Wiener folyamatok

A következő két feladat azt mutatja, hogy az az esemény, hogy egy sztochasztikus folyamat folytonos trajektóriájú-e vagy sem nem határozható meg a folyamat véges dimenziós eloszlásai segítségével, de ezen eloszlások segítségével explicite eldönthető, hogy alkalmas konstrukcióval megadható-e olyan sztochasztikus folyamat, melynek ezek a véges dimenziós eloszlásai, és amelyik egy valószínűséggel folytonos trajektóriájú.

1.) Legyen $X(t) = X(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, olyan sztochasztikus folyamat, melyre az $X(\cdot,\omega)$ trajektória folytonos függvény majdnem minden ω-ra. Legyen továbbá ez a folyamat atommentes, azaz tetszőleges folytonos $f(t)$, $0 \le t \le 1$, függvényre $P(\{\omega\colon X(t,\omega) = f(t)\}) = 0$. Ekkor létezik olyan $\bar{X}(t,\omega)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat, melyre $P(\{\omega\colon \bar{X}(t,\omega) = X(t,\omega)\}) = 1$ tetszőleges $t \in [0,1]$-re, és az $\bar{X}(t,\omega)$ folyamat trajektóriái egy valószínűséggel sehol sem folytonosak.

2.) Legyen B a $[0,1]$ intervallum egy mindenütt sűrű megszámlálható részhalmaza, (például a a $[0,1]$ intervallumbeli racionális számok halmaza.) Legyen $X(t)$ sztochasztikus folyamat a $[0,1]$ intervallumban, melynek véges dimenziós

$$F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n) = P(X(t_1) < x_1,\dots,X(t_n) < x_n)$$

eloszlásai ismertek tetszőleges $0 \le t_1 < \cdots < t_n \le 1$ paraméterekre. Lássuk be, hogy

a.) Az $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$ véges dimenziós eloszlások egyértelműen meghatározzák, hogy az $X(t)$ folyamat kielégíti-e a következő tulajdonságokat: Az $X(t.\omega)$, $t \in B$ trajektóriái egy valószínűséggel egyenletesen folytonosak (ω-tól függő folytonossági modulussal) az $X(t)$ folyamat megszorításán a $t \in B$ indexhalmazra. Az $X(t)$ sztochasztikus folyamat tetszőleges $t \in [0,1]$-re sztochasztikusan folytonos, azaz $\lim\limits_{s\to t} P(|X(t) - X(s)| > \varepsilon) = 0$ minden $\varepsilon > 0$-ra.

b.) Lássuk be, hogy akkor és csak akkor létezik olyan $\bar{X}(t)$ sztochasztikus folyamat a $[0,1]$ intervallumon, melyre $P(X(t) = \bar{X}(t)) = 1$ minden $t \in [0,1]$-re, és e folyamat $\bar{X}(t,\omega)$ trajektóriái egy valószínűséggel folytonosak, ha az $X(t)$ folyamat teljesíti az a) rész feltételeit. Az $X(t)$ és $\bar{X}(t)$ folyamat véges dimeziós eloszlásai megegyeznek.

3). Legyen $X(t) = X(t,\omega)$ folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat az $(\Omega,\mathcal{A},P)$ valószínűségi mezőn. Lássuk be, hogy $X(t,\omega)$ tekinthető egy $C([0,1])$ értékű valószínűségi változónak is. Részletesebben megfogalmazva: Jelőlje $\mathcal{B}$ a Borel σ-algebrát R^1-en, és legyen $\mathcal{C}$ a Borel σ-algebra a $C([0,1])$ téren, azaz legyen $\mathcal{C}$ a nyílt halmazok által generált legszűkebb σ-algebra a $[0,1]$ intervallumon értelmezett folytonos függvények terén a szuprémum norma által generált topológiával. Lássuk be, hogy ha a $\mathbf{T}_t\colon (\Omega,\mathcal{A},P) \to (R^1,\mathcal{B})$, $\mathbf{T}_t(\omega) = X_t(\omega)$, leképezés mérhető minden $t \in [0,1]$-re, akkor a $\mathbf{T}\colon (\Omega,\mathcal{A},P) \to (C([0,1]),\mathcal{C})$, $\mathbf{T}(\omega) = X(\cdot,\omega)$ leképezés is mérhető.

Legyen $X(t)$, $0 \le t \le 1$, folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat, és definiáljuk ennek $\mu_X$eloszlását a $C([0,1])$ téren a következő módon: $\mu_X(\mathbf{K}) = P(X(\cdot,\omega) \in$

K) minden $\mathbf{K} \in \mathcal{C}$-re. Mutassuk meg, hogy a μ_X mértéket meghatározzák az $X(t)$ sztochasztikus folyamat véges dimenziós eloszlásai.

