvex terekben való becslésekről. *Legyen T egy η paraméterrel rendelkező p-konvex tér, $1 \le p \le 2$, egységgömbje. Tekintsünk egy másik $\|\cdot\|_1$ normát ezen a Banach téren. Ekkor minden $1 \le \alpha \le 2$ számra*

$$\gamma_{\alpha,p}(T,d) \le K(\alpha,p,\eta) \sup_{0\le n<\infty} 2^{n/\alpha} e_n(T,d)$$

valamely $K(\alpha,p,\eta) > 0$ csak az α, p és η paraméterektől függő számmal, ahol $\gamma_{\alpha,p}(T,d)$ a (12) formulában és $e_n(T,d)$ a (4) formulában definiált kifejezés a T (a p-konvex Banach tér normája szerinti) egységgömbbel és a $\|\cdot\|_1$ norma által indukált d távolsággal.

Az ellipszoid tétel a fenti p-konvex terekben való becslésekről szóló tétel következményeként kapható meg, ha azt a $t = (t_1, t_2, \dots)$ végtelen sorozatokból álló Hilbert térre alkalmazzuk a $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ normával (ez az előző lemma szerint p-konvex Banach tér $p = 2$ választással és $\eta = \frac{1}{8}$ paraméterrel) és a hagyományos $\|t\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k^2$ normát választjuk a $\|\cdot\|_1$ normának. Az ellipszoid tétel bizonyításához még egy eredmény szükséges a $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ norma és az annak definiciójában szereplő a_k konstansok kapcsolatáról.

Tétel a $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ norma és az annak definiciójában szereplő a_k konstansok kapcsolatáról. *Az $\mathcal{E}$ ellipszoidot a (11) formulában definiáló a_k sorozat legyen monoton csökkenő. Ekkor*

$$e_n(\mathcal{E},d) \ge \frac{1}{2} a_{2^n} \quad \text{és} \quad e_{n+3}(\mathcal{E},d) \le 3 \max_{1\le k\le n} a_{2^k} 2^{k-n},$$

ahol $e_n(\mathcal{E},d)$ a (4) formulában van definiálva, és d a szokásos $\|t\|^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k^2$, ha $t = (t_1, t_2, \dots)$ Hilbert-térbeli norma által definiált metrika.

Az ellipszoid tétel bizonyítása az előző eredmények alapján. Alkalmazzuk a p-konvex terekben való becslésekről szóló tételt a $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ normával, melynek a (11) formulában definiált $\mathcal{E}$ ellipszoid az egységgömbje, és a $\|\cdot\|_1$ norma legyen $\|t\|_1^2 = \sum\limits_{k=1}^{\infty} t_k^2$, ha $t = (t_1, t_2, \dots)$. Azt kapjuk, hogy

$$\gamma_{\alpha,2}(\mathcal{E},d) \le K(\alpha) \sup_{0\le n<\infty} 2^{n/\alpha} e_n(\mathcal{E},d).$$

Az $\mathcal{E}$ ellipszoid definiciójában szereplő t_k változók indexeinek esetleges átrendezésével feltehetjük, hogy az a_k konstansok monoton csökkennek. Ez lehetővé teszi a $2^{n/\alpha} e_n(\mathcal{E},d)$ mennyiség becslését a $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ norma és az annak definiciójában szereplő a_k konstansok kapcsolatáról szóló tétel segítségével. Azt kapjuk, hogy

$$2^{n/\alpha} e_n(\mathcal{E},d) \le 3 \max_{1\le k\le n-3} 2^{k/\alpha} 2^{(k-n)(1-1/\alpha)} a_{2^k} \le C \max_{1\le k\le n} 2^{k/\alpha} a_{2^k},$$

mert $(k-n)(1-1/\alpha) \le 0$, ha $k \le n$ és $\alpha \ge 1$. Innen

$$\gamma_{\alpha,2}(\mathcal{E}, d) \le \bar{K}(\alpha) \sup_{0 \le n < \infty} 2^{n/\alpha} a_{2^n}.$$

Az a_i sorozat monotonitását kihasználva $\varepsilon = a_{2^n}$ választással azt kapjuk, hogy $\mathrm{card}\,\{i\colon\ a_i \ge \varepsilon\} \ge 2^n$, ezért $\varepsilon\left(\mathrm{card}\,\{i\colon\ a_i \ge \varepsilon\}\right)^{1/\alpha} \ge 2^{n/\alpha} a_{2^n}$. Innen,

$$\gamma_{\alpha,2}(\mathcal{E}, d) \le \bar{K}(\alpha) \sup_{0 \le n < \infty} 2^{n/\alpha} a_{2^n} \le \bar{K}(\alpha) \sup_{\varepsilon > 0} \varepsilon \left(\mathrm{card}\,\{i\colon\ a_i \ge \varepsilon\}\right)^{1/\alpha}.$$

