Megjegyzések a Regularity Lemma-ról, Miről beszélünk?

M. Simonovits

Tusnády szeminárium, 2. előadásom,
Az előadás utáni kicsit javított változat

Mentegetőzés

- Elnézést a kevert nyelvért, magát az anyagot csak rövid ideig hagyom kint, mert csiszolatlan és most nincs időm csiszolgatni.
- Az anyag eredetileg az előadásra készült, tartalmaz számtalan olyan részt, amelyek nem hangoztak ott el, azokat nem nagyon fejlesztem.
- A fejlesztett részeket sem fejlesztem túl.
- A régebbi részek "rm", az ujabbak "sf" betükkel vannak szedve, kéken.

Uj irodalom:

Kitettem a konferencia homepage-ére néhány dolgot, ill. átvittem oda a régieket:

- `http://www.renyi.hu/~phenomen`

Ez az anyag hyperlink-ekkel ellátott: Ha Acrobat Reader-rel olvassuk, akkor bizonyos hivatkozásokra rákattintva, egyenesen a megfelelő helyre visz.

1. Mi a Regularity Lemma?

1.1. Theorem (Regularity Lemma, Szemerédi 1978 [11]). *For every $\varepsilon > 0$ and m there exist two integers $M(\varepsilon, m)$ and $N(\varepsilon, m)$ with the following property: for every graph G with $n \geq N(\varepsilon, m)$ vertices there is a partition of the vertex set into $k+1$ classes*

$$V = V_0 + V_1 + V_2 + \ldots + V_k$$

such that

- $m \leq k \leq M(\varepsilon, m)$,
- $|V_0| < \varepsilon n$,
- $|V_1| = |V_2| = \ldots = |V_k|$,
- *all but at most εk^2, of the pairs (V_i, V_j) are ε-regular.*

1.1. Generalized Random Graphs

Regularity Lemma = Approximáció „Generalized Random Graph"-fal.

1.1. Definíció ($A = (p_{ij})$ mátrixszal generált, általánosított véletlen gráf). *Adott egy valószínűség-mátrix, $(p_{ij})_{r \times r}$. Beosztunk n pontot ν osztalyba: $(C_1, \ldots, C_\nu)$ és C_i minden pontját C_j minden pontjával p_{ij} valószínűséggel kötjük össze, függetlenül. Itt $p_{ij} = p_{ji}$ és $i = j$ is megengedett.*

Regularity Lemma = Approximáció ilyen struktúrával.

Egyik fontos dolog:

Approximáció, (p_{ij})-véletlen gráffal, de milyen értelemben? Mit jelent, hogy approximáció? Mi két p élvalószínűségű véletlen gráf távolságát pl. itt 0-nak definíáljuk

Az approximáció itt heurisztikusan azt jelenti, hogy a két gráf úgy tehető egymásra (van a pontoknak olyan permutációja) hogy a megfelelő, nem túl kicsi részek között az élsűrűségek közel egyenlőek.

A pontos definicióval mi nem foglalkoztunk, a "cut-norm"-mal is megfogalmazható, megtalalható pl. a Lovász-Szegedy cikkben [7]. ellenorizni

1.2. Mire jó nekünk a regularitási lemma?

$\boxed{\text{"Nekünk" = Gráfelmészeknek: felépíteni részstruktúrákat!}}$

Megmutatni, hogy ha egy (p_{ij})-véletlen gráfban valami létezése könnyű, akkor az ilyennel approximáltban is könnyű.

Számelmészeknek? Úgy tűnik, nekik kevésbé centrális, mégha onnak ered is az eredeti forma.

1.3. Redukált gráf

A gráfelmészek leggyakrabban a redukált gráf-fal operálnak:

1.2. Definíció. *Given an arbitrary graph $G = (V, E)$, a partition $(U_1, \dots, U_\nu)$ of the vertex-set $V(G_n)$ and two parameters $\varepsilon, \tau > 0$, we define the* **Reduced Graph** *(or Cluster graph) H_ν as follows: its vertices are the clusters $V_1, \dots, V_\nu$ and V_i is joined to V_j if (V_i, V_j) is ε-regular with density more than τ.*

Most applications of the Regularity Lemma use Reduced Graphs, and they depend upon the fact that many properties of R are inherited by G.