4.) Egy Komogorovtól származó eredmény szerint, ha az $X(t)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamat teljesíti az $E|X(t) - X(s)|^{2+\delta} \le C|t-s|^{1+\varepsilon}$ feltételt minden $s,t \in [0,1]$-re valamely $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ és $C > 0$ számokkal, akkor létezik olyan $\bar X(t)$ egy valószínűséggel folytonos trajektóriájú folyamat a $[0,1]$ intervallumon, melyre $P(\bar X(t) = X(t)) = 1$ minden $t \in [0,1]$-re. Általánosítsuk ezt az eredményt arra az esetre, amikor az $X(t)$ sztochasztikus folyamat a $t \in [0,1]^k$ van értelmezve. Ennek megfogalmazásához vezessük be a következő jelöléseket: Ha $\Delta = [a_1,b_1] \times \cdots \times [a_k,b_k] \subset [0,1]^k$ egy k-dimenziós téglatest, akkor $|\Delta| = \prod\limits_{j=1}^{k}(b_j - a_j)$, az $X(t)$ megváltozása a Δ-n $X(\Delta) = \sum\limits_{\substack{t_j = a_j \text{ vagy } b_j \\ j=1,\dots,k}} (-1)^{\chi(t_1,\dots,t_k)} X(t_1,\dots,t_k)$, ahol $\chi(t_1,\dots,t_k) = \#\{j\colon t_j = a_j,\ 1 \le j \le k\}$. Ha $E|X(\Delta)|^{2+\delta} \le C|\Delta|^{1+\varepsilon}$ valamely $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ és $C > 0$-ra, akkor létezik olyan $\bar X(t)$ folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamat a $[0,1]^k$-n, melyre $P(\bar X(t) = X(t)) = 1$ minden $t \in [0,1]^k$-ra.

5.) Lássuk be, hogy a $W(t)$, $0 \le t \le a$ sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor Wiener folyamat a $[0,a]$ intervallumban, ha a $\dfrac{1}{\sqrt{c}} W(ct)$ sztochasztikus folyamat Wiener folyamat a $[0,a/c]$ intervallumban, alol $c > 0$ tetszóleges pozitiv szám. A $W(t)$ sztochasztikus folyamat akkor és csak akkor Wiener folyamat a $[0,a]$ intervallumban, ha $\dfrac{1}{t} W\left(\dfrac{1}{t}\right)$ Wiener folyamat az $\left[\dfrac{1}{a}, \infty\right)$ intervallumban. Lássuk be ennek a ténynek a segítségével, hogy a Wiener folyamatra igaz iterált logaritmus tételből a végtelen környezetében következik az iterált logaritmus tétel a nulla környezetében, azaz abból hogy $\limsup\limits_{t\to\infty} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t \log\log t}} = 1$ 1 valószínűséggel, következik, hogy $\limsup\limits_{t\to 0} \dfrac{W(t)}{\sqrt{2t \log|\log t|}} = 1$ 1 valószínűséggel.

6.) Legyen $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, $\dots$ teljes ortonormált rendszer a $[0,1]$ intervallumban (a Lebesgue mértékkel), ξ_1, ξ_2, $\dots$, független standard normális valószínűségi változók, és definiáljuk a következő $W(t)$ sztochasztikus folyamatot a $[0,1]$ intervallumban.

$$W(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \int_0^t \varphi(s)\, ds\,, \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

Lássuk be, hogy $W(t)$ Gauss folyamat, $EW(t) = 0$, $0 \le t \le 1$, melynek a kovarianciafüggvénye megegyezik a Wiener folyamat kovarianciafüggvényével, azaz $EW(s)W(t) = \min(s,t)$, $0 \le s,t \le 1$.

7.) Lássuk be, hogy a

$$W(t) = \frac{1}{\pi}\left(\xi_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \xi_k \frac{\sin k\pi t}{2k}\right)\,, \qquad 0 \le t \le 1\,.$$

összeg véges dimenziós eloszlásai megegyeznek a Wiener folyamat véges dimenziós eloszlásaival, ha ξ_n, $n = 0, 1, \dots$, független standard normális eloszlású valószínűségi változók. Hogyan lehet ezt a reprezentációt általánosítani más $Z(t)$, $EZ(t) = 0$, $0 \le t \le 1$, Gauss folyamatra a $K(s,t) = EZ(s)Z(t)$, $(K(s,t) = K(t,s))$, kovarianciafüggvény alkalmas reprezentációja segítségével?

8.) Lássuk be, hogy az előző feladatban definiált $W(t)$ sztochasztikus folyamat Wiener folyamat. Azaz, lássuk be, hogy az ott definiált folyamatra a feladatban bizonyított tulajdonságokon kívül az is igaz, hogy a trajektóriái 1 valószínűséggel folytonosak, az alábbi részfeladatok segítségével.