A p-konvex terekben való becslésekről szóló tétel bizonyításának alapgondolata. A bizonyítás a Tétel B egy itt ki nem mondott általánosabb változatát használja. Ebben az általánosításban egy metrikus téren adott funkcionálok növekedési tulajdonságát kissé általánosabban definiáljuk. Ugyanolyan tulajdonságú t_l pontokat és H_l halmazokat tekintünk, de a (7) reláció helyett azt követeljük meg, hogy az F funkcionál az

$$F\left(\bigcup_{1 \le l \le m} H_l\right) - \min_{1 \le l \le m} F(H_l) \ge h(n, a) \tag{14}$$

egyenlőtlenséget teljesítse valamilyen alkalmas $h(n,a)$ függvénnyel. A speciális $h(n,a) = ca2^{(n+1)/2}$ választás a (7) formulát adja. Az általános esetben a növekedési tulajdonság teljesülése valamely $h(n,a)$ függvénnyel a (8) formula egy változatát implikálja, amelyben a $\sup\limits_{t \in T} \sum\limits_{n=1}^{\infty} c2^{n/2} \Delta(A_n(t))$ összeg helyett egy hasonló, de a $h(n,a)$ függvénytől függő kifejezés szerepel. Célunk a (14) formula bizonyítása olyan F funkcionállal és $h(n,a)$ függvénnyel, amelyre a Tétel B általános alakja a p-konvex terekben való becslésekről szóló tétel eredményét adja.

A következő a T egységgömb részhalmazain definiált F funkcionál segítségével próbáljuk belátni a tételt.

$$F(A) = 1 - \inf\{\|v\|\colon\ v \in \mathrm{conv}\, A\}, \quad A \subset T.$$

Itt és a továbbiakban $\mathrm{conv}\, A$ az A halmaz konvex burkát jelöli.

Ezzel az F funkcionállal és alkalmas $h(n,a)$ függvénnyel próbáljuk belátni a (14) relációt. Az ellenőrizendő reláció megfogalmazása érdekében rögzítünk egy n pozitív egész és egy valós $a > 0$ számot, majd tekintünk $m = N_{n+2}$ olyan $t_1, \dots, t_m \in T$ pontot, amelyekre $d(t_l, t_{l'}) \ge a$, ha $1 \le l, l' \le m$, és $l \ne l'$, ($\tau = 1$ választással dolgozunk) valamint $H_l \in T \cap B_d(t_l, \frac{a}{r})$, $1 \le l \le m$, halmazokat valamilyen elég nagy $r \ge 4$ számmal. (A funkcionálok növekedési tulajdonságának ellenőrzésekor kell ilyen objektumokat tekinteni. Itt nem írjuk elő, hogy a t_l, $1 \le l \le m$, pontok mindegyike egy rögzített $B_d(s, ar)$ gömbben feküdjön.) A d metrika a fenti definiciókban a $\|\cdot\|_1$ norma által definiált távolság.

Legyen

$$u = \inf\left\{\|v\|\colon\ v \in \operatorname{conv}\left(\bigcup_{l=1}^{m} H_l\right)\right\} = 1 - F\left(\bigcup_{l=1}^{m} H_l\right),$$

és válasszunk egy olyan u' számot, amelyre

$$u' > \max_{1\le l\le m} \inf\{\|v\|\colon\ v \in \operatorname{conv} H_l\} = 1 - \min_{1\le l\le m} F(H_l).$$

A (14) formula bizonyításában jó becslést adunk az $u' - u$ különbségre egy alkalmas $h(n, a)$ függvénnyel. Ennek érdekében először az $e_n(T, d)$ mennyiségre adunk alsó becslést (a $\|\cdot\|_1$ norma által meghatározott d távolsággal) az $u' - u$ és a paraméterek segítségével.