1.4. Babai ellenéldája

[1] Néha nagy teljes részgráfok megtalálására építenek klaszterezési eljárásokat. Futó Péter ilyen klaszterozására ellenpélda,

Babai Egy (szokatlan) véletlen gráfot generált: a pontokat két (egyforma) osztályba osztotta, A, B, egy osztályon belül 2/3 valószínűséggel kötött össze, a két osztály között 1/3 valószínűséggel.

Ebben a gráfban nincsenek $c \log n$-nél nagyobb teljesek, holott vannak benne nagy szemmel látható, összetartozó részek, klaszterok: A és B.

Ez az első olyan eset, ahol ezt a struktúrát: olyan véletlen gráfot, – ahol a pontok kupacokba vannak osztva és az összekötési valószínűségek a kupacoktól függnek, – teljesen világosan megfogalmazva láttam.

[1] Ez a (p_{ij})-gráfot motiváló kitérő, nem kell közvetlenül a Reg. Lemmához.

2. Mi az eredeti Regularity Lemma?

Páros gráfra van megfogalmazva, és az egyik osztály feolsztásának minden klaszterjához a másik osztálynak más-más felosztása tartozik.

Ezért én ezt a "Csúnya" RL-nek nevezem.

Sokmindenhez már ez is elég volt.

2.1. Az $r_k(n)$-hez kellett!

$r_k(n)$ definiciója: a legnagyobb ℓ, hogy $\{1, 2, \ldots, n\}$-ben kivehető ℓ egész, anélkül, hogy ezek k tagú számtani sort tartalmaznának.

Szemerédi (bebizonyította a híres Erdős-Turán sejtést):

$$r_k(n) = o(n).$$

3. A (mai) „Regularity Lemma" Motivációi

3.1. Erdős-Stone, kvantitativ

Turán gráf: $T_{n,p} = n$ pontot p osztályba osztunk, $(C_1, \ldots, C_p)$-be, olyan egyenletesen, ahogyan csak lehet, és (x, y) akkor él, ha x, y különböző osztálybeli.

3.1. Theorem (Erdős-Stone, kvalitativ). *Rögzítsük p-t és ε-t. Ha*

$$e(G_n) > \left(1 - \frac{1}{p}\right)\binom{n}{2} + \varepsilon n^2$$

akkor van benne $p+1$-osztályos nagy Turán gráf, $T_{(p+1)m,p+1}$ (ahol tehát a $p+1$ osztály mindegyikében m pont van) ha $n > n_0$.

P. Erdös and A. H. Stone [Bull. Amer. Math. Soc. 52 (1946), 1087–1091;

De kérdés, (legalább) mekkora, adott p, n és ε esetén? $m = m(n, p, \varepsilon) = ?$

- Erdős-Stone: $m = c\sqrt{\log\log\ldots\log n}$
- Bollobás-Erdős: $m = c(p, \varepsilon)\log n$

• B. Bollobás, Erdös and M. Simonovits [J. London Math. Soc. (2) 12 (1975/76), no. 2, 219–224;

$m \geq a \log\frac{n}{p} \log(1/\varepsilon)$ for some positive constant a

• Chvátal, V.; Szemerédi, E. On the Erdös-Stone theorem. J. London Math. Soc. (2) 23 (1981), no. 2, 207–214.

3.2. Theorem (Chvátal–Szemerédi).

$$t \geq \frac{\log n}{500 \log(1/\varepsilon)}$$

for all n large enough with respect to ε and d.

In a sense this result is the best possible.

Szemerédinek ehhez kellett (először) a Reg. Lemma.

3.2. Proof of the Regularity Lemma

Sketch: First a measure called **index** is defined for every partition of $V(G)$ measuring in a way how regular the pairs are in the partition. Let P be a partition of V into $V_0, V_1, \ldots, V_k$ and let

$$\mathrm{ind}(P) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \sum_{j=i+1}^{k} d^2(V_i, V_j).$$

Obviously,

$$\mathrm{ind}(P) \leq \frac{1}{2}.$$

The basic idea is that if $(V_1, \ldots, V_k)$ violates the regularity conditions of the RL, then one can refine this partition so that the index will grow significantly.