a.) Lássuk be, hogy tetszőleges $1/2 > \varepsilon > 0$-ra és minden elég nagy n-re

$$P(\mathbf{A}_n) = P\left(\sup_{2^n \le p < 2^{n+1}} \sup_{\substack{0 \le s,t \le 1, \\ |t-s| \le 2^{-(1+\varepsilon)n}}} \left| \sum_{k=2^n}^{p} \xi_k \frac{\sin k\pi t}{2k} - \sum_{k=2^n}^{p} \xi_k \frac{\sin k\pi s}{2k} \right| > 2^{-n\varepsilon/2} \right)$$
$$< \text{const.}\, 2^{-n(1+\varepsilon)}$$

b.) Alkalmas n_0 küszöbindex esetén tetszőleges $n \ge n_0$, $2^n \le p < 2^{n+1}$, $0 \le t \le 1$-re

$$P\left(\left| \sum_{k=2^n}^{p} \xi_k \frac{\sin k\pi t}{2k} \right| > 2^{-n\varepsilon} \right) < \exp\left\{ \left(-2^{n(1-2\varepsilon)} \right) /2 \right\}$$

c.) Definiáljuk a $\mathbf{B}(n,j,p)$, $0 \le j < 2^{(1+\varepsilon)n}$, $2^n \le p < 2^{n+1}$,

$$\mathbf{B}(n,j,p) = \left\{ \omega\colon \left| \sum_{k=2^n}^{p} \xi_k(\omega) \frac{\sin(k\pi j 2^{-(1+\varepsilon)n})}{2k} \right| > 2^{-n\varepsilon} \right\}$$

eseményeket. Lássuk be, hogy

$$\sum_{n,j,p} P(\mathbf{B}(n,j,p)) < \infty, \qquad \sum_{n} P(\mathbf{A}_n) < \infty.$$

Lássuk be e relációk és a Borel–Cantelli lemma segítségével, hogy a $W_n(t) = \frac{1}{\pi}\left(\xi_0 + \sum\limits_{k=1}^{n} \xi_k \frac{\sin k\pi t}{2k} \right)$, $0 \le t \le 1$, sztochasztikus folyamatok egy valószínűséggel egyenletesen konvergálnak a 7. feladatban definiált $W(t)$, $0 \le t \le 1$, folyamathoz, ezért ez utóbbi egy valószínűséggel folytonos trajektóriájú folyamat.

9.) Legyen $W(t)$, $0 \le t \le 1$, standard Wiener folyamat, és definiáljuk a következő $B_0(t)$ folyamatot: $B_0(t) = W(t) - tW(1)$. Lássuk be, hogy $B_0(t)$ 0 várható értékű (folytonos trajektóriájú) Gauss folyamat $EB_0(s)B_0(t) = \min(s,t) - st$ kovarianciafüggvénnyel. A $B_0(t)$ folyamat és a $W(1)$ valószínűségi változó függetlenek egymástól.

Megjegyzés: A fenti $B_0(t)$, $0 \le t \le 1$, folyamattal megegyező véges dimenziós eloszlású folytonos trajektóriájú folyamatokat Brown bridge-nek nevezik.

b.) Legyen $B_0(t)$ Brown bridge, $0 < r < 1$ fix szám. Lássuk be, hogy a

$$\frac{1}{\sqrt{r}}(B_0(rt) - tB_0(r)) \quad \text{és} \quad \frac{1}{\sqrt{1-r}}(B_0(r+(1-r)t) - (1-t)B_0(r)), \quad 0 \le t \le 1,$$

folyamatok független Brown bridge-ek, melyek függetlenek a $B_0(r)$ valószínűségi változótól is.

c.) Ha $B_0(t)$ Brown bridge, akkor $B_0(1-t)$ is Brown bridge.

10.) Legyenek $\xi_1, \dots, \xi_n$ független a $[0,1]$ intervallumban egyenletes eloszlású valószínűségi változók. Definiáljuk az $F_n(t)$ empirikus eloszlásfüggvényt, $F_n(t) = \frac{1}{n}\#\{\xi_k \colon \xi_k < t, 1 \le k \le n\}$, $0 \le t \le 1$. Lássuk be, hogy a standardizált empirikus eloszlásfüggvény $K_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - t)$ kovarianciafüggvénye megegyezik a Brown bridge kovarianciafüggvényével, és $EK_n(t) = 0$ minden $t \in [0,1]$-re. Mutassuk meg, hogy tetszőleges $0 \le t_1 < t_2 < \dots < t_k \le 1$-ra a $(K_n(t_1), \dots, K_n(t_k))$ véletlen vektor eloszlásban konvergál a $(B_0(t_1), \dots, B_0(t_k))$ véletlen vektorhoz, ha $n \to \infty$, ahol $B_0(t)$ Brown bridge.

11.) Legyen $W(t)$ standard Wiener folyamat, és definiáljuk a $Z(t) = \dfrac{W(e^t)}{e^{t/2}}$, $-\infty < t < \infty$ folyamatot. Lássuk be, hogy $EZ(s)Z(t) = e^{-|t-s|/2}$, $EZ(t) = 0$, A $Z(t)$ és $Z(t+a)$, $-\infty < t < \infty$, folyamatok eloszlása megegyezik tetszőleges $-\infty < a < \infty$-re. Legyenek $s_0 < s_1 < \dots < s_r < t_0 < t_1 < \dots < t_p$ rögzített számok. A $(Z(t_0), \dots, Z(t_r)$ feltételes eloszlása a $Z(s_0) = x_1, \dots, Z(s_r) = x_s$ feltétel esetén megegyezik e véletlen vektor feltételes eloszlásával a $Z(s_r) = x_s$ feltétel esetén. Határozzuk meg ezt a feltételes eloszlást.