Válasszunk olyan $v_l \in \operatorname{conv} H_l$, $1 \le l \le m$, pontokat, amelyekre $\|v_l\| \le u'' = \min(u', 1)$. Ilyen v_l pontok léteznek. Olyan $v_l \in \operatorname{conv} H_l$ pontokat kell választani, amelyekre $\|v_l\|$ elég közel van az $\inf\{\|v\|\colon\ v \in \operatorname{conv} H_l\}$ mennyiséghez. Ekkor a p-konvex tulajdonság miatt

$$\left\|\frac{v_l + v_{l'}}{2u''}\right\| \le 1 - \eta\left\|\frac{v_l - v_{l'}}{u''}\right\|^p,$$

és mivel $\frac{v_l+v_{l'}}{2} \in \operatorname{conv}\left(\bigcup\limits_{j=1}^{m} H_j\right)$, $\frac{u}{u''} \le \left\|\frac{v_l+v_{l'}}{2u''}\right\|$ minden $1 \le l, l' \le m$ indexre. Ezért

$$\frac{u}{u''} \le 1 - \eta\left\|\frac{v_l - v_{l'}}{u''}\right\|^p,$$

Innen azt kapjuk ($l' = 1$ választással), hogy mivel $p \ge 1$

$$\|v_l - v_1\| \le u''\left(\frac{u'' - u}{\eta u''}\right)^{1/p} \le \left(\frac{u'' - u}{\eta}\right)^{1/p} \le \left(\frac{u' - u}{\eta}\right)^{1/p}.$$

Legyen $R = \left(\frac{u'-u}{\eta}\right)^{1/p}$. Ekkor a $w_l = \frac{v_l - v_1}{R}$, $1 \le l \le m$, pontok mindegyikére $\|w_l\| \le 1$, azaz $w_l \in T$. Továbbá, mivel a v_l pontok konstrukciójából és a H_l halmazok tulajdonságaiból adódik, hogy $d(v_l, v_{l'}) \ge \frac{a}{2}$, ha $l \ne l'$, és a d távolság egy normából származik, ezért $d(w_l, w_{l'}) \ge \frac{a}{2R}$ minden $1 \le l, l' \le m$, és $l \ne l'$ számra. Ez viszont azt jelenti, hogy $e_{n+1}(T, d) \ge \frac{a}{4R}$. Valóban, ha vesszük a T halmaz tetszőleges $b < \frac{a}{4R}$ sugarú gömbökkel való fedését, akkor a w_l pontok mindegyike különböző gömbben van, ezért a fedő gömbök száma legalább $m = N_{n+2}$, ezért $e_{n+1}(T, d) \ge b$.

Az $e_{n+1}(T, d) \ge \frac{a}{4R}$ egyenlőtlenségből azt kapjuk, hogy $u' - u \ge \eta\left(\frac{a}{4e_{n+1}(T,d)}\right)^p$. Felhasználva az u és u' mennyiségek definicióját, illetve szabadságunkat az u' megválasztásában azt kapjuk, hogy

$$F\left(\bigcup_{1\le l\le m} H_l\right) - \min_{1\le l\le m} F(H_l) \ge \eta\left(\frac{a}{4e_{n+1}(T, d)}\right)^p.$$

Ez egy (14) tipusú egyenlőtlenség speciális $h(n,a)=\eta\left(\frac{a}{4e_{n+1}(T,d)}\right)^p$ függvénnyel.

Vezessük be az $S=\sup\limits_{n\ge1}2^{n/\alpha}e_n(T,d)$, és $c=\frac{\eta}{(4S)^p}$ mennyiségeket. Ezen kifejezések segítségével felírhatjuk az utolsó egyenlőtlenség alábbi következményét.

$$F\left(\bigcup_{1\le l\le m}H_l\right)-\min_{1\le l\le m}F(H_l)\ge c2^{(n+1)p/\alpha}a^p.$$

A Tétel B általánosabb alakjából, pontosabban annak a (8) és (9) formulában megfogalmazott következményéből és a tekintett F funkcionál néhány könnyen ellenőrizhető tulajdonságából kapjuk, hogy

$$\sup_{t\in T}\sum_{n=0}^{\infty}c2^{np/\alpha}\Delta^p(A_n(t))\le C(\alpha,p,\eta).$$

Mivel

$$\sum_{n=0}^{\infty}c2^{np/\alpha}\Delta^p(A_n(t))=\frac{\eta}{(4S)^p}\sum_{n=0}^{\infty}\left(2^{n/\alpha}\Delta(A_n(t))\right)^p,$$

ebből az egyenlőtlenségből, illetve az S mennyiség definiciójából (némi extra munkával) következik a tétel állítása.

A $\gamma_2(\mathcal{E},d)$ becslése egy hiperboloidra.

A $\gamma_2(\mathcal{E},d)$ mennyiség értékét egy a (11) formában definiált $\mathcal{E}$ hiperboloidra egy univerzális konstans szorzó erejéig pontosan meg lehet adni. Nevezetesen a (11) formulában definiált $\mathcal{E}$ ellipszoidra

$$\frac{1}{L}\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right)^{1/2}\le\gamma_2(\mathcal{E},d)\le L\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2\right)^{1/2}\tag{15}$$

egy univerzális $L>0$ számmal. Ennek az egyenlőtlenségnek a bizonyítása egyszerű, ha a $\gamma_2(\mathcal{E},d)$ helyett a vele azonos nagyságrendű $E\left(\sup\limits_{t=(t_1,t_2,\dots)\in\mathcal{E}}\sum\limits_{k=1}^{\infty}t_kg_k\right)$ kifejezést becsüljük meg, ahol $g_1,g_2,\dots$ független, standard normális eloszlású valószínűségi változók sorozata.