3.1. Lemma. *Let $G = (V, E)$ be a graph with n vertices. Let P be a partition of V into $k+1$ classes $V_0, V_1, \ldots, V_k$ (where $k \geq k_0$) so that $|V_0| < \varepsilon n$ and the V_i's have the same size for $1 \leq i \leq k$. If for a given $\varepsilon > 0$ more than εk^2 classes are ε-irregular [2], then there exists a refinement Q of P [3] into $1 + k4^k$ classes such that*

$$\mathrm{ind}(Q) \geq \mathrm{ind}(P) + \frac{\varepsilon^5}{20} \tag{1}$$

and the size of the exceptional class V_0 increases by at most $n/4^k$.

[2] i.e., not ε-regular

[3] More precisely, Q is a refinement if we disregard the exceptional class V_0

Iterating this refinement in t steps and using (1) we get for the t-th new partition P_t:

$$\frac{1}{2} \geq \operatorname{ind}(P_t) \geq \operatorname{ind}(P) + \frac{t\varepsilon^5}{20}$$

implying

$$t \leq \frac{10}{\varepsilon^5}.$$

Hence in at most $10\varepsilon^{-5}$ improvement steps we arrive at a partition which satisfies the conditions of the lemma. This means that the number of classes (disregarding the exceptional class V_0) will be „t-times iterated exponentiation": Define $f(0) = m$, $f(t+1) = 1 + f(t) \cdot 4^{f(t)}$. Then the number of classes will be at most $f(10/\varepsilon^5)$.

The proof of Lemma 3.1 uses the **defect** form of the Cauchy-Schwarz inequality.

3.2. Lemma (Improved Cauchy-Schwarz inequality). *If for the integers* $0 < m < n$,

$$\sum_{k=1}^{m} X_k = \frac{m}{n} \sum_{k=1}^{n} X_k + \delta,$$

then

$$\sum_{k=1}^{n} X_k^2 \geq \frac{1}{n} \left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right)^2 + \frac{\delta^2 n}{m(n-m)}.$$

The following simple property of density is also used.

3.3. Fact (Continuity of density).

$$|d(X,Y) - d(A,B)| \leq (1 - |X|/|A|) + (1 - |Y|/|B|) \quad \textit{for all} \quad X \subset A,\ Y \subset B.$$

One remark should be made here. As we have seen, the proof of the Regularity Lemma involved $10\varepsilon^{-5}$-times iterated exponentiation. Hence the estimates in many applications of Regularity Lemma seem to be too weak. But in the original application, namely in the proof of $r_k(n) = o(n)$, this is not the weakest point: Szemerédi applied the van der Waerden Theorem where the estimates are much-much weaker.

4. A Ramsey-Turán kérdések

A Kérdés:

Adott egy G_n gráf, amelyikre nem csak azt tudjuk, hogy nem tartalmaz egy mintagráfot: L-et, de azt is, hogy nincs benne túl sok független pont:

$\alpha(G_n) = m.$ [4]

A motiváció: Az eredeti Turán tétel geometriai, analizisbeli alkalmazásai,

Potenciálelméleti alkalmazások

Turán, Erdős-Meir-Sós-Turán

Valószínűségszámítási alkalmazások:

(Katona, Calgary, doktorija, Szidorenko)

Felvetődik, hogy aaz alkalmazásbeli esetekben nincs sok független pont. Igy kérdés: Lehet-e javítani Turán tételét, ha ezt az extra feltételt is felteszzük.

4.1. Definíció. $\mathbf{RT}(n,k,m) = \max e(G_n)$, *ha* $K_k \not\subseteq G_n$ *és* $\alpha(G_n) < m$.

Kérdés: $\mathbf{RT}(n,k,o(n)) = ?$

- $\mathbf{RT}(n,3,o(n)) = o(n^2)$ Könnyű
- Páratlan $\mathbf{RT}(n,5,o(n)) \approx \frac{n^2}{4}$ (Erdős-T. Sós)

4.1. Theorem (Erdős-T. Sós).

$$\mathbf{RT}(n,2k+1,o(n)) = \left(1-\frac{1}{p}\right)\binom{n}{2} + o(n^2)$$

(Erdős-T. Sós)

4.2. Theorem. $\mathbf{RT}(n,4,o(n)) = \frac{n^2}{8} + o(n^2)$

- Felső becslés: Szemerédi,
- alsó becslés: Bollobás-Erdős (Magas dimenziós geometria, izoperimetrikus tétel

- $\mathbf{RT}(n,2k,o(n)) = \ldots$ Erdős-Hajnal-Sós-Szemerédi

[4] Jel: $\alpha(G) = G$-beli függetlenek maximális száma.