Megjegyzés: A $Z(t)$ folyamattal megegyező eloszlású, folytonos trajektóriájú sztochasztikus folyamatokat Ornstein–Uhlenbeck folyamatnak nevezik.

12.) Legyen $W(t)$ Wiener folyamat a $[0,1]$ intervallumon.

a.) Lássuk be, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{2^n} [W(k2^{-n}) - W((k-1)2^{-n})]^2 = 1 \quad 1 \text{ valószínűséggel.}$$

b.) Legyen μ_w a $W(t)$ Wiener folyamat és $\mu_{\sigma w}$ a $\sigma W(t)$ eloszlása a $C([0,1])$ téren. Lássuk be, hogy $\sigma > 0$, $\sigma \ne 1$ esetén a μ_w és $\mu_{\sigma w}$ mértékek szingulárisak egymásra nézve.

13.) Legyen a $W(t) + mt$, $0 \le t \le 1$, ahol m fix valós szám és $W(t)$ a Wiener folyamat, eloszlása a $\mu_{w,m}$ mérték a $C([0,1])$ téren. Lássuk be, hogy a $\mu_{w.m}$ mérték abszolut folytonos a μ_w mértékre nézve, és számoljuk ki a Radon–Nikodym deriváltját.

Megoldásvázlatok

1.) Vezessük be a következő ekvivalencia relációt $[0,1]$-en: $x \sim y$ akkor és csak akkor, ha $x - y$ racionális szám. Definiáljuk a $P = [0,1]/\sim$ ekvivalencia osztályok halmazát a fenti reláció szerint. Mivel mind a folytonos függvények $\mathbf{Q}$ halmazának mind a P halmaznak a számossága kontinum, ezért létezik egy $\mathbf{T}\colon \mathbf{Q} \to P$ kölcsönösen egyértelmű leképezés. Egy folytonos f függvényre definiáljuk a $\mathbf{U}(f) = \bar{f}$ függvényt a következő módon: $\bar{f}(t) = f(t)$, ha $t \notin \mathbf{T}(f)$, és $\bar{f}(t) = f(t)+1$ ha $t \in \mathbf{T}(f)$. Legyen $\bar{X}(t,\omega) = \bar{f}(t)$, ha $X(t,\omega)$ az $f(t)$ folytonos függvény. Ekkor $\bar{X}(t)$ trajektóriái egy valószínűséggel sehol sem folytonosak, mert a $\mathbf{U}$ leképezés egy folytonos függvényt egy sehol sem folytonos függvényre képez. Másrészt, $P(\bar{X}(t) \neq X(t)) = 0$ minden rögzített $t \in [0,1]$-re, mert a t pontban egyetlen folytonos függvény értéke változik meg, nevezetesen a t pontot tartalmazó ekvivalenciaosztály képe a $\mathbf{T}^{-1}$ transzformáció szerint.

2.)

a.) Legyen $B = \{x_1, x_2, \dots, \}$ és $B_n = \{x_1, \dots, x_n\}$. Definiáljuk az

$$\mathbf{A}(n,\varepsilon,\delta) = \{\omega;\ |X(t,\omega) - X(s,\omega)| < \varepsilon, \quad \forall\, s,t \in B_n\text{-re ha } |s-t| < \delta\}$$

eseményeket. Legyen

$$\mathbf{A}(\varepsilon,\delta) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \mathbf{A}(n,\varepsilon,\delta), \quad \mathbf{A}(\varepsilon) = \bigcup_{\delta\to 0} \mathbf{A}(\varepsilon,\delta), \quad \mathbf{A} = \bigcap_{\varepsilon\to 0} \mathbf{A}(\varepsilon).$$

Ekkor az összes $\mathbf{A}(\varepsilon,\delta)$, $\mathbf{A}(\varepsilon)$ és $\mathbf{A}$ esemény valószínűsége kiszámítható az $F_{t_1,\dots,t_n}(x_1,\dots,x_n)$ eloszlások segítségével, így ezek ismeretében eldönthető, hogy az $\mathbf{A}$ esemény valószínűsége 1-gyel egyenlő-e. De az $\mathbf{A}(\varepsilon,\delta)$ esemény azt jelenti, hogy az $X(\cdot,\omega)$ trajektória megszorítása a B halmazra olyan, hogy a deltánál rövidebb intervallumokon e függvény ingadozása kisebb mint ε, $\mathbf{A}(\varepsilon)$ azt jelenti, hogy van olyan ω-tól függő hossz, hogy az ennél rövidebb intervallumokon a trajektória ingadozása (megszorítva a $t \in B$ halmazra) kisebb mint ε. Végül az $\mathbf{A}$ halmaz tartalmazza azon ω-kat, melyekre az $X(t,\omega)$ trajektória megszorítása a B halmazra egyenletesen folytonos. Mivel a $P(|X(t) - X(s)| > \varepsilon)$ esemény valószínűségét meghatározzák a véges (két) dimenziós eloszlások, így ezek az eloszlások meghatározzák, hogy az $X(t)$ folyamet sztochasztikusan folytonos-e.

b.) Ha teljesülnek az a) részben felsorolt tulajdonságok, akkor az

$$\bar{X}(t,\omega) = \lim_{s\in B, s\to t} X(s,\omega)$$

trajektória majdnem minden ω-ra jól definiált, mert az $X(t,\omega)$ folyamat egyenletesen folytonos a B halmazon. Továbbá $P(\bar{X}(t) = X(t)) = 1$ a sztochasztikus folytonosság miatt. A feltételek szükségessége nyílvánvaló.