Felírhatjuk, hogy

$$E\left(\sup_{t=(t_1,t_2,\dots)\in\mathcal{E}}\sum_{k=1}^{\infty}t_kg_k\right)^2=E\left(\sup_{t=(t_1,t_2,\dots):\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{t_k}{a_k}\right)^2\le1}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_k}{a_k}(a_kg_k)\right)^2$$
$$=E\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2g_k^2=\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2,$$

mivel a baloldalon a várható értéken belül szereplő összeg rögzített $g_1(\omega), g_2(\omega), \dots$ értékekre a $\frac{t_k}{a_k} = \frac{a_k g_k}{\left(\sum\limits_{k=1}^\infty a_k^2 g_k^2\right)^{1/2}}$, $k = 1, 2, \dots$, helyen veszi fel a maximumát. Innen és a Schwarz egyenlőtlenségből adódik, hogy $E\left(\sup\limits_{t=(t_1,t_2,\dots)\in\mathcal{E}} \sum\limits_{k=1}^\infty t_k g_k\right) \le \left(\sum\limits_{k=1}^\infty a_k^2\right)^{1/2}$. Ledoux normális valószínűségi változók maximumáról szóló koncentrációs egyenlőtlensége segítségével meg lehet mutatni, hogy az $E\left(\sup\limits_{t=(t_1,t_2,\dots)\in\mathcal{E}} \sum\limits_{k=1}^\infty t_k g_k\right) \ge C\left(\sum\limits_{k=1}^\infty a_k^2\right)^{1/2}$ alsó becslés is érvényes alkalmas $C > 0$ konstanssal. Azt kell észrevenni, hogy ezen eredményből következik, hogy a tekintett szuprémum várható értéke nem lehet sokkal kisebb, mint a második momentumának négyzetgyöke. Ugyanis ezen eredmény alapján

$$
\begin{aligned}
E\left(\sup_{(t_1,t_2,\dots)\in\mathcal{E}} \sum_{k=1}^\infty t_k g_k - E\left(\sup_{(t_1,t_2,\dots)\in\mathcal{E}} \sum_{k=1}^\infty t_k g_k\right)\right)^2 &\le 2 \sup_{(t_1,t_2,\dots)\in\mathcal{E}} E\left(\sum_{k=1}^\infty t_k g_k\right)^2 \\
= 2 \sup_{(t_1,t_2,\dots)\in\mathcal{E}} \sum_{k=1}^\infty t_k^2 = 2 \sup_{(t_1,t_2,\dots)\in\mathcal{E}} \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{t_k}{a_k}\right)^2 a_k^2 &\le 2 \sup_{1\le k<\infty} a_k^2 \le 2 \sum_{k=1}^\infty a_k^2.
\end{aligned}
$$

A (15) formula azt adja az Ajtai–Komlós–Tusnády tétel bizonyításában szereplő (13) formulában definiált $\mathcal{E}$ ellipszoidra, hogy $\gamma_2(\mathcal{E}, d) = \infty$. Ez magyarázatot ad arra, hogy miért kellett a bizonyításban a $\gamma_{1,2}(\mathcal{E}, d)$ mennyiséget becsülni a $\gamma_2(\mathcal{E}, d)$ kifejezés helyett.

Ki lehet számolni a Dudley becslésében fellépő $\sum\limits_{n=0}^\infty 2^{n/2} e_n(\mathcal{E}, d)$ menyiség pontos nagyságrendjét is (konstans szorzó erejéig) egy a (11) formulában definiált ellipszoidra. A számolás legfontosabb lépése a $\|\cdot\|_{\mathcal{E}}$ norma és az annak definiciójában szereplő a_k konstansok kapcsolatáról szóló korábban megfogalmazott tétel bizonyítása. Ennek az eredménynek az összehasonlítása a $\gamma_2(\mathcal{E}, d)$ kifejezére adott becsléssel szintén megmutatja, hogy bizonyos esetekben Talagrand becslése normális eloszlású valószínűségi változók maximumának a várható értékéről lényegesen jobb, mint Dudley becslése. De mivel erre az eredményre itt nincs szükségünk, ezért ennek tárgyalását elhagyom.