4.1. Multicolor regularity lemma

5. Induced matching

5.1. Brown-Erdős-T. Sós kérdések

$f(n,k,\ell)$ = maximális (r-es) élszám egy r-unifomr hipergráfban, amelyikben bármely k csúcs $< \ell$ r-es hiperélt feszít.

Szorítkozzunk 3-uniformra:

$f(n,6,3)$ a legfontosabb, (? mert arról kiderült, hogy kapcsolatban van $r_3(n)$-nel.

5.2. Hova vezettek?

5.3. Hogyan kapcsolódik az $f(n,6,3)$ az $r_k(n)$-hez?

5.1. Theorem (Ruzsa-Szemerédi).

$$cn \cdot r_3(n) < f(n,6,3) = o(n^2).$$

5.1. Következmény (Roth theorem).

$$r_3(n) = o(n).$$

5.4. Removal Lemma

Egyik legegyszerűbb formája:

5.2. Lemma. *Legyen adott egy L_h mintagráf. Ha egy G_n-ben $o(n^h)$ kópiája van csak, akkor $o(n^2)$ él elhagyásával G_n L_h-mentessé tehető.*

Ez lényegében azon múlik, hogy ha a redukált gráfban van L_h, akkor G_n legalább cn^h drb L_h-t tartalmaz, ha pedig nincs, akkor kevés él elhagyása után már egyáltalán nem fog tartalmazni L_h-t.

This can be generalized to hypergraphs as well.

Mig a Regularitási lemma jó megfogalmazása hipergráfokra sok energiát igényel, a Removal lemma könnyen fogalmazódik meg hipergráfokra.

It implies the Szemerédi $r_k(n) = o(n)$ theorem

5.5. Property testing

Heurisztikusan:

Given a **Monoton Property** $\mathcal{P}$. Decide if

(a) G_n has property $\mathcal{P}$

or

(b) it is far from property $\mathcal{P}$.

Itt pontosabb definicióra van szükség. Idemásolok egy variánst Asaf Sharpira PhD thesis-éből.

5.3. Definíció (Testable). *A graph property $\mathcal{P}$ is testable if there is a randomized algorithm T, that can distinguish with probability $2/3$ between graphs satisfying $\mathcal{P}$ and graphs that are ε-far from satisfying $\mathcal{P}$, while making a number of edge queries which is bounded by some function $q(\varepsilon)$ that is independent of the size of the input.*

A property of n-vertex graphs is simply a family of n-vertex graphs that is closed under isomorphism.

5.4. Example. *Given a family $\mathcal{L}$ of graphs. Decide if G_n contains some $L \in \mathcal{L}$.*

Gyakran feltesszük, hogy az algoritmus, ha $\mathcal{P}$-re igent mond, akkor G valóban $\mathcal{P}$-beli. (One-sided error.)

5.6. Diameter-critical graphs

These are minimal graphs of diameter 2: deleting any edge we get a graph of diameter > 2. C_5 is one of the simplest 2-diameter-critical graphs. $K(a, b)$ (= the complete bipartite graphs with a, b vertices in the two colour classes) is 2-diameter-critical. Independently, Murty and Simon formulated the following conjecture:

5.2. Conjecture. *If G_n is a minimal graph of diameter 2, then $e(G) \le \lfloor n^2/4 \rfloor$. Equality holds if and only if G_n is the complete bipartite graph $K_{\lfloor n/2 \rfloor, \lceil n/2 \rceil}$.*

Füredi used the Regularity Lemma to prove this.