3.) Azt kell belátni, hogy tetszőleges mérhető $C \in \mathcal{C}$ halmazra $\mathbf{T}^{-1}(C)$ mérhető halmaz, azaz eleme a $\mathcal{A}$ σ-algebrának. Elég ezt az állítást nyílt halmazokra belátni, mert ebből következik, hogy az állítás igaz a nyílt halmazok által generált σ-algebrára is. Miért? Tovább lehet redukálni az álltást a következő tipusú halmazokra: Ha $x = x(t) \in C([0,1])$, $\varepsilon > 0$, akkor legyen $S(x,\varepsilon) = \{y\colon y \in C([0,1]),\ \sup\limits_{t\in[0,1]} |x(t) - y(t)| < \varepsilon\}$. Elég belátni, hogy az $S(x,\varepsilon)$ tipusú halmazok őséképei mérhetőek minden $x \in C([0,1])$ és $\varepsilon > 0$-ra, mert tetszőleges nyílt halmaz előállítható megszámlálható sok ilyen halmaz uniójaként, és egy nyílt halmaz ősképe megegyezik az őt előállító unióban résztvevő halmazok ősképének az uniójával. A kvetkező meggondolás mutatja, hogy $S(x,\varepsilon)$ mérhető halmaz. Jelölje Q a racionális számok halmazát a $[01,1]$ intervallumban. Ekkor

$$\mathbf{T}^{-1}S(x,\varepsilon) = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{r\in Q}\left\{\omega\colon |X(r,\omega) - x(r)| < \left(1-\frac{1}{n}\right)\varepsilon\right\}\right)$$

(Miért?) Ebből a reprezentációból látszik, hogy $\mathbf{T}^{-1}S(x,\varepsilon)$ mérhető halmaz.

Az előző érvelés megmutatta, hogy az $\{X(t_1) \in \mathbf{A}_1, \dots, X(t_k) \in \mathbf{A}_k\}$ alakú halmazok, ahol $t_1, \dots, t_k$ tetszőleges pontok a $[0,1]$ intervallumban, $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$ tetszőleges mérhető halmazok R^1-en, olyan algebrát alkotnak, amelyik generálja a $\mathcal{C}$ σ-algebrát. Mivel ezeknek a halmazoknak a mértéket meghatározzák az $X(t)$ folyamat véges dimenziós eloszlásai, ezért e véges dimenziós eloszlások meghatározzák a $\mathcal{C}$ σ-algebra halmazainak a mértékét is.

5.) Annak bizonyításához, hogy amennyiben $W(t)$ Wiener folyamat, akkor az új folyamatok is azok, elég ellenőrizni azt, hogy az új folyamatok kovarianciafüggvénye az előírt alakú. $E\frac{1}{\sqrt{c}}W(cs)\frac{1}{\sqrt{c}}W(ct) = E\frac{1}{c}W(cs)W(ct) = \min(s,t)$,

$$E\frac{1}{s}W\left(\frac{1}{s}\right)\frac{1}{t}W\left(\frac{1}{t}\right) = \min(s,t)\ .$$

Az eredeti folyamatot kifejezve a transzformált folyamat segítségével kapjuk, hogy ezek a feltételek szükségesek is.

6.) Be kell látni, hogy $EW(s)W(t) = \min(s,t)$. A ξ_n változók korrelálatlansága miatt

$$EW(s)W(t) = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^s \varphi(u)\,du \int_0^t \varphi(u)\,du\ .$$

A Parseval formula szerint tetszőleges négyzetesen integrálható f és g függvényekre

$$\int_0^1 f(u)g(u)\,du = \sum_{k=1}^{\infty}\int_0^1 f(u)\varphi(u)\,du \int_0^1 g(u)\varphi(u)\,du.$$

Legyen $f(u)$ a $[0,s]$, $g(u)$ pedig a $[0.t]$ halmaz indikátorfüggvénye. Ekkor a Parseval formula az előző azonossággal adja, hogy $EW(s)W(t) = \int f(u)g(u)\,du = \min(s,t)$.