5.3. Theorem (Füredi 1992). *Conjecture 5.2 is true for $n \geq n_0$.*

Here is an interesting point: Füredi did not need the whole strength of the Regularity Lemma, only a consequence of it, the Ruzsa-Szemerédi $(6,3)$-theorem.

5.7. Bollobás-Erdős-Simonovits-Szemerédi

Mikor kell a regularitási lemma valóban?[5]

5.8. The Erdős-Sós conjecture for trees

5.4. Conjecture (Erdős-Sós 1963). *Every graph on n vertices and more than*

$$\frac{1}{2}(k-2)n$$

edges contains, as subgraphs, all trees on k vertices.

5.5. Theorem (Ajtai-Komlós-Sim-Szemerédi). *This holds for $k > k_0$.*

6. Véletlen gráfok extremális részgráfjai

6.1. Theorem (Babai-Sim.-Spencer). *Let $p = 1/2$. If R_n is a p-random graph and F_n is a K_3-free subgraph of R_n containing the maximum possible number of edges, and B_n is a bipartite subgraphs of R_n having maximum possible number of edges, then $e(B_n) = e(F_n)$, almost surely. Moreover, F_n is almost surely bipartite.*

Ez is a RL egy alkalmazása, amelyiknél úgy tűnik, nem kerülhető el RL. A ritka grgráfokra kiterjesztéséhez kellett a Kohayakawa-Rödl ritka regularitási lemma.

[5] An early application where two solutions were given for the same problem, one with Regularity Lemma, the other without RL.

7. Sparse regularity

A Regularity lemma bizonyítása nem működik pl, ha $e(G_n) = o(n^2)$:

Az index nem lesz korlátos, definiálhatjuk másként, de akkor is, az nem lesz igaz, hogy az index-javitó eljárás korlátos sok lépés után elakad.

Kohayakawa-Rödl

Müködik viszont, ha G_n-ben tudjuk, hogy nincsenek olyan részek, amelyek sokkal sűrűbbek az átlagnál.

Ilyenek pl. a véletlen gráfok részgráfjai.

7.1. Quasi-randomness and the Regularity Lemma

Itt volt egy kicsit áttekinthetetlen helyzet: 6-8 ekvivalens állítás. A RL segítségével a helyzet sokkal áttekinthetőbbé vált.

Quasi-random structures have been investigated by several authors, among others, by Thomason, Chung, Graham, Wilson. For graphs, Simonovits and Sós have shown that quasi-randomness can also be characterized by using the Regularity Lemma. Fan Chung generalized their results to hypergraphs.

Let $N^*_G(L)$ and $N_G(L)$ denote the number of induced and not necessarily induced copies of L in G, respectively. Let $S(x, y) = V(G_n) - (N(x)\Delta N(y))$, the set of vertices joined to both x and y in the same way, let $N(x, y) = N(x) \cap N(y)$: the set of common neighbours of x and y. We start with the Chung-Graham-Wilson theorem in which various properties are listed all of which are almost surely true for random graphs and which are very natural properties of random graphs. The theorem asserts that even if we do not assume that a sequence (G_n) is a random graph sequence, the properties listed below are equivalent.

7.1. Theorem (Chung-Graham-Wilson). *For any graph sequence (G_n) the following properties are equivalent:*

$\mathcal{P}_1(\nu)$: *for fixed ν, for all graphs H_ν*

$$N^*_G(H_\nu) = (1 + o(1))n^\nu 2^{-\binom{\nu}{2}}.$$

$\mathcal{P}_2(t)$: *Let C_t denote the cycle of length t. Let $t \geq 4$ be even.*

$$e(G_n) \geq \frac{1}{4}n^2 + o(n^2) \qquad \text{and} \qquad N_G(C_t) \leq \left(\frac{n}{2}\right)^t + o(n^t).$$

$\mathcal{P}_3$: $\quad e(G_n) \geq \frac{1}{4}n^2 + o(n^2), \qquad \lambda_1(G_n) = \frac{1}{2}n + o(n)$ and $\lambda_2(G_n) = o(n)$, *where $\lambda_i(G)$ is the i-th eigenvalue of the (adjacency matrix of the) graph G (listed in decreasing order of modulus).*

$\mathcal{P}_4$: *For each subset $X \subset V$,*

$$e(X) = \frac{1}{4}|X|^2 + o(n^2).$$

$\mathcal{P}_5$: *For each subset $X \subset V$, $|X| = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ we have* $e(X) = \left(\frac{1}{16}n^2 + o(n^2)\right)$.

$\mathcal{P}_6$: $\sum_{x,y\in V} \big||S(x,y)| - \frac{n}{2}\big| = o(n^3)$.

$\mathcal{P}_7$: $\sum_{x,y\in V} \big||N(x,y)| - \frac{n}{4}\big| = o(n^3)$.

Obviously, $\mathcal{P}_1(\nu)$ says that the graph G_n contains each subgraph with the same frequency as a random graph. In $\mathcal{P}_2(t)$ we restrict ourselves to not necessarily induced even cycles. The difference between the role of the odd and even cycles is explained in [**?**]. The eigenvalue property is also very natural, knowing the connection between the structural properties of graphs and their eigenvalues. The other properties are self-explanatory.

Simonovits and Sós formulated a graph property which also proved to be a quasi-random property.

$\mathcal{P}_S$: For every $\varepsilon > 0$ and κ there exist two integers, $k(\varepsilon,\kappa)$ and $n_0(\varepsilon,\kappa)$ such that for $n \geq n_0$, G_n has a Szemerédi-partition with parameters ε and κ and k classes $U_1,\dots,U_k$, with $\kappa \leq k \leq k(\varepsilon,\kappa)$, so that

$$(U_i,U_j) \text{ is } \varepsilon-\text{regular, and} \qquad \left|d(U_i,U_j) - \frac{1}{2}\right| < \varepsilon$$

holds for all but at most εk^2 pairs (i,j), $1 \leq i,j \leq k$.

It is easy to see that if (G_n) is a random graph sequence of probability $1/2$, then $\mathcal{P}_S$ holds for (G_n), almost surely. Simonovits and Sós proved that $\mathcal{P}_S$ is a quasi-random property, i.e. $\mathcal{P}_S \iff \mathcal{P}_i$ for $1 \leq i \leq 7$. In fact, they proved some stronger results, but we skip the details.

F.R.K. Chung generalized these results to hypergraphs.

8. Algoritmizálhatóság?

Ha kapunk egy regularis particiót, nem tudjuk ellenőrizni, de ha kapunk egy gráfot, le tudunk gyártani egy ε-regularis particiót.

Based on Alon, Duke, Lefmann, Rödl, Yuster

8.1. Lemma (Co-NPC, ADLRY). *The computational difficulty of finding a regular partition, i.e., deciding if a given partition of G_n is ε-regular, is* $\mathbf{CO\text{-}NP}$.

This means that if a $(U_1, \dots, U_r)$ is ε-regular, that can be proven, if it is not, then that cannot be proven.

The authors note that the problem remains CO-NP even for $\varepsilon = \frac{1}{2}$.

8.2. Lemma (Two classes, Co-NPC, ADLRY). *The computational difficulty of deciding if $G[A, B]$ is ε-regular, is* $\mathbf{CO\text{-}NP}$.

Miért jó ez?

8.1. Theorem (Constructive Regularity Lemma). *For every $\varepsilon > 0$ and every positive integer t, there exists an integer $Q = Q(\varepsilon, T)$ such that for every G_n*

(a) an ε-regular partition $(U_1, \dots, U_k)$ can be found in $O(M(n))$ sequential time, where $M(n)$ is the time for multiplying tw $n \times n$ 0-1 matrices.

(b) It can also be found in time $O(\log n)$ on an EREW PRAM[6] with polynomial number of parallel processors.

Not for practical reasons: the bounds are horrible.

8.0.1. Example: Topological subgraphs

8.2. Proposition. *For any positive $\delta > 0$ there is a positive $c = c(\delta)$ such that for every $m$and for every graph H with m edges, every G_n with $e(G_n) > \delta n^2$ (and $n > cm$) contains a topological copy of H with path-lengths 4. This can be found in poly time and is in NC.*

8.0.2. Example: Approximating the chromatic number.

9. Analítikus technikák

Analítikus technikának mondom, ha Fourier jellegü technikákat használnak.