7.) Az $\varphi_0(t) = 1$, $\varphi_n(t) = \cos n\pi t$ függvények teljes ortonormált rendszert alkotnak a $[0,1]$ intervallumon. Miért? Így az előző feladat eredményéből következik az állítás. Az általános esetbeli reprezentációt megkaphatjuk, ha a $K(s,t)$ korrelációfüggvényt fel tudjuk írni

$$K(s,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(s)\varphi_n(t)$$

alakban, ahol $\varphi_n(t)$ teljes ortonormált rendszer a $[0,1]$ intervallumban, és $\lambda_n \geq 0$. Ekkor az

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{\lambda_n}\varphi(t)\xi_n$$

ahol ξ_n, $n = 1, 2, \ldots$, független standard normális valószínűségi változók, 0 várható értékű és $K(s,t) = EX(s)X(t)$ kovarianciafüggvńyű Gauss folyamat. Miért?

A kívánt reprezentáció lehetséges. Definiáljuk a $\mathbf{K}f(t) = \int_0^1 K(s,t)f(s)\,ds$ integráloperátort a négyzetesen integrálható függvények terén. A funkcionálanalízis eredményei alapján $\mathbf{K}$ egy kompakt (Hilbert–Schmidt) önadjungált operátor, ezért létezik olyan teljes ortonormált $\varphi_n(t)$ rendszer, melyre

$$\mathbf{K}f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(t) \int_0^1 \varphi_n(s)f(s)\,ds = \int_0^1 K(s,t)f(s)\,ds\ ,$$

ahol $K(s,t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda_n \varphi_n(s)\varphi_n(t)$. Mivel az integráloperátor magfüggvénye egyértelműen meghatározott, ezért megkaptuk a kívánt reprezentációt. Be kell még látni, hogy a képletben szereplő λ_n sajátértékek nem negatívak. Ehhez elég azt belátni, hogy $\int_0^1\int_0^1 K(s,t)f(s)f(t)\,ds\,dt \geq 0$ tetszőleges négyzetesen integrálható $f(t)$ függvényre. Miért? Viszont

$$\begin{aligned}\int_0^1\int_0^1 K(s,t)f(s)f(t)\,ds\,dt &= \int_0^1\int_0^1 EX(s)X(t)f(s)f(t)\,ds\,dt \\ &= \left(\int_0^1 f(s)EX(s)\,ds\right)^2 \geq 0\ ,\end{aligned}$$

Kérdés: Hogy szól a felhasznált funkcionálanalízisbeli eredmény véges dimenziós lineáris algebrai változata?

8.)

a.)

$$\sup_{\substack{0\le s,t\le 1,\\ |t-s|\le 2^{-(1+\varepsilon)n}}} \left| \sum_{k=2^n}^{p} \xi_k \frac{\sin k\pi t}{2k} - \sum_{k=2^n}^{p} \xi_k \frac{\sin k\pi s}{2k} \right| < \sum_{k=2^n}^{p} \sup_{\substack{0\le s,t\le 1,\\ |t-s|\le 2^{-(1+\varepsilon)n}}} \frac{\pi}{2}(t-s)|\xi_k|$$
$$\le 2^{-(1+\varepsilon)n}\frac{\pi}{2}\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}|\xi_k| \le \text{const.}\, 2^{-n\varepsilon} + 2^{-(1+\varepsilon)n}\pi \sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}(|\xi_k| - E|\xi_k|)$$

ha $2^n \le p < 2^{n+1}$. Ezért

$$P(\mathbf{A}_n) \le P\left(\sum_{k=2^n}^{2^{n+1}-1}(|\xi_k| - E|\xi_k|) > \frac{1}{2}2^{n(1+\varepsilon/2}\right) < \text{const.}\, 2^{-n(1+\varepsilon)}$$

a Csebisev egyenlőtlenség alapján.

b.) Az $\eta = \sum\limits_{k=2^n}^{p} \xi_k \dfrac{\sin k\pi t}{2k}$ valószínűségi változó 0 várható értékű normális valószínűségi változó, amelyiknek a szórása kisebb mint 2^{-n}. Ezért egy a normális eloszlás farokeloszlására adott ismert becslés alapján (ld. például a többdimenziós normális eloszlásról szóló feladatsor 7. feladatát) kapjuk, hogy $\mathrm{P}(|\eta| > 2^{-n\varepsilon}) = P(2^{n/2}|\eta| > 2^{(1/2-\varepsilon)n}) < \exp\{-2^{(1-2\varepsilon)n/2}\}$.

c.) A $\mathbf{B}(n,j,p)$ esemény valószínűségét a b.) részben megbecsültük $t = \dfrac{j}{2^{(1+\varepsilon)n}}$ választással. Mivel rögzített n-re $2^{(2+\varepsilon)n}$ ilyen eseményt definiáltuk, ezért a b.) rész becsléséből következik az első összeg konvergenciája. Az a.) részből következik a második összeg konvergenciája. A Borel–Cantelli lemmából és az előbbi relációkból következik, hogy $n > n(\omega)$-ra $\left|\sup\limits_{0\le t\le 1} \sum\limits_{k=p}^{q} \dfrac{\sin t}{2k}\xi_k\right| > 4\cdot 2^{-\varepsilon n}$, ha $2^n \le p,q < 2^{n+1}$. Ebből következik, hogy a $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{\sin t}{2k}\xi_k$ függvények egy valószínűséggel egyenletesen konvergálnak a $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\sin t}{2k}\xi_k$ függvényhez. Ebből következik az állítás.

9.)

a.)

$$\begin{aligned} &E[W(s)-sW(1)][W(t)-tW(1)] \\ &\quad = EW(s)W(t) - sEW(t)W(1) - tEW(s)W(1) + stEW(1)^2 = \min(s,t) - st \end{aligned}$$

b.) Legyen $0 \le s,t \le 1$. Ekkor

$$\begin{aligned} &\frac{1}{r}E[B_0(sr) - sB_0(r)][B_0(tr) - tB_0(r)] \\ &\quad = \frac{1}{r}[r\min(s,t) - r^2 st - s(tr - tr^2 - t(sr - sr^2) + st(r - r^2) = \min(s,t) - st, \end{aligned}$$

$$E[B_0(sr) - sB_0(r)]B_0(r) = sr - sr^2 - sr(1-r) = 0 \ ,$$
$$E[B_0(r+(1-r)s) - (1-s)B_0(r)]B_0(r) = r - r[r+(1-r)s] - (1-s)(r-r^2) = 0 \ ,$$

$$\begin{aligned} &E[B_0(sr) - sB_0(r)][B_0(r+(1-r)t) - (1-t)B_0(r)] \\ &\quad = EB_0(sr)[B_0(r+(1-r)t) - (1-t)B_0(r)] \\ &\qquad - sEB_0(r)[B_0(r+(1-r)t) - (1-t)B_0(r)] = 0 \ , \end{aligned}$$

$$E[B_0(r+(1-r)s) - (1-s)B_0(r)][B_0(r+(1-r)t) - (1-t)B_0(r)] = 0 \ .$$

E relációkból következik az állítás. Miért?

c.) $EB_0(s)B_0(t) = EB_0(1-s)B_0(1-t) = 0.$

10.)

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} I(\{\xi_k < t\}) \ ,$$

ahol $I(A)$ az A halmaz indikátorfüggvényét jelöli. Ezért $EF_n(t) = t$, és

$$\begin{aligned} EF_n(s)F_n(t) - EF_n(s)EF_n(t) &= n\frac{1}{n^2}(P(\xi_1 < s, \xi_1 < t) - P(\xi_1 < s)P(\xi_1 < t)) \\ &= \frac{1}{n}(\min(s,t) - st) \end{aligned}$$

tetszőleges $0 \le s, t \le 1$-re. Ebből következik az állítás a $K_n(t)$ kovarianciafüggvényére.

A határeloszlástétel bizonyításához elég belátni azt, hogy tetszőleges $c_1, \dots, c_k$ valós számokra $\sum\limits_{j=1}^{k} c_j K_n(t_j)$ eloszlásban konvergál a $\sum\limits_{j=1}^{k} c_j B_0(t_j)$ valószínűségi változóhoz, ha $n \to \infty$. (Lásd pl. a 10′). feladatot a normális eloszlás feladatsorban.) Viszont

$$\sum_{j=1}^{k} c_j K_n(t_j) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{p=1}^{n} \sum_{j=1}^{k} c_j \left(I(\{\xi_p < t_j\}) - P(\xi_p < t_j) \right)$$

és az állítás következik a centrális határeloszlástételből, ha azt az

$$\eta_p = \sum_{j=1}^{k} c_j \left(I(\{\xi_p < t_j\}) - P(\xi_p < t_j) \right), \qquad p = 1, \dots, n \ ,$$

független valószínűségi változókra alkalmazzuk.

11.)

$$EZ(s)Z(t) = e^{-(s+t)/2} EW(e^s)W(e^t) = e^{-(s+t)/2 + \min(s,t)} = e^{-|t-s|/2} \ .$$

A $(Z(t_1), \dots, Z(t_k))$ vektor eloszlása megegyezik a $(Z(t_1+a), \dots, Z(t_k+a))$ vektor eloszlásával, mivel mind a kettő 0 várható értékű normális vektor ugyanazzal a kovarianciamátrix-szal.

Az Ornstein–Uhlenbeck folyamatnak a Wiener folyamat szerinti reprezentációját alkalmazva írjuk fel a

$$(Z(t_1),\dots,Z(t_p)) = \Big(e^{-t_1/2}(W(e^{t_1})-W(e^{s_r})),\dots,e^{-t_p/2}(W(e^{t_p})-W(e^{s_r}))\Big) \\ + \Big(e^{-t_1/2}(W(e^{s_r}),\dots,e^{-t_p/2}(W(e^{s_r})\Big)$$

azonosságot. Mivel a Wiener folyamat független növekményű folyamat, ezért a jobboldal első tagja független a

$$(Z(s_0),\dots,Z(s_r)) = (e^{-s_0/2}(W(e^{s_0})),\dots,e^{-s_r/2}(W(e^{s_r}))$$

valószínűségi változótól, míg a második tag annak függvénye. Így a keresett vektor feltételes eloszlása a normális eloszlás

$$\begin{aligned}(m_1,\dots,m_p) &= (e^{-t_1/2},\dots,e^{-t_p/2})W(e^{s_r}) \\ &= (e^{-t_1/2},\dots,e^{-t_p/2})x_r e^{s_r/2} = x_r(e^{(s_r-t_1)/2},\dots,e^{(s_r-t_p/2)})\end{aligned}$$

várható értékkel és $\mathbf{D}=(d_{j,k})$ kovarianciamátrix-szal, ahol

$$d_{j,k} = e^{-(t_j+t_k)/2}\min(e^{t_j}-e^{s_r},e^{t_k}-e^{s_r}) = e^{-|t_j|/2+s_r-(t_j+t_k)/2}\ .$$

12.)

a.) Az állítás a nagy számok törvényének egy viszonylag egyszerű alakja. A Csebisev egyenlőtlenség alapján tetszőleges $\varepsilon>0$-ra

$$\begin{aligned}&P\left(\left|\sum_{k=1}^{2^n}[W(k2^{-n})-W((k-1)2^{-n})]^2-1\right|>\varepsilon\right) \\ &= P\left(\left|\sum_{k=1}^{2^n}\left(\left[W\left(\frac{k}{2^n}\right)-W\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right]^2-E\left[W\left(\frac{k}{2^n}\right)-W\left(\frac{k-1}{2^n}\right)\right]^2\right)\right|>\varepsilon\right) \\ &< 3\varepsilon^2 2^{-n}\ .\end{aligned}$$

Mivel $\sum\limits_{n=1}^{\infty}3\varepsilon^2 2^{-n}<\infty$, a Borel–Cantelli lemmából következik az állítás.

b.) Definiáljuk a folytonos függvények következő $\mathbf{K}$ halmazát a $C([0,1])$ téren.

$$\mathbf{K} = \{f\colon f\in C([0,1]),\ \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{2^n}\left[f(k2^{-n})-f((k-1)2^{-n})\right]^2 = 1\ .$$

(Ez úgy értendő, hogy a fenti limesz létezik.) Ekkor az a.) rész eredménye szerint $\mu_w(\mathbf{K})=1$ és $\mu_{\sigma w}(\mathbf{K})=0$. Ezért a két mérték szinguláris egymásra nézve.

13.) Legyen $\mu_w^{(n)}$ a $(W(k2^{-n}),\ k=1,\dots,2^n)$ $\mu_{w,m}^{(n)}$ a $(W(k2^{-n}+mk2^{-n}),\ k=1,\dots,2^n)$ vektorok eloszlása az R^{2^n} térben. Legyen $f(x_1,\dots,x_{2^n})=\dfrac{d\mu_{w,m}^{(n)}}{d\mu_w^{(n)}}(x_1,\dots,x_{2^n})$, és vezessük be a következő $\mathbf{T}\colon C([0,1])\to R$ leképezést: Ha $g\in C([0,1])$, azaz $g(x)$ egy a $[0,1]$ intervallumon folytonos függvény, akkor legyen $\mathbf{T}(g)=f(g(2^{-n}),g(2\cdot 2^{-n}),\dots,g(2^n\cdot 2^{-n}))$. Legyenek $\bar\mu_{w,m}^{(n)}$ és $\bar\mu_w^{(n)}$ a $\bar\mu_{w,m}$ és $\bar\mu_w$ mértékek vetülete a $\{k2^{-n}, k=1,\dots,2^n\}$ koordinátákra a $C([0,1])$ téren. Azaz egy $K\in C([0,1])$ halmazra legyen $\bar\mu_{w,m}^{(n)}(K)=\mu_{w,m}^{(n)}(\mathbf{U}(K))$ és $\bar\mu_w^{(n)}(K)=\mu_w^{(n)}(\mathbf{U}(K))$, ahol $\mathbf{U}$ a $C([0,1])$ mérhető részhalmazait képezi le az R^{2^n} mérhető részhalmazaira, és $\mathbf{U}(K)=\{(x_1,\dots,x_{2^n})\colon \exists g\in K; g(k2^{-n})=x_k,\ k=1,\dots,2^n\}$. Ekkor $\dfrac{d\bar\mu_{w,m}^{(n)}}{d\bar\mu_w^{(n)}}(g)=\mathbf{T}(g)$. Miért? Ekkor

$$
\begin{aligned}
f(x_1,\dots,x_{2^n}) &= \exp\left\{-2^n\left(\sum_{k=1}^{2^n}(x_k-x_{k-1}+2^{-n}m)^2+\sum_{k=1}^{2^n}(x_k-x_{k-1})^2/2\right)\right\}\\
&= \exp\{mx_{2^n}-m^2/2\}\ ,
\end{aligned}
$$

és $\dfrac{d\bar\mu_{w,m}^{(n)}}{d\bar\mu_w^{(n)}}(g)=e^{mg(1)-m^2/2}$. Ez a Radon–Nikodym derivált nem függ az n indextől. Ezért a Radon–Nikodym derivált definicióját felhasználva meg lehet mutatni, hogy $\dfrac{d\bar\mu_{w,m}}{d\bar\mu_w}(g)=e^{mg(1)-m^2/2}$. Miért?