Néhol a kombinatorikus hozzáállás jutott messzebbre, néhol az analítikus, néhol kombinálták őket.

[6]Exclusive read, exclusive write, i.e. the strongest version.

10. Irány a folytonosítás

Fürstenberg

Fürstenberg-Katznelson

Ez az ergodikus technika: Érződik, hogy a kérdésnek van köze a "Mixing-hez".

Borgs-Chayes-Lovász-Sós-Vesztergombi

Lovász-Szegedy, Elek-Szegedy

Definiálható gréfsorozatokra, hogy azok eleget tesznek-e a Cauchy konvergencia kritériumnak, és a cél, hogy ezekre limit objektumokat definiáljunk.

Ez a tér teljessé tételének felel meg: megkeresni azokat az objektunokat, amelyek a racionális számok esetében a valósaknak felelnek meg.

1. Limit objektumok: Gráfok esetén (mérhető) függvények az egységnégyzeten.
2. Regularitási lemma és kompaktság (Lovász-Szegedy)
3. Regularitási lemma és covering (Lovász-Szegedy)
4. mi a különbség a ritka és sürű gráfoknál.

Hivatkozások

[1] N. Alon, R. Duke, H. Leffman, V. Rödl and R. Yuster, Algorithmic aspects of the regularity lemma, FOCS 33 (1993), 479-481, Journal of Algorithms 16 (1994), 80-109. Alon's homepage: `www.math.tau.ac.il/~nogaa`

[2] N. Alon and A. Shapira: A Characterization of the (natural) Graph Properties Testable with One-Sided Error, Proc. FOCS 2005, to appear. `http://www.math.tau.ac.il/~asafico/heredit.pdf`

[3] Komlós, J.; Simonovits, M. Szemerédi's regularity lemma and its applications in graph theory. Combinatorics, Paul Erdös is eighty, Vol. 2 (Keszthely, 1993), 295–352, Bolyai Soc. Math. Stud., 2, János Bolyai Math. Soc., Budapest, 1996.
- Simonovits' homepage: www.math-inst.hu/~miki/Irodalom.html

[4] Komlós, János; Shokoufandeh, Ali; Simonovits, Miklós; Szemerédi, Endre The regularity lemma and its applications in graph theory. Theoretical aspects of computer science (Tehran, 2000), 84–112, Lecture Notes in Comput. Sci., 2292, Springer, Berlin, 2002. Simonovits' homepage: `www.math-inst.hu/~miki/komsimshoszem.pdf`

[5] L. Lovász and B. Szegedy: Graph limits and testing hereditary graph properties, Lovász homepage: `http://www.cs.elte.hu/~lovasz/`

[6] L. Lovász and B. Szegedy: Limits of dense graph sequences (MSR Tech Report No. TR-2004-79).
`ftp://ftp.research.microsoft.com/pub/tr/TR-2004-79.pdf`
`http://www.cs.elte.hu/~lovasz/`

[7] L. Lovász and B. Szegedy: Szemerédi's Lemma for the Analyst, `ftp://ftp.research.microsoft.com/pub/tr/TR-2005-09.pdf`

[8] I. Z. Ruzsa, E. Szemerédi, Triple systems with no six points carrying three triangles, Combinatorics (Keszthely, 1976), 18 (1978), Vol. II., 939-945. North-Holland, Amsterdam-New York.

[9] M. Simonovits, Vera T. Sós, Szemerédi's partition and quasirandomness, Random Structures and Algorithms 2 (1991), 1-10.

[10] E. Szemerédi, On graphs containing no complete subgraphs with 4 vertices (in Hungarian), Mat. Lapok 23 (1972), 111-116.

[11] E. Szemerédi, Regular partitions of graphs, Colloq. Internat. C.N.R.S. № 260 - Problèmes Combinatoires et Théorie des Graphes, Orsay (1976), 399-401.

NÉHÁNY HOMEPAGE

[12] Alon's homepage: `www.math.tau.ac.il/~nogaa`

[13] Lovász régi homepage: `http://www.research.microsoft.com/~lovasz/`

[14] Lovász új homepage: `http://www.cs.elte.hu/~lovasz/`

[15] Simonovits' homepage: `http://www.math-inst.hu/~miki/download.